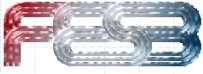


Školska godina 2008./2009.



Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje
Studij elektrotehnike i informacijske tehnologije

Fizika 2

Predavanje 1

Elastičnost materijala, Harmoničko titranje.

Dr. sc. Nikola Godinović
(Nikola.Godinović@fesb.hr)

Danas ćemo raditi:

(V. Henč-Bartolić i P. Kulišić: "Valovi i optika", poglavlje 1)

- ◆ **Elastičnost materijala**
 - Hookeov zakon
 - Moduli elastičnosti materijala
 - ◆ Youngov modul elastičnosti
 - ◆ Modul smicanja (poseban slučaj torzija)
 - ◆ Volumni modul elastičnosti
- ◆ **Harmoničko titranje**
 - Jednostavno harmoničko titranje
 - Prigušeno titranje
 - Prisilno titranje
 - ◆ amplitudna rezonancija
 - ◆ energijska rezonancija

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1 2

Elastičnost materijala

- ◆ Djelovanje sile na neko tijelo može biti dvojako: sila može promijeniti gibanje tijela ili oblik i veličinu tijela (uzrokovati deformaciju tijela).
- ◆ Pod djelovanjem vanjskih sila tijelo se deformira, mijenjaju se razmaci između molekula te se javljaju sile koje nastoje vratiti molekule u ravnotežni položaj, ove sile se očituje kao unutrašnje elastične sile.
- ◆ sile koje su raspodijeljene po površini tijela zovu se **površinske (plošne) sile**, a sile raspodijeljene po cijelom volumenu su **volumne sile (npr. gravitacija)**
- ◆ U statičkoj ravnoteži unutrašnje sile naprezanja u materijalu jednake su vanjskim silama koje su ih izazvale i suprotnog su predznaka
- ◆ **Savršeno elastična** tijela nakon prestanka djelovanje sile poprimaju prvobitan oblik, **savršeno plastična** tijela zadržavaju svoj deformirani oblik, a **djelomično elastična tijela** su po promjeni oblika između ova dva ekstremna slučaja
- ◆ **Napetost** definiramo kao omjer sile i površine na koju sila djeluje: $\sigma = \frac{F}{S}$
- ◆ Sila ne mora djelovati okomito na površinu (kao što je to slučaj u fluidu), pa se sila koja djeluje na površinu može u načelu rastaviti u silu koja djeluje okomito na površinu i tangencijalno na površinu.

normalna napetost

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F \cos \varphi}{\Delta S}$$

tangencijalna napetost

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F \sin \varphi}{\Delta S}$$

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

3

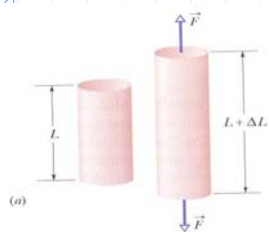
Deformacije i moduli elastičnosti

- ◆ Različite napetosti uzrokuju različite deformacije (istezanje, smicanje, torzija, ...) ali za sve je zajedničko da se mogu zapisati:
modul elastičnosti (N/m²) = $\frac{\text{napetost (N/m}^2\text{)}}{\text{relativna deformacija}}$
- ◆ **E - Youngov module elastičnosti** mjeri otpornost čvrstih tijela pri promjeni njihove duljine
- ◆ **G - Modul smicanja** mjeri otpornost čvrstih tijela pri pomaku paralelnih ravnina u čvrstom tijelu (poseban oblik smicanja je torzija)
- ◆ **B - Volumni modul elastičnosti** mjeri otpornost čvrstih tijela ili tekućina pri promjeni njihovog volumena

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

4

Hookeov zakon, Elastična sila



U područje linearne deformacije vrijedi Hookeov zakon. **E-Youngov modul elastičnosti**

$$\frac{F}{S} = \sigma = E \frac{\Delta L}{L}$$

$$F = \frac{ES}{L} \Delta L = k \Delta L$$

$$\vec{F}_{el} = -\vec{F} = -k \Delta \vec{L}$$

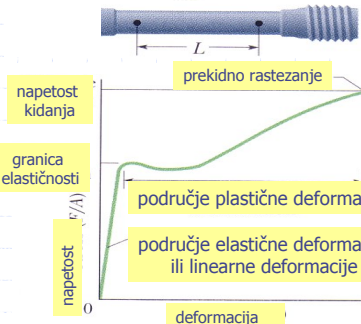
Elastična sila kojom se tijelo opire deformaciji (harmonična sila)

Pri produženju štapa poprečne dimenzije se također smanjuju.

