



Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

Studij računarstva

Fizika 1

Auditorne vježbe – 7

Rotacija krutog tijela.

16. siječnja 2009.

Ivica Sorić

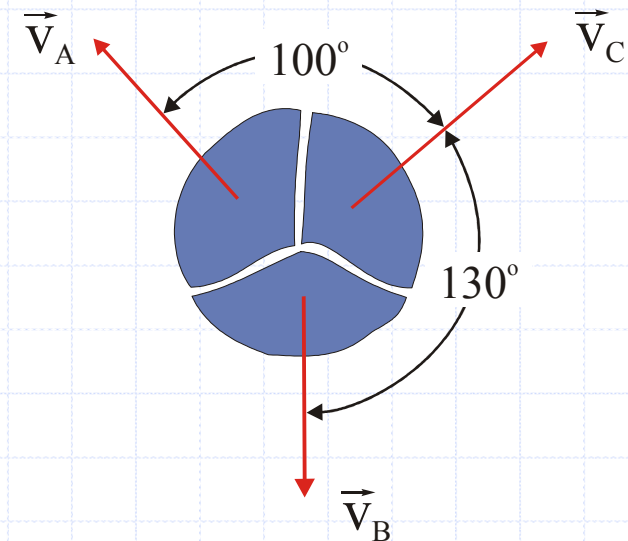
(suri@fesb.hr)

Ponavljanje - Sudari

- ◆ Do **sudara** dolazi kada dvije ili više čestica (ili sistema čestica) približavajući se jedna drugoj, međusobno djeluju i time promijene svoje gibanje. Pri sudaru ne mora uvijek doći do fizičkog kontakta među tijelima, već je dovoljno da djeluju silama jedno na drugo.
- ◆ Sudar može biti **savršeno elastičan** i **savršeno neelastičan**, odnosno **djelomično elastičan**.
- ◆ **Savršeno elastičan sudar:**
 - Vrijedi zakon o očuvanju količine gibanja.
 - Tijela se nakon sudara vraćaju u prvobitni oblik, potencijalna energija elastične deformacije nastala prilikom sudara tijela ponovo prelazi u kinetičku energiju, i tijela se razilaze tako da im je ukupna kinetička energija nakon sudara jednaka ukupnoj kinetičkoj energiji prije sudara.
- ◆ **Savršeno neelastičan sudar:**
 - Vrijedi zakon o očuvanju količine gibanja.
 - Kinetička energija djelomično ili potpuno pretvara se u unutrašnju energiju (potencijalnu i kinetičku energiju termičkog gibanja molekula, te se stoga pri takvim sudarima tijela zagriju. Stoga ne vrijedi zakon o očuvanju mehaničke energije, jer se jedan njen dio pretvorio u nemehanički oblik energije.
- ◆ **Većina je makroskopskih sudara između obadva ekstremna slučaja, dakle djelomično su elastični.**

Primjer 1 – Očuvanje količine gibanja

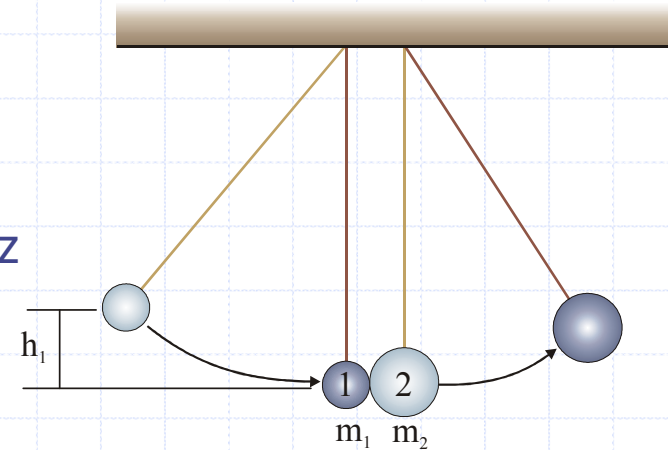
- ◆ Uslijed unutarnje eksplozije tijelo mase M , koje je mirovalo na podlozi bez trenja, raspadne se na tri dijela koji se razlete po podlozi, brzinama prikazanim na slici desno. Dio C, s masom $0,3M$, ima brzinu $v_C = 5 \text{ m/s}$.
a) Kolika je brzina dijela B, s masom $0,2M$?
b) Kolika je brzina dijela A?



