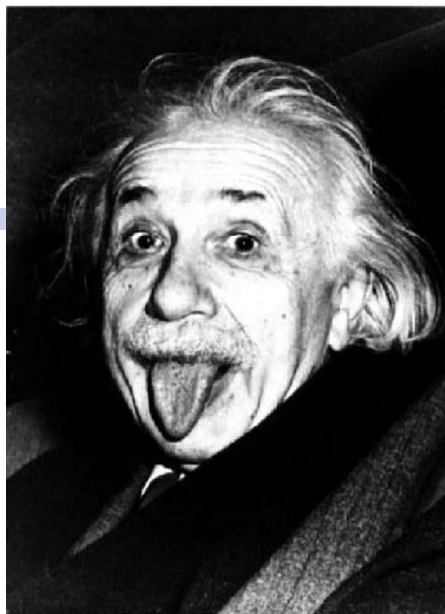




Specijalna teorija relativnosti

Danas ćemo raditi:

- Postulati specijalne teorije relativnosti
- Relativnost istovremenosti
- Relativnost vremena
- Relativnost duljine
- Lorentzove transformacije
- Posljedice Lorentzovih transformacija
 - Kontrakcija dužine
 - Dilatacija vremena
 - Relativističko slaganje brzina
- Relativistička dinamika

Istovremenost događaja (1)

- “Zamislite predsjednike dviju zaraćenih zemalja kako sjede na krajevima dugog stola upravo zaključujući mirovni sporazum za prekid dugogodišnjeg rata, ali nijedan od njih ne želi potpisati sporazum prije drugoga. Tada generalni tajnik UN-a padne na pamet briljantna ideja. Točno na sredinu stola između dvaju predsjednika stavit će ugašenu žarulju. Kada se žarulja upali svjetlost će istovremeno doći do oba predsjednika. Oba predsjednika su se složila da će potpisati sporazum u trenutku kad vide svjetlost žarulje. Plan je proveden i sporazum potpisan na zadovoljstvo obiju strana.
Ohrabren ovim uspjehom generalni tajnik UN-a ponudi isti plan drugim dvjema zaraćenim zemljama koje su se dogovorile potpisati mirovni sporazum. Jedina razlika je u tome što sada predsjednici sjede na suprotnim stranama stola unutar vlaka koji se giba konstantnom brzinom. Predsjednik Naprijedzemlje sjedi gledajući u smjeru gibanja vlaka, dok predsjednik Natragzemlje gleda u suprotnom smjeru.

3

Istovremenost događaja (2)

- Uvažavajući činjenicu da svi zakoni fizike imaju isti oblik bez obzira na nečije gibanje, tako dugo dok je to gibanje nepromijenjeno, generalni tajnik započne s ceremonijom koristeći žarulju. Oba predsjednika potpišu sporazum i zajedno sa svitom svojih savjetnika započnu proslavu kraja neprijateljstva. Ali, upravo tada dođe glas o ponovo započetim borbama između naroda obiju zemalja, koji su gledali ceremoniju na peronu izvan putujućeg vlaka. Svi sudionici ceremonije u vlaku bili su iznenađeni čuti da je razlog izbijanja borbi tvrdnja naroda Naprijedzemlje da su izdani, jer je njihov predsjednik potpisao sporazum prije predsjednika Natragzemlje.”*

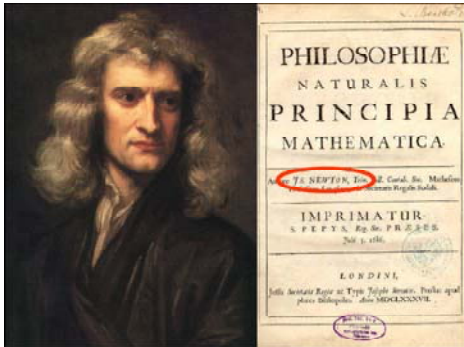
Ako se pripadnici obiju zemalja u vlaku slažu da je sporazum potpisan istovremeno, kako je moguće da promatrači s perona misle drugačije?

◆ Odgovor ćete saznati na današnjem predavanju

* Preuzeto iz knjige Briena Greena “The Elegant Universe”, Vintage U. K. Random House, 2000

4

Stupovi fizike na početku 20 stoljeća



Isaac Newton (1643-1727) objavio djelo: "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica" (1666) u kojem su prvi put zakoni gibanja (Newtonovi zakoni) jasno formulirani. Definirao zakon gravitacije te pokazao da ista sila upravlja Zemaljskom i nebeskom mehanikom.



J. Clerk Maxwell, (1864) postavio opću teoriju elektromagnetskih pojava: 4 Mawellove jednačbe u potpunosti opisuju sve elektromagnetske pojave. Pokazao da je svjetlost elektromagnetski val. Predvidio postojanje radio valova.

5

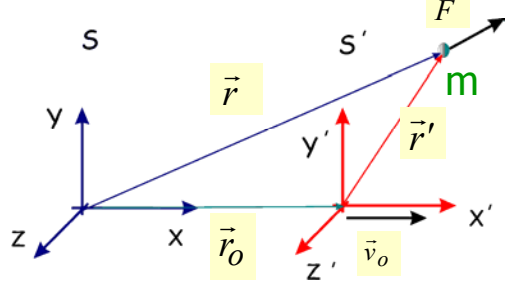
Newtonovi mehanicistički koncepti

- ❑ Postoji sila koja trenutno djeluje na tvar i uzrokuje gibanje tvari po volji velikim brzinama (nema gornje granice na brzinu).
- ❑ Prostor i vrijeme su apsolutni – u Svemiru bilo kad i bilo gdje za svakog su prostorni i vremenski intervali isti:
 - prostor i vrijeme su međusobno neovisni i ni koja zbivanja u prirodi ne utječu na prostor i vrijeme
 - apsolutnost prostora i vremena izražena je jednostavnim jednačbama koje zovemo Galilejeve transformacije
 - Galilejeve transformacije daju vezu između prostornih i vremenskih koordinata nekog fizikalnog događaja kojeg uočavaju dva promatrača u relativnom gibanju jednolikom brzinom po pravcu
- ❑ Iz Galilejevih transformacija proizlazi da će promatrači u relativnom gibanju uočiti različite brzine, ali iste akceleracije, tj. doći do potpuno istih Newtonovih zakona mehanike. (Newtonovi zakoni su inavrijantni na Galilejeve transformacije).
- ❑ Ovo je potpuno u skladu s našom intuicijom – svakidašnjim iskustvom

6

Galilejev princip relativnosti

S' se giba konstantnom brzinom $\vec{v}_0$ osi



Nema načina da ustanovimo koji sustav miruje, a koji se jednoliko giba po pravcu. Svaki od njih možemo smatrati "apsolutno" mirnim, što znači da nema apsolutno mirnog sustava – Galilejev princip relativnosti.

Galilejeve transformacije ne vrijede kad su brzine usporedive s brzinom svjetlosti – u specijalnoj teoriji relativnosti veza između koordinata dana je preko Lorentzovih transformacija

prema S sustavu duž x-

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \text{konst.}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_0 + \vec{v}') = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' \quad \vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}' = m\vec{a}'$$

Galilejeve transformacije

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

$$x = x' + v_0 t$$

$$v_x = v'_x + v_0$$

$$y = y'$$

$$v_y = v'_y$$

$$z = z'$$

$$v_z = v'_z$$

$$t = t'$$

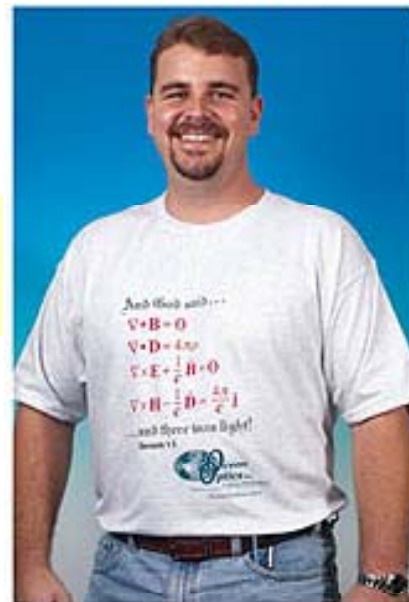
7

Priča

- Na nekim sveučilištima u Americi prodaju se majice sa Maxwellovim jednažbama.

