8.1. DEFINIRANJE POJMOVA

Kod usmjerenog grafa, svaka veza povećava ulazni stupanj nekog čvora za jedan, te također izlazni stupanj tog istog ili nekog drugog čvora za jedan. Dakle, za usmjereni graf G=(V, E) vrijedi

$$\sum_{v\in V} ulazni\_stupanj(v) = \sum_{v\in V} izlazni\_stupanj(v) = |E|$$

Gdje je |E| kardinalni broj (broj elemenata u skupu E).
Kod neusmjerenog grafa, svaka veza doprinosi povećanju stupnja dva različita čvora pa slijedi

$$\sum_{v\in V} stupanj(v) = 2|E|$$

Duljina puta jednaka je broju veza na putu. Kažemo da je čvor **dohvatljiv** iz čvora **u** ako postoji put iz **u** prema **u'**. Put je **jednostavan** ako su svi čvorovi na putu različiti (osim eventualno prvog i zadnjeg).
Ciklus u usmjerenom grafu je put koji sadrži barem jednu vezu i za kojeg vrijedi $v_0 = v_k$. Ciklus je jednostavan ako su čvorovi v_1, v_2,......, v_k različiti. Petlju koja se zatvara sama u sebe smatramo jednostavnim ciklusom duljine 1. Grav koji nema niti jedan ciklus zovemo **necikličan**.
Često nas zanimaju dvije posebne klase ciklusa. Jedan je **Hamilton-ov ciklus** kod kojeg treba posjetiti svaki čvor u grafu točno jednom. **Euler-ov ciklus** je ciklus kod kojeg treba posjetiti svaku vezu u grafu točno jednom.

8.3. PRETRAŽIVANJE PO ŠIRINI (breadth-first search, BFS)

```
BFS(G,s)       //definiramo algoritam BFS na grafu G i
izvorišnom čvoru u s
   int distanca[1.....size(V)]      //distance čvora
   int boja[1.....size(V)]         //boje čvora
   čvor_prethodni[1......size(V)]  //prethodni pointer
   queue Q=empty            //FIFO queue
   za svaki u iz V
      boja[u] = bijela
      distanca[u] = INF
      prethodni[u] = NULL
   boja[s] = siva              //definiranje izvora
   distanca[s] = 0
   enqueue(Q,s)              //stavi izvor u queue
   while(Q is nonempty)
      u = dequeue(Q)//u je sljedeći čvor kojeg ćemo posjetiti
      za svaki v iz Adj[u]
         if(boja[v] == bijela) //ako susjed još nije otkriven
            boja[v] = siva
            distanca[v] = distanca[u] + 1
            prethodni[v] = u
            enqueue(Q,v)
      boja[u] = crna
```

Za ovaj algoritam ako uzmemo i vrijeme inicijalizacije slijedi da je vrijeme izvršavanja BFS jednako **O(|V| + |E|).** To je vrijeme koje je proporcionalno s veličinom prikaza grafa preko liste susjedstva.

8.4. NAJKRAĆI PUTOVI SVIH PAROVA (all-pairs shortest paths)

Vrijeme izvršavanja je $\Theta(|V|^4)$:

```
Dist(int m, int i, int j)
   if(m==1) return W[i,j]      //slučaj jedne veze
   najbolji = INF
   for k = 1 to n do         //n je ukupan broj čvorova
      najbolji = min(najbolji, Dist(m-1, i, k) + w[k, j])
   return najbolji

NajkraciPut(int n, int W[1.....n, 1....n])
   array D[1...n-1][1...n, 1...n]
   kopiraj W u D[1]               //inicijaliziranje D[1]
   for m = 2 to n-1 do
      //računanje D[m] iz D[m-1]
      D[m] = ProduzeniPut(n, D[m-1], W)
   return D[n-1]

ProduzeniPut(int n, int d[1...n, 1...n], int W[1...n, 1...n])
   //kopiraj d u privremenu matricu
   matrix dd[1....n, 1...n] = d[1....n, 1....n]
   for i=1 to n do
      for j=1 to n do
         for k=1 to n do
            dd[i, j] = min(dd[i, j], d[i, k] + W[k, j])
   return dd                          //vrati matricu cijena
```

Floyd-Warshall algoritam

Vrijeme izvršavanja je $\Theta(|V|^3)$:

```
Floyd-Warshall(int n, int W[1...n,1...n])
   array d[1...n,1...n]
   for i=1 to n do
      for j=1 to n do
         d[i,j]=W[i,j]
         pred[i,j]=NULL
   for k=1 to n do
      for i = 1 to n do
         for j= 1 to n do
            if (d[i,k] + d[k,j]) < d[i,j]
               d[i,j] = d[i,k] + d[k,j]
               pred[i,j] = k
   return d

NajkraćiPut(i,j)
   if pred[i,j) = NULL
      ispisi(i,j)
   else
      NajkraćiPut(i,pred[i,j])
      NajkraćiPut(pred[i,j],j)
```

