Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

Studij računarstva

Fizika 2

Auditorne vježbe 14

Uvod u valnu mehaniku

Ivica Sorić

(Ivica.Soric@fesb.hr)

Ponavljanje

- Materija, kao i svjetlost, posjeduje istodobno i valnu i čestičnu prirodu. Čestici mase m, koja se giba na pravcu brzinom v i ima ukupnu energiju E, odgovora ravni val kojemu su valna duljina λ i frekvencija ν dane de Broglievim relacijama: $\lambda = h/p$, $\nu = E/h$.
- Kod energija koje su usporedive (ili veće) s energijom mirovanja čestice (npr. za elektron E_0=511 keV), tj. kad su brzine blizu brzine svjetlosti, u gornje relacije uvrštavaju se relativistički izrazi za energiju i količinu gibanja. U suprotnom se mogu koristiti nerelativistički izrazi.
- Polažaj čestice x i njezina količina gibanja p ne mogu biti istodobno točno poznati. Vrijedi Heisenbergova relacija neodređenosti, koja je za gibanje duž pravca $\Delta x \Delta p \geq h$. Relacije neodređenosti vrijede i za energiju i vrijeme: $\Delta E \Delta t \geq h$.
- Za elektron u beskonačno dubokoj potencijalnoj jami širine L rješenja Schrödingerove jednadžbe uz rubne uvjete ($\psi(0)=\psi(L)=0$) daju moguća energijska stanja. Elektron iz jednog u drugo stanje može prijeći apsorbirajući ili emitirajući foton energije koja odgovara energijskoj razlici tih dvaju stanja $h\nu = |E_1 - E_2|$.

Primjer 1

- Pridružujući valove gibanju čestice, odrediti moment količine gibanja elektrona koji se giba po kružnoj putanji radiusa r oko jezgre atoma.

- Rezultat: $L = nh/2\pi$

Primjer 2

- Anoda katodne cijevi zrači X-zrake minimalne valne duljine 1 Å (1 Å=10^{-10} m). Kolika je valna dužina elektrona koji udaraju o anodu?

- Rezultat: $\lambda = 1{,}1 \times 10^{-11}$ m

Primjer 3

- Pretpostavimo da brzinu neke čestice možemo mjeriti uz točnost 0,1%. Odredite kolika je neodređenost položaja čestice ako je riječ o:
  a) kuglici mase 5 g koja se giba brzinom 2 m/s,
  b) elektronu koji se giba brzinom $3 \cdot 10^{6}$ m/s,
  c) elektronu koji se giba brzinom $1{,}8 \cdot 10^{8}$ m/s.

- Rezultat: a) $\Delta x \geq 6{,}63 \cdot 10^{-29}$ m; a) $\Delta x \geq 2{,}43 \cdot 10^{-7}$ m; a) $\Delta x \geq 3{,}24$ nm

Primjer 4

- Elektron ima kinetičku energiju 13 eV. Pretpostavimo da se brzina može odrediti s preciznošću od 1 %. S kojom neodređenočću se može izmjeriti položaj elektrona?

- Rezultat: $\Delta x = 3{,}4 \cdot 10^{-8}$ m
  - 13 eV je moguća kinetička energija elektrona u atomu vodika. Radius atoma vodika je oko 10^{-10} m, što je oko 300 puta manje od neodređenosti položaja elektrona!

Primjer 5

- Elektron pobuđen u atomu vratit će se u osnovno stanje za 10^{-8} sekundi. Pri tome se emitira foton čija je energija jednaka razlici potencijalnih energija osnovnog i pobuđenog stanja.
  a) Izračunati neodređenost u frekvenciji emitiranog fotona.
  b) Prilikom prelaska elektrona iz trećeg u prvo pobuđeno stanje vodika emitira se foton valne dužine 587 nm (žuta linija u spektru vodika). Izračunati neodređenost u valnoj dužini ako je neodređenost u frekvenciji jednaka kao u slučaju a).

- Rezultat: a) $\Delta\nu \geq 10^{8}\ s^{-1}$, b) $\Delta\lambda \geq 1{,}1\cdot 10^{-4}$ nm

Primjer 6

- Snop neutrona koji se gibaju brzinom od 1450 m/s upada na kristal soli, čija udaljenost između centara kristalne rešetke iznosi 0,282 nm.

  a) Izračunajte de Broglievu valnu duljinu neutrona.

  b) Kolike je kut prvog interferencijskog maksimuma nakon difrakcije neutrona?

- Rezultati: a) 0,273 nm, b) 29,1^{o}.