Što je to tako specijalno s tim jednažbama da se nose na majicama?

Odgovor ćete saznati na predavanjima koja slijede.



Maxwellove jedn. – integralni i diferencijalni oblik

	<i>Integralni</i>	<i>Diferencijalni</i>
1.	$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$
2.	$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
3.	$\oint_K \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{S}$	$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4.	$\oint_K \vec{H} d\vec{s} = \iint_S \vec{J} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} d\vec{S}$	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Maxwellovi koncepti - elektromagnetizma

- ❑ Maxwell (Faraday) uvodi pojam polja – isti stupanj realnosti kao i tijela u Newtonovoj teoriji.
- ❑ Polje se širi konačnom brzinom.
- ❑ Maxwellova teorija pokazuje da se elektromagnetsko polje giba brzinom **300 000 km/s**, u potpunom slaganju s eksperimentalno određenom brzinom svjetlosti.
- ❑ Svjetlost je elektromagnetski val određene valne duljine koje izaziva osjet vida u našem oku.
- ❑ Maxwellova teorija daje samo broj **300 000 km/s**, a ne definira u odnosu na što se to svjetlost giba.
- ❑ Elektromagnetski val (svjetlost) se širi i kroz vakuum!!!

Nesuglasje Newtona i Maxwella

- I Newtonova teorija mehanike i Maxwellov elektromagnetizam su u izvrsnom slaganju s eksperimentima, a temelje se na sasvim različitim konceptima koji su kontradiktorni.
 - sila djeluje trenutno (Newton)
 - polje se širi konačno brzinom (Maxwell)
 - svjetlost se širi i kroz vakuum (Maxwell)
- Maxwellova teorija se protivi apsolutnosti prostora i vremena:
 - Primijenite Galilejeve transformacije na Maxwellove jednačbe,
 - Kad fizikalno interpretirate rezultate tih matematičkih transformacija zaključujete:
 - promatrač u laboratoriju proučava elektromagnetsku pojavu te uočava da se elektromagnetska pojava odvija u skladu s Maxwellovim jednačbama;
 - promatrač koji se giba i promatra tu istu pojavu uočiti će da se ona ne odvija u skladu s Maxwellovim jednačbama;
 - Iskustvena činjenica je sasvim drugačija, takve pojave nisu nikad opažene. (Mobilni jednako dobro funkcionira i na brodu i na rivi)
 - Apsolutnost prostora i vremena zahtjeva da Maxwellove jednačbe vrijede samo u jednom izdvojenom sustavu – **očito priroda nije takova.**

11

Kako uskladiti Newtona i Maxwella

- Sve do 1905, do pojave Einsteinove specijalne teorije relativnosti, mehanicističko tumačenje dominira.
- Postulira se postojanje etera, vrlo “čudne” tvari:
 - bez mase
 - bez viskoznosti
 - fantastične elastičnosti
 - nedetektibilan bilo kojim instrumentom
 - stanje gibanja – apsolutno mirovanje; samo bi se u sustavu koji miruje s obzirom na eter elektromagnetske pojave odvijale po Maxwellovim jednačbama
 - prožima svu tvar
- Samo promatrač koji miruje s obzirom na eter bi uočio brzinu svjetlosti od 300 000 km/s
- “Zdravi razum” – intuicija: Motritelji koji se gibaju različitim brzinama kroz eter morali bi izmjeriti različite brzine svjetlosti.

12

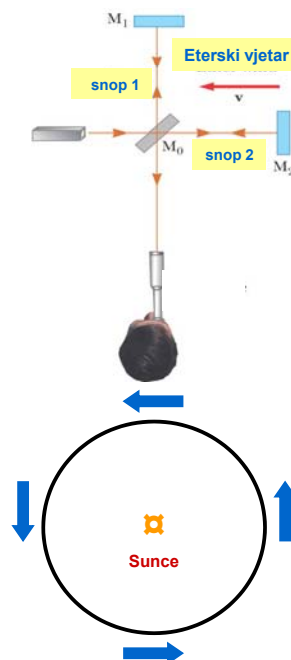
Kako eksperimentalno utvrditi postojanje etera.

- ❑ Izmjeriti brzinu Zemlje u odnosu na eter.
- ❑ Prema Galilejevim transformacijama, ako se Zemlja giba kroz eter brzinom v , a svjetlost brzinom c u odnosu na eter onda bi trebalo vrijediti:
 - brzina svjetlosti u odnosu na Zemlju je $c+v$ kad se Zemlja giba ususret svjetlu (k izvoru svjetla).
 - brzina svjetlosti u odnosu na Zemlju je $c-v$ kad se Zemlja od izvora svjetla.
- ❑ Ovo je temeljna ideja Michelson-Morley eksperimenta: izmjeriti promjene u brzinu svjetlosti zbog gibanja Zemlje kroz eter brzinom od 30 km/s (brzina gibanja Zemlje oko Sunca).
- ❑ Uz brojna i precizna ponavljanja, eksperiment je jasno ukazivao da nema etera, jer je uvijek izmjerena ista brzina svjetlosti bez obzira da li se Zemlja giba ususret svjetlu ili od svjetla.
- ❑ U svim inercijalnim sustavima brzina svjetlosti je ista. Svjetlost ne treba medij da bi se širila. Nema etera.

13

Michelson-Morleyev eksperiment

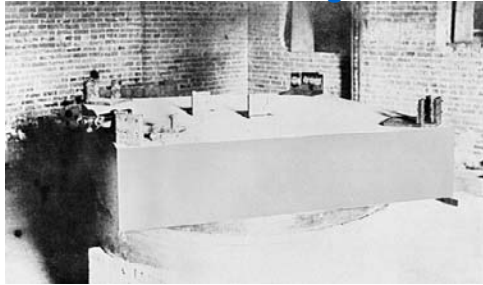
- ❑ Michelson-Morleyev (1881) koriste efekt interferencije.
- ❑ Gibanje Zemlje kroz eter brzinom v ekvivalentno je strujanju etera s obzirom na Zemlju brzinom v u suprotnom smjeru.
- ❑ Slika lijevo ilustrira situaciju kad se Zemlja giba na desno, pa eterski vjetar struji na lijevo brzinom v .
- ❑ Kad svjetlost putuje k zrcalu M_2 brzina joj je $v-c$ a kad se reflektira brzina joj je $c+v$.
- ❑ Brzina svjetlosnih zraka u snopu 1 se ne mijenja.
- ❑ Reflektirani snopovi 1 i 2 se ponovo preklapaju i proizvode interferencijski uzorak.
- ❑ Interferencijski uzorak ovisi o razlici u fazi snopova svjetlosti 1 i 2 koja se može javiti ako su brzine širenja snopova 1 i 2 različite.
- ❑ Pažljivim mjerenjem nije uočena nikakva promjena interferencijskog uzorka koji bi jasno ukazao na različite brzine širenja svjetlosti zbog različitog smjera gibanja Zemlje oko Sunca ili zbog rotacije mjernog sustava za 90° koja bi trebala uzrokovati promjenu brzine svjetlosnog snopa 1.