Najduža zajednička podsekvenca – LCS

Vrijeme izvršavanja je O(mn):

```
LCS(char x[1..m], char y[1..n])
   int c[0..m, 0..n]
   for i = 0 to m do
      c[i,0] = 0
      b[i,0] = 0
   for j = 0 to n do
      c[0,j] = 0
      b[0,j] = 0
   for i = 1 to m do
      for j = 1 to n do
         if (x[i] == y[j])
            c[i,j] = c[i-1, j-1] + 1
            b[i,j] = GOREiLIJEVO
         else if (c[i-1, j] >= c[i,j-1]
            c[i,j] = c[i-1, j]
            b[i,j] = GORE
         else
            c[i,j] = c[i, j-1]
            b[i,j] = LIJEVO
   return c[m,n]

IzvlačenjeLCS(char x[1..m], char y[1..n], int b[0…m, 0..n])
   LCS = prazan niz
   i = m
   j = n
   while (i != 0 && j != 0)
      switch b[i,j]
      case GOREiLIJEVO
         dodaj x[i] u LCS
         i--
         j--
         break
      case GORE
         i--
         break
      case LIJEVO
         j--
         break
   return LCS
```

Algoritam računa stupanj svakog čvora:

a) kada je graf dan u obliku matrice susjedstva

```
int Stupanj[1...|V|]      ; polje u koje spremamo stupnjeve
čvorova
   for i = 1 to |V|       ; za svaki čvor zbraja sumu po retku
      suma = 0            ; suma se za svaki čvor
inicijalizira na 0
   for j = 1 to |V|
      suma = suma + A[i,j]
      stupanj[i] = suma   ; stupanj se sprema na odgovarajuće
mjesto u polju.
```

Vrijeme izvršavanja $O(|V|^2)$

b) kada je graf dan u obliku liste susjedstva

```
int Stupanj[1...|V|]
   for i = 1 to |V|                ; idemo po čvorovima
      suma = 0                     ; suma se za svaki čvor
inicijalizira na 0
   za svaki u iz Adj(i)            ; idemo po listi za svaki
čvor
      suma = suma + 1              ; za svakog susjeda nadodamo
1
      if(čvor v == čvor i)         ; ako je petlja to dodaje 2
      suma = suma + 1              ; petlja doprinosi 2 puta
   Stupanj(i) = suma
```

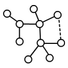
Vrijeme izvršavanja O(|V| + |E|)

Algoritam određuje dali je dani povezani neusmjereni graf dvodijelan.

```
Dvodijelan (G)            ; kao argument dobiva graf
        int Pripadnost[1...size(V)]       ; za svaki element
ispitamo kojoj grupi
   queue Q                ; kojoj grupi pripada
   for i = 1 to size(V)
      pripadnost[i] = 0   ; u početku inicijaliziramo na 0
   S = izaberi neki čvor iz G
   pripadnost [S] = 1 ; idemo na pretraživanje po susjedima
   enqueue (Q,S)          ; S je početni čvor
   while (Q is nonempty)           ; dok ima čvorova za obradit
      u = dequeue (Q)
   za svaki V iz Adj(u)            ; hajde po svim susjedima
      if (pripadnost[V] == 0)      ; nije obrađen
         enqueue (Q,V)             ; pa ga stavi u red
      if (pripadnost(u) == 1)
         pripadnost(v) = 2         ; jedna grupa 1 druga 2
      else
         pripadnost (v) = 1                ; ako je od u 2
   if (pripadnost(v) == pripadnost (u))    ; iz u ide u v
            print „Nije dvodjelan“         ; veza pa bi
            trebali pripadati različitim
            exit                           ; skupovima
   print „Dvodijelan je“
```

Neka je dano stablo G=(V, E)

a) **Ako dodamo vezu u G tada novi graf sadrži ciklus.**
Graf je povezan ako se svaki čvor može doseći iz svakog drugog čvora. Necikličan povezan graf – stablo



Budući da višestruke veze nisu dozvoljene možemo povezati samo one čvorove koji već nisu povezani (isprekidano na slici), a time dobivamo ciklus od najmanje tri člana.

b) **Ako izbrišemo vezu u G, tada nam graf nije povezan.**
Kod stabla svaki čvor je povezan sa najmanje jednim čvorom. Dakle, ako izbrišemo tu vezu onda to više nije stablo.

c) **Postoji točno jedan jednostavan put između svaka dva čvora u G.**
Mora postojati barem jedan put jer inače graf ne bi bio povezan. Ako ima više veza tada postoji ciklus.