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\sigma}{E}$$

$$\mu = \frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L}}$$

μ -Poissonov broj

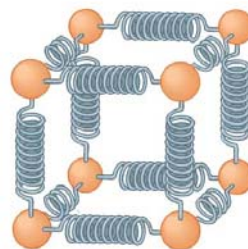
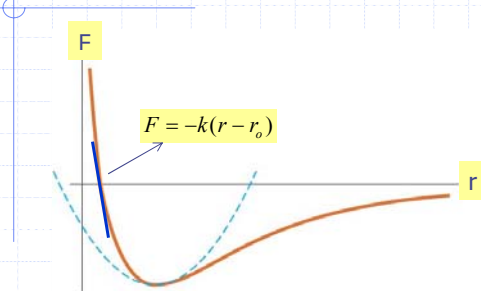


Materijal	Gustoća (kg/m ³)	Youngov Modula E (10 ⁹ N/m ²)	elastičnosti	Napetost kidanja σ _m (N/m ²)	Granica elastičnosti σ _e (N/m ²)
Čelik	7860	200		400	250
Aluminij	2710	70		110	95
Staklo	2190	65		50 ^b	—
Beton	2320	30		40 ^b	—
Drvo	525	13		50 ^b	—
Kost	1900	9 ^b		170 ^b	—
Poliester	1050	3		48	—

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

5

Mikroskopski model elastične deformacije



- ◆ Kad nema napetosti atomi se nalaze u ravnotežnim položajima, međusobno su razmaknuti za r_0 i sila između atoma je jednaka nuli. Pri deformaciji razmak između atoma se mijenja, povećava ili smanjuje, ovisno o tome kako djeluje vanjska sila. Kad se smanji razmak između atoma sila je odbojna a kad se poveća razmak između atoma sila je privlačna. Za male deformacije ovisnost sile o promjeni razmaka između atoma $r - r_0$ je linearna, što na se na makroskopskoj razini očituje kao elastična deformacija.

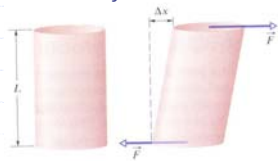
Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

6

Smicanje, volumni modul elastičnosti

- ◆ Sile paralelne s površinom tijela uzrokuju deformacije koje zovemo smicanje:

Smicanje:



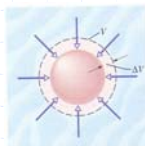
G – modul smicanja (N/m²)

$$\frac{F}{S} = \tau = G \frac{\Delta x}{L} = G \cdot \tan \beta \approx G \cdot \beta$$

$$G = \frac{1}{S} \frac{\Delta F}{\Delta \beta}$$

- ◆ Sile okomite na oplošje čvrstog tijela ili tekućine uzrokuju promjenu volumena tijela:

Kompresija



$$p = \frac{F}{S} = -B \frac{\Delta V}{V}$$

B – volumni modul elastičnosti

$$B = -V \frac{\Delta p}{\Delta V}$$

$$K = \frac{1}{B} = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

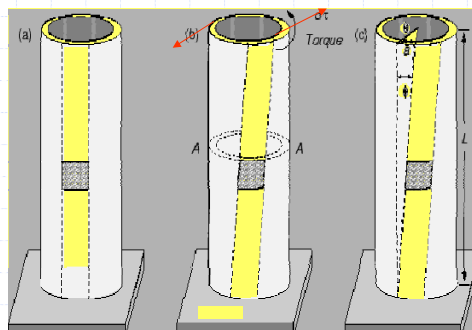
Stlačivost ili kompresibilnost: Promjena volumena za jediničnu promjenu tlaka

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

7

Torzija – poseban oblik smicanja

- ◆ Donji kraj učvršćen a na gornji kraj djeluje par sila i dolazi do uvrtnja (torzije).
- ◆ Koliki je moment sile potreban za torziju valjkaste šipke **duljine L** i **polumjera R**