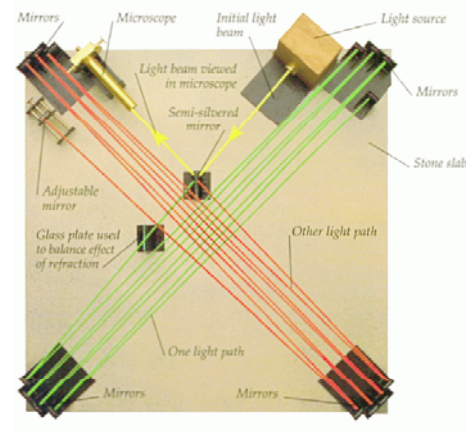
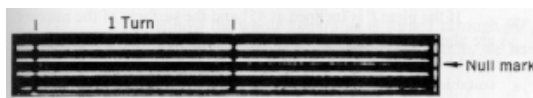
14

Michelson – Morleyev eksperiment

Original



Rezultat



15

Eisnteinov prostor-vrijeme

- Einstein razriješio dilemu: nema etera, svjetlost ne treba nikakav medij da bi se širila i za svakog i svugdje uvijek ima istu brzinu, svjetlost nikad ne miruje.
- Kako je to moguće da onaj koji juri i onaj koji sjedi vide istu brzinu svjetlosti. Svakidašnje iskustvo nam kaže da bi onaj koji juri za svjetlosti brzinom od **100 000 km/s (Ante)** treba izmjeriti brzinu od **200 000 km/h**, a onaj koji sjedi (**Stipe**) bi izmjerio **300 000 km/s**. Naravno **Stipe** bi se složio s **Antom** jer **Stipe** vidi da **Ante** trči za svjetlosti brzinom od **100 000 km/s**.
- Ali kad **Ante** i **Stipe** sjednu za stol (**eto problema**) oba tvrde da su izmjerili istu brzinu od **300 000 km/s**
- Einstein kaže ako onaj koji trči (**Ante**) za svjetlošću izmjeri istu brzinu kao i onaj koji sjedi (**Stipe**) onda **Ante mora izmjeriti različitu dužini i različito vrijeme** od **Stipe**.
- Einstein zaključuje Newtonova ideja apsolutnog prostora i vremena je kriva, **dva promatrača u relativnom gibanju neće izmjeriti iste udaljenosti i iste vremenske intervale**.
- Prostor i vrijeme su međusobno povezani (isprepleteni): prostor i vrijeme se međusobno podešavaju tako da se uvijek dobija ista brzina svjetlosti bez obzira kolike su brzine promatrača. Govori se **4-dimenzionalnom prostor-vremenu**.

Specijalna teorija relativnosti

- Einstein definira dva postulata na kojim se temelji specijalna teorija relativnosti
 - Svi zakoni prirode (i zakoni mehanike i elektromagnetizma) isti su za sve promatrače u relativnom jednolikom gibanju po pravcu
 - Svjetlost putuje brzinom jednakom za sve opažače bez obzira kojom brzinom oni putuju jedni prema drugima.
- Srednjoškolska matematika je dovoljna da se dobiju izrazi koji nam omogućavaju da točno izračunamo koliko će se razlikovati udaljenosti i vremenski intervali dvaju promatrača u relativnom gibanju.
- Matematički aparat ne čini specijalnu teoriju relativnosti izazovnom već način razmišljanja koji je u potpunosti suprotan našem svakidašnjem iskustvu.



1905 publicira rad
kojim definira specijalnu
teoriju relativnosti

17

Relativnost istovremenosti (1)

- Pretpostavite da jedan promatrač (Ante) primjeti da su se dva neovisna događaja (Crveni i Plavi događaj) dogodila istovremeno. Pretpostavite da i drugi promatrač (Dora), koja se giba konstantnom brzinom v s obzirom na Antu, primjeti ista dva događaja. Hoće li za Doru ta dva događaja također biti istovremena?
- Ogovor: općenito govoreći, ne!

Ako se dva promatrača gibaju relativno jedan prema drugome, uglavnom se neće složiti oko istovremenosti događaja.

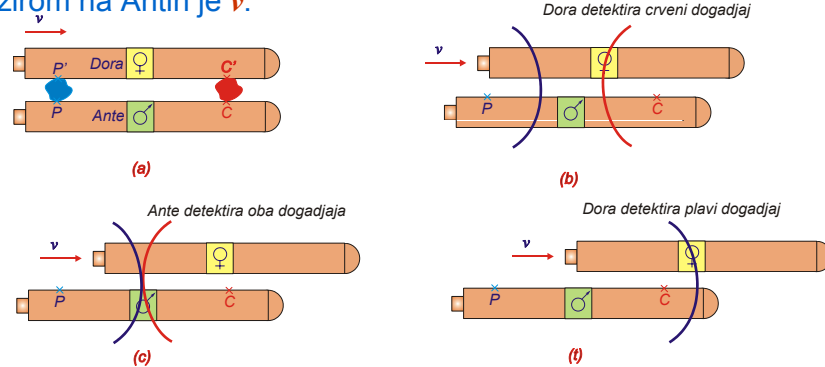
- Ne možemo reći je li jedan promatrač u pravu, a drugi ne. Oboje su u pravu.

Istovremenost nije apsolutni već relativni koncept, koji ovisi o gibanju promatrača.

18

Relativnost istovremenosti (2)

- Dva meteora (plavi i crveni) pogode svemirske brodove u kojima se nalaze Ante i Dora, i ostave oznake P, P', C i C'. Brzina Dorinog broda s obzirom na Antin je v .



Ante: Svjetlost s plave i crvene oznake došla je u isto vrijeme do mene. Prema oznakama vidim da se nalazim točno na sredini između njih, stoga zaključujem da su se plavi i crveni događaj dogodili istovremeno.

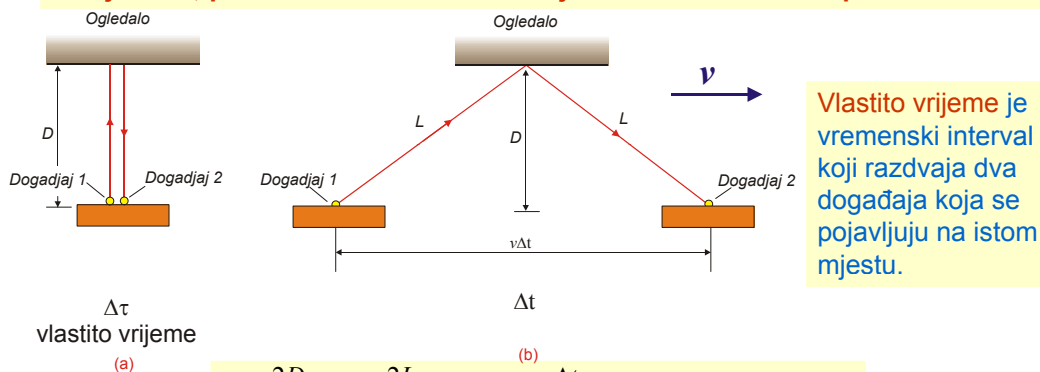
Dora: Svjetlost s crvene oznake došla je prije nego svjetlost s plave. Ali prema oznakama vidim da se nalazim točno na sredini između njih, pa zaključujem da događaji nisu bili istovremeno. Crveni se dogodio prije plavog.

19

Relativnost vremena = dilatacija vremena

- Ako dva promatrača, koja se gibaju jedan prema drugome, mjere vremenski interval (ili vremensku udaljenost) između dvaju događaja, općenito će naći različite rezultate. Zašto? Zato što prostorna udaljenost između događaja utječe na vremenske intervale izmjerene od opažača.

Vremenski interval između dvaju događaja ovisi o njihovoj prostornoj udaljenosti; prostorna i vremenska udaljenost su neraskidivo povezani.