Ponavljanje

- Opći oblik Schrödingerove jednadžbe za česticu mase m koja se giba u potencijalu U(x,y,z):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = E\psi; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Rješenje Schrödingerove jednadžbe predstavlja valnu funkciju čiji kvadrat amplitude daje prostornu gustoću vjerojatnosti čestica opisanih valnom jednadžbom, tj. daje vjerojatnost nalaženja čestice u jediničnom volumenu u točki s koordinatama (x,y,z):

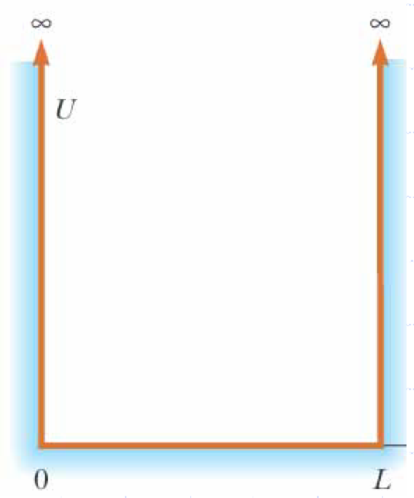
$$P(x,y,z) = \psi(x,y,z)\psi^*(x,y,z) = |\psi(x,y,z)|^2$$

- Ukupna vjerojatnost da se elektron nađe bilo gdje mora biti 1, dakle mora biti:

$$\int dP = \int P dV = \int |\psi(x,y,z)|^2 dV = 1$$

- Valna funkciju mora zadovoljavati sljedeće matematički uvjete:
  1. Jednoznačnost,
  2. Konačnost druge derivacije
  3. Kontinuiranost prve derivacije
  4. Kontinuiranost same funkcije
  5. Konačnost integrala $\int \psi\psi^* \mathrm{d}V$

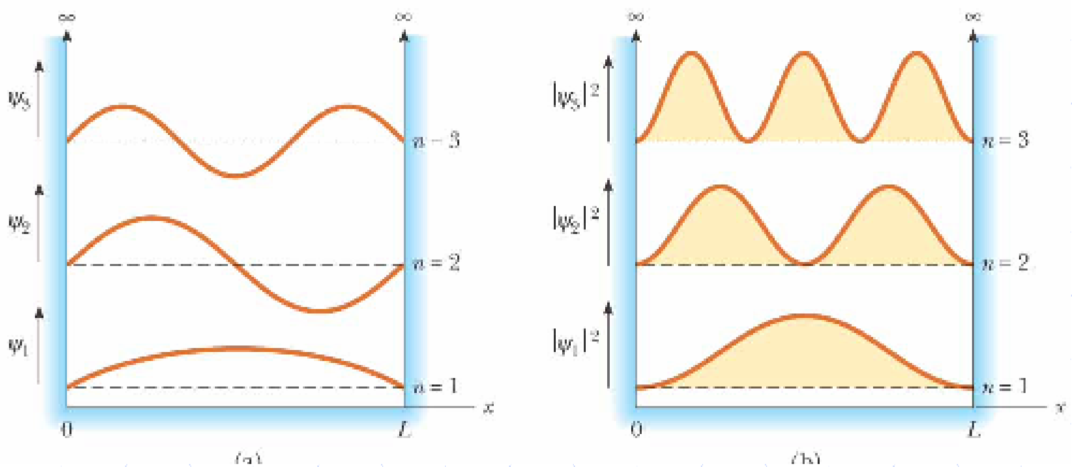
Beskonačna jednodimenzionalna potencijalna jama



Energija čestice
u potencijalnoj jami
je kvantizirana.

$$\mathrm{kL} = \mathrm{n}\pi \rightarrow \lambda_n = \frac{2\mathrm{L}}{\mathrm{n}}, n = 1,2,3,...$$

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} \rightarrow E_n = \frac{p_n}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$



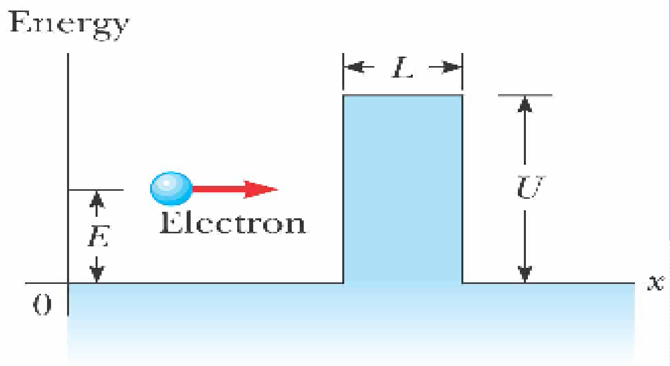
$$E_n = \frac{p_n}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