- Izvodnica valjka prije deformacije pravac
- Pri torziji izvodnica se deformira u spiralu

$$\text{relativna transverzalna deformacija} = \frac{r\theta}{L}$$

kut torzije proporcionalan vanjskom momentu para sila

G – modul torzije

D – torziona konstanta

$$\frac{dF}{2\pi r dr} = G \frac{r\theta}{L} \rightarrow dF = \frac{2\pi G \theta}{L} r^2 dr$$

$$dM = r dF = \frac{2\pi G \theta}{L} r^3 dr$$

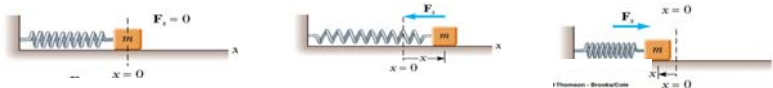
$$M = \frac{2\pi G \theta}{L} \int_0^R r^3 dr = \frac{G \pi R^4}{2L} \theta = D \theta$$

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

8

Uvod u harmoničko titranje

- ◆ Titranje je gibanje tijela oko ravnotežnog položaja koje se ponavlja u pravilnim vremenskim razmacima.
- ◆ Primjeri titranja u prirodi:
 - Tijelo obješeno o oprugu
 - Žice muzičkih instrumenata, bubnjevi
 - Dijafragme u zvučnicima
 - Atomi i molekule u čvrstim tijelima – prijenos topline
 - Čestice zraka kad se kroz njih širi zvučni val – prijenos zvuka
 - Elektroni u antenama – prijenos informacija
- ◆ Titranje je nejednoliko ubrzano gibanje a uzrokuje ga sila koja nastoji vratiti tijelo u položaj ravnoteže.
- ◆ Jednostavno harmoničko titranje: uzrokovano je silom $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$ koja je razmjerna iznosu pomaka iz položaja ravnoteže, a suprotnog smjera od pomaka:



- ◆ Sistem koji titra pod utjecajem takve sile zove se harmonički oscilator.

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

9

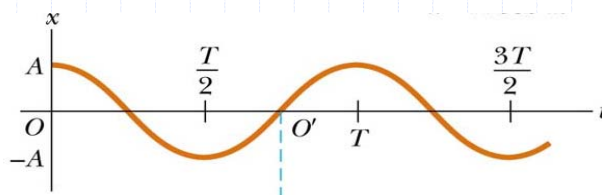
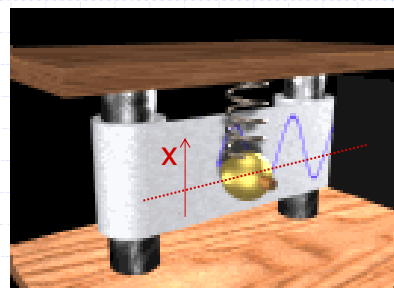
Jednadžba gibanja jednostavnog harmoničkog titranja

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0; \quad x(t) = ?$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi);$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Smjer gibanja
papira

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

10

Jednostavno harmoničko titranje

- ◆ **Elongacija** (x)-pomak od ravnotežnog položaja
- ◆ **Amplituda** (A)-maksimalna elongacija
- ◆ **Period** (T)-vremenski interval između dva uzastopna ista stanja titranja.
 - Period je vrijeme za koje čestica prođe kroz sva moguća mehanička stanja.
 - Mehaničko stanje je određeno elongacijom i brzinom.
- ◆ **Frekvencija** ν ($\text{Hz}=1/\text{s}$), broj titraja u jedinici vremena, $\nu = 1/T$,
 - jedan herc=jedan titraj u sekundi
- ◆ Fizikalni sadržaj konstante ω slijedi iz vremenske periodičnosti gibanja.
 $x(t) = x(t + T) \rightarrow \omega T = 2\pi \rightarrow \omega(\text{rad/s}) = 2\pi/T = 2\pi\nu$; ω - kutna frekvencija
- ◆ Veličina $(\omega t + \varphi)$ je **faza titranja**
- ◆ **Početna faza** φ -određena je početnim elongacijom x_o i početnom brzinom v_o .

$$A = \sqrt{(x_o)^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega x_o}{v_o}$$