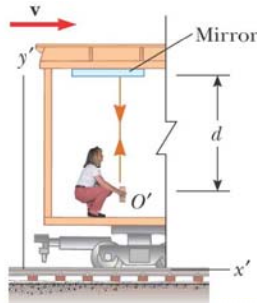
$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c}, \quad \Delta t = \frac{2L}{c} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \text{Dilatacija vremena}$$

Applet: <http://www.glenbrook.k12.il.us/gbssci/phys/shwave/tdilate.html>

20

Dilatacija vremena

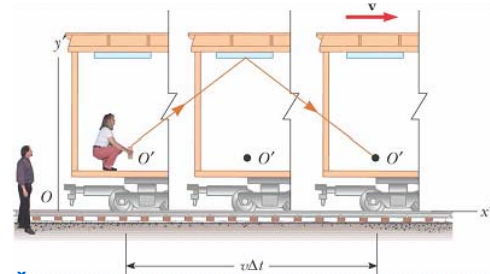
Vremenski period se izražava brojem događaja koji se ponavljaju pravilnim ritmom.



Djevojka u vlaku izmjeri, da vrijeme za koje svjetlost prevali put od baterije do zrcala te se reflektira i vrati nazad iznosi:

$$\Delta t_o = \frac{2d}{c}$$

Za čovjeka na peronu sat u vlaku kuca sporije. Za čovjek na peronu svi događaji (pa i biološki procesi) u vlaku odvijaju se usporeno. Potpuno isto vidi djevojka iz vlaka za nju se svi događaji na peronu odvijaju usporeno, pa i biološki procesi.



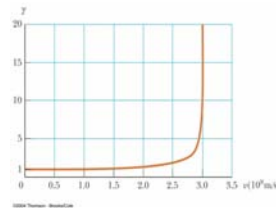
Čovjek na peronu izmjeri da vrijeme za koje svjetlost prevali put od baterije do zrcala te se reflektira i vrati nazad iznosi:

$$\Delta t = \frac{2d}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_o$$

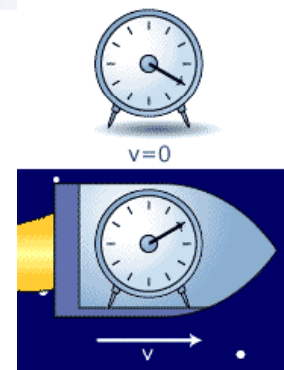
21

Dilatacija vremena

- Dilatacija vremena nije dio našeg svakidašnjeg iskustva jer su brzine kojima se mi gibamo zanemarive prema brzini svjetlosti pa efekte dilatacije ne možemo uočiti.
- Faktor $\gamma = 1/(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ je uvijek veći od 1.
- Kad se brzina približava brzini svjetlosti γ naglo raste
- Ako se sat giba s obzirom na promatrač brzinom $0.995 c$, dok na tom satu koji se giba otkuca 1 sekunda na satu koji miruje u odnosu na promatrača otkuca 10 sekundi.
- Vlastito vrijeme je vrijeme između dva događaja koje izmjeri promatrač za kojeg su se ti događaji dogodili na istom mjestu.



v/c	γ
0.001 0	1.000 000 5
0.010	1.000 05
0.10	1.005
0.20	1.021
0.30	1.048
0.40	1.091
0.50	1.155
0.60	1.250
0.70	1.400

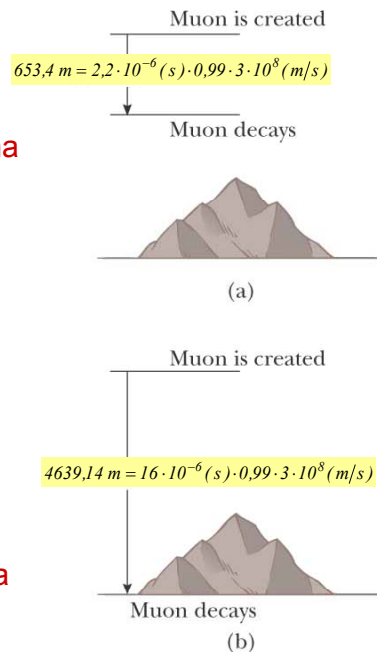


v/c	γ
0.80	1.667
0.90	2.294
0.92	2.552
0.94	2.931
0.96	3.571
0.98	5.025
0.99	7.089
0.995	10.01
0.999	22.37

22

Dilatacija vremena – eksperimentalne potvrde

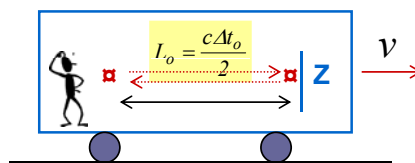
- Dilatacija vremena se zaista događa i eksperimentalno je potvrđena brojnim primjerima.
 - 1972 usporedba vremenskih intervala izmjerena atomskim satova u avionu i na Zemlji bila je u skladu s predikcijama specijalne teorije relativnosti.
 - mioni su nestabilne čestice istog električnog naboja kao i elektron, ali 207 puta veće mase
 - vlastito vrijeme poluživota miona je $\Delta t_0 = 2,2 \mu\text{s}$ (vrijeme izmjereno satom koji “nosi” mion, tj. u sustavu u kojem mion miruje)
 - Za promatrača na Zemlji vrijeme poluživota miona je $\gamma \Delta t_0 = 16 \mu\text{s}$ (brzina miona je $0,99 c$)
 - Mjerenja su u izvrsnom slaganju s predikcijama teorije relativnosti.



23

Relativnost prostora-kontrakcija dužine

- Promatrač u vlaku koji se giba brzinom v mjeri udaljenost od sebe do zrcala Z, tako da izmjeri vrijeme koje je potrebno svjetlosti da prevali put od izvora do zrcala Z i natrag. Vrijeme koje izmjeri promatrač je vlastito vrijeme, a udaljenost iznosi $L_0 = c\Delta t_0/2$. L_0 je vlastita dužina jer je izmjerena od promatrača koji se ne giba spram dužine.
- Promatrač na peronu vidi da se vlak giba, brzinom v . On određuje udaljenost na isti način kao i promatrač u vlaku, tako da izmjeri koliko vremena protekne na njegovom satu dok svjetlost napravi put od izvora do zrcala i natrag. Te iz izmjerenog vremena Δt i iz poznavanja brzine svjetlosti i brzine vlaka nađe izraz koji određuje dužinu L .
- Dužina objekta je za γ -puta ($\gamma \geq 1$) manja ako se objekt giba u odnosu na promatrača.
- Dužina objekta izmjerena u sustavu u kojem objekt miruje zove se vlastita dužina objekta; to je najveća dužina.



$$L = c\Delta t$$

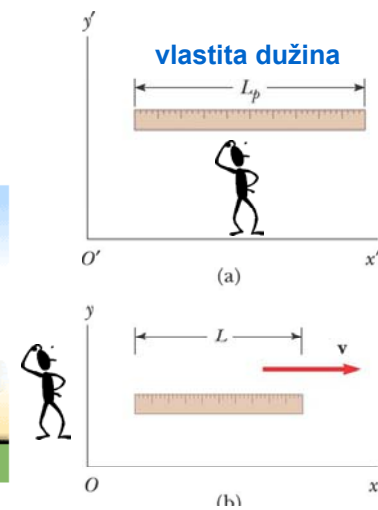
$$\Delta t = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c} \gamma^2$$

$$L = \frac{c\Delta t}{2\gamma^2} = \frac{c\Delta t_0 \gamma}{2\gamma^2} = \frac{c\Delta t_0}{2\gamma} = \frac{L_0}{\gamma}$$

24

Motritelj dužine

- Opazrač koji mjeri dužinu objekta koji se relativno giba prema njemu izmjeri kraću dužinu u smjeru gibanja, (lopta koja odmiče od nas velikom brzinom će biti slična palačinki).



$$L(\text{u gibanju}) = L(\text{na miru}) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

25

Lorentzove transformacije

- Za koordinate

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt); & y' &= y; & z' &= z; & t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x &= \gamma(x' + vt'); & y &= y'; & z &= z'; & t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

- Za par događaja

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x' / c^2)$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x / c^2)$$

26

Posljedice Lorentzovih transformacija

□ Istovremenost:

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right) \xrightarrow{\text{Za dva istovremena događaja u } S' \text{ vremenski interval u } S \text{ iznosi}} \Delta t = \gamma \frac{v \Delta x'}{c^2}$$

