

1. Definiraj FT signala $x(t)$ i pripadnu IFT.

Fourierova transformacija je integralna transformacija definirana izrazom:

$$FT[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Fourierova transformacija je reverzibilna. Kad je poznata $X(f)$, vremenski signal $x(t)$ slijedi iz inverzne Fourierove transformacije (IFT):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

Kažemo da su $x(t)$ i $X(f)$ Fourierov par. Simbolički vrijedi:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

Fourierova je transformacija općenito kompleksna funkcija pa vrijedi:

$$X(f) = X_r(f) + jX_i(f)$$

odnosno

$$X(f) = |X(f)| e^{j\Phi(f)}$$

gdje je:

$$|X(f)| = \sqrt{X_r^2(f) + X_i^2(f)}$$

$$\Phi(f) = \arctg \frac{X_i(f)}{X_r(f)}$$

Kaže se da je:

$X(f)$ - spektralna gustoća,

$|X(f)|$ - spektralna gustoća amplitude,

$\Phi(f)$ - spektralna gustoća faze.

2. Definiraj FT realne funkcije $x(t)$.

Za realnu funkciju $x(t)$ vrijedi:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = X_r(f) + jX_i(f)$$

gdje je:

$$X_r(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi ft dt$$

$$X_i(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi ft dt$$

pa za FT realne funkcije $x(t)$ vrijedi:

$$X_r(-f) = X_r(f)$$

$$X_i(-f) = -X_i(f)$$

$$|X(-f)| = |X(f)|$$

$$\Phi(-f) = -\Phi(f)$$

Zaključak:

- Spektralna gustoća amplitude je parna (simetrična) funkcija,
- Spektralna gustoća faze je neparna (nesimetrična) funkcija frekvencije.

3. Definiraj FT zrcaljene realne funkcije.

Za FT par:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

vrijedi novi FT par:

$$x(-t) \Leftrightarrow X^*(f)$$

Zaključak: Zrcaljenje vremenske funkcije se manifestira kompleksnom konjugacijom $X(f)$.

4. Definiraj FT simetrične i nesimetrične funkcije.

Općenito vrijedi:

$$x(t) = x_s(t) + x_{ns}(t)$$

gdje je: $x(t)$ - realna funkcija,

$x_s(t)$ - simetrična (parna) funkcija,

$x_{ns}(t)$ - nesimetrična (neparna) funkcija.

Vrijedi: $x_s(t) \Rightarrow X_r(f)$

$x_{ns}(t) \Rightarrow j \cdot X_i(f)$

$$x(t) = x_s(t) + x_{ns}(t) \Rightarrow X(f) = X_r(f) + jX_i(f)$$

gdje je:

$$X_r(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) \cos 2\pi f t \, dt = 2 \int_0^{\infty} x_s(t) \cos 2\pi f t \, dt$$

$$X_i(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x_{ns}(t) \sin 2\pi f t \, dt = -2 \int_0^{\infty} x_{ns}(t) \sin 2\pi f t \, dt$$

Zaključak:

- FT realne simetrične funkcije je realna funkcija.
- FT realne nesimetrične funkcije je imaginarna funkcija.
- FT realne funkcije je općenito kompleksna funkcija.

5. Definiraj FT pomaknute (kašnjene) funkcije.

Za FT par:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

vrijedi da je:

$$x(t - \tau) \Rightarrow e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \cdot X(f)$$

$$x(t + \tau) \Rightarrow e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \cdot X(f)$$

Zaključak:

- Pomak (kašnjenje ili prethođenje) u vremenskom području uzrokuje linearnu promjenu faze u frekvencijskom području.
- Spektralna gustoća amplitude $|X(f)|$ se ne mijenja.

6. Definiraj FT rastegnute (sažete) funkcije.

Za FT par:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

vrijedi da je:

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

gdje je: **a = konst.**

Zaključak:

- Sažimanje funkcije $x(t)$, tj. brža promjena u vremenu (**a > 1**) uzrokuje sporiju promjenu spektralne gustoće.
- Rastezanje funkcije $x(t)$, tj. sporija promjena u vremenu (**a < 1**) uzrokuje bržu promjenu spektralne gustoće.