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

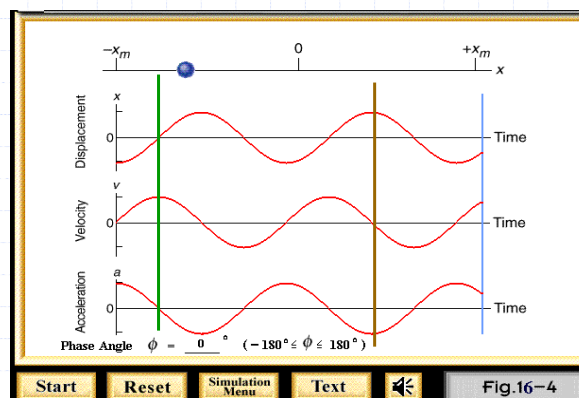
11

Odnos elongacije, brzine i akceleracije

Interaktivni primjer:

http://www3.interscience.wiley.com:8100/legacy/college/halliday/0471320005/int_ills/s_int_ills.html (Fig. 16-4)

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi); \quad v(t) = A \omega \cos(\omega t + \varphi); \quad a(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$



$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = -A \cos \omega t$$

$$v(t) = A \omega \sin \omega t$$

$$a(t) = A \omega^2 \cos \omega t$$

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

12

Energija harmoničkog titranja

- Mehanička energija tijela koje izvodi harmoničko titranje $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ je suma njegove kinetičke i potencijalne energije.

kinetička energija

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2; v = A \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_K = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) =$$

$$\frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$$

potencijalna energija

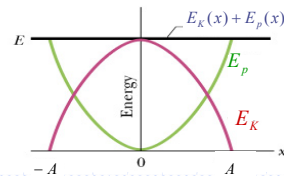
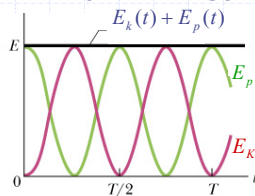
$$\int_0^x -kx dx = -(E_{px} - E_{p0})$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

ukupna mehanička energija

$$E = E_K + E_p = \frac{1}{2} k A^2$$

- ✓ Ukupna mehanička energija harmoničkog oscilatora je očuvana.
- ✓ Potencijalna energija prelazi u kinetičku energiju i obratno.



Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

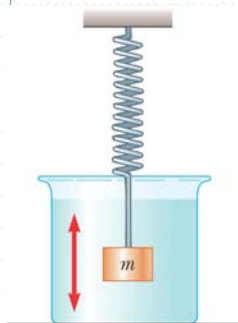
13

Prigušeno titranje

- Prigušeno titranje se javlja kad uz harmoničku silu na tijelo djeluje i sila otpora sredstva, razmjerna iznosu brzine a suprotnog smjera od brzine.
- Tijelo obješeno na oprugu koja titra u tekućini je primjer prigušenog titranja.
- Na tijelo izmaknuto iz ravnotežnog položaja uz harmoničku silu djeluje i sila trenja

$$\vec{F}_{tr} = -b\vec{v} = -b\dot{\vec{x}}$$

- Jednadžba gibanja prigušenog harmoničkog oscilatora:



$$m \ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} - \text{vlastita frekvencija}$$

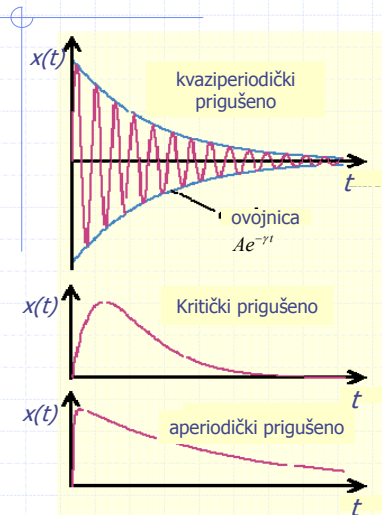
$$2\gamma = \frac{b}{m}; \quad \gamma - \text{faktor prigusenja}$$

Vlastita frekvencija ovisi samo o građi oscilatora, a ne o okolini u kojoj se nalazi oscilator

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

14

Prigušeno titranje-razine prigušenja



Kviziperiodički prigušeno

$$\omega_0^2 > \gamma^2$$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega_p t + \varphi)$$

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Kritički prigušeno

$$\omega_0^2 = \gamma^2$$

$$x(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-\gamma t}$$

Gibanje nema karakter titranja, tijelo se relativno brzo vraća u ravnotežni položaj.