□ Dilatacija vremena:

Događaji na istom mjestu u S'

$$\Delta x' = 0; \Delta t' = \Delta t_0 \longrightarrow \Delta t = \gamma \Delta t_0$$

□ Kontrakcija duljine:

Podsjetimo se: $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t)$

Tijelo (npr. šipka) miruje u S' : $\Delta x' = L_0$

Šipka se giba u S . Da bi je mogli izmjeriti, nužno je $t = 0$. A uzmimo: $\Delta x = L$

Iz svega ovog slijedi: $L = L_0 / \gamma$

27

Slaganje brzina

□ Iz Lorentzovih transformacija za infinitezimalni pomak i vrijeme:

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

te se neposredno dobiva x-komponenta brzine čestice u mirnom sustavu S :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} \quad \text{ili:}$$

$$v_x = \frac{v_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2} v_x'} \quad (8a)$$

28

Relativistička količina gibanja

- U klasičnoj fizici veličina $\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{u}_i$ je očuvana.
- Promatrajući relativističke sudare čestica u sustavima S i S'
 - npr. obje čestice imaju isti iznos, a suprotni smjer brzine u y smjeru
- Dolazimo do zaključka da ova gornja veličina nije očuvana
 - Niti u sustavu S ni S'
- Stoga ćemo definirati relativističku količinu gibanja $\mathbf{p}$, sa svojstvima
 - $\mathbf{p}$ je očuvana u sudarima,
 - $\mathbf{p}$ se približava vrijednosti $m\mathbf{u}$, kako se u/c približava nuli
- Definicija relativističke količine gibanja za objekt mase m koji se giba brzinom $\mathbf{u}$ s obzirom na inercijalni sustav S

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma m\mathbf{u}$$

29

Relativistička energija

- Zakon očuvanja energije je jedan od osnovnih zakona prirode
 - Koji je ekvivalentan tvrdnji da su svi fizikalni zakoni invarijantni na vremenske transformacije
- Da bi zadržali ovaj zakon i pri relativističkim brzinama, potrebno je definirati relativističku ukupnu energiju, uz uvjete:
 - Ukupna energije (E) zatvorenog sustava je očuvana,
 - E će se približavati klasičnoj vrijednosti kako se u/c približava nuli.
- Do izraza za relativističku energiju dolazimo na sljedeći način:
 - Iz drugog Newtonovog zakona i izraza za relativističku količinu gibanja slijedi: $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m\mathbf{u})}{dt}$
 - Kao i u klasičnoj mehanici, kinetičku energiju E_k definiramo kao rad izvršen silom da bi česticu mase m ubrzali iz stanja mirovanja do brzine u
 - Rješivši ovaj integral dobije se:

$$E_k = \int_{u=0}^u F dx = \int_0^u \frac{d(\gamma mu)}{dt} dx = \int_0^u u d(\gamma mu)$$

$$E_k = \int_0^u u d(\gamma mu) = \int_0^u m \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} u du = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right) = \gamma mc^2 - mc^2$$

- Energija mirovanja:

$$E_0 = mc^2$$

- Ukupna energija:

$$E = E_k + mc^2 = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

30

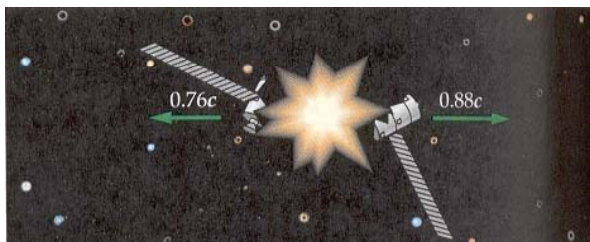
Energijski ekvivalent nekoliko objekata

Objekt	masa (kg)	energijski ekvivalent
Elektron	$9,11 \times 10^{-31}$	$8,19 \times 10^{-14} \text{ J}$
Proton	$1,67 \times 10^{-27}$	$1,50 \times 10^{-10} \text{ J}$
Jezgra urana	$3,95 \times 10^{-25}$	$3,55 \times 10^{-8} \text{ J}$
Čestica prašine	1×10^{-13}	$1 \times 10^4 \text{ J}$
Kovanica (10 lipa)	3.1×10^{-3}	$2,8 \times 10^{14} \text{ J}$

31

Primjer 4 – Masa koja nedostaje

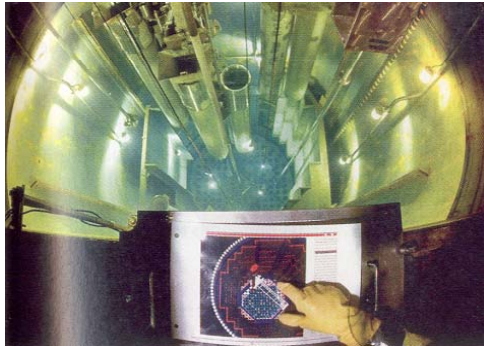
- Satelit u stanju mirovanja eksplodira na dva dijela. Jedan dio ima masu 150 kg i odmiče od mjesta eksplozije brzinom $0,76c$. Drugi dio odmiče u suprotnom smjeru brzinom $0,88c$. Izračunajte masu drugog dijela satelita.



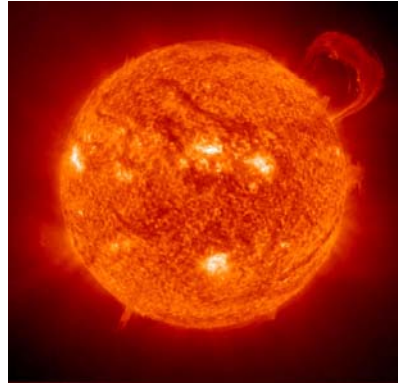
- Rezultat: 95 kg.
- *Domaći rad:* Da je masa drugog dijela satelita 210 kg, kolika bi mu bila brzina, uz pretpostavku da se dijelovi razlete u suprotnim smjerovima. (Rezultat: $0,64c$)

32

Pretvaranje mase u energiju



- Nuklearni reaktor pretvara masu u energiju u fisijskim reakcijama, u kojima se velike jezgre (npr. uran ili plutonij) raspadaju u manje dijelove. Na slici je prikazana nuklearna elektrana Tri milje u Pennsylvaniji; touch-screen za upravljanje je u prednjem dijelu slike.

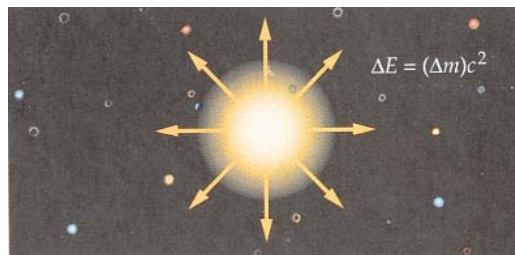


- Sunce, kao i druge zvijezde, su pogonjene fuzijskim reakcijama, u kojima se male jezgre (npr. vodika) ujedinjuju u teže jezgre (npr. helija). Premda se ovaj proces koristi i u hidrogenskoj bombi, još se uvijek nije uspjelo iskoristiti ga za praktični izvor energije na Zemlji.

33

Primjer 5

- Sunce zrači energiju snagom od $3,92 \times 10^{26}$ W. Izračunajte odgovarajuće smanjenje mase Sunca u sekundi zbog zračenja.

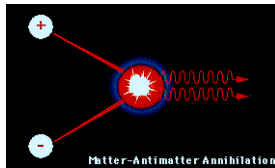


- Rezultat: $4,36 \times 10^9$ kg.
- Svake sekunde Sunce izgubi 4,36 milijuna tona mase! Masa Sunca je $m_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ Kg i ako bi Sunce nastavilo sjati istim intenzitetom imalo bi mase za oko $1,6 \times 10^{13}$ godina. Ova procjena je potpuno nerealna, jer će već za 4-5 milijardi godina Sunce uglavnom "sagorjeti" vodik u središtu, promijeniti intenzitet emisije i postati crveni div!

