



FAKULTET ELEKTROTEHNIKE
STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING,
MECHANICAL ENGINEERING
AND NAVAL ARCHITECTURE

Rudjera Boškovića bb, Split



LABORATORIJ ZA BIOMEHANIKU
AUTOMATIKU I SUSTAVE

LABORATORY FOR BIOMECHANICS
AND AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

Tamara Šupuk

FREKVENCIJSKA ANALIZA: BODE-ovi DIJAGRAMI

VJEŽBA 7.

UVOD

Neka je sustav opisan prijenosnom funkcijom $W(s)$ (vidjeti uvod u vježbi 6).

$$W(s) |_{s=j\omega} = W(j\omega) = M(\omega) e^{j\phi(\omega)};$$

pri čemu su $M(\omega)$ i $\phi(\omega)$ amplituda i faza prijenosne funkcije $W(j\omega)$.

Bode-ovi dijagrami prikazuju ovisnost amplitude prijenosne funkcije M (u decibelima) i faze ϕ (u stupnjevima) o frekvenciji ω , crtano u semilogaritamskom mjerilu.

Graf ovisnosti amplitude M o frekvenciji naziva se amplitudna frekvencijska karakteristika.

Graf ovisnosti faze ϕ o frekvenciji naziva se fazna frekvencijska karakteristika.

Bode-ove dijagrame obično crtamo za prijenosne funkcije otvorene petlje $W_o(s)$.

MATLAB NAREDBE

Neka je prijenosna funkcija otvorene petlje zadana u obliku razlomka: $W_o(s) = \frac{\text{br}}{\text{naz}}$

Za računanje tj. crtanje frekvencijskih odziva koriste se slijedeće naredbe:

```
>>bode(br,naz) % crta amplitudni i fazni bodeov dijagram pri čemu se frekvencijski
                % opseg odnosno broj točaka automatski određuju.

>>bode(br,naz,{w_min,w_max}) % crta bodeove dijagrame za frekvencije između w_min i w_max

>>bode(br,naz,w) % crta bodeove dijagrame za frekvencije zadane vektorom
                % w (frekvencijski vektor najčešće prethodno zadajemo
                % naredbom logspace()):

>>w=logspace(d1,d2) % generira redni vektor od 50 logaritamski međusobno
                    % udaljenih točaka, smještenih između dekada 10d1 i 10d2
```

ZADATAK 1.

Nacrtati amplitudni i fazni Bodeov dijagram za sustav sa zadanom prijenosnom funkcijom

otvorene petlje: $W_o(s) = \frac{20}{s(s+2)(s+5)}$

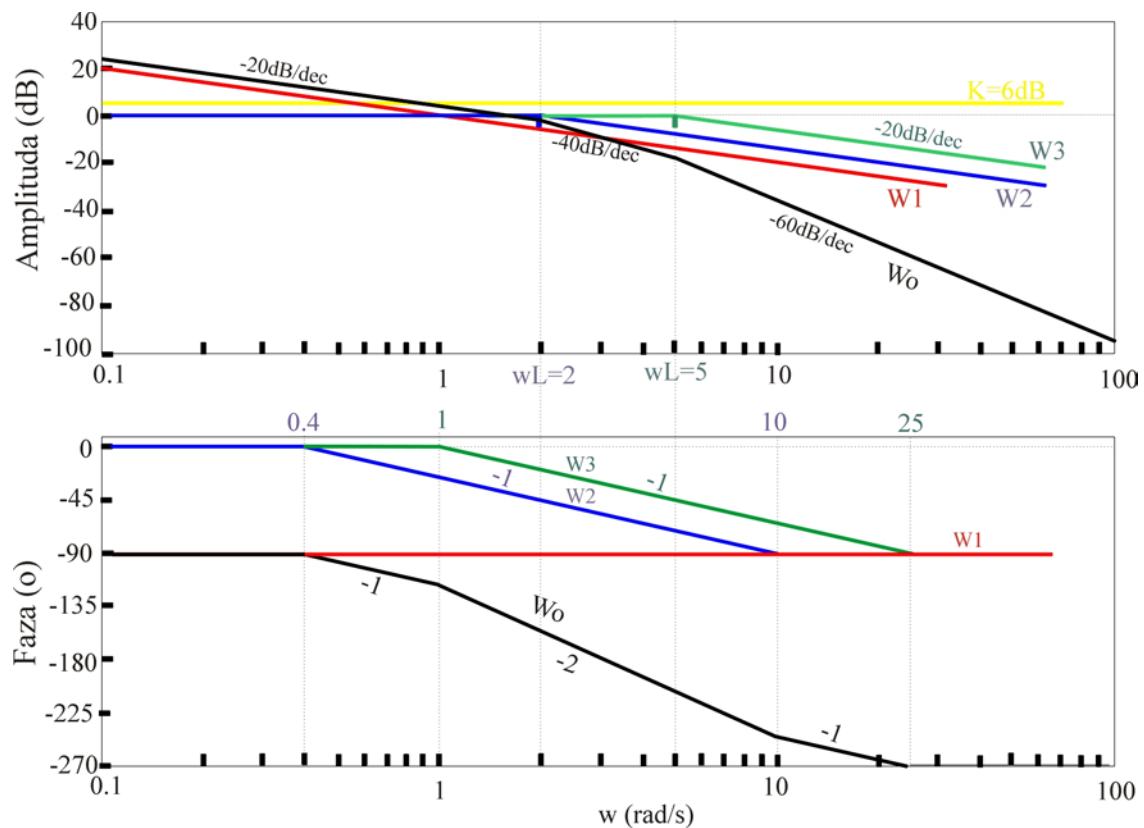
- a) ručno nacrtati asimptotske dijagrame
- b) nacrtati dijagrame pomoću Matlab-a

Rješenje pod a):

$$W_o(s) = \frac{20}{2 \cdot 5 \cdot s(0.5s+1)(0.2s+1)} = \frac{2}{s(0.5s+1)(0.2s+1)} = 2 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{0.5s+1} \cdot \frac{1}{0.2s+1}$$

$K=2$	$20\log K =6\text{dB}$	$\phi=0^\circ$ (konst)
$W_1=1/s$	$w_p=1\text{rad/s}$ nagib: -20dB/dek ;	$\phi=-90^\circ$ (konst)
$W_2=1/(0.5s+1)$	$T=0.5$; $w_L=1/T=2$, $w_L/5=0.4$, $w_L \cdot 5=10$, nagib: -20dB/dek ;	$\phi=-45^\circ$ $\phi=0^\circ$ $\phi=-90^\circ$ nagib: -1
$W_3=1/(0.2s+1)$	$T=0.2$; $w_L=1/T=5$, $w_L/5=1$, $w_L \cdot 5=25$, nagib: -20dB/dek ;	$\phi=-45^\circ$ $\phi=0^\circ$ $\phi=-90^\circ$ nagib: -1

Slika 1. prikazuje Bode-ov. dijagrame nacrtane na temelju podataka iz tablice. Rezultantni dijagram, W_o prikazan je crnom bojom.