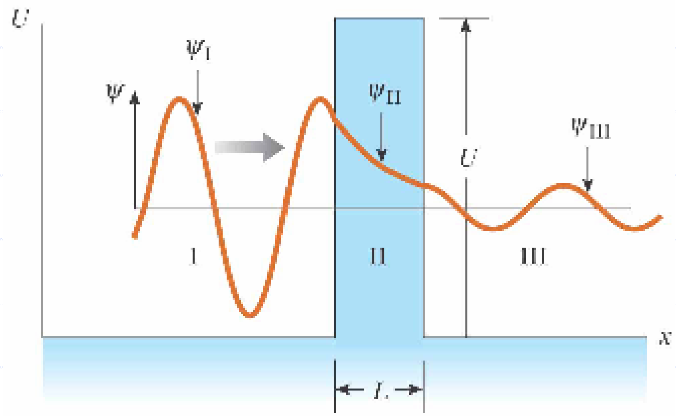
Tuneliranje kroz potencijalni bedem

- Čestica (elektron) energije E nailazi na područje širine L gdje potencijalna energija iznosi U, E<U.
- Po klasičnoj fizici čestica će se reflektirati jer nema dovoljno energije da preskoči ili penetrira kroz područje bedema.
- Prema kvantnoj fizici postoji mala ali konačna vjerojatnost nalaženja čestice iza potencijalnog bedema – **tunel efekt**
- Tunel efekt je eksperimentalno uočen i brojne su njegove primjene.

$$T = e^{-2CL} \text{ – koeficijent transmisije}$$

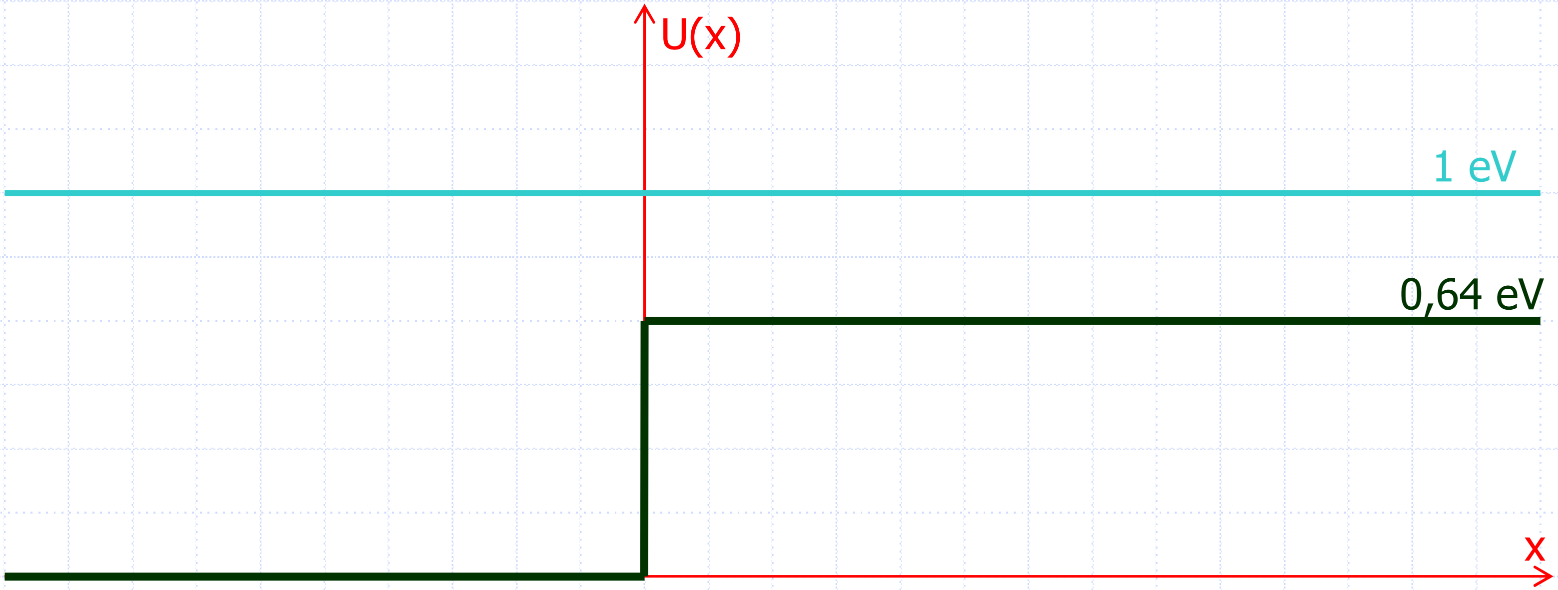
$$C = \frac{\sqrt{2m(U\text{-}E)}}{\hbar}$$





Primjer 7

- Snop elektrona kinetičke energije 1 eV upada ne potencijalni bedem visine 0,64 eV. Izračunati koeficijent refleksije i transmisije.



- Rezultat: R=0,06; T=0,94

Primjer 8

- Elektron energije 30eV upada na pravokutnu barijeru visine 40eV. Koja je vjerojatnost tuneliranja ako je debljina barijere: a)1nm, b)0.1nm?