34

Materija i antimaterija

- ❑ Posebno zanimljivi aspekt ekvivalentnosti mase i energije je postojanje **antimaterije**.
- ❑ Za svaku poznatu elementarnu česticu postoji odgovarajuća čestica antimaterije (antičestica), koja ima istu masu, a suprotni naboj.
 - Npr. *elektron* ima masu $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg i naboj $-e = -1,60 \times 10^{-19}$ C; *antielektron* ima masu $9,11 \times 10^{-31}$ kg, a naboj $+1,60 \times 10^{-19}$ C
 - Budući antielektron ima pozitivno naboj, često ga zovemo **pozitron**.
- ❑ Antimaterija se često stvara u ubrzivačima čestica (akceleratorima).
 - Čak je moguće stvoriti i anti-atome, atome stvorene potpuno od antičestica.
 - Zanimljiva mogućnost je postojanje čitavih cijelih galaksija sastavljenih od antimaterije.
- ❑ Materija i antimaterija imaju zanimljivo ponašanje kad se susretnu – anihiliraju jedno drugo (tj. ponište se i pretvore u čistu energiju).
- ❑ Primjer: anihilacija elektrona i pozitrona

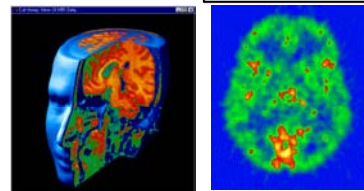
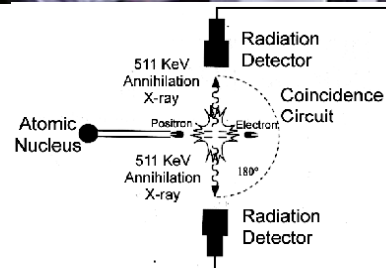


Elektroni pozitron anihiliraju kada dođu u kontakt. Kao rezultat emitiraju se dvije visokoenergijske gama zraka (fotoni). Masa upadnih čestica pretvorila se u energiju gama zraka.

35

Materija i antimaterija - primjena

- ❑ Anihilacija elektrona i pozitrona je osnova za tehniku dijagnosticiranja bolesti, koja se zove Position-Emission Tomography (PET), koja se često koristi za studiranje bioloških procesa u mozgu, srcu i drugim organima.
- ❑ U tipičnom PET pregledu mozga, u pacijenta se ubrizga glukoza (primarni izvor energije za aktivnost mozga), koja sadrži radioaktivne označivače (engl. tracers). Ovi označivači emitiraju pozitrone, koji odmah naiđu na elektron u mozgu i anihiliraju se. Rezultirajuća gama zraka izađe kroz pacijentovu lubanju i registrira se u PET skeneru, koji ih pretvoru u sliku koja prikazuje razinu glikoznog metabolizma u mozgu.
- ❑ Stoga, premda djeluje iznenađujuće, ova moćna dijagnostička tehnika zasniva se na efektu anihilacije materije i antimaterije u mozgu pacijenta.



36

Relativnost prostora i vremena

- ❑ Promatrači u relativnom gibanju imaju različite percepcije prostora i vremena.
- ❑ Identični satovi koje nose dva promatrača u relativnom gibanju neće izmjeriti jednako vrijeme koje je proteklo između dva događaja.
- ❑ Promatrači u relativnom gibanju koji jednakim metrom mjere neku duljinu neće izmjeriti istu vrijednost.
- ❑ Za putnika u avionu koji se giba brzinom usporedivom s brzinom svjetlosti čini se da sat na aerodromu kuca sporije te da se pista skratila, dok se onome iz kontrolnog tornja čini da se avion skratio te da sat u avionu kuca sporije (usporeno)
- ❑ Tko zna, možda je ovakvo iskustvo prostora i vremena za neku naprednu vanzemaljsku civilizaciju, čiji se transport odvija brzinom usporedivom s brzinom svjetlosti, dio svakidašnjeg iskustva odnosno intuicije.

37

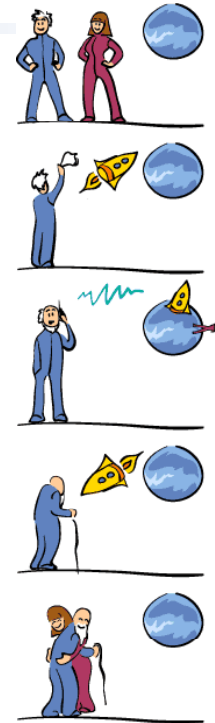
Nije sve relativno

- ❑ Nije sve relativno, brzina svjetlosti je ista za sve promatrače i najveća moguća brzina, **brzina svjetlosti je apsolutna kao i zakoni fizike**
- ❑ Apsolutnost brzine svjetlosti upućuje na povezanost (miješanje) prostora i vremena. To proizlazi iz činjenice da se dužine skraćuju za isti faktor za koje se intervali vremena usporavaju. Drugim riječima njihov produkt se ne mijenja. Dakle kad promatramo i prostor i vrijeme postoje svojstva koja ne ovise o promatraču (**apsolutnost prostor-vremena**).

38

Paradoks blizanaca

- ❑ U donjoj ilustraciji jedan brat blizanac napušta Zemlju u raketu koja se giba brzinom 75% svjetlosti. Odlazi kao tek rođena beba a vraća se na Zemlju u dobi od 37 godina te susreće svog brata u dobi od 57 godina. **Zašto ako je sve relativno?**
- ❑ Dilatacija vremena je relativan efekt. Svaka osoba koja vidi drugu osobu u gibanju, vidi da sat druge osobe ide sporije (kao usporeni film). Te svaka osoba legitimno tvrdi da sat druge osobe ide sporije. **Razlog zašto blizanac u raketi ostaje mlađi je iskustvo kojem nije bio podvrgnut brat blizanac.** Da se vrati na Zemlju, on mora usporiti, okrenuti se te ubrzati, to je iskustvo kojem nije izložen brat na Zemlji i to uzrokuje razliku u njihovoj dobi.



39

Nedostaci specijalne teorije relativnosti

- ❑ Einstein nije bio zadovoljan, bio je svjestan dva bitna nedostatka u svojoj specijalnoj teoriji relativnosti:
 - razmatra se prostor-vrijeme samo za jednolika pravocrtna gibanja
 - ne razmatra se gravitacija koja je sveprisutna
- ❑ Po Newtonovoj teoriji gravitacije, gravitacijska sila djeluje trenutno, dok je prema specijalnoj teoriji relativnosti najveća moguća brzina u Svemiru jednaka brzini svjetlosti.
- ❑ Einstein mora redefinirati Newtonov zakon gravitacije da bi bio u skladu s postulatima specijalne teorije relativnosti.

40

Einstein: "Najsretnija misao mog života"

Sjedio sam u patentnom uredu u Bernu kad mi je najjednom došla slijedeća ideja:

Kada osoba slobodno pada ona neće osjećati svoju vlastitu težinu.

Slobodan pad poništava gravitaciju.

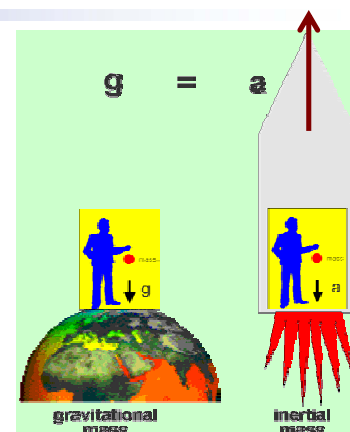


41

Einstein i gravitacija

- **Princip ekvivalencije** (osnovni postulat Opće teorije relativnosti): Homogeno gravitacijsko polje ekvivalentno je sustavu koji se ubrzava. Eksperimenti koji se izvode u homogenom gravitacijskom polju g i sustavu koji se ubrzava akceleracijom $a=g$ dat će iste rezultate.