Algoritam za dani graf određuje dali postoji put između čvora j i k.

a) kada je graf dan u obliku matrice susjedstva

```
Povezanost(G, j, k)
int dist[1...|V|]
int boja[1...|V|]
cvor pred[1...|V|]
queue Q = empty           ; red za obradu čvorova
za svakog u iz |V|
   dist[u] = INF          ; na početku su sve distance INF
   boja[u] = bijela       ; boja bijela – neobrađeni su
   pred[u] = NULL         ; pokazivači na prethodnoga su NULL
dist[j] = 0               ; j uzimamo kao početni čvor
boja[j] = siva
enqueue(Q,j)
while(Q is nonempty)
   u = dequeue(Q)
   za svakog v iz Adj(u)           ; obradujemo po susjedima
      if(boja[v] == bijela)        ; ako nije obrađen
      boja[v] = siva
      dist[v] = dist[u] + 1
      pred[V] = u
      enqueue(Q,v)
   boja[u] = crna
if(dist[k] == INF)        ; kada smo sve obradili trebala bi
print „nema puta“         ; postojat distanca od k
else
print „put postoji“
```

b) kada je graf dan u obliku liste susjedstva

```
Povezanost(G, j, k)
int dist[1...|V|]
int boja[1...|V|]
cvor pred[1...|V|]
queue Q = empty           ; red za obradu čvorova
za svakog u iz |V|
   dist[u] = INF          ; na početku su sve distance INF
   boja[u] = bijela       ; boja bijela – neobrađeni su
   pred[u] = NULL         ; pokazivači na prethodnoga su NULL
dist[j] = 0               ; j uzimamo kao početni čvor
boja[j] = siva
enqueue(Q,j)
while(Q is nonempty)
   u = dequeue(Q)
   for v = 1 to |V| do             ; idemo po retku matrice
     if(A[u,v] == 1)               ; ako su susjedi
        if(boja[v] == bijela)      ; ako čvor još nije obrađen
      boja[v] = siva
      dist[v] = dist[u] + 1
      pred[V] = u
      enqueue(Q,V)
   boja[u] = crna         ; kada mu obradimo sve susjede
if(dist[k] == INF)
   print „nema puta“
else
   print „put postoji“
```

Za dva niza X i Y definiramo najkraću zajedničku supersekvencu kao niz najkraće duljine takav da su i X i Y podsekvence od Z. Npr. ako su X =(A,B) i Y=(B,C) tada je Z=(A,B,C). Nađite algoritam koji će izračunati dužinu najkraće zajedničke supersekvence /dakle ne niz nego samo dužinu).

```
SCS(char X[1..m], char Y[1..n])
   int C[0..m][0..n]
   for i=0 to m do
      C[i,0]=i
   for j=0 to n do
      C[0,j]=j
   for i=1 to m do m
      for j=1 to n do
         if (x[i]==y[j])
            C[i,j]=C[i-1, j-1] +1
         else if (C[i,j-1] < C[i-1,j])
            C[i,j]=C[i,j-1]+1
         else
            C[i,j]=C[i-1,j]+1
   return C[m,n]
```

Redukcija

Za dana dva problema A i B, kažemo da se A polinomski reducira (sažima) u B, ako, dani polinomski potprogram za B, možemo iskoristiti da riješimo A u polinomskom vremenu.
To pišemo kao $A \leq_P B$

Neke važne činjenice o redukciji:

1. Ako je $A \leq_P B$ i $B \in P$ tada $A \in P$.
2. Ako je $A \leq_P B$ i $A \notin P$ tada $B \notin P$.
3. Ako je $A \leq_P B$ i $B \leq_P C$ tada $A \leq_P C$. (tranzitivnost)

```
bool HamCycle (graph G)
   za svaki rub {u,v}
      kopiraj G u novi graf G'
      izbriši rub {u,v} iz G'
      dodaj novi čvor x i y u G'
      ako (Hampath(G')) vrati true
   return false
```

Množenje lanca matrica

Vrijeme izvršavanja je $\Theta(n^3)$

```
NizMatrica(array p[i..n], int n)
   array s[1..n-1, 2..n]
   for i = 1 to n do m[i,j] = 0
   for L = 2 to n do
      for i = 1 to n-L+1 do
         j = i + L - 1
         m[i,] = INFINITY
         for k = 1 to j-1 do
            q= m[i,k] + m[k+1,j] + p[i-1]*p[k]*p[j]
            if (q < m[i,j])
               m[i,j] = q
               s[i,j] = k
   return m[1,n]
   return s

Mnozenje(i, j)
   if(i<j)
      k = s[i,]
      X = Mnozenje(i,k)
      Y = Mnozenje(k+1,j)
      return X*Y
   else
      return A[i]
```

Dajte algoritam kojim se, za niz prirodnih brojeva, računa najduža rastuća podsekvenca

Neka je prirodni niz brojeva A = 1, 4, 2, 3.
Taj niz sortiranog spremimo u polje B i dobijemo B = 1, 2, 3, 4.
Nakon toga tražimo najdužu zajedničku podsekvencu, dakle, LCS od A i B.

Kako se Floyd-Warshallov algoritam može iskoristiti da bi se detektirali ciklusi sa negativnom težinom?

Floyd-Warshallov algoritam vraća matricu d sa minimalnim udaljenostima između čvorova **i** i **j** (između bilo koja 2 para čvorova).
Ako se na glavnoj dijagonali pojavi negativna vrijednost koja nije nula to znači da postoji ciklus sa negativnom težinom.