7. Definiraj FT derivacije funkcije $x(t)$.

Za FT par

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

vrijedi da je:

$$x'(t) \Leftrightarrow j2\pi f X(f)$$

Općenito za n-tu derivaciju vrijedi:

$$x^{(n)}(t) \Leftrightarrow (j2\pi f)^{(n)} X(f)$$

Zaključak: Deriviranje u vremenskom području uzrokuje isticanje viših frekvencija.

8. Definiraj FT integrirane funkcije $x(t)$.

Za FT par

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

vrijedi da je:

$$\int x(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$

Zaključak: Integriranje u vremenskom području uzrokuje isticanje niskih frekvencija.

9. Definiraj svojstvo simetričnosti FT signala $x(t)$ u vremenskom i frekvencijskom području uz grafičku interpretaciju.*

Vrijedi da je:

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$$

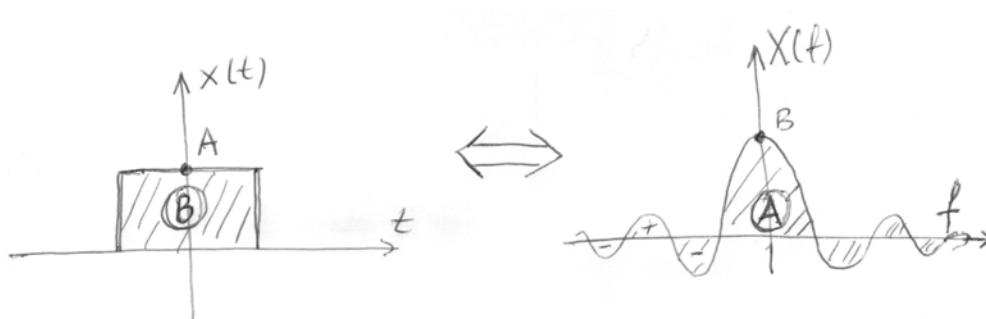
$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

Za realnu funkciju $x(t)$ vrijedi:

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X_r(f) df = 2 \int_0^{\infty} X_r(f) df$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_i(f) df = 0$$

Grafička interpretacija svojstva simetričnosti:



$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df = A$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = B$$

10. Definiraj FT dviju realnih funkcija.

Neka su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ realne funkcije uz FT parove:

$$x_1(t) \Leftrightarrow X_1(f)$$

$$x_2(t) \Leftrightarrow X_2(f)$$

Može se definirati kompleksna funkcija $x(t)$ tako da vrijedi:

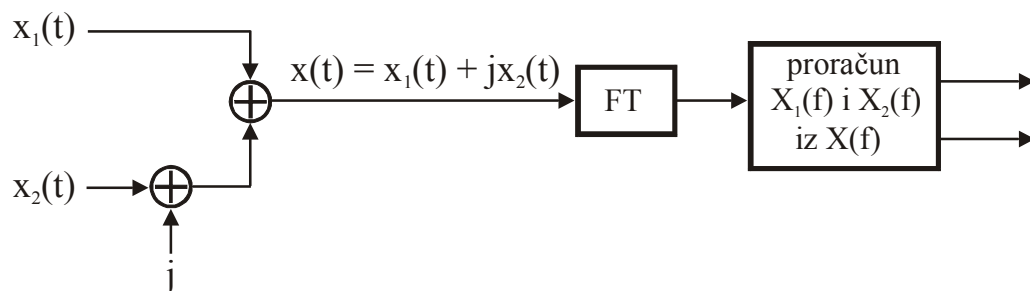
$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t) \Leftrightarrow X(f) = X_r(f) + jX_i(f)$$

odnosno prema svojstvu linearnosti (9.4) vrijedi:

$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t) \Leftrightarrow X(f) = X_1(f) + jX_2(f)$$

$$X_{1r}(f) = \frac{X_r(f) + X_r(-f)}{2} \quad ; \quad X_{2r}(f) = \frac{X_i(f) + X_i(-f)}{2}$$

$$X_{1i}(f) = \frac{X_i(f) - X_i(-f)}{2} \quad ; \quad X_{2i}(f) = \frac{X_r(f) - X_r(-f)}{2}$$