Sl. 1.

Rješenje pod b):

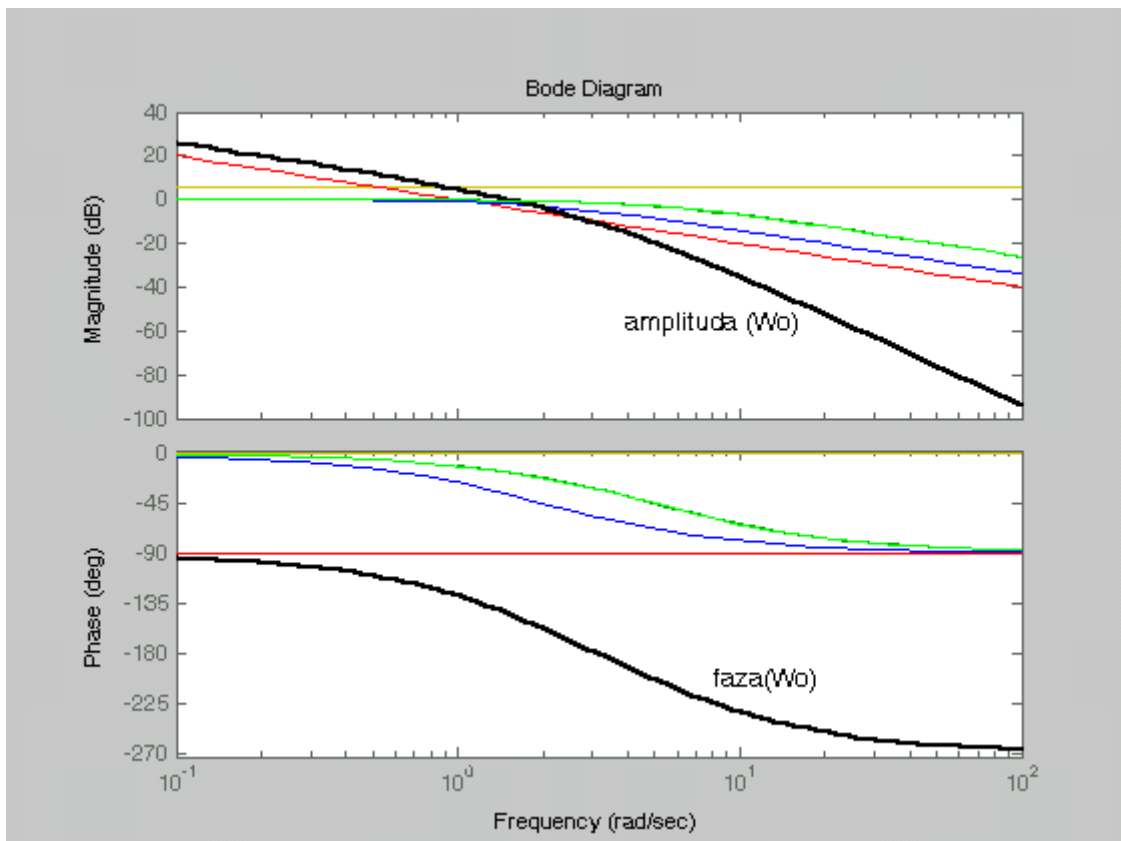
Na istom grafu ćemo nacrtati Bodeove dijagrame za sve elementarne funkcije, te potom za ukupnu funkciju W_o . Naredbe za crtanje Bodeovog dijagrama pohranili smo u m-datoteku *zad_1.m*:

```
br_K=[2]; naz_K=[1]           % definiranje elementarne funkcije K
br_W1=[1]; naz_W1=[1 0];      % definiranje elementarne funkcije W1
br_W2=[1]; naz_W2=[0.5 1];    % definiranje elementarne funkcije W2
br_W3=[1]; naz_W3=[0.2 1];    % definiranje elementarne funkcije W3

br_Wo=[20]; naz_Wo=conv([1 2 0],[1 5]) % definiranje prijenosne funkcije
                                         % otvorene petlje Wo

% crtanje Bode-ovog dijagrama:
bode(br_K,naz_K,'y'); hold on % graf žute boje
bode(br_W1,naz_W1,'r');       % graf crvene boje
bode(br_W2,naz_W2,'b');       % graf plave boje
bode(br_W3,naz_W3,'g');       % graf zelene boje
bode(br_Wo,naz_Wo,'k');       % graf crne boje
```

Kao rezultat izvršenog programa *zad_1.m* dobiveni su amplitudni i fazni Bode-ovi dijagrami:



Sl. 2.

ZADATAK 2.

Nacrtati amplitudnu i faznu frekvencijsku karakteristiku sustava opisanog prijenosnom

