Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

Studij računarstva

Fizika 2

Auditorne vježbe – 2

Prigušeno titranje. Energija titranja. Njihala.

11. ožujka 2009.

Ivica Sorić

(Ivica.Soric@fesb.hr)

Ponavljanje – Prigušeno titranje

- Prigušeno titranje: uz pretpostavku da je sila trenja proporcionalna brzini ($F_{tr} = -bv$), gdje je b konstanta trenja, jednadžba gibanja za prigušeno titranje je:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0}$$

gdje je γ faktor prigušenja, a $\omega_0^2=k/m$ vlastita frekvencija neprigušenog oscilatora.

- Rješenje jednadžbe gibanja je: $\boxed{x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi_0)}$
  uz $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$

- Kao karakteristike prigušenih titrajnih sistema definiraju se logaritamski dekrement titranja λ i faktor kvalitete ("dobrote") Q:

$$\boxed{\lambda = \gamma T, \quad Q = \pi / \lambda}$$

Primjer 1

- Uteg mase 0,1 kg titra na opruzi konstante 1,6 N/m. Sila otpora proporcionalna je brzini i iznosi 0,2·v.
  a) Napišite jednadžbu gibanja i njezino opće rješenje.
  b) Riješite tu jednadžbu, tj. odredite s(t) uz početne uvjete t=0 s,
  x = 0,1 m, v = 0 m/s. Nacrtajte s(t).

- Rezultati:

$$a)\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0 x=0$$

$$\gamma=1\ s^{-1};\ \omega_0=4\ s^{-1}$$

$$x(t)=Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t+\varphi_0)$$

$$b)\quad x(t)=(0{,}103\ m)e^{-(1s^{-1})t}\sin\left[\left(\sqrt{15}\ s^{-1}\right)t+1{,}318\right]$$

Primjer 2

- Uteg mase $m=0,5\ kg$ obješen o oprugu konstante elastičnosti $k=32\ N/m$ prigušeno titra. Odredite period titranja sustava, ako se za vrijeme unutar kojeg uteg napravi dva puna titraja, amplituda titranja smanji 20 puta.

- Rezultat: $T = 0,807\ s$

Ponavljanje – energija titranja

- Pri titranju materijalne točke kinetička energija stalno prelazi u potencijalnu, i obratno, i pri tom vrijede sljedeće relacije:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{k}{2}A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

- Ukupna energija je:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

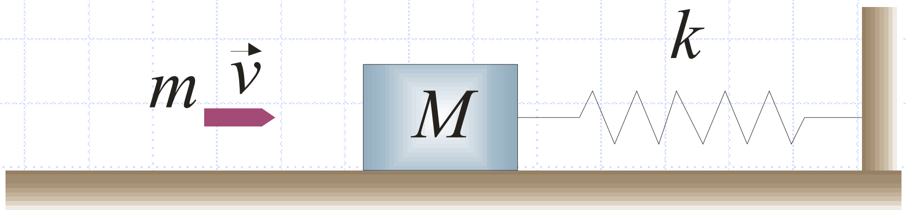
Primjer 1

- Odredite masu tijela koje izvodi harmonijsko titranje amplitude $A=0{,}2\ m$, frekvencije $f=4\ Hz$, ako je ukupna energija tijela $7{,}7\cdot 10^{-2}\ J$. U početnom trenutku tijelo se nalazi u položaju maksimalnog pomaka. Kroz koliko će vremena od početka titranja potencijalna energija tijela biti jednaka kinetičkoj?

- Rezultat: m = 6.01 g

Primjer 2

- Na glatkoj horizontalnoj površini leži tijelo mase $M = 0{,}35\ kg$ pričvršćeno na oprugu konstante elastičnosti $k = 5\cdot10^4\ N/m$, kao na slici. Metak mase $m = 0{,}05$ kg i brzine $v = 600\ m/s$ pogađa tijelo u smjeru osi opruge i zabija se u njega. Odredite amplitudu i period titranja koje nastaje poslije sudara.
Zanemarite masu opruge i trenje između tijela i opruge.



- Rezultat: A = 0,21 m, T = 0,0178 s

Ponavljanje - njihala

- Kruto tijelo koje se može okretati oko horizonstalne osi koja ne prolazi kroz njegovo težište zove se fizičko njihalo.
- Ako se takvo tijelo izvuče iz položaja ravnoteže za kut θ i prepusti samo sebi, ono se njiše pod utjecajem momenta težine.
- Za mali kut θ titranje je harmoničko s periodom T gdje je I moment tromosti s obzirom na os, a d udaljenost osi rotacije od težišta tijela.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

- Sitno tijelo mase m obješeno o nit stalne duljine l, a zanemarive težine zove se matematičko njihalo.
- Izvedemo li tijelo iz položaja ravnoteže u stranu za kut θ i prepustimo ga samom sebi, ono se njiše.
- Za mali kut θ titranje je harmoničko s periodom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

- Reducirana duljina fizičkog njihala l_r je duljina matematičkog njihala koje ima isti period kao (pripadno) fizičko njihalo

$$l_r = \frac{I}{md}$$

Primjer 1

- Za koliko moramo produljiti matematičko njihalo duljine l da bi ono imalo isti period titranja u dizalu koje se podiže akceleracijom $a = g/2$, kao u dizalu koje miruje.