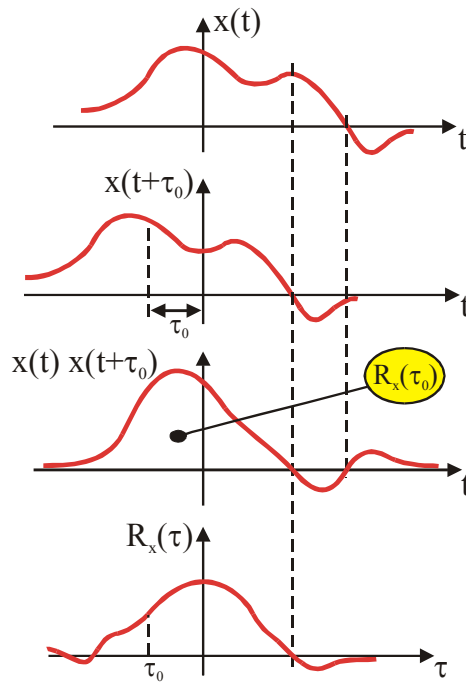
Zaključak: FT dviju realnih funkcija se može računati kao FT jedne kompleksne funkcije

11. Definiraj autokorelaciju signala $x(t)$ u vremenskom i frekvencijskom području uz grafičku interpretaciju.*

Funkcija autokorelacije za kontinuiran signal $x(t)$ se definira izrazom:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) \cdot dt$$

Grafička interpretacija proračuna autokorelacije za kontinuirane signale:



greška na slici - konačna fja
treba biti simetrična

Općenito funkcija autokorelacije ima sljedeća svojstva:

- Simetričnost: $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$,
- Ima maksimum u $\tau = 0$.
- Postaje jednaka nuli kad $\tau \rightarrow \infty$.

Fourierova transformacija autokorelacije je:

$$R_x(t) \Rightarrow X^*(f) \cdot X(f) = |X(f)|^2$$

Za realne funkcije $x(t)$ vrijedi:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

12. Definiraj autokorelaciju diskretnog signala $x(n)$ u vremenskom i frekvencijskom području.

Za diskretni signal $x(n)$ vrijedi:

$$R_x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x(n+k)$$

Fourierova transformacija autokorelacije je:

$$R_x(t) \Rightarrow X^*(f) \cdot X(f) = |X(f)|^2$$

Za diskretni realni signal $x(n)$ vrijedi:

$$R_x(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

13. Definirajte korelaciju signala $x(t)$ i $y(t)$.

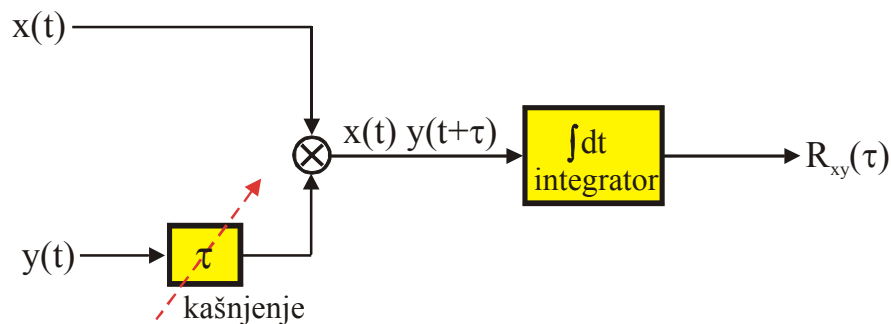
Funkcija korelacije signala $x(t)$ i $y(t)$ se definira izrazom:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t+\tau) dt$$

Za diskretne signale $x(n)$ i $y(n)$ korelacija je dana izrazom:

$$R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot y(n+k)$$

Korelacija ukazuje na sličnost ili pak na povezanost odnosno ovisnost dviju funkcija.