funkcijom: $W(s) = \frac{s+2}{s(s+5)^2}$

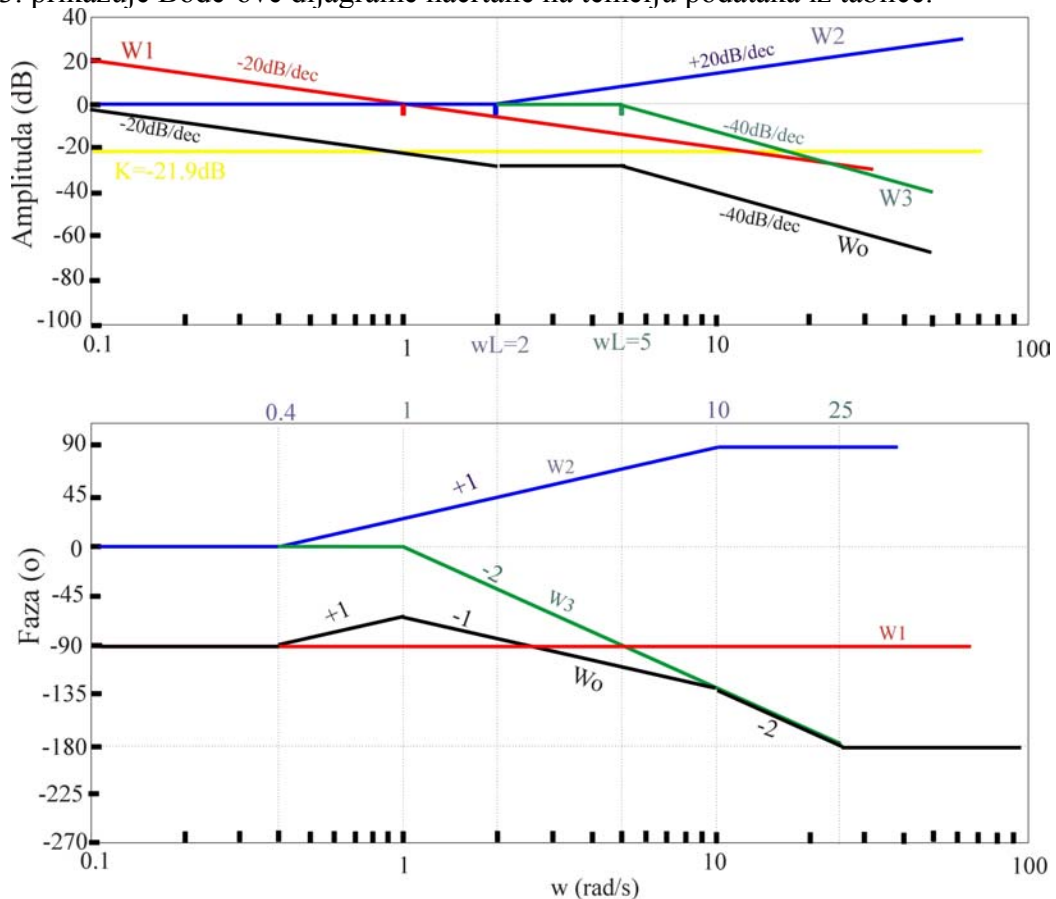
- ručno nacrtati asimptotske dijagrame
- nacrtati dijagrame pomoću Matlab-a

Rješenje pod a):

$$W(s) = \frac{s+2}{s(s+5)^2} = \frac{2}{25} * \frac{1}{s} * (0.5s+1) * \frac{1}{(0.2s+1)^2}$$

$K=2/25$	$20\log K = -21.9\text{dB}$	$\phi=0^\circ$ (konst)
$W_1=1/s$	$w_p=1\text{rad/s}$ nagib: -20dB/dek ;	$\phi=-90^\circ$ (konst)
$W_2=(0.5s+1)$	$T=0.5$; $w_L=1/T=2$, $w_L/5=0.4$, $w_L*5=10$, nagib: $+20\text{dB/dek}$;	$\phi=45^\circ$ $\phi=0^\circ$ $\phi=90^\circ$ nagib: 1
$W_3=1/(0.2s+1)^2$	$T=0.2$; $w_L=1/T=5$, $w_L/5=1$, $w_L*5=25$, nagib: -40dB/dek ;	$\phi=-90^\circ$ $\phi=0^\circ$ $\phi=-180^\circ$ nagib: -2

Slika 3. prikazuje Bode-ove dijagrame nacrtane na temelju podataka iz tablice:



Sl.3.

Rješenje pod b):

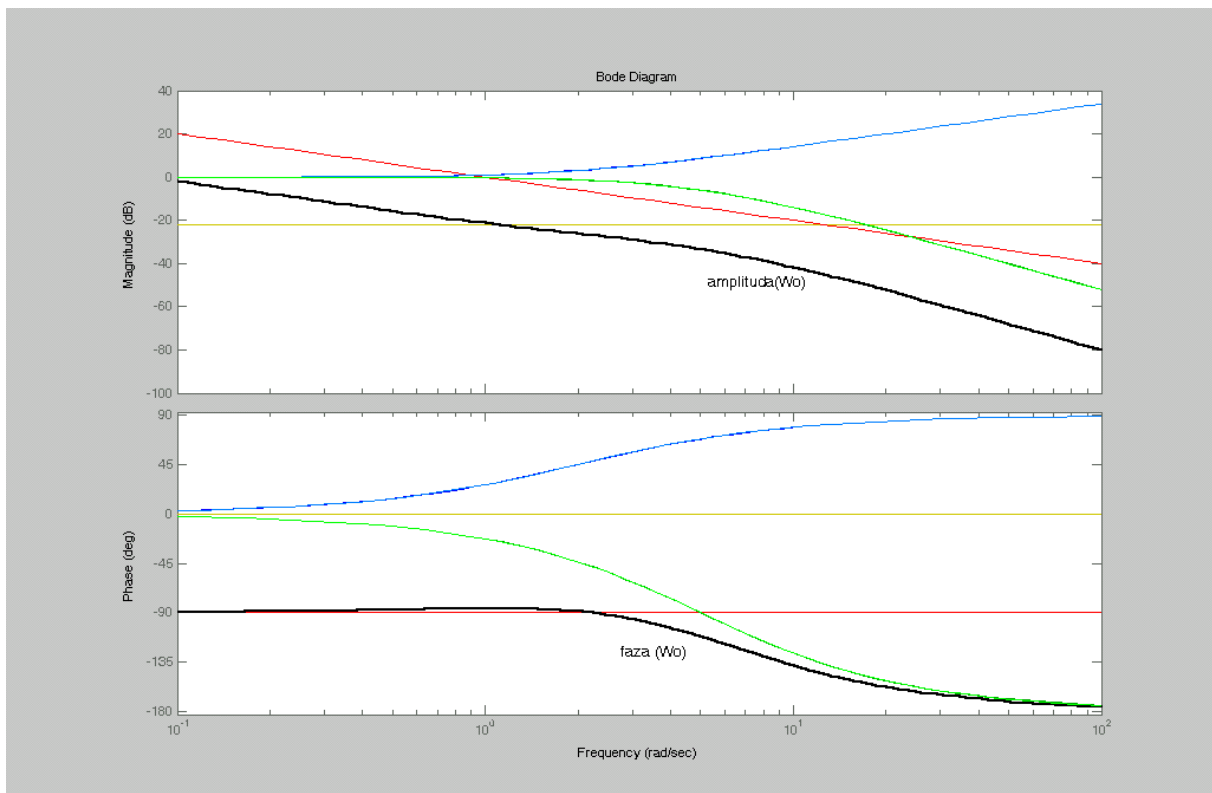
```

br_K=[2]; naz_K=[25]
br_W1=[1]; naz_W1=[1 0];
br_W2=[0.5 1]; naz_W2=[1];
br_W3=[1]; naz_W3=conv([0.2 1],[0.2 1]);

br_Wo=[1 2]; naz_Wo=conv([1 0],conv([1 5],[1 5])) % definiranje pr. f. otvorene petlje Wo

% crtanje Bode-ovih dijagrama:
bode(br_K,naz_K,'y'); hold on % graf žute boje
bode(br_W1,naz_W1,'r'); % graf crvene boje
bode(br_W2,naz_W2,'b'); % graf plave boje
bode(br_W3,naz_W3,'g'); % graf zelene boje
bode(br_Wo,naz_Wo,'k'); % graf crne boje
    
```

Rezultat:



Sl. 4.