- Troma masa (m_{troma}): svojstvo tijela da se protivi promjeni gibanja, određuje se iz kvocijenta sila i akceleracije
- Teška masa ($m_{\text{teška}}$): svojstvo tijela preko kojeg djeluje privlačnom silom na neko drugo tijelo
- U načelu ove dvije mase ne bi trebale biti jednake, jer je po definiciji njihovo fizikalno značenje različito.
- Brojnim eksperimentima utvrđena je ista vrijednost tromе i teške mase bilo kojeg tijela s točnošću od 10^{-12} .
- U Newtonovoj mehanici to se može tumačiti samo kao slučajna koincidencija.
- U Einsteinovoj općoj teoriji relativnosti to prirodno proizlazi iz principa ekvivalencije, jer ako se gravitacijsko polje može nadomjestiti akceleracijom onda troma i teška masa moraju biti jednake.



Isti ishod svih eksperimenata u oba sustava.

$$m_{\text{troma}} \Leftrightarrow m_{\text{teška}}$$

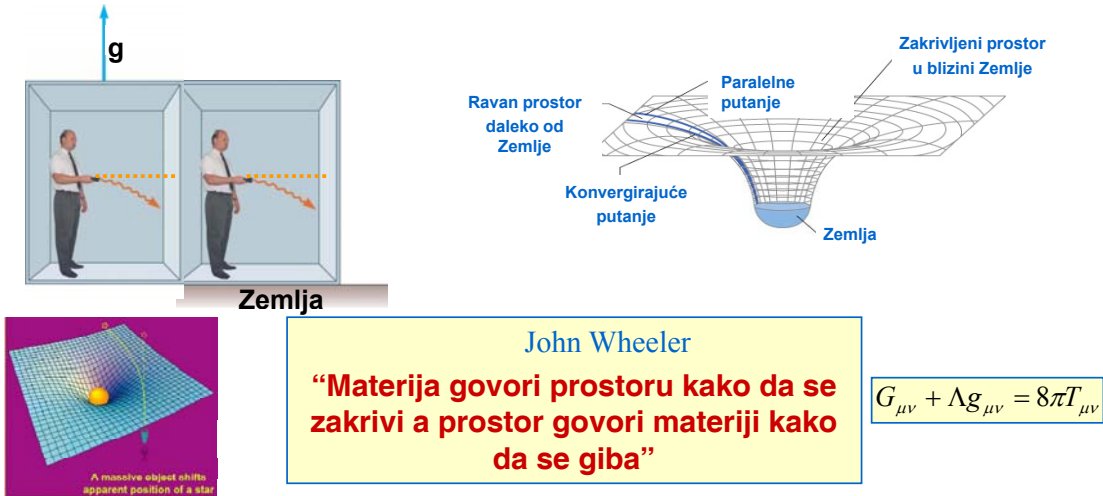
$$F_G = G \frac{m_{\text{teška}} \cdot m_{\text{teška}}}{r^2}$$

$$F = m_{\text{troma}} a$$

42

Zakrivljenost prostor-vremena (1)

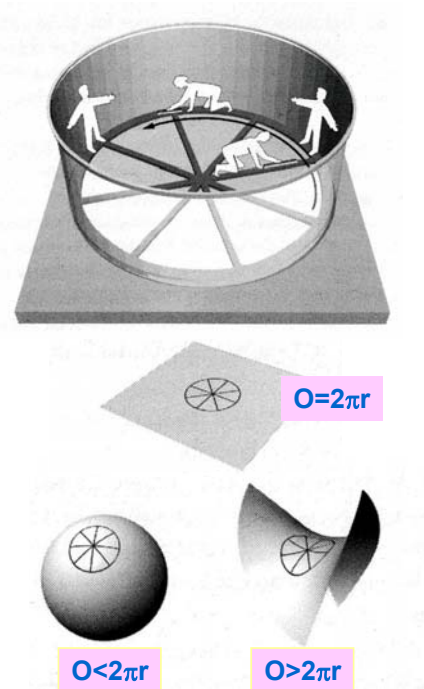
- Einstein uvodi zakrivljenost prostor-vremena za definiranje gravitacije u danoj točki. Što je gravitacija na danom mjestu veća, veća je i zakrivljenost, a gravitacija je veća što je koncentracija materije (materija=energija + masa) veća.



43

Zakrivljenost prostor-vremena (2)

- Akceleracija je i kad se mijenja samo smjer brzine a iznos ostaje isti, takav je primjer platforma koja rotira konstantnom kružnom brzinom.
- Kao i kod svakog ubrzano gibanja, promatrač u tom sustavu uočava da se nalazi u ubrzanom sustavu.
- Na promatrača djeluje centrifugalna sila, koja ostvaruje efekt kao i gravitacija, vuče tijela prema obodu platforme. (Svemirske stanice koriste ovaj efekt da bi kreirale umjetan osjećaj gravitacije.)
- Mirni promatrač van platforme, promatra satove koji su razmješteni duž radijusa.
- Satovi koji se nalazi bliže osi rotacije imaju manju brzinu od satova koje se nalaze dalje od osi rotacije.
- Sat koji se giba brže kućat će sporije: sat uz sam rub platforme kuća sporije od sat koji je bliži osi vrtnje.
- Sat bliže rubu se nalazi u "jačem gravitacijskom polju"
- Sat u jačem gravitacijskom polju kuća sporije.**

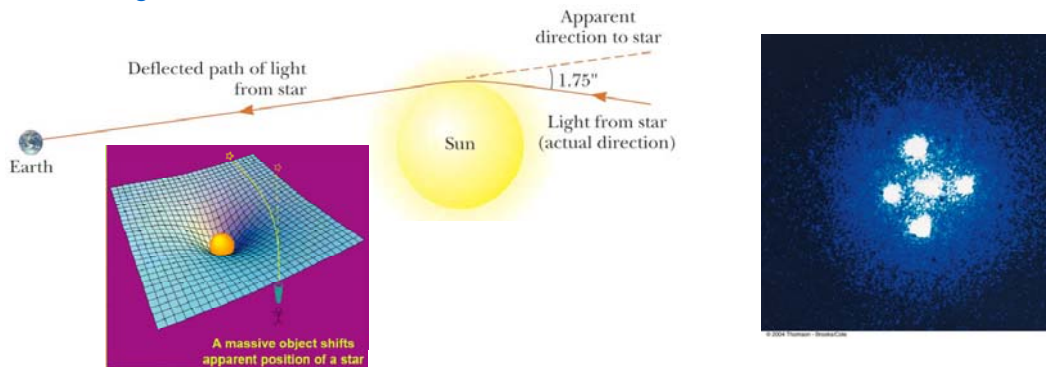


44

Da li uistinu opažamo zakrivljenost prostora-vremena?

- ❑ Ako je prostor-vrijeme zakrivljeno onda na primjer zraka svjetlosti kad prolazi kraj sunca mora imati svinutu putanju.
- ❑ Opaženo 1919 (promatrajući svjetlost s nekoliko zvijezda za vrijeme pomrčine)
- ❑ To je toliko odjeknulo da je Einstein postao naglo slavan pa je u pismu prijatelju napisao:

Tako sam bio obasut pitanjima, pozivima tako da sanjam da gorim u paklu a poštar je davao koji me stalno optrčava i baca nove svežnjeve pisama a ja nisam odgovorio ni na stara.

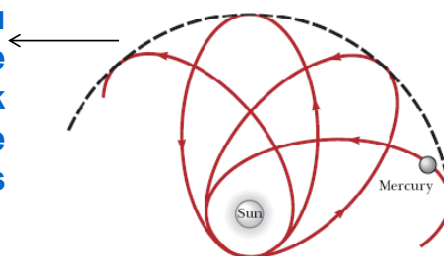


45

Eksperimentalne potvrde opće teorije relativnosti

- ❑ Opća teorija relativnosti tj. Einstenova teorija gravitacije prošla je sve eksperimentalne testove.

