



Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje
Razlikovni studiji (910/920/930/940/950)

Fizika 2

Predavanje 6

Faradayev zakon indukcije. Ampereov zakon.
Maxwellove jednađbe. Elektromagnetski titraji i valovi.

Dr. sc. Damir Lelas

(Damir.Lelas@fesb.hr,

damir.lelas@cern.ch)

Danas ćemo raditi:

(V. Henč-Bartolić i P. Kulišić: "Valovi i optika", poglavlje 3)

◆ Uvod u elektromagnetizam

- Faradeyev zakon indukcije
- Ampereov zakon; struja pomaka
- Maxwellove jednačbe u integralnom obliku
- Maxwellove jednačbe u diferencijalnom obliku
- Energija elektromagnetskog polja

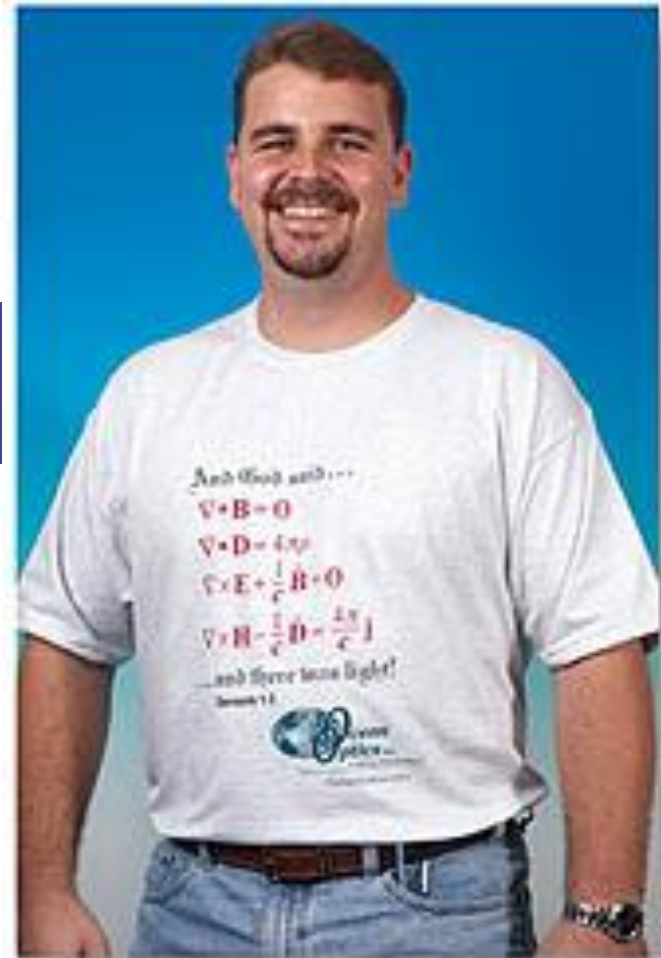
◆ Elektromagnetski titraji i valovi

Priča

- ◆ Na nekim sveučilištima u Americi prodaju se majice sa Maxwellovim jednažbama.

Što je to tako specijalno sa tim jednažbama da se nose na majicama?

Odgovor na predavanjima koja slijede...



Faradayev zakon indukcije

- ◆ 1820 H. C. Oersted opazio da naboj u gibanju (električna struja) proizvodi magnetsko polje.
- ◆ 1831 M. Faraday otkrio da promjenjivo magnetsko polje stvara električno polje

- ◆ Elektromotorna sila:

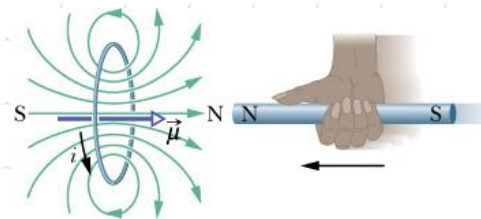
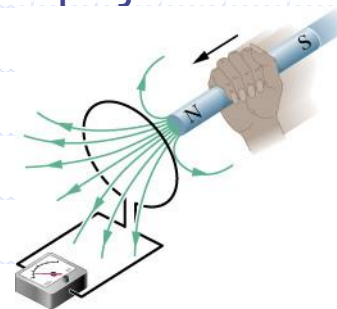
$$\varepsilon = - \frac{d\phi_m}{dt}$$

$$\varepsilon = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- ◆ Konačni oblik Faradayevog zakona indukcije:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- ◆ **Lenzovo pravilo:** Smjer inducirane elektromotorne sile uvijek je takav da struja što zbog nje protječe petljom, proizvodi magnetski učinak kojim nastoji poništiti uzrok koji ju je izazvao, to je u biti posljedica zakona očuvanja energije.



Ampèreov zakon, struja pomaka

- ◆ Biot-Savartov zakon omogućuje izračun magnetskog polja koje proizvodi naboj koji se giba (struja):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{s} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T m / A}$$

- ◆ Ampereov zakon (zakon protjecanja): cirkulacija magnetskog polja H , po ma kojoj zatvorenoj krivulji, jednaka je jakosti struje što protječe kroz površinu koju ta krivulja obuhvaća:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

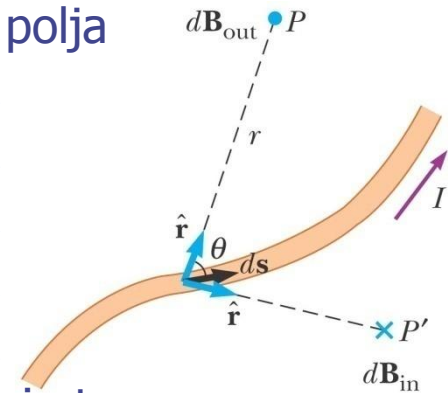
$$\vec{J} = \rho \vec{v}; \rho - \text{gustoca naboja}$$

$$\vec{v} - \text{brzina naboja}$$

- ◆ J. C. Maxwell (1865) je proširio pojam električne struje, uveo je pojam struje pomaka (pomačne struje), pa tzv. Ampère-Maxwell zakon glasi:

$$\vec{j}_{pom} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_K \vec{H} d\vec{s} = \iint_S \vec{J} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} d\vec{S}$$



Pomačne struje

- ◆ Krivulja C omeđuje ravnu površinu S_1 i zakrivljenu površinu S_2 . Prema Ampereovu zakonu vrijedi:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I$$

I - struja koja prolazi kroz površinu koju omeđuje zatvorena krivulja C .

- ◆ Kad se uzme površina S_1 onda vrijedi:

$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I$$

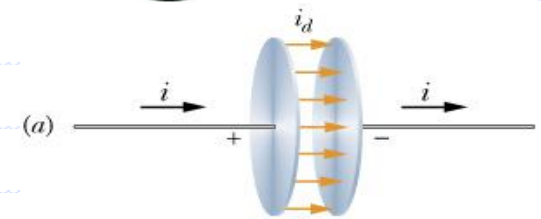
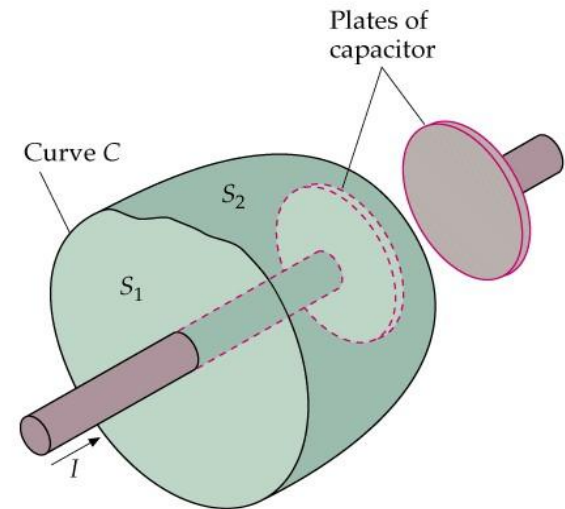
- ◆ Međutim kad se razmatra površina S_2 , kroz koju ne teče nikakva struja proizlazi da je:

$$\oint_K B \cdot dl = 0$$

- ◆ Ova dva rezultata su u kontradikciji. Rješenje je dao Maxwell definirajući struju pomaka:

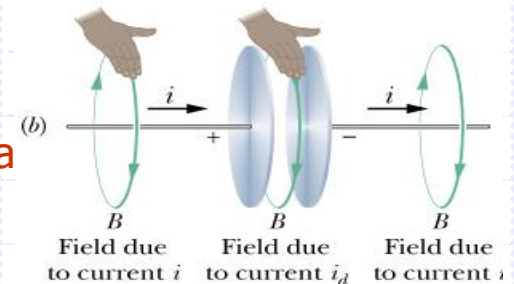
$$I_D = \epsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Sva tri polja B su ista



$$\phi_E = ES = \frac{Q}{\epsilon S} \cdot S = \frac{Q}{\epsilon}$$

$$i_D = \epsilon \frac{\partial \phi_E}{\partial t} = \frac{dQ}{dt} = i$$



Osnovni pojmovi elektrodinamike

$\vec{E}$ - električno polje

$\vec{D}$ - električni pomak

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

ϵ - dielektrična konstanta

$\vec{H}$ - jakost magnetskog polja

$\vec{B}$ - magnetska indukcija
(gustoća magnetskog toka)

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

μ - magnetska permeabilnost

$\vec{E}$ i $\vec{B}$ definirani **Lorentzovom silom**
(ukupnom silom na naboi u elektromagnetskom polju)

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$$

ρ - gustoća naboja, $\rho = Q/V$

$\vec{J}$ - gustoća struje, $\vec{J} = I\vec{n}_0/S$

Maxwellove jednađbe – 1. i 2.

◆ Gaussov zakon za električno polje

Tok električnog pomaka kroz bilo koju zatvorenu površinu S jednak je algebarskom zbroju naboja koji se nalaze unutar te zatvorene površine:

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

Prva Maxwellova jednađba

◆ Gaussov zakon za magnetsko polje

Tok magnetske indukcije kroz bilo koju zatvorenu površinu S jednak je nuli (tj. ne postoji izolirani magnetski naboj):

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Druga Maxwellova jednađba

Maxwellove jednađžbe – 3. i 4.

◆ Faradejev zakon elektromagnetske indukcije

Brzina promjene toka magnetske indukcije kroz petlju jednaka je elektromotornoj sili induciranoj u petlji, ili ***vremenski promjenjivo magnetsko polje stvara kružno električno polje***:

$$\oint_K \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{S}$$

Treća Maxwellova jednađžba

◆ Poopćeni Ampereov zakon

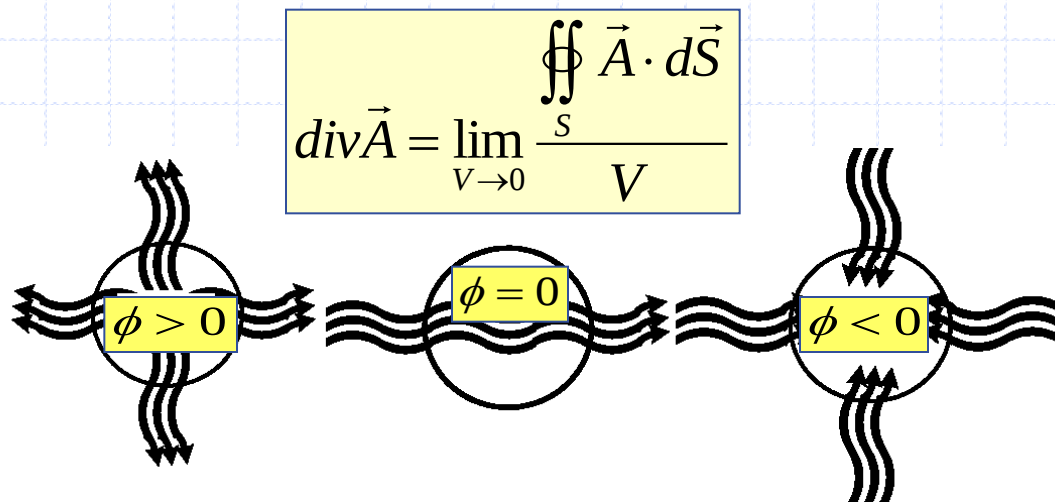
Linijski integral magnetskog polja po zatvorenoj krivulji jednak je zbroju provodne i pomaćne struje koju ta petlja sadržava, ili, u odsutnosti provodnih struja, ***vremenski promjenjivo električno polje stvara kružno magnetsko polje*** :