Aperiodički prigušeno

$$\omega_0^2 < \gamma^2$$

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}$$

Gibanje nema karakter titranja, tijelo se jako sporo vraća u ravnotežni položaj.

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

15

Logaritamski dekrement i Faktor dobrote

- Logaritam omjera amplitude nakon jednog perioda je logaritamski dekrement:

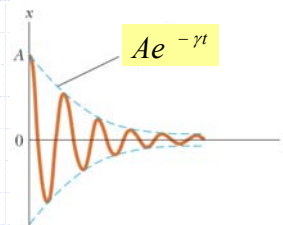
$$\lambda = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T$$

- Period T i λ se lako dadu izmjeriti pa se tako može odrediti i faktor prigušenja: $\gamma = \lambda/T$

- Faktor dobrote Q se definira kao:

$$Q = 2\pi \frac{\text{srednja energija titrajnog sistema unutar jednog perioda}}{\text{gubitak energije unutar jednog perioda}}$$

$$2\pi \frac{\frac{1}{4}(a(t) + a(t+T))}{\frac{1}{2}(a(t) - a(t+T))} \approx \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$



- Što je faktor dobrote veći to je prigušenje manje, za neprigušeni harmonički oscilator $Q \rightarrow \infty$
- Vremenska promjena ukupne mehaničke energije kod prigušenog titranja je:

$$\frac{dE}{dt} = -2m\gamma v^2$$

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

16

Prisilno titranje

- ◆ Titranje prigušenog oscilatora prepuštenog samom sebi prestane nakon nekog vremena.
- ◆ Takvo titranje prigušenog harmoničkog oscilatora naziva se slobodno titranje a frekvencija tih titranja se zove **frekvencija slobodnih titranja**.
- ◆ Ako je faktor prigušenja zanemariv ($\gamma=0$) slobodna titranja nazivaju se **vlastita titranja** a njihova **frekvencija vlastita frekvencija**.
- ◆ **Prisilno titranje** se javlja kad se na prigušeno titranje djeluje vanjska vremenski periodična sila tako da se održi konstantna amplituda titranja.
- ◆ Vanjska sila vrši pozitivan rad nad česticom koja titra i tako povećava njenu energiju, odnosno nadoknađuje gubitak mehaničke energije zbog trenja



Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

17

Jednadžba gibanja prisilnog titranja

- ◆ Na tijelo mase m djeluju tri sile: harmonička sila, sila otpora sredstva (sila trenja i vanjska sila $F_o \sin \omega t$), pa je jednadžba gibanja prisilnog titranja dana izrazom:

$$m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + kx = F_o \sin \omega t$$

- ◆ Razumno je pretpostaviti da čestica neće titrati ni vlastitom frekvencijom ni frekvencijom slobodnih titranja već frekvencijom vanjske pogonske sile.

Stacionarno rješenje jednadžbe prisilnog harmoničkog titranja:

$$x(t) = A \sin(\omega t - \varphi); \quad \varphi - \text{fazni pomak između sila i elongacije}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \quad A = \frac{F_o}{m\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

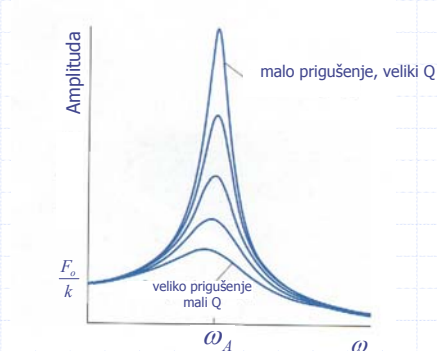
- ◆ Početna faza kod prisilnog titranja nije više proizvoljna konstanta već ovisi o frekvenciji vanjske sile, faktoru prigušenja i vlastitoj frekvenciji.

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

18

Amplitudna rezonancija

- Amplituda je maksimalna kad je frekvencija vanjske sile jednaka $\omega_A = \sqrt{\omega_o^2 - 2\gamma^2}$ te se kaže da je nastupila amplitudna rezonancija.



Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

19

Energijska rezonancija

- Kod prisilnog titranja vanjska sila vrši rad i tako nadoknađuje izgubljenu mehaničku energiju zbog trenja.
- Vanjska sila će predavati maksimalnu snagu $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ titrajnom sustavu kad su vanjska sila i brzina u fazi, tj. kad sila i brzina u istom trenutku imaju maksimalne vrijednosti.

$$F = F_o \sin \omega t$$

$$v = \frac{A}{v_{\max}} \omega \cos(\omega t - \varphi)$$

Kad je $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ brzina i sila su u fazi

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \infty = \frac{2\gamma\omega}{\omega - \omega_o} \rightarrow \omega = \omega_o$$

$$v_{\max} = \omega A = \frac{\omega F_o}{m \sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

gornji izraz se može napisati i u drugacijem obliku uz pomoc

$$\gamma = \frac{b}{2m} \quad \text{i} \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

$$v_{\max} = \frac{F_o}{\sqrt{\left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2 + b^2}}$$

- Kad je frekvencija pogonske sile jednaka vlastitoj frekvenciji $\omega_E = \omega_o$ nastupa energijska rezonancija, tada tijelo za vrijeme od jednog perioda primi maksimalnu energiju jednaku $E = \pi A(\omega_o) F_o$

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

20

Rezonancije u prirodi i tehnici

- ◆ Rezonancija je česta u mnogim mehaničkim, električnim i drugim uređajima:
 - rezonancija se koristimo prilikom ugađanja TV ili radio prijemnik na neku stanicu
 - akustičke rezonancije služe za ugađanje muzičkih instrumenata
- ◆ Rezonancija ponekad može biti opasna i štetna.
- ◆ Zbog naglog porasta amplitude nastaju velika naprezanja u materijalu što može dovesti do oštećenja ili loma.
- ◆ Tahoma most - rezonantna pojava (<http://www.youtube.com/watch?v=AsCBK-fRNRk>)
- ◆ Pojava rezonancije u ovom slučaju tumači se stvaranjem periodične sile potiska. Najvjerojatnije da je vjetar uzrokovao na području mosta periodično stvaranje vrtloga iznad i ispod mosta tj. različiti dinamički tlak odnosno statički tlak, kad se frekvencija nastanka vrtloga poklopila sa frekvencijom slobodnih titranja mosta došlo je do pojave rezonancije, tj. do znatno povećane amplitude titranja što je izazvalo naprezanje u materijalu i na kraju pucanje konstrukcije mosta.

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

21

Sažetak (1) – Elastičnost materijala

- ◆ Parametri koji opisuju elastična svojstva materijala jesu:

Youngov modul elastičnosti (otpornost pri promjeni duljine)	$E = -\sigma \frac{l}{\Delta l}$	$\sigma = F/S$ – napetost $\varepsilon = \Delta l/l$ – deformacija (uzdužna)
Volumni modul elastičnosti (otpornost na promjenu volumena)	$B = -p \frac{V}{\Delta V}$	$p = F/S$ – tlak $\varepsilon = \Delta V/V$ – deformacija (volumna)
Modul smicanja – otpornost pri pomaku paralelnih ravnina	$G = \frac{\tau}{\beta}$	$\tau = F/S$ – napetost smicanja β – deformacija (kutna)

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

22

Sažetak (2) - Uvod

- ◆ Gibanje koje se ponavlja u jednakim vremenskim intervalima naziva se **periodično gibanje**.
- ◆ Periodično gibanje pri kojemu se materijalna točka giba oko položaja ravnoteže i pri tom prijeđe jednake trajektorije u oba smjera naziva se **titranje**.
- ◆ Svako titranje uzrokuje određena sila koja nastoji vratiti sistem u položaj ravnoteže.
- ◆ Jednostavno harmoničko titranje: **uzrokovano silom koja je proporcionalna iznosu pomaka iz položaja ravnoteže, a suprotnog smjera**
- ◆ Sistem koji titra pod utjecajem takve sile zove se **harmonički oscilator**.
- ◆ Broj titraja u jedinici vremena naziva se **frekvencija f**. U SI sustavu jedinica za frekvenciju je hertz (hertz), znak $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$.
- ◆ **Period titranja T** je vrijeme potrebno da se ostvari jedan potpuni titraj, a povezano je s frekvencijom relacijom **$T = 1/f$** .