Analogna shema korelatora

14. Definirajte FT korelacije signala $x(t)$ i $y(t)$.

FT korelacije je:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau) dt \Leftrightarrow X^*(f)Y(f)$$

gdje vrijede FT parovi:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$y(t) \Leftrightarrow Y(f)$$

Korelacija će biti parna funkcija:

$$R_{xy}(\tau) = R_{xy}(-\tau) \Leftrightarrow X^*(f)Y(f) = X(f)Y^*(f)$$

samo ako su $x(t)$ i $y(t)$ obje parne funkcije ili su obje neparne funkcije.

Zaključak: Korelacija u vremenskom području odgovara množenju u frekvencijskom području gdje je prva spektralna gustoća kompleksno konjugirana.

15. Definirajte konvoluciju signala $x(t)$ i $y(t)$ i njen FT.

Funkcija konvolucije se definira izrazom:

$$v_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau-t) dt$$

ili simbolički:

$$v(t) = x(t) \otimes y(t)$$

U diskretnom obliku vrijedi:

$$v_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot y(k-n)$$

Vrijedi:

$$x(t) \otimes y(t) = y(t) \otimes x(t)$$

FT konvolucijske funkcije je:

$$v(t) = x(t) \otimes y(t) \Leftrightarrow X(f)Y(f)$$

16. Definirajte konvoluciju u frekvencijskom području i njen IFT.

Konvolucija u frekvencijskom području je definirana izrazom:

$$v(F) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y(F - f) df$$

ili simbolički

$$v(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

Vrijedi:

$$x(t) y(t) \Leftrightarrow X(f) \otimes Y(f)$$

Zaključak: Umnožak funkcija u vremenskom području odgovara konvoluciji u frekvencijskom području.

17. Izrazite FT parove preko operatora konvolucije.

Vrijedi da je:

- Autokorelacija:

$$x(-t) \otimes x(t) \Leftrightarrow X^*(f) X(f) = |X(f)|^2$$

- Korelacija:

$$x(-t) \otimes y(t) \Leftrightarrow X^*(f) Y(f)$$

- Konvolucija:

$$x(t) \otimes y(t) \Leftrightarrow X(f) Y(f)$$

- Umnožak:

$$x(t) y(t) \Leftrightarrow X(f) \otimes Y(f)$$

- Umnožak fje $x(t)$ i jediničnog impulsa:

$$x(t) \otimes \delta(t) \Leftrightarrow X(f) \Leftrightarrow x(t)$$

18. Definiraj spektralnu gustoću periodične funkcije $x_p(t)$.

Spektralna gustoća periodične funkcije perioda T sastoji se od ekvidistantnih impulsa u točkama:

$$f = \frac{m}{T} = m f_0; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad f_0 = \frac{1}{T}$$

i glasi:

$$X_p(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \delta(f - m f_0)$$

Fourierovi koeficijenti A_m se računaju iz izraza:

$$A_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi m f_0 t} dt$$

Jedan period funkcije $x_p(t)$ predstavlja neperiodičnu funkciju tako da vrijedi:

$$x(t) = \begin{cases} x_p(t) & \text{za } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & ; \text{ drugdje} \end{cases}$$

Periodični signal se definira kao konvolucija jednog perioda i beskonačnog niza jediničnih impulsa:

$$x_p(t) = x(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Slijedi da je:

$$X_p(f) = X(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m \cdot f_0) \cdot \delta(f - m \cdot f_0)$$

Zaključak: Periodičnost u vremenskom području se u frekvencijskom području očituje u diskretnosti po frekvenciji.

19. Definiraj IFT periodične funkcije $x_p(t)$.

FT periodičnog signala $x_p(t)$ glasi:

$$X_p(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \delta(f - mf_0)$$

gdje su A_m Fourierovi koeficijenti

Primijeni li se IFT dobije se:

$$x_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{j2\pi m f_0 t}$$

Ovaj izraz za IFT periodičnih signala obično se naziva - Fourierov red.

Fourierov red opisuje periodičnu funkciju preko linearne kombinacije beskonačnog broja kompleksnih harmoničkih funkcija čija je frekvencija višekratnik osnovne frekvencije $f_0 = 1 / T$.