- Rezultat: a)$T=8.5\cdot10^{-15}$, b)$T=0.039$

Primjer 9

- Elektron je zarobljen između dva neprobojna zida udaljena za 0.2 nm. Odredite prva tri energetska nivoa elektrona.
- Rezultat: E_1=9.43eV, E_2=37.7eV, E_3=84.9eV

- Objekt mase 1 mg giba se između dva neprobojna zida udaljena 1 cm. Izračunajte najmanju moguću brzinu objekta!
- Rezultat: $v_{min}=3.3 \cdot 10^{-30}$ m/s

Primjer 10

- Ako je elektron je zasužnjen unutar jednodimenzionalne, beskonačno duboke potencijalne jame širine L=100 pm, izračunajte:
  a) Koja je najmanja energija koju elektron može imati?
  b) Koliko energije treba dati elektronu da bi iz osnovnog stanja skočio u drugo pobuđeno stanje?
  c) Ako je elektron dobio energiju potrebnu da iz stanja E_1 skoči u stanje E_3 apsorbirajući svjetlo, pronađite valnu duljinu te svjetlosti?
  d) Jednom kad je elektron pobuđen u drugo pobuđeno stanje, koje valne duljine svjetlosti može emitirati vraćajući se u osnovno stanje?

- Rezultati: a) E_1=37,7 eV; b) ΔE_{31}=302 eV; c) λ=4,12 nm; d) λ_{31}=4,12 nm; λ_{32}=6,6 nm, λ_{21}=11 nm

Ponavljanje

- Ukupni broj vodljivih elektrona u uzorku metala:

$$N_{vodljivih\ elektrona} =$$
$$= N_{atoma} \cdot M_{valentnih\ elektrona\ po\ atomu}$$

- **Gustoća (n) vodljivih elektrona** u uzorku :

$$n = \frac{broj\ vodljivih\ elektrona\ u\ uzorku}{volumen\ uzorka}$$

- Broj atoma u uzorku može se izračunati pomoću slijedećih izraza:

$$N_{atoma} = \frac{masa\ uzorka}{atomska\ masa} = \frac{masa\ uzorka}{\frac{molarna\ masa}{Avogadrov\ broj}} = \frac{\rho V N_a}{M}$$

- ***Gustoća mogućih energijskih stanja*** je broj dostupnih energijskih razina po jedinici volumena uzorka i po jedinici energije (gdje je E energija na kojoj se računa N(E)).

$$N(E) = \frac{8\sqrt{2}\,\pi\, m^{3/2}}{h^3} E^{1/2}$$

- ***Vjerojatnost zauzimanja stanja P(E)*** (tj. Vjerojatnost da će elektron zauzeti stanje s energijom E):

$$P(E) = \frac{1}{1 + e^{(E - E_F)/kT}}$$

- ***Gustoća zauzetih stanja*** dana je umnoškom gustoće mogućih stanja i vjerojatnosti zauzimanja stanja:

$$N_0(E) = N(E)\,P(E)$$

- ***Fermijeva energija*** za metal može se naći intergirajući gornju relaciju na T=0 K, od E=0 do E=E_F. Rezultat je

$$E_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Primjer 11

- Fermijeva energija za srebro je E_F=5,5 eV.
  - a) Koja je vjerojatnost, na 0°C, zauzimanja stanja sa sljedećim energijama: 4,4; 5,4; 5,5; 5,6 i 6,4 eV?
  - b) Na kojoj je temperaturi vjerojatnost zauzimanja stanja s energijom E=5,6 eV jednaka 0,16?

- Rezultati:
  - a) P(4,4 eV)=1; P(5,4 eV)=0,9859; P(5,5 eV)=0,5; P(5,6 eV)=0,0141; P(6,4 eV)=$2,5\cdot10^{-17}$;
  - b) T=700 K.

Primjer 12

- Izračunati energiju stanja koje vodljivi elektron zauzima u bakru pri temperaturi od 1000 K s vjerojatnošću od 2%. Koristiti podatak da stanje energije 7,14 eV zauzima elektron pri istoj temperaturi s vjerojatnošću od 24%. Može li se iz ovih podataka izračunati Fermijeva energija za bakar?

Primjer 13

- a) Kod koje će vrijednosti energije vjerojatnost da će stanje biti zauzeto elektronom postati manje od 10^{-2} ako je Fermijeva energija 8 eV, a temperatura 300 K?
- b) Koliko posto vodljivih elektrona metala ima energijsko stanje u području od $0{,}8 \cdot E_F$ do $1{,}1 \cdot E_F$ kod apsolutne nule.

- Rezultati: a) E = 8,119 eV; b) $\Delta n/n$ = 28,4%.