Newtonova teorija nije u stanju objasniti precesiju eliptične putanje Merkura oko Sunca dok Einsteinova opća teorija daje rezultat u izvrsnom slaganju s izmjerenim podacima.



Einstein: "Nekoliko dana bio sam van sebe od oduševljenja"

Izmjereno: 43,5 lučnih sekundi/stoljeće
Einstein: 42,9 lučnih sekundi/stoljeće

46

Daljnje posljedice opće teorije

- ❑ Zbog zakrivljenosti prostor-vremena vremenski intervali gdje je jača gravitacija su duži (vrijeme sporije teče) nego tamo gdje je slabija.
- ❑ To je i potvrđeno. Na primjer radio signali poslani sa zemlje, mimo Sunca, letjelici Viking (blizu površine Marsa) su putovali duže zbog gravitacije Sunca.
- ❑ Zbog toga će na primjer svjetlost koja dolazi iz područja jače gravitacije biti crvenija (crveni pomak).
- ❑ Einsteinova opća teorija relativnosti predviđa i postojanje crnih rupa. Crna rupa je svemirsko tijelo gdje je gravitacija toliko snažna tako da je prostor-vrijeme zatvoren sam u sebe pa ni svjetlost ne može pobjeći. Kad bi se Zemlja sažela na promjer od 3 km postala bi crna rupa.

47

GPS - Global Positioning System

- ❑ 24 satelita - svaki u 12 satnoj orbiti oko zemlje u ukupno 6 orbitalnih ravnina
- ❑ Za točnost veću od 30 metara potrebno uzeti u račun dilataciju vremena zbog specijalne teorije relativnosti i zbog opće teorije relativnosti (razliku vremenskih intervala u satelitu i na zemlji).
- ❑ Takvi uređaji već za 200\$.



48

Global Position System (GPS) - 1

- ❑ GPS prijemnik u avionu određuje svoj trenutni položaj i smjer gibanja uspoređujući vremenski signal koji prima od nekoliko GPS satelita (između 6 i 12) i koristeći metodu triangulacije, poznavajući trenutne položaje svakog satelita.
- ❑ Preciznost GPS sustava je izvrsna!
 - Čak i jednostavni ručni GPS prijemnik može odrediti apsolutni položaj na površini Zemlje do na 5 do 10 metara u nekoliko sekundi.
 - GPS prijemnik u automobilu može odrediti položaj, iznos i smjer brzine u realnom vremenu.
- ❑ Da bi postigli ovakvu razinu preciznosti, otkucaji sata na GPS satelitu moraju se poznavati do na točnost od **20-30 nanosekundi**.
- ❑ Međutim, s obzirom da se sateliti neprestano gibaju na velikoj visini s obzirom na promatrača na površini Zemlje, moraju se uzeti u obzir efekti predviđeni Specijalnom i Općom teorijom relativnosti!
- ❑ S obzirom da promatrač na površini Zemlje vidi satelite kako se gibaju s obzirom na njega, Specijalna teorija relativnosti predviđa da bi trebali vidjeti kako satovi na satelitima otkucavaju sporije. Jednostavni proračuni pokazuju da bi satovi na satelitima trebali gubiti oko **7 mikrosekundi dnevno** zbog sporijeg otkucavanja.

49

Global Position System (GPS) - 2

- ❑ Nadalje, sateliti se kreću po visokim orbitama, gdje je zakrivljenost prostor-vremena zbog Zemljine mase manja nego na površini Zemlje.
- ❑ Opća teorija relativnosti predviđa da će za satovi bliže objektima s velikom gravitacijom otkucivati sporije nego oni smješteni dalje od gravitacijskih objekata.
- ❑ Stoga, promatrano sa Zemlje, satovi na satelitima će izgledati kao da otkucavaju brže nego identični satovi na površini zemlje.
- ❑ Jednostavni proračuni pokazuju da bi satovi na svakom GPS satelitu trebali žuriti za oko 45 mikrosekundi dnevno, s obzirom na satove na Zemlji.
- ❑ **Kombinacija ovih efekata predviđenih Specijalnom i Općom teorijom relativnosti znači, da bi, da se ne uzmu u obzir, satovi na satelitima žurili za oko 38 mikrosekundi dnevno!**
- ❑ Ovo ne izgleda mnogo, ali s obzirom da se od satova zahtjeva preciznost reda veličine nekoliko nanosekundi, da se ovi efekti ne uzmu u obzir vremenske greške određivanja položaja baziranim na ovakvim satelitima, bile bi krive za oko **2 minute dnevno**, što bi odgovaralo pogrešci u određivanju položaja za oko **10 kilometara dnevno!**
- ❑ *Stoga zaključujemo da se za pravilan rad GPS sustava treba uzeti u obzir efekte predviđene Specijalnom i Općom teorijom relativnosti!*

50

Sažetak (1)



1. Svi prirodni zakoni imaju isti oblik u svim inercijalnim sustavima, tj. u sustavima koji se relativno jedan prema drugome gibaju jednoliko po pravcu.

2. Brzina svjetlosti u vakuumu ($c = 299\,792\,458$ m/s) jednaka je u svim inercijalnim sustavima i ne ovisi o gibanju izvora ili detektora svjetlosti.



Istovremenost nije apsolutni već relativni koncept, koji ovisi o gibanju promatrača.



Vremenski interval Δt_0 između dva događaja u istoj točki prostora inercijalnog sustava S' (**vlastito vrijeme**) i vremenski interval Δt između ta dva ista događaja, ali mjeren iz sustava S koji se prema S' giba brzinom v , povezani su relacijom

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad (\text{dilatacija vremena}) \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \quad \beta = v/c$$

51

Sažetak (2)



Duljina objekta mjerena u referentnom sustavu u kojem objekt miruje zove se **vlastita duljina (L_0)**. Mjerenje duljine istog objekta iz bilo kojeg referentnog sustava koji se giba prema njemu brzinom v , uvijek je manja i iznosi:

$$L = L_0/\gamma \quad (\text{kontrakcija duljine})$$



Lorentzove transformacije:
za prijelaz iz inercijalnog sustava S u inercijalni sustav S' koji se, s obzirom na sustav S giba jednoliko po pravcu uzduž osi x brzinom v

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt); & y' &= y; & z' &= z; & t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x &= \gamma(x' + vt'); & y &= y'; & z &= z'; & t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned}$$

52

Sažetak (3)

- Relativistički zakon slaganja brzina:

za brzine uzduž x osi

$$u' = \frac{u-v}{1 - \frac{v}{c^2}u}; \quad u = \frac{u'+v}{1 + \frac{v}{c^2}u'}$$

- Relativistička količina gibanja čestice mase mirovanja m_0 koja se giba brzinom v jest

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = m \vec{v}; \quad m = \gamma m_0$$

- Energija mirovanja:

$$E_0 = m_0 c^2$$

- Ukupna energija:

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$$

- Kinetička energija:

$$E_k = E - E_0 = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

- Kada se masa tijela promijeni za Δm , ukupna mu se energija promijeni za

$$\Delta E = c^2 \Delta m$$

- Veza između ukupne energije i količine gibanja:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

- Veza između količine gibanja i kinetičke energije:

$$p^2 c^2 = E_k^2 + 2m_0 c^2 E_k$$

- Veza između v , p i E :

$$E \vec{v} = c^2 \vec{p}$$

53

Pitanja za provjeru znanja

1. Navedite i objasnite osnovne postulatske teorije relativnosti. (obavezno)
2. Objasnite pojmove istovremenosti, kontrakcije duljine i dilatacije vremena u specijalnoj teoriji relativnosti. Navedite i objasnite Lorentzove transformacije.
3. Napišite i objasnite relativistički zakon slaganja brzina. Napišite i objasnite relativističke relacije za količinu gibanja, energiju mirovanja, ukupnu energiju i kinetičku energiju

54