20. Definiraj autokorelaciju periodične funkcije $x_p(t)$.

Autokorelacija periodičnih funkcija definira se izrazom:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t) x_p(t + \tau) dt$$

Vrijedi Fourierov transformacijski par:

$$R_x(t) = x_p(-t) \otimes x_p(t) \Leftrightarrow X_p^*(f) \cdot X_p(f) = |X_p(f)|^2$$

Vrijedi da je:

$$R_x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |A_m|^2 \cdot e^{j2\pi m \cdot f_0 \cdot t}$$

gdje su A_m Fourierovi koeficijenti.

Ovaj izraz predstavlja Fourierov red što znači da je autokorelacija periodičnog signala također periodična funkcija. Period autokorelacije je jednak periodu signala.

21. Kako glasi Parsevalova formula periodičnih signala?

Ona glasi:

$$R_x(0) = x_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p^2(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |A_m|^2$$

gdje x_{ef}^2 predstavlja kvadrat tzv. **efektivne vrijednosti** funkcije $x(t)$.

$|A_m|^2$ predstavlja spektar snage periodične funkcije.

22. Definiraj korelaciju periodičnih signala istog perioda.

Korelacija periodičnih signala se definira izrazom:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t) y_p(t + \tau) dt$$

gdje su $x_p(t)$ i $y_p(t)$ periodične funkcije istog perioda.

Vrijedi FT par:

$$R_{xy}(\tau) \Leftrightarrow X_p^*(f) Y_p(f)$$

odnosno:

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_{m_x}^* A_{m_y}] e^{j2\pi m f_0 \tau}$$

Na primjeru spektralne gustoće periodičnih signala se najbolje uočava smisao korelacijske funkcije: Korelacija otkriva sličnost dviju funkcija što se očituje postojanjem zajedničkih spektralnih komponenti tih funkcija.

23. Definiraj konvoluciju periodičnih funkcija.

Konvolucija dviju funkcija od kojih je barem jedna periodičan signal definira se izrazom:

$$v(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t) h(\tau - t) dt$$

odnosno u frekvencijskom području vrijedi

$$v(t) = x_p(t) \otimes h(t) \Leftrightarrow V(f) = X_p(f) H(f)$$

Konvolucija je od posebne važnosti kod linearnih sustava kod kojih je izlazni signal određen konvolucijom ulaznog signala s odzivom sustava na jedinični impuls.

24. Definiraj kriterije kvalitete prijenosa (energetski kriterij i kriterij oblika).

Za komunikacijski kanal (niskopropusni filter - NF filter) vrijedi energetski kriterij prve nul-točke (90 % prenesene energije) koji glasi:

$$T_{\min} = \frac{1}{f_g}$$

gdje je: T_{\min} - minimalno moguće trajanje impulsa na ulazu,

f_g - granična frekvencija.

Kriterij oblika glasi:

$$t_r = \frac{1}{2 \cdot f_g} \Rightarrow T_{\min}$$

gdje je: t_r - dozvoljeno vrijeme porasta.

Broj impulsa koji se može prenijeti kanalom:

$$n = \frac{1}{2 \cdot T_{\min}}$$

gdje je T_{\min} veća vrijednost dobivena po ova dva kriterija.

- 25. Izračunaj spektralnu gustoću signala $x(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ preko spektralne gustoće signala $y(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ koristeći svojstvo FT za derivirane signale.***

$$y(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = \frac{1}{2} \cdot [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)]$$

$$y'(t) = -j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t)$$

$$j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot Y(f) = -2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot X(f)$$

$$X(f) = -j \cdot \frac{f}{f_1} \cdot Y(f) = \frac{1}{j \cdot 2} \cdot \frac{f}{f_1} \cdot [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)]$$

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{j \cdot 2} \cdot \left[\frac{f_1}{f_1} \cdot \delta(f - f_1) - \frac{f_1}{f_1} \cdot \delta(f + f_1) \right]$$

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{j \cdot 2} \cdot [\delta(f - f_1) - \delta(f + f_1)]$$