ZADATAK 3.

Nacrtati amplitudnu i faznu frekvencijsku karakteristiku sustava s zadanom prijenosnom funkcijom otvorene petlje:

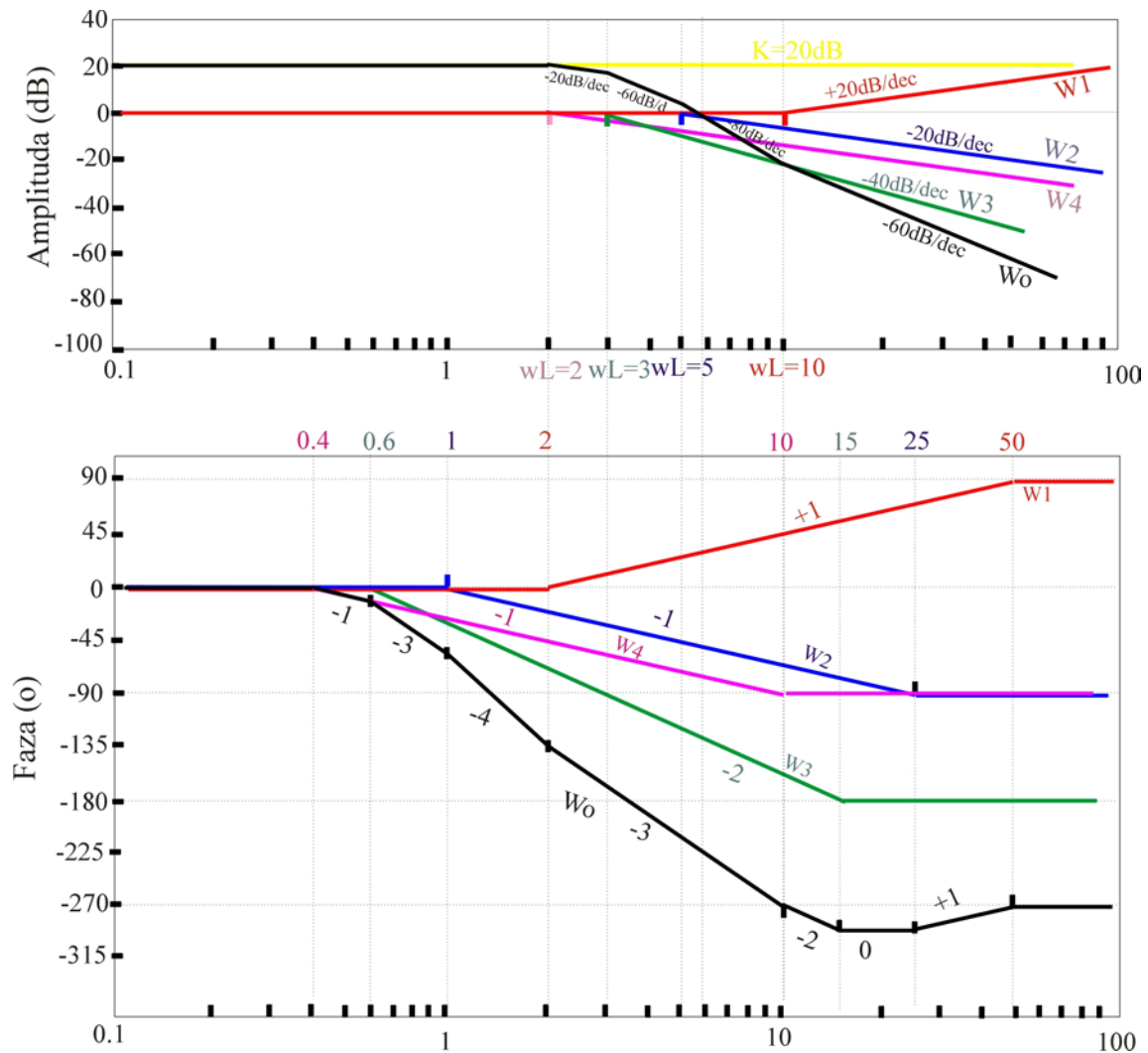
$$W_o(s) = \frac{10(0.1s + 1)}{(0.2s + 1)(0.33s + 1)^2(0.5s + 1)}$$

- ručno nacrtati asimptotske dijagrame
- nacrtati dijagrame pomoću Matlab-a

Rješenje pod a):

$$W_o(s) = \frac{10(0.1s + 1)}{(0.2s + 1)(0.33s + 1)^2(0.5s + 1)} = 10 * (0.1s + 1) * \frac{1}{0.2s + 1} * \frac{1}{(0.33s + 1)^2} * \frac{1}{0.5s + 1}$$

K=10	$20\log K = 20\text{dB}$	$\phi = 0^\circ$ (konst)
$W_1 = 0.1s + 1$	T=0.1; $w_L = 1/T = 10$, $w_L/5 = 2$, $w_L * 5 = 50$, nagib: +20dB/dek;	$\phi = 45^\circ$ $\phi = 0^\circ$ $\phi = 90^\circ$ nagib: 1
$W_2 = 1/(0.2s + 1)$	T=0.2; $w_L = 1/T = 5$, $w_L/5 = 1$, $w_L * 5 = 25$, nagib: -20dB/dek;	$\phi = -45^\circ$ $\phi = 0^\circ$ $\phi = -90^\circ$ nagib: -1
$W_3 = 1/(0.33s + 1)^2$	T=0.33; $w_L = 1/T = 3$, $w_L/5 = 0.6$, $w_L * 5 = 15$, nagib: -40dB/dek;	$\phi = -90^\circ$ $\phi = 0^\circ$ $\phi = -180^\circ$ nagib: -2
$W_4 = 1/(0.5s + 1)$	T=0.5; $w_L = 1/T = 2$, $w_L/5 = 0.4$, $w_L * 5 = 10$, nagib: -20dB/dek;	$\phi = -45^\circ$ $\phi = 0^\circ$ $\phi = -90^\circ$ nagib: -1



Sl. 5.