- Rezultat: $\Delta l = 0{,}5\ l$

Primjer 2

- Matematičko njihalo mase $m = 0{,}1\ kg$ i duljine $l = 1\ m$ titra harmonijski. Ako se kut između niti njihala i vertikale može prikazati zakonom $\theta = 0{,}25 \sin(\omega t)$, nađite silu u niti u trenutku $t = T/2$ i $t = T/4$.

- Rezultati: F(T/2) = 1,0423 N
  F(T/4) = 0,9505 N

Primjer 3

- Koliki je period fizičkog njihala u obliku homogenog štapa dužine $L = 1$ m, ako se njiše oko osi koja prolazi
  a) jednim njegovim krajem,
  b) kroz točku udaljenu za $d = L/6$ od sredine štapa,
  c) kroz točku udaljenu za $d = L/4$ od sredine štapa?
  d) kroz točku udaljenu za $d = L/3$ od sredine štapa?
  e) Kada je period minimalan, a kada maksimalan?

- Rezultati: a) T = 1,637 s, b) T = 1, 637 s,
  c) T = 1,532 s, d) T = 1,532 s
  d) d = 0 $\Rightarrow$ T = ∞,
  d = $\boxed{L\sqrt{3}/6}$ $\Rightarrow$ T = T_{min}= 1,524 s

Primjer 4 (domaći rad)

- Ravni štap duljine l i mase m njiše se kao fizičko njihalo oko svojega kraja. Po štapu se može pomicati uteg mase μ. Na kojoj je udaljenosti r od osi njihanja potrebno učvrstiti uteg da to fizičko njihalo ima najkraći period.

- Rezultat: $$\boxed{r = \frac{ml}{2\mu}\left[\sqrt{1+\frac{4\mu}{3m}}-1\right]}$$

Zadaci za vježbu (1)

- V. Henč-Bartolić i dr.: *Riješeni zadaci iz valova i optike,* Poglavlje 1

1. Ako se njihalica ure produži za stoti dio svoje duljine, kolika će biti pogreška ure u toku jednog dana? Račun provesti smatrajući njihalicu matematičkim njihalom.

   Rezultat: ura kasni 7,182 minute

2. Koliki je period titranja matematičkog njihala duljine l u dizalu koje se spušta akceleracijom a = g, a koliki ako se dizalo tom istom akceleracijom podiže.

   Rezultati: $T_{\downarrow} = \infty$, $T_{\uparrow} = 2\pi\sqrt{l/(2g)}$

3. Kugla polumjera R = 0,05 m obješena je o konac duljine l = 0,1 m. Odredite pogrešku koju činimo ako sistem smatramo matematičkim njihalom duljine 0,15 m.

   Rezultat: 2,15%

Zadaci za vježbu (2)

4. Na kojoj udaljenosti x od centra mase tankog homogenog štapa duljine L = 1,2 m mora biti objesište, da bi štap titrao maksimalnom frekvencijom? Odredite iznos te frekvencije.

   Rezultat: $f = 0{,}599$ Hz

5. Štap duljine L = 1 m obješen je o jedan kraj. Nađite period titranja i duljinu ekvivalentnog matematičkog njihala. Nađite period titranja štapa oko osi koja je od donjeg kraja štapa udaljena za duljinu ekvivalentnog matematičkog njihala.

   Rezultati: $T_1 = 1{,}64$ s, $L_r = 2L/3$, $T_2 = 1{,}64$ s

6. Fizikalno njihalo u obliku homogenog štapa duljine L obješeno je u dizalu. Gdje treba postaviti os titranja da bi period titranja štapa u dizalu koje se podiže akceleracijom a = g/2 bio isti kao period titranja štapa kad dizalo miruje, a os je na kraju štapa?

   Rezultati: 0,408L od gornjeg kraja štapa

7. Homogeni kružni disk radijusa R može titrati u vertikalnoj ravnini oko horizontalne osi koja je okomita na ravninu diska i prolazi obodom diska. Na kojoj se udaljenosti od osi rotacije, a na vertikalnom promjeru diska može zalijepiti točkasta masa, a da se titrajno vrijeme diska ne promijeni?

   Rezultat: 3R/2