$$\oint_K \vec{H} d\vec{s} = \iint_S \vec{J} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} d\vec{S}$$

Četvrta Maxwellova jednađžba

Divergencija vektorskog polja

- ◆ Divergencija vektorskog polja je tok vektorskog polja $\vec{A}$ po jedinici volumena kad se volumen sažima u točku, teži nuli. Divergencija vektorskog polja je skalar.



- ◆ Može se pokazati da je divergencija vektorskog polja u Descartesovim koordinatama izračunava prema formuli:

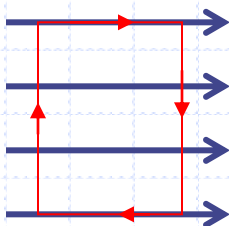
$$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- ◆ Vrijednost divergencije u zadanoj točki prostora ne ovisi o izboru koordinatnog sustava

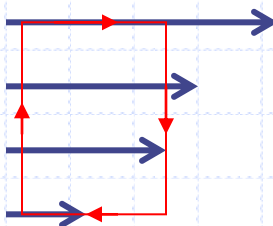
Rotor (rotacija) vektorskog polja

- ◆ Divergencija vektorskog polja je veličina koja karakterizira to polje, ali samo uzima u račun komponente polja okomite na površinu.
- ◆ Rotacija vektorskog polja je cirkulacija (mjera vrtložnosti vektorskog polja) koja uzima u račun komponente polja koje su tangencijalne na danu površinu.
- ◆ Cirkulacija vektorskog polja je zbroj komponenti polja koje leže duž neke zatvorene krivulje:

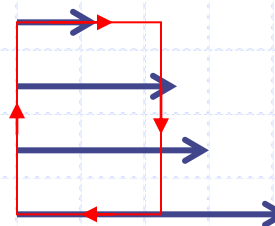
$$\text{cirkulacija vektorskog polja} = \oint_K \vec{A} \cdot d\vec{s}$$



Cirkulacija = 0



Cirkulacija > 0



Cirkulacija < 0

- ◆ Rotor (rotacija vektorskog polja) je cirkulacija vektorskog polja po jediničnoj površini, koju omeđuje zatvorena krivulja, kad se ta površina steže u točku prostora $S \rightarrow 0$:

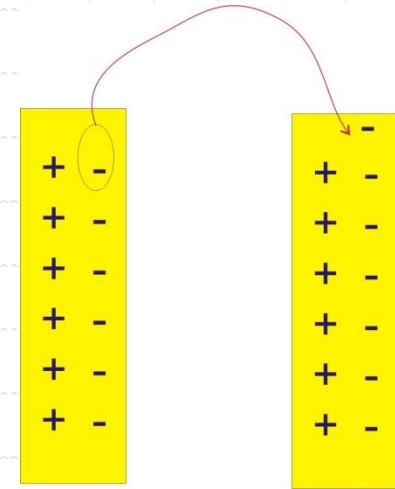
$$\text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_K \vec{A} \cdot d\vec{s}}{S}$$

Maxwellove jedn. – integralni i diferencijalni oblik

	<i>Integralni</i>	<i>Diferencijalni</i>
1.	$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$
2.	$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
3.	$\oint_K \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{S}$	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4.	$\oint_K \vec{H} d\vec{s} = \iint_S \vec{J} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} d\vec{S}$	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Gustoća energije električnog polja (izvod)