- ◆ Rezultat: a) $v_B = 9,64 \text{ m/s}$, b) $v_A = 3 \text{ m/s}$.

Primjer 2 – Elastični sudar

- ◆ Dvije metalne kugle koje vise na konopima u početnom položaju se dodiruju obješene vertikalno. Kugla 1, mase $m_1 = 30 \text{ g}$, se povuče ulijevo na visinu $h_1 = 8 \text{ cm}$ i tada ispusti iz stanja mirovanja. Pri prolasku kroz vertikalni položaj sudari se elastično s kuglom 2, koja ima masu $m_2 = 75 \text{ g}$.
a) Kolika je brzina kugle 1 u trenutku neposredno nakon sudara?

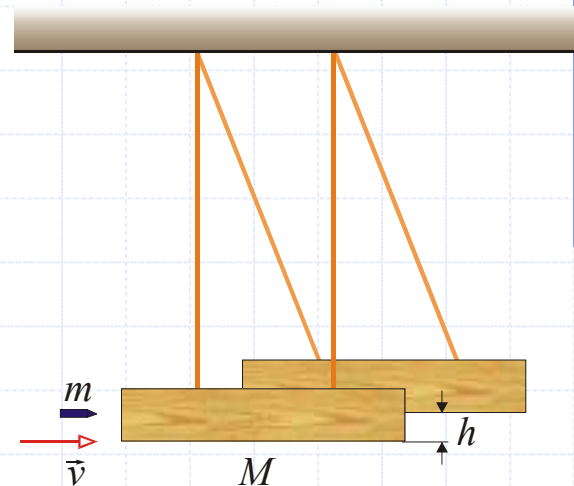


- b) Kolika je brzina kugle 2 u trenutku neposredno nakon sudara? Do koje visine će se popeti kugla 2 nakon sudara?

◆ Rezultat: a) $v_{1\text{poslije}} = -0,537 \text{ m/s}$, b) $v_{2\text{poslije}} = 0,72 \text{ m/s}$, $h_2 = 2,6 \text{ cm}$

Primjer 3 – Potpuno neelastični sudar

- ◆ Prije nego su izumljeni elektronički uređaji, za mjerenje brzine metaka koristilo se balističko njihalo, čija je jedna verzija prikazan na slici desno, a sastoji se od velikog drvenog bloka mase $M = 5,4 \text{ kg}$ koji visi na dva dugačka konopca. Metak mase $m = 9,5 \text{ g}$ ispali se u pravcu bloka, koji ga vrlo brzo apsorbira. Blok+metak se pomaknu na gore tako da im se zajednički centar mase pomakne za visinu $h = 6,3 \text{ cm}$, kada se za kratko zaustavi prije nego se počne gibati kao njihalo. Kolika je brzina metka u trenutku neposredno prije sudara?



- ◆ Rezultat: $v = 633 \text{ m/s}$.

Ponavljjanje (1)

◆ Općenito gibanje krutog tijela

- **Kruto tijelo:** tijelo koje pod utjecajem sila ne mijenja oblik.
- Pod utjecajem vanjskih sila kruto se tijelo može gibati **translacijom** ili **rotacijom**, ili **složenim gibanjem** sastavljenim od te dvije vrste gibanja.
- Pri translacijskom gibanju kruto tijelo se može zamijeniti jednom materijalnom točkom (npr. centrom mase) čija je masa jednaka masi tijela i na koju djeluje rezultanta vanjskih sila $\vec{F}_v$. Jednadžba gibanja je:

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{F}_v$$

◆ Moment sile

- **Moment sile** s obzirom na neku točku definiran je **vektorskim produktom** **radijusvektora** (vektora položaja) **hvatišta sile** s obzirom na tu točku i **vektora sile**: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
- Smjer momenta sile određujemo pravilom desne ruke.

Ponavljjanje (2)

◆ Rotacija krutog tijela oko nepomične osi

- Pri rotaciji krutog tijela oko nepomične osi sve točke tijela izvode gibanje po kružnicama čija središta leže na osi rotacije.