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

23

Sažetak (3) – Jednostavno harmoničko titranje

- ◆ Sistem koji titra zbog utjecaja harmoničke sile ($F = -kx$) zove se **harmonički oscilator**.
- ◆ Jednadžba gibanja harmoničkog oscilatora može se napisati u obliku:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

- ◆ Rješenje ove jednadžbe daje vremensku ovisnost elongacije

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

gdje je A amplituda, $(\omega t + \varphi)$ faza, a φ početna faza titranja.

- ◆ **Kružna frekvencija** (vlastita frekvencija) jednaka je
- ◆ **Brzina i akceleracija** dobiju se iz slijedećih relacija:

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

- ◆ **Amplituda i početna faza titranja** određene su početnim pomakom i početnom brzinom (početnim uvjetima).

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

24

Sažetak(4) - Prigušeno harmoničko titranje

- ◆ Tijelo pričvršćeno za jedan kraj elastične opruge koje je izvedeno iz položaja ravnoteže a zatim prepušteno samo sebi izvodi prigušeno titranje s frekvencijom koja je određena svojstvom tromosti tijela (masom m), svojstvom elastičnosti tijela (konstanta opruge k) i otporom fluida (faktor prigušenja γ , $F = -bv$, $2\gamma = b/m$).
- ◆ Jednadžba gibanja prigušenog harmoničkog titranja

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_o x = 0 ; \gamma = \frac{b}{2m}$$
- ◆ Rješenje jednadžbe kvaziperiodički prigušenog titranja ($\omega_o > \gamma$) :

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega_p t + \varphi) \quad \omega_p = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$$
- ◆ Kad je vlastita frekvencija manja od faktora prigušenja ($\omega_o < \gamma$) nastaje gibanje koje nema karakter titranja, te se tijelo relativno brzo odnosno sporo vraća u ravnotežni položaj ovisno jačini prigušenja, to sporije što je prigušenje jače.

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

25

Sažetak(5) - Prisilno harmoničko titranje

- ◆ Prisilno titranje nastaje kad vanjska vremenski periodična sila, ($F_o \sin \omega t$) djeluje na gušeni harmonički oscilator.
- ◆ Jednadžba gibanja prisilnog harmoničkog titranja:

$$m\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + kx = F_o \sin \omega t$$
- ◆ Stacionarno rješenje jednadžbe prisilnog harmoničkog oscilatora:

$$x(t) = A \sin(\omega t - \varphi); \quad A = \frac{F_o}{m\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}; \quad \tan \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$
- ◆ **Amplitudna rezonancija** nastupa kad je frekvencija vanjske sile:

$$\omega_A = \sqrt{\omega_o^2 - 2\gamma^2}$$
- ◆ **Energijska rezonancija** nastupa kad je frekvencija vanjske sile jednaka vlastitoj frekvenciji

$$\omega_E = \omega_o$$

Računarstvo Fizika 2, Predavanje 1

26

Pitanja za provjeru znanja

1. **Ukratko objasnite sljedeće pojmove: periodično gibanje, harmoničko titranje, harmonička sila, harmonički oscilator, period, frekvencija, kružna frekvencija, amplituda, faza, početna faza. (obavezno)**
2. Što je harmonički oscilator? Izvedite jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora, nađite rješenja te jednadžbe te izraze za brzinu i akceleraciju. Grafički prikažite i usporedite ovisnost elongacije, brzine i akceleracije o vremenu?
3. Izvedite ovisnost kinetičke, potencijalne i ukupne energije kod jednostavnog harmoničkog titranja?
4. Kako se iz početnih uvjeta mogu odrediti amplituda i početna faza?
5. Napišite jednadžbu gibanje prigušenog harmoničkog oscilatora?
6. Skicirajte ovisnost pomaka tijela o vremenu za različite razine prigušenja i uvjete za pojavu pojedinog tipa prigušenja?
7. Što je logaritamski dekrement a što faktor dobrote?
8. Kada nastaje prisilno titranje i kako glasi jednadžba gibanja prisilnog titranja?
9. Što je amplitudna a što energijska rezonancija i pri kojim uvjetima se javlja amplitudna odnosno energijska rezonancija?
10. **Kakav je odnos faznog pomaka između sile i pomaka tijela odnosno brzine tijela kod amplitudne i energijske rezonancije?**