- 26. Izračunaj spektralnu gustoću signala $x(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ preko spektralne gustoće signala $y(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ koristeći svojstvo FT za kašnjenje signale.***

$$x(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot \left(t - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_1}\right)\right)$$

$$y(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = \frac{1}{2} \cdot [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)]$$

$$x(t) = y\left(t - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_1}\right) \Leftrightarrow e^{-j \cdot \frac{f}{f_1} \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot Y(f)$$

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2} \cdot [-j \cdot \delta(f - f_1) + j \cdot \delta(f + f_1)] \quad e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}} = -j \quad ; \quad e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = j$$

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) = j \cdot \frac{1}{2} \cdot [-\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)]$$

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{j \cdot 2} \cdot [\delta(f - f_1) - \delta(f + f_1)]$$

27. Definiraj gustoću vjerojatnosti izlazne slučajne varijable $p(y)$.

Kod obrade slučajnog signala, prolaskom slučajnog procesa $x(t)$ kroz sustav dobivamo novi proces $y(t)$.

$$y(t) = T[x(t)]$$

Ako je ulazna slučajna varijabla X dana gustoćom vjerojatnosti $p(x)$, a $T(x)$ je kontinuirana i nije u nekom intervalu konstantna, traži se gustoća vjerojatnosti izlazne slučajne varijable $p(y)$.

Općenito za n korijena od $T(x)$ vrijedi:

$$p(y) = \frac{p(x_1)}{|T'(x_1)|} + \frac{p(x_2)}{|T'(x_2)|} + \dots + \frac{p(x_n)}{|T'(x_n)|} = \sum_{i=1}^n \frac{p(x_i)}{|T'(x_i)|}$$

gdje je:

$$T'(x) = \frac{dT(x)}{dx}$$

28. Definiraj autokorelaciju signala $x(t)$ u vremenskom i frekvencijskom području uz grafičku interpretaciju za slučajne signale.*

Autokorelacija slučajna procesa se definira izrazom:

$$R_x(t_1, t_2) = \langle x(t_1) x(t_2) \rangle$$

Dakle, autokorelacija slučajna procesa predstavlja srednju vrijednost umnoška slučajnih varijabli $x(t_1)$ i $x(t_2)$.

Vrijedi:

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t_1) x_2(t_2) p(x_1; t_1, x_2; t_2) dx_1 dx_2$$

gdje je $p(x_1; t_1, x_2; t_2)$ združena funkcija gustoće vjerojatnosti.

Za stacionarne procese, autokorelacija ovisi samo o razlici (kašnjenju) $\tau = t_2 - t_1$:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2$$

Napomena: Ovo je samo dio odgovora.

29. Definiraj spektralnu gustoću slučajnih signala.*

FT slučajnog signala $x(t)$ može se definirati izrazom:

$$X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

30. Definirajte autokorelaciju ergodičnog slučajnog procesa

Slučajan proces je ergodičan ako je *srednja vrijednost na skupu jednaka srednjoj vrijednosti po vremenu*.

Autokorelacija ergodičnog slučajnog procesa je:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt$$

31. Definiraj spektralnu gustoću snage slučajnih procesa.

FT autokorelacije slučajnog procesa: $R_x(t) \Leftrightarrow |X(f)|^2 = P_x(f)$

gdje $P_x(f)$ predstavlja spektralnu gustoću snage slučajnog procesa.

$P_x(f)$ je realna pozitivna funkcija, tako da je fazni dio spektra nepoznat.

Zaključak: Računanjem FT autokorelacije $R_x(t)$ dobiva se spektralna gustoća snage $P_x(f)$.

32. Opiši postupak A/D pretvorbe.*

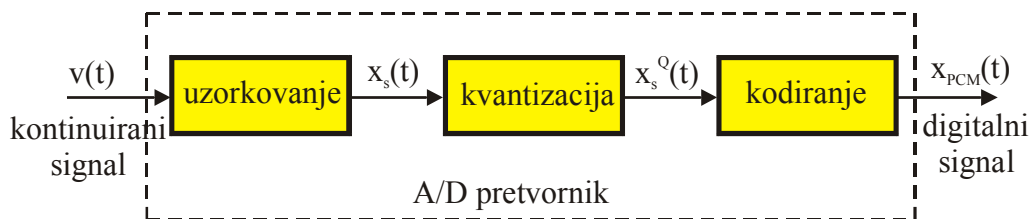
A/D pretvorba je pretvorba kontinuiranog (analognog) signala u diskretni (digitalni) signal.