- ◆ U prostoru u kojem postoji električno polje, postoji i energija pridružena tom polju.
- ◆ Zanima nas kolika je energija po jedinici volumena u prostoru u kojem postoji električno polje E , tj. gustoća energije električnog polja (J/m^3).
- ◆ Zamislimo pločasti kondenzator čiji je napon jednak nuli, a želimo ga nabiti nabojem Q kako bi ostvarili razliku potencijala U .
- ◆ Nabijanje kondenzatora zahtjeva ulaganje rada, jer treba od negdje donijeti naboj na ploče kondenzatora.
- ◆ Kad to napravimo imamo dvije ploče na bliskoj udaljenosti, jedna ima naboj $+Q$, druga ima naboj $-Q$.
- ◆ Kao i kod razmatranja gravitacijske potencijalne energije, zbog visinske razlike, bitna je razlika potencijalne enrgije, a ne put po kojem smo se popeli.
- ◆ Pogledajmo koliki rad treba uložiti da se naboj dq dovede na kondenzator koji je već nabijen nabojem q , te je na kondenzatoru napon $\Delta U = q/C$.
- ◆ **Gustoća energije u električnom polju proporcionalna je kvadratu iznosa električnog polja u danoj točki.**



$$dW = dq\Delta U = dq \frac{q}{C} \quad W = \int_0^Q dq \frac{q}{C} = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W = E_{pe} = \frac{1}{2} \frac{C^2 U^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2$$

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} \quad U = Ed \rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{S}{d} E^2 d^2$$

$$u_e = \frac{E_{pe}}{Sd} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \left(\frac{As}{Vm} \cdot \frac{V^2}{m^2} = \frac{J}{m^3} \right)$$

Gustoća energije magnetskog polja (izvod)

- ◆ Kad zavojnicu priključimo na izvor napona, struja ne postigne odmah maksimalnu vrijednost, jer se u zavojnici inducira napon koji se protivi porastu struje (Lenzovo pravilo).
- ◆ Da bi se kroz zavojnicu uspostavila stalna struja iznosa I , potrebno je uložiti određeni rad, koji se očituje kao potencijalna energija magnetskog polja zavojnice.
- ◆ **Gustoća energije magnetskog polja proporcionalna je kvadratu iznosa magnetskog polja u danoj točki.**

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{- inducirani napon u zavojnici}$$

$$\text{Snaga koja se predaje zavojnici je: } P = U_L i = Li \frac{di}{dt}$$

$$\text{Energija koja se preda zavojnici u intervalu } dt \text{ je } P dt \text{ odnosno } dE_{pm} = Li di$$

Ukupna rad koji treba uložiti da se uspostavi stalna struja u zavojnici iznosa I je:

$$E_{pm} = L \int_0^I i di = \frac{1}{2} LI^2$$

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l} \rightarrow E_{pm} = \mu \frac{N^2 S}{2l} I^2$$

$$B = \mu \frac{NI}{l} \rightarrow E_{pm} = \frac{1}{2\mu} B^2 Sl$$

$$u_m = \frac{E_{pm}}{Sl} = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} \mu H^2$$

Energija elektromagnetskog polja

- ◆ Gustoća energije električnog polja (energija po jedinici volumena):

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} ED$$

- ◆ Gustoća energije magnetskog polja:

$$u_M = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} HB$$

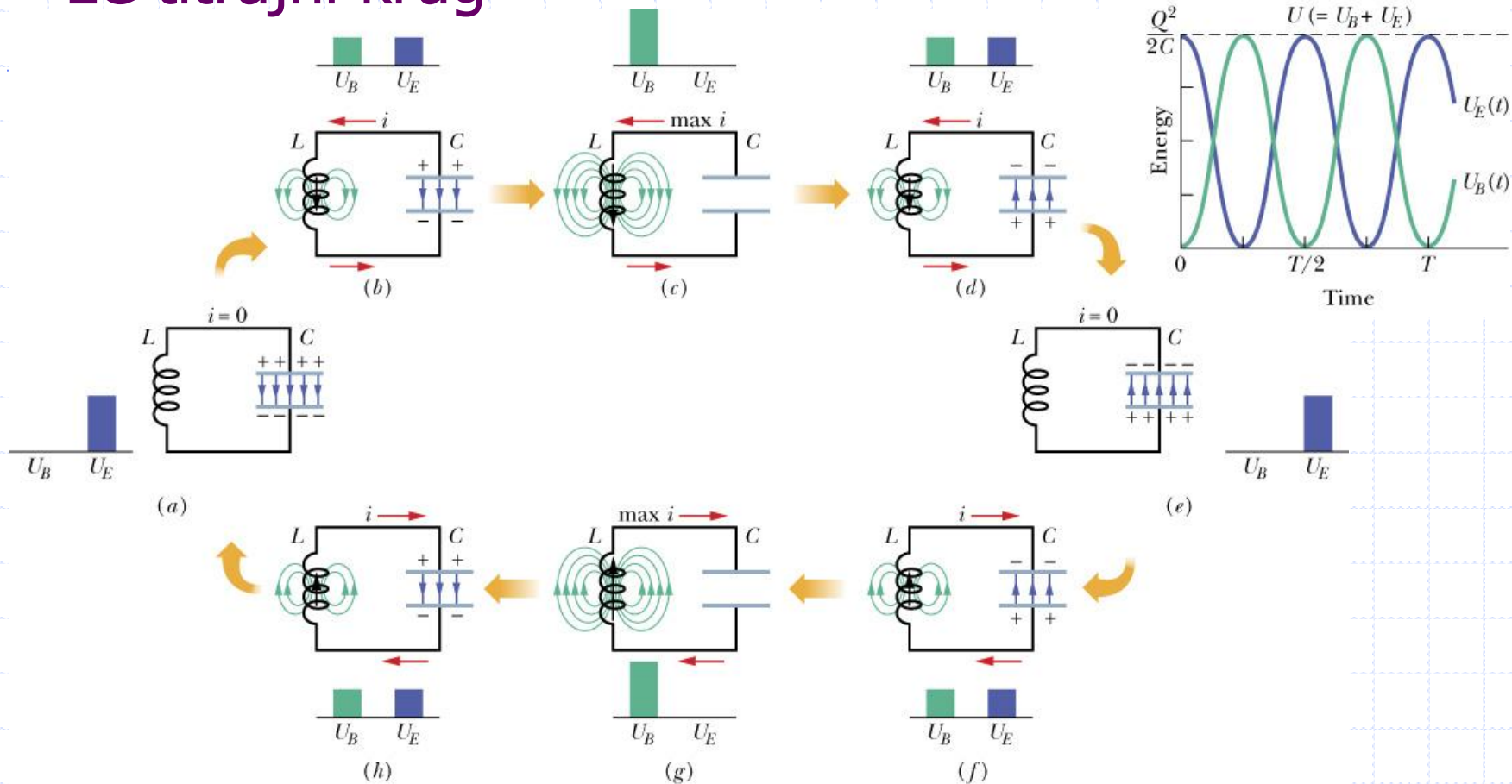
- ◆ Čak i u prostoru bez ikakve materije, tj. u vakuumu, može postojati električno i magnetsko polje, a time i energija sadržana u tim poljima.

Pitanja za provjeru znanja

- 1. Napišite i ukratko objasnite Maxwellove jednačbe u integralnom i diferencijalnom obliku (obavezno).**
- 2. Kako glasi sila na naboj u elektromagnetskom polju i o čemu ovisi gustoća energije električnog i magnetskog polja?**
3. Objasnite Gaussov zakon za električno i magnetsko polje.
4. Objasnite Faradyev zakon indukcije.
5. Objasnite Biot-Savartov zakon odnosno Amperov zakon.
6. Objasnite pojam struje pomaka.
7. Izvedite izraze za gustoću energije električnog/magnetskog polja.