- **Drugi Newtonov zakon:** $M_z = I_z \alpha$

gdje je M_z rezultatni moment svih vanjskih sila s obzirom na os rotacije, I_z moment tromosti s obzirom na tu istu os, a α kutna akceleracija tijela.

◆ Moment tromosti

- **Moment tromosti** je mjera tromosti tijela pri rotaciji.
- Moment tromosti tijela, s obzirom na neku os rotacije jednak je:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV$$

- **Steinerov poučak:** Moment tromosti s obzirom na neku os jednak je momentu tromosti s obzirom na paralelnu os kroz centra mase, uvećanom za umnožak mase tijela i kvadrata udaljenosti tih dviju osi,

$$I = I_{CM} + md^2$$

Ponavljanje (3)

◆ Moment količine gibanja

- Moment količine gibanja $\vec{L}$ materijalne točke mase m i količine gibanja $\vec{p} = m\vec{v}$ s obzirom na referentnu točku O definira se kao vektorski produkt radiusvektora $\vec{r}$ (koji spaja točku O i materijalnu točku) i količine gibanja:

- Za kruto tijelo koje rotira oko nepomične osi vrijedi: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$
 - ◆ Projekcija ukupnog momenta količine gibanja na os rotacije (z) jednaka je umnošku momenta tromosti oko te osi i kutne brzine rotacije: $L_z = I_z \omega$
 - ◆ Ako homogeno tijelo rotira oko svoje osi simetrije tada ukupni moment količine gibanja ima smjer kutne brzine, te vrijedi i: $\vec{L} = I\vec{\omega}$
- Veza između vektora momenta sile i momenta količine gibanja dana je relacijom:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Ponavljanje (4)

- Ako u sistemu čestica nema vanjskih sila ili se međusobno poništavaju, pa im je rezultanta nula, kažemo da je **sistem izoliran (zatvoren)**.
- **Zakon o očuvanju momenta količine gibanja**: ako je sistem zatvoren, odnosno ako na kruto tijelo ne djeluju vanjske sile, ili ako rezultantni moment vanjskih sila isčezava, ukupni moment količine gibanja sistema je očuvan:

$$\sum_i \vec{M}_{vi} = 0 \Rightarrow \vec{L} = konst.$$

- U posebnom slučaju, kad se mehanički sistem vrti oko nepomične osi z , ukupni moment količine gibanja dan je izrazom:

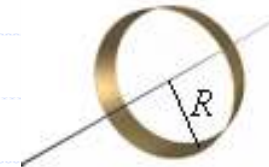
$$L_z = I_z \omega_z$$

iz čega se vidi da unutarnje sile u sistemu mogu mijenjati kutnu brzinu i moment inercije, a da pri tom moment količine gibanja ostane konstantan.

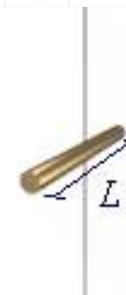
Primjer 1 – Moment tromosti

◆ Izračunajte momente tromosti:

- a) tankog kružnog homogenog prstena polumjera R i mase m s obzirom na os okomitu na ravninu prstena, koja prolazi kroz središte prstena,



- b) štapa duljine L i mase m s obzirom na os okomitu na štap, koja prolazi kroz središte štapa.



◆ Rezultat: a) $I = mR^2$, b) $I = mL^2/12$

Primjer 2 – Steinerov poučak

- ◆ a) Nađite vezu između momenta tromosti krutog tijela (ili sistema čestica) s obzirom na neku os i momenta tromosti s obzirom na paralelenu os kroz centar mase, tj. izvedite Steinerov poučak.

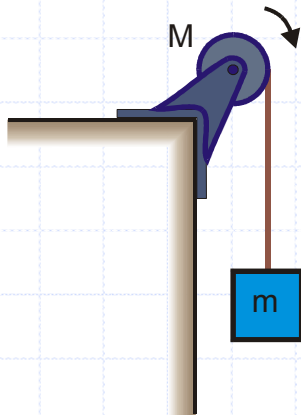
b) Pomoću dobivenog rezultata i rješenja prethodog primjera izračunajte moment tromosti štapa duljine L i mase m s obzirom na os okomitu na štap, koja prolazi kroz jedan kraj štapa.