A/D i D/A pretvorba su sastavni dio suvremenih sustava za obrabu, pohranu i prijenos informacija.

Govorni signali, signali zvuka (audio) i videa, su kontinuirani po vremenu i po amplitudi.

A/D pretvorba obuhvaća:

- **uzorkovanje** (diskretizaciju po vremenu i/ili prostoru)
- **kvantizaciju** (diskretizaciju po amplitudi)
- **kodiranje**.



A/D pretvorba predstavlja ustvari kodiranje izvora (informacije) i to kodiranje uz određeni gubitak informacije.

Gubitak je informacije obično prisutan jedino u postupku kvantizacije.

Uzorkovanje i kodiranje obično predstavljaju kodiranje bez gubitka informacije.

33. Definiraj spektralnu gustoću uzorkovanog signala.

Uzimanje uzoraka iz kontinuiranog signala $x(t)$ uz vremenski interval Δt može se interpretirati kao množenje te funkcije sa slijedom impulsa perioda Δt odnosno frekvencije $f_s = 1/\Delta t$:

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

FT daje:

$$X_s(f) = X(f) \otimes \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - m \frac{1}{\Delta t}\right)$$

Vrijedi da je:

$$X_s(f) = \frac{1}{\Delta t} X(f) \quad \text{za } |f| \leq \frac{f_s}{2}$$

Zaključak:

- Spektralna je gustoća signala uzoraka $X_s(f)$ proporcionalna spektralnoj gustoći kontinuiranog signala $X(f)$ u frekvencijskom području $|f| \leq \frac{f_s}{2}$.
- Uzorkovani signal može sačuvati cjelovitu informaciju kontinuiranog signala ako je frekvencija uzorkovanja f_s barem dvostruko veća od kritične frekvencije kontinuiranog signala f_c :

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} \geq 2f_c$$

34. Teorem o uzorkovanju.

Kontinuirani signal, frekvencijski ograničen spektra ($f \leq f_c$), može biti bez gubitka informacije zamijenjen signalom uzoraka ako su uzorci uzeti svakih Δt tako da vrijedi:

$$\frac{1}{\Delta t} = f_s \geq 2f_c$$

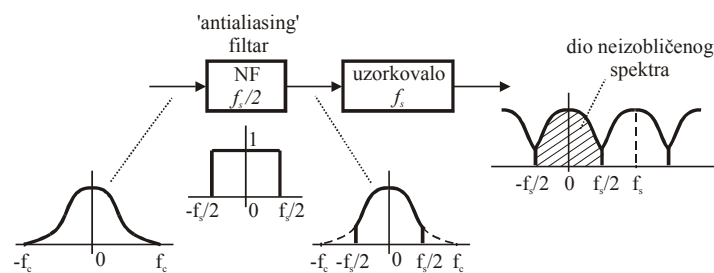
35. Objasni pojavu prekrivanja i njeno otklanjanje (antialiasing).

Prekrivanje (aliasing efekt) nastaje kad je frekvencija uzoraka manja od dvostruke kritične frekvencije:

$$\frac{1}{\Delta t} = f_s < 2f_c$$

pa se uzorkovanjem gubi dio informacije.

Učinak prekrivanja može biti otklonjen ako se spektralni sadržaj ulaznog kontinuiranog signala prije uzorkovanja ograniči na polovinu frekvencije uzorkovanja. Ovo se ograničenje spektra može jednostavno ostvariti prolaskom signala kroz idealni NF filter (antialiasing filter) granične frekvencije $f_c = f_s / 2$. Na taj je način za signal prije uzorkovanja osigurano da kritična frekvencija iznosi $f_c = f_s / 2$ što jamči sačuvanje cjelovite informacije nakon uzorkovanja.



U praksi se filtriranje koje sprječava pojavu prekrivanja spektara koristi uvijek bez obzira da li je navedeni uvjet ispunjen čime se otklanja prekrivanje eventualno prisutnog šuma čiji spektralni sadržaj postoji i kod frekvencija iznad kritične frekvencije signala.