Rješenje pod b):

```
br_K=[10]; naz_K=[1]
br_W1=[0.1 1]; naz_W1=[1];
br_W2=[1]; naz_W2=[0.2 1];
br_W3=[1]; naz_W3=conv([0.33 1],[0.33 1]);
br_W4=[1]; naz_W4=[0.5 1];
```

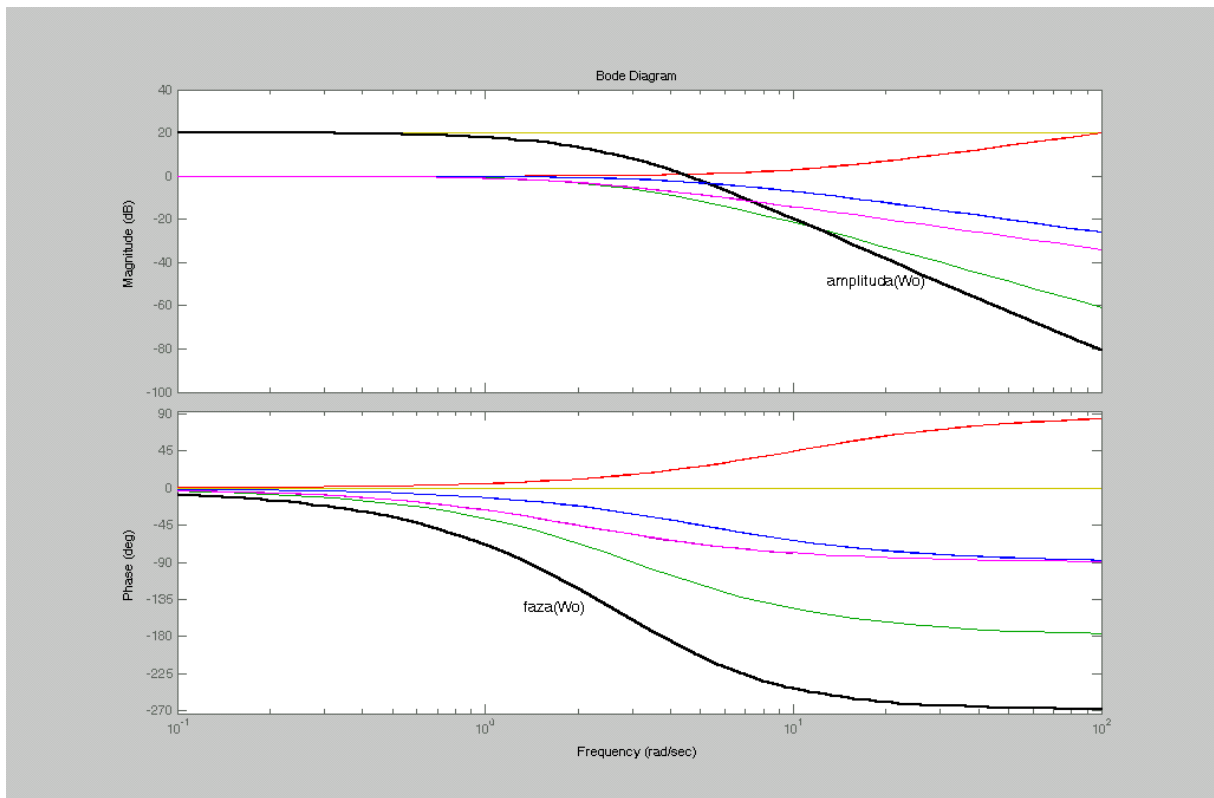
```
br_Wo=[1 10]; % definiranje pr. f. otvorene petlje Wo
naz_Wo=conv(naz_W2,conv(naz_W3,naz_W4))
```

% crtanje Bode-ovih dijagrama:

```
bode(br_K,naz_K,'y'); hold on
bode(br_W1,naz_W1,'r');
bode(br_W2,naz_W2,'b');
bode(br_W3,naz_W3,'g');
bode(br_W4,naz_W4,'m');
bode(br_Wo,naz_Wo,'k');
```

```
% graf žute boje
% graf crvene boje
% graf plave boje
% graf zelene boje
% graf ljubicaste boje (magenta)
% graf crne boje
```


Rezultat:



Sl.6

UTVRĐIVANJE STABILNOSTI SUSTAVA PO BODE-ovom KRITERIJU

Stabilnost sustava sa zatvorenom povratnom vezom, opisanog prijenosnom funkcijom $W(s)$, određuje se na temelju amplitudne i fazne Bodeove karakteristike nacrtane za prijenosnu funkciju otvorene petlje, $W_o(s)$.

Određivanje ω_I , ω_{II} , AP i FP na temelju Bodeovih dijagrama:

- **Frekvencija kritične amplitude, ω_I :** frekvencija pri kojoj amplitudni Bodeov dijagram prijenosne funkcije otvorene petlje siječe frekvencijsku os.
Za ω_I će vrijediti: $|W_o(j\omega_I)|=1$ (tj. 0dB)
- **Frekvencija kritične faze, ω_{II} :** frekvencija pri kojoj fazni Bodeov dijagram prijenosne funkcije otvorene petlje siječe pravac od -180° .
Za ω_{II} će vrijediti: $\text{Im}(W_o(j\omega_{II}))=0$
- **Amplitudna pričuva, AP(dB):**
Može se odrediti na temelju Bodeovog amplitudnog dijagrama prijenosne funkcije otvorene petlje. AP se određuje kao udaljenost od amplitudnog dijagrama do frekvencijske osi, pri frekvenciji kritične faze.
- **Fazna pričuva, FP($^\circ$):**
Može se odrediti na temelju Bodeovog faznog dijagrama prijenosne funkcije otvorene petlje. FP se određuje kao udaljenost od pravca -180° do faznog dijagrama, pri frekvenciji kritične amplitude.

Pravilo za utvrđivanje stabilnosti sustava po Bode-ovom kriteriju:

Sustav sa zatvorenom povratnom vezom opisan prijenosnom funkcijom $W(s)$ biti će stabilan ako amplitudni Bodeov dijagram prijenosne funkcije otvorene petlje $W_o(s)$ siječe frekvencijsku os prije nego fazni Bodeov dijagram siječe pravac -180° (tj. ako je $\omega_I < \omega_{II}$). U tom slučaju AP i FP imat će pozitivne vrijednosti.