- ◆ Rezultat: a) Steinerov poučak $I = I_{CM} + md^2$, b) $I_{\text{š}} = mL^2/3$

Primjer 3 – Mehanika krutog tijela

- Na slici je prikazan homogeni disk mase $M = 2,5 \text{ kg}$ i radijusa $R = 20 \text{ cm}$ na kojemu visi blok mase $m = 1,2 \text{ kg}$ na konopu zanemarive mase koji je namotan na disk. Izračunajte akceleraciju bloka i napetost konopa, zanemarujući trenje u disku.



- Rezultat: $a = 4,8 \text{ m/s}^2$, $N = 6 \text{ N}$

Primjer 4 – Moment količine gibanja

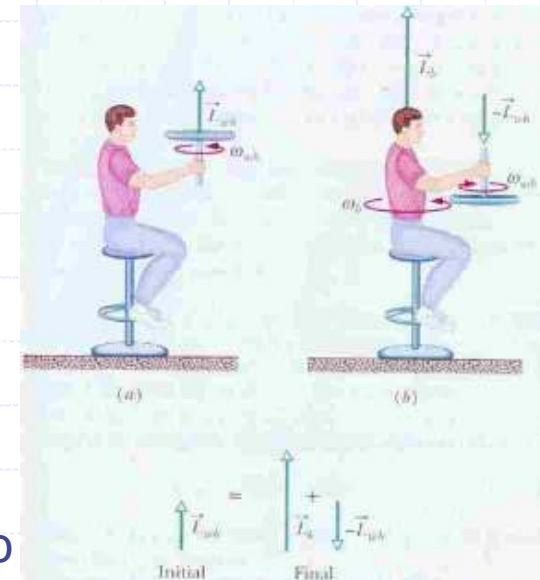
- ◆ Inženjer građevine George Washington Gale Ferris, Jr., izgradio je tzv. Ferrison kotač za Columbovu svjetsku izložbu 1893. godine u Chicagu, koji je tada bio prvorazredna atrakcija – remek djelo inženjerskog rada. Kotač se sastojao od kružne metalne konstrukcije radijusa $R = 38 \text{ m}$, momenta tromosti od $4,33 \times 10^4 \text{ kgm}^2$, s 36 drvenih vagona smještenih po obodu. Svaki od vagona imao je masu oko $1,1 \times 10^4 \text{ kg}$, mogao je ponijeti maksimalno 60 putnika, a obično se punilo samo po 6 vagona za jedno kruženje. Jednom je svih 36 vagona bilo puno i tada pri kutnoj brzini ω_p napravio puni krug za oko 2 minute. Pretpostavite da svaki putnik ima masu 70 kg.
 - a) Procijenite iznos momenta količine gibanja kotača i putnika dok je rotirao kutnom brzinom ω_p ?
 - b) Pretpostavljajući da je kotaču pod punim teretom bio potreban vremenski period $\Delta t = 5 \text{ s}$ da bi postigao kutnu brzinu ω_p izračunajte prosječan moment sile koji je djelovao na kotač?



- ◆ Rezultat: a) $L = 4,14 \times 10^7 \text{ kgm}^2/\text{s}$, b) $M \approx 0,827 \times 10^7 \text{ Nm}$

Primjer 5 – Očuvanje momenta količine gibanja

- Na slici desno, pod a), prikazan je student kako sjedi na stolcu koji se može slobodno rotirati oko vertikalne osi. Na početku student miruje i drži u ruci kotač od bicikle s momentom tromosti oko središnje osi $I_k = 1,2 \text{ kgm}^2$. Kotač rotira kutnom brzinom $\omega_k = 3,9$ okretaja/s i to, gledajući odozgo, u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Os kotača je vertikalna i moment količine gibanja kotača L_k je u smjeru vertikalno prema gore. Student tada okrene kotač tako da se, gledajući odozgo, rotira u smjeru kazaljke na satu, slika desno pod b). Moment količine kotača sada iznosi $-L_k$ i u smjeru je vertikalno prema dolje. Inverzija momenta količine gibanja kotača uzrokuje rotaciju složenog sistema sastavljenog od studenta, stolca i kotača, koji svi zajedno imaju moment tromosti $I_s = 6,8 \text{ kgm}^2$. Kolika je kutna brzina rotacije tog složenog sistema nakon inverzije kotača, i u kojem je smjeru?