36. Definirajte signal-šum omjer kvantizacije.

Signal-šum omjer kvantizacije raste s kvadratom broja kvantnih razina (uzoraka):

$$\frac{S}{N} [dB] = 10 \log \frac{S}{N} = 10 \log N^2 \approx 6 \cdot m \text{ dB}$$

gdje je $N = 2^m$, tako da m odgovara broju bitova po uzorku.

37. Definiraj DFT, navedi razloge za efekt propuštanja te metode njegova smanjenja.*

Uzorkovani dio funkcije se razmatra kao jedan period periodičke funkcije $x_{sp}(t)$.

Stoga je DFT ustvari FT periodičke funkcije $x_{sp}(t)$ pa je njegov oblik:

$$X_{sp}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \delta(f - mf_0) \quad ; \quad f_0 = \frac{1}{T} = \Delta f$$

gdje je Δf rezolucija po frekvenciji, a A_m su kompleksni Fourierovi koeficijenti uzorkovanog signala $x_{sp}(t)$.

Navedeni Fourierovi koeficijenti predstavljaju procjenu Fourierovih koeficijenata kontinuiranog signala $x(t)$ odnosno signala uzoraka $x_s(t)$. Pogreška se javlja zbog konačnog broja uzoraka N , odnosno konačnog vremena snimanja T .

Učinak propuštanja nastaje zbog ograničenje signala na interval T . To se ograničenje može interpretirati kao množenje signala $x_s(t)$ sa tzv. prozorskom funkcijom :

$$w_0(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < t < T \\ 0 & ; \quad \text{drugdje} \end{cases}$$

Množenje dvaju signala u vremenskom području odgovara konvoluciji njihovih spektralnih gustoća.

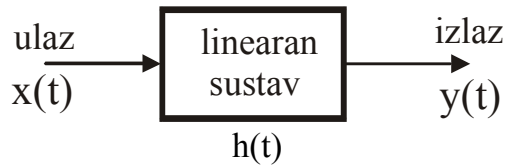
$$\tilde{x}_s(t) = x_s(t) w_0(t) \Leftrightarrow X_s(f) \otimes W_0(f)$$

Zbog konvolucije s $W(f)$ spektar $X_{sp}(f)$ nije jednak $X_s(f)$. Općenito uzevši sve su frekvencijske komponente pogrešne. Nastala se pojava naziva učinak propuštanja. Naime može se reći da je u postupku računanja DFT došlo do uvlačenja šuma čime je izlazni signal–šum omjer smanjen.

Učinak propuštanja se umanjuje uporabom optimalnih prozorskih funkcija Digitalni analizatori spektra sadrže izbornik prozorskih funkcija koje se biraju tako da se maksimizira ili točnost ili rezolucija.

38. Opiši ulazno-izlazne relacije u vremenskom i frekvencijskom području koje vrijede za linearni sustav.*

Ulazno-izlazni model linearnog sustava je prikazan slikom



Izlaz iz linearnog sustava je definiran konvolucijom ulaza $x(t)$ s odzivom tog sustava $h(t)$ na jediničan impuls $\delta(t)$:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

FT daje:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Dakle, spektralna gustoća izlaza linearnog sustava jednaka je umnošku spektralne gustoće ulaza s **prijenosnom funkcijom** sustava $H(f)$.

39. Definiraj i opiši ulogu odziva jediničnog impulsa kod linearnih sustava.*

Funkciju $h(t)$ linearnog sustava nazivamo odziv linearnog sustava na jedinični impuls $\delta(t)$ ili jednostavno **impulsni odziv**. FT (spektralna gustoća) impulsnog odziva je funkcija $H(f)$ koje se zove **prijenosnom funkcijom** sustava.

Izlaz iz linearnog sustava je definiran konvolucijom ulaza $x(t)$ s impulsnim odzivom $h(t)$:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

FT daje:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Dakle, spektralna gustoća izlaza linearnog sustava jednaka je umnošku spektralne gustoće ulaza s **prijenosnom funkcijom** sustava $H(f)$.