MATLAB NAREDBE

Za računanje vrijednosti ω_I , ω_{II} te AP i FP koristi se slijedeća Matlabova naredba:

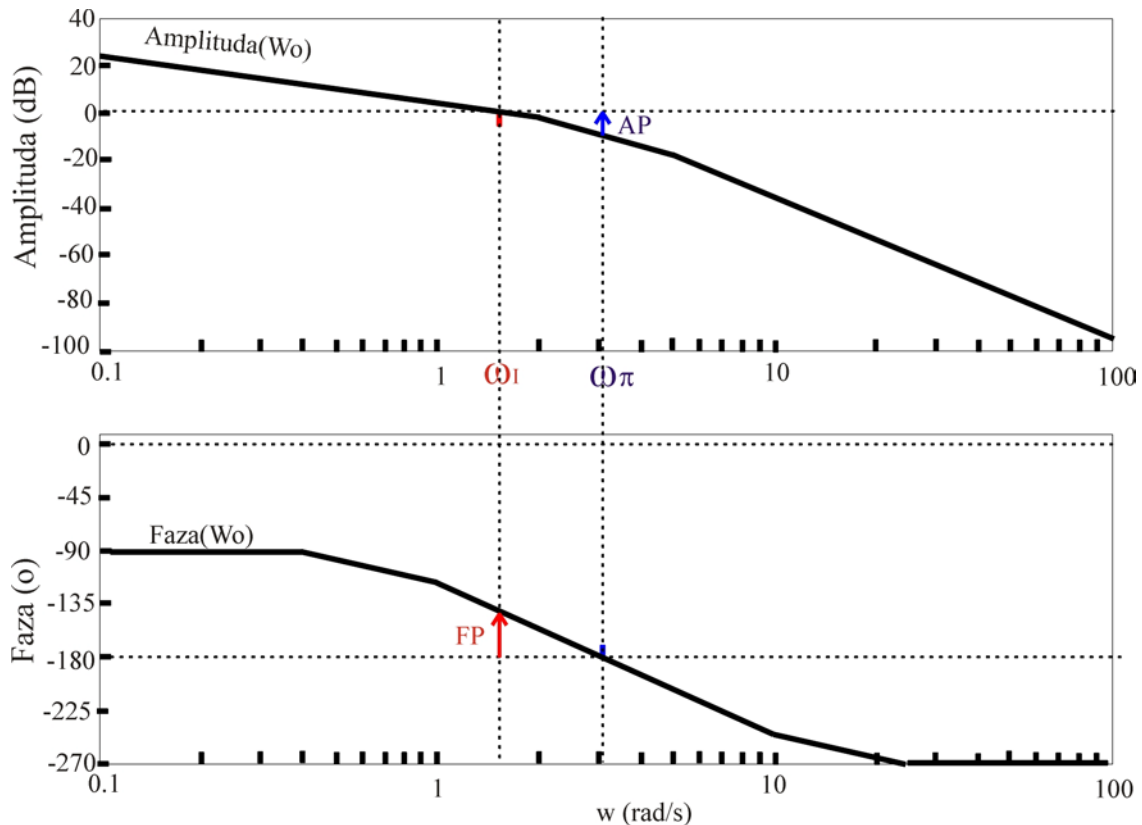
```
>> [AP, FP, w_pi, w_I]=margin(br, naz) % gdje su:  
                                     % br i naz: brojnik i nazivnik pr. f-je otv. petlje  
                                     % AP: amplitudna pričuva, nije prikazana u dB  
                                     % w_pi: frekvencija kritične faze  
                                     % w_I: frekvencija kritične amplitude  
  
>> margin(br, naz) % naredba crta Bode-ove dijagrame i na grafu označava AP i FP.
```

ZADATAK 4.

Na temelju Bodeovih dijagrama odrediti ω_I , ω_{II} , AP i FP te zaključiti da li je regulacijski sustav stabilan. Prijenosna funkcija otvorene petlje uzeta je iz zadatka 1:

$$W_o(s) = \frac{20}{s(s+2)(s+5)}$$

Slika 7. prikazuje amplitudni i fazni Bode-ov dijagram te ucrtane ω_I , ω_{II} i AP, FP.



Sl.7.

Iz grafa možemo približno očitati željene vrijednosti:

$$\omega_I \approx 1.5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{II} \approx 3 \text{ rad/s}$$

Amplitudnu pričuvu određujemo tako da nacrtamo vektor usmjeren od amplitudnog grafa do frekvencijske osi, pri ω_{II} . Ako je vektor usmjeren 'prema gore', AP ima pozitivan predznak. Dakle, biti će: $AP \approx 10 \text{ dB}$

Faznu pričuvu određujemo tako da nacrtamo vektor usmjeren od pravca -180° do faznog grafa, pri ω_I . Ako je vektor usmjeren 'prema gore', FP ima pozitivan predznak. Dakle, biti će: $FP \approx 40^\circ$

Budući da je $\omega_I < \omega_{II}$, radi se o stabilnom sustavu.

Dok smo sa slike 7. tek približno mogli očitati željene parametre, Matlab će nam precizno izračunati njihove vrijednosti:

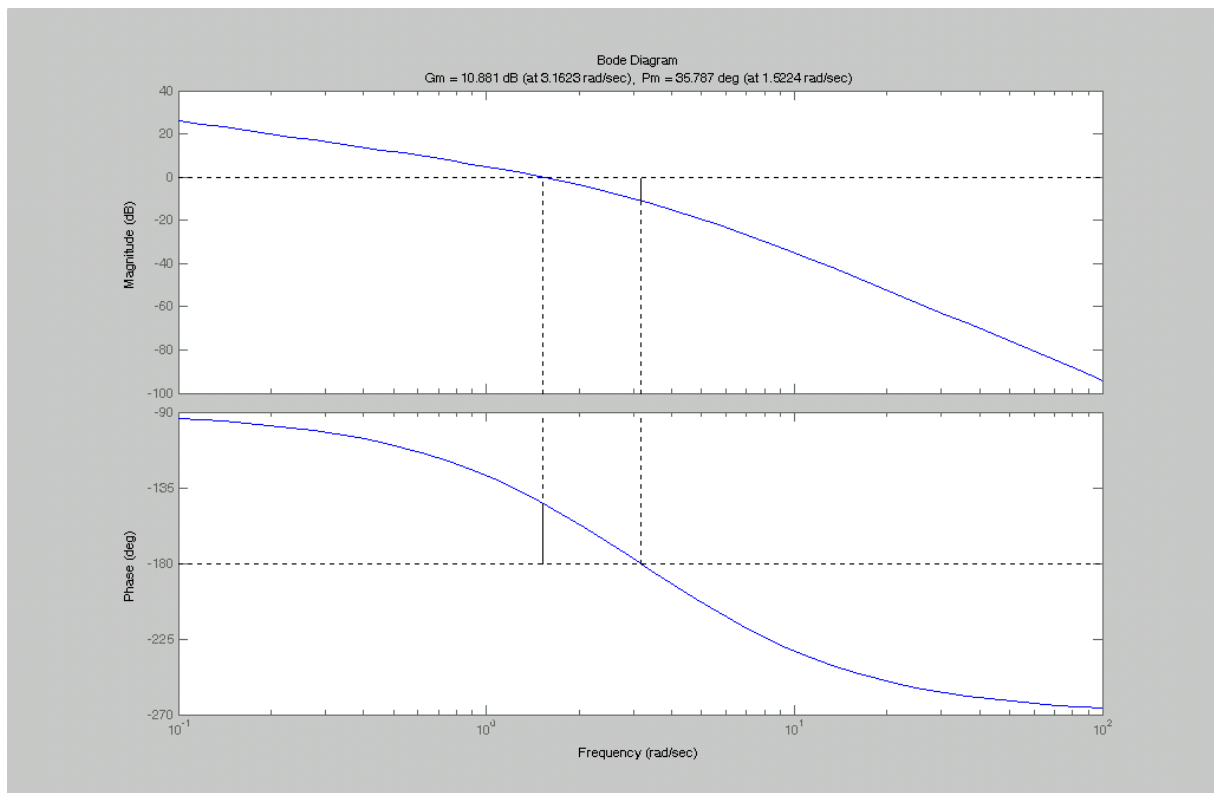
```

>> [AP, FP, w_pi, w_I]=margin([20],[1 7 10 0])
AP =          % AP nije prikazana u decibelima

    3.5000
FP =
    35.7873
w_pi =
    3.1623
w_I =
    1.5224
>> AP_dB=20*log10(AP)    % pretvaranje AP u decibele
AP_dB =
    10.8814

>> margin([20],[1 7 10 0]) % naredba za crtanje Bode-ovih dijagrama i odredivanje
    % AP i FP
    % Rezultat je prikazan na slici 8. Obratiti pozornost na naslov
    % slike: AP je označena s Gm, a FP s Pm

```



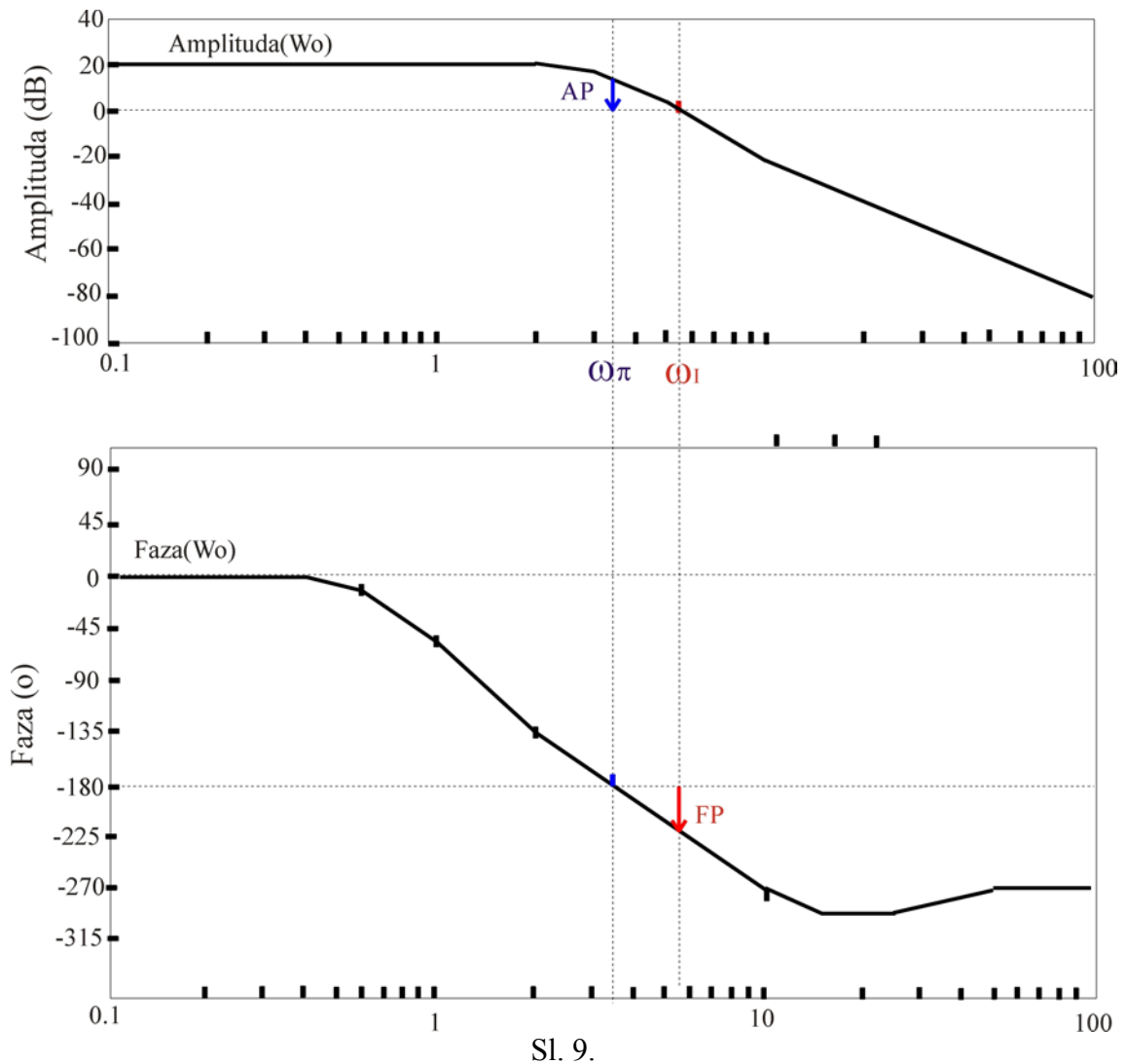
Sl. 8.

ZADATAK 5.

Na temelju Bodeovih dijagrama odrediti ω_I , ω_{Π} , AP i FP te zaključiti da li je regulacijski sustav stabilan. Prijenosna funkcija otvorene petlje uzeta je iz zadatka 3:

$$W_o(s) = \frac{10(0.1s + 1)}{(0.2s + 1)(0.33s + 1)^2(0.5s + 1)}$$

Slika 9. prikazuje amplitudni i fazni Bode-ov dijagram te ucrtane ω_I , ω_{Π} i AP, FP.



Iz grafa možemo približno očitati željene vrijednosti:

$$\omega_I \approx 5.5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{\Pi} \approx 3.5 \text{ rad/s}$$

$$AP \approx -10 \text{ dB} \quad (\text{predznak } - \text{ jer je vektor usmjeren 'prema dole'})$$

$$FP \approx -40^\circ \quad (\text{predznak } - \text{ jer je vektor usmjeren 'prema dole'})$$

Budući da je $\omega_I > \omega_{\Pi}$, sustav je nestabilan.

Točne vrijednosti odredit ćemo pomoću Matlaba:

```

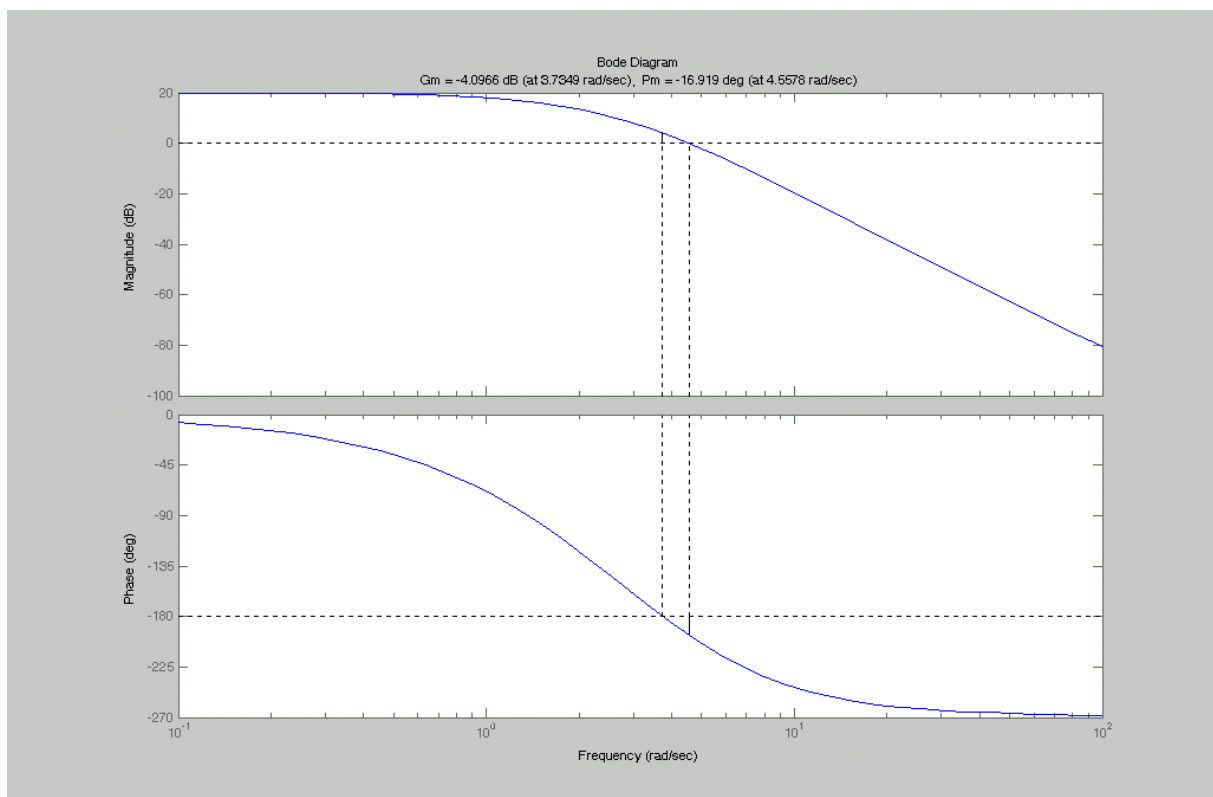
>> naz_W2=[0.2 1];
>> naz_W3=conv([0.33 1],[0.33 1]);
>> naz_W4=[0.5 1];

>> br_Wo=[1 10]; % definiranje prijenosne funkcije otvorene petlje, Wo
>> naz_Wo=conv(naz_W2,conv(naz_W3,naz_W4))

>> [AP, FP, w_pi, w_I]=margin(br_Wo,naz_Wo)
AP =
    0.6240
FP =
   -16.9192
w_pi =
    3.7349
w_I =
    4.5578
>> AP_dB=20*log10(AP) % pretvaranje AP u decibele
AP_dB =
   -4.0966
>> margin(br_Wo, naz_Wo) % grafovi su prikazani na slici 10.

```

Napomena: Razlika između približnih vrijednosti očitanih sa asimptotskih grafova i stvarno izračunatih vrijednosti (npr. u Matlabu) mogu biti zamjetne, upravo stoga što su asimptotski grafovi tek aproksimacija stvarnih krivulja.



Sl. 10.

ZADACI NA VJEŽBI:

1	<p>Nacrtati amplitudni i fazni Bodeov dijagram (ručno i u Matlabu). Odrediti ω_I, ω_{II}, AP i FP te zaključiti da li je regulacijski sustav stabilan. Prijenosna funkcija otvorene petlje je:</p> $W_o(s) = \frac{s + 5}{s(s + 10)^2(s + 100)}$
2	<p>Prijenosna funkcija zatvorene petlje sustava s negativnom jediničnom povratnom vezom je:</p> $W(s) = \frac{1}{s^3 + 1.5s^2 + 0.5s + 1}$ <p>Nacrtati amplitudni i fazni Bodeov dijagram (ručno i u Matlabu). Odrediti ω_I, ω_{II}, AP i FP te zaključiti o stabilnosti sustava.</p> <p><i>Napomena:</i> Prvo treba dobiti prijenosnu funkciju otvorene petlje (W_o) i na temelju nje crtati Bode-ove dijagrame.</p>
3	<p>Nacrtati amplitudni i fazni Bodeov dijagram (ručno i u Matlabu). Odrediti ω_I, ω_{II}, AP i FP te zaključiti da li je regulacijski sustav stabilan. Prijenosna funkcija otvorene petlje je:</p> $W_o(s) = \frac{50}{s(s + 200)}$ <p>Uočiti da će AP imati beskonačnu vrijednost! (Također, može se desiti da i FP ima beskonačnu vrijednost).</p>