- Rezultat:** $\omega_s = 1,4$ okretaja/sekundi, u smjeru vertikalno prema gore.

Primjer 6 – Kotrljanje bez klizanja

- ◆ Na valjak mase 5 kg djeluje stalna vodoravna sila $F = 15 \text{ N}$, tako da se valjak kotrlja bez klizanja po vodoravnoj površini. Kolikom se akceleracijom giba centar mase (težište) valjka? Koliki je minimalni faktor trenja pritom potreban?

◆ Rezultat: $a_{\text{CM}} = 2 \text{ m/s}^2$, $\mu \geq 0,1$

Primjer 7 – Kotrljanje po kosini

- ◆ Puni homogeni valjak mase $m = 7 \text{ kg}$ i polumjera $R = 30 \text{ cm}$ počinje se gibati iz mirovanja s vrha kosine visoke $h = 2 \text{ m}$ koja prema horizontali zatvara kut $\beta = 30^\circ$. Izračunajte akceleraciju centra mase i kutnu akceleraciju valjka te brzinu centra mase valjka na dnu kosine. Riješite zadatak za slučajeve:
 - a) kad je trenje zenemarivo,
 - b) kad se valjak kotrlja bez klizanja.

- ◆ Rezultat: a) $a_{\text{CM}} = 4,905 \text{ m/s}^2$, $\alpha = 0 \text{ rad/s}^2$, $v_{\text{CM}} = 6,26 \text{ m/s}$
b) $a_{\text{CM}} = 3,27 \text{ m/s}^2$, $\alpha = 10,9 \text{ rad/s}^2$, $v_{\text{CM}} = 5,1 \text{ m/s}$

Primjer 8 – Energija pri kotrljanju

- ◆ Kotač mase $m = 2,5 \text{ kg}$ i polumjera $R = 6 \text{ cm}$ kotrlja se bez klizanja niz kosinu duljine $1,5 \text{ m}$ i priklonog kuta 30° . Potrebno je izračunati moment tromosti kotača s obzirom na os rotacije, ako mu je brzina centra mase na dnu kosine 3 m/s . Trenje zanemarite.

- ◆ Rezultat: $I = 0,635 \text{ m R}^2 = 0,57 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$

Primjer 9 – Energija pri kotrljanju

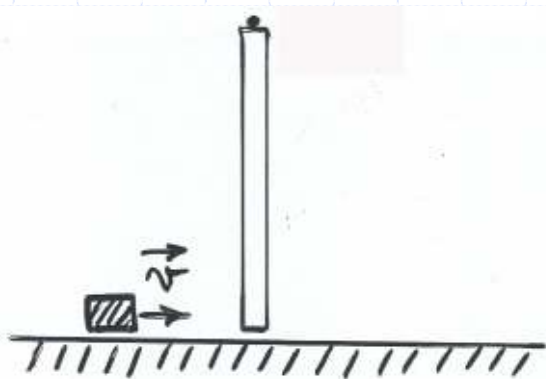
- ◆ Dva valjka, jedan pun, a drugi šuplji s tankom stijenkom, istodobno krenu s kosine visine $h = 0,5 \text{ m}$, nagnute prema vodoravnoj ravnini po kutem od 30° . Koji će od njih i koliko prije doći do podnožja kosine uz pretpostavku da su početne brzine oba valjka nula i da ne dolazi do klizanja valjka?

◆ Rezultat: puni valjak će doći 0,12 s prije.

Primjer 10 – Zadatak za vježbu

(zakon očuvanja momenta količine gibanja)

- ◆ Maleno tijelo mase 2 g giba se po vodoravnoj glatkoj podlozi brzinom 2 m s^{-1} i sudari se sa štapom mase 2 kg i duljine 0,75 m koji može rotirati oko horizontalne osi (v.crtež). Sraz je neelastičan. Kolika je kutna brzina štapa neposredno nakon sraza ako se tijelo zaustavilo?



Zadaci za vježbu

- ◆ P. Kulišić i ostali: *Riješeni zadaci iz mehanike i topline*, Poglavlja 4 i 6
 - Primjeri: 4.13. – 4.15.
 - Zadaci: 4.5., 4.6., 4.9., 4.13.
 - Zadaci: 6.3., 6.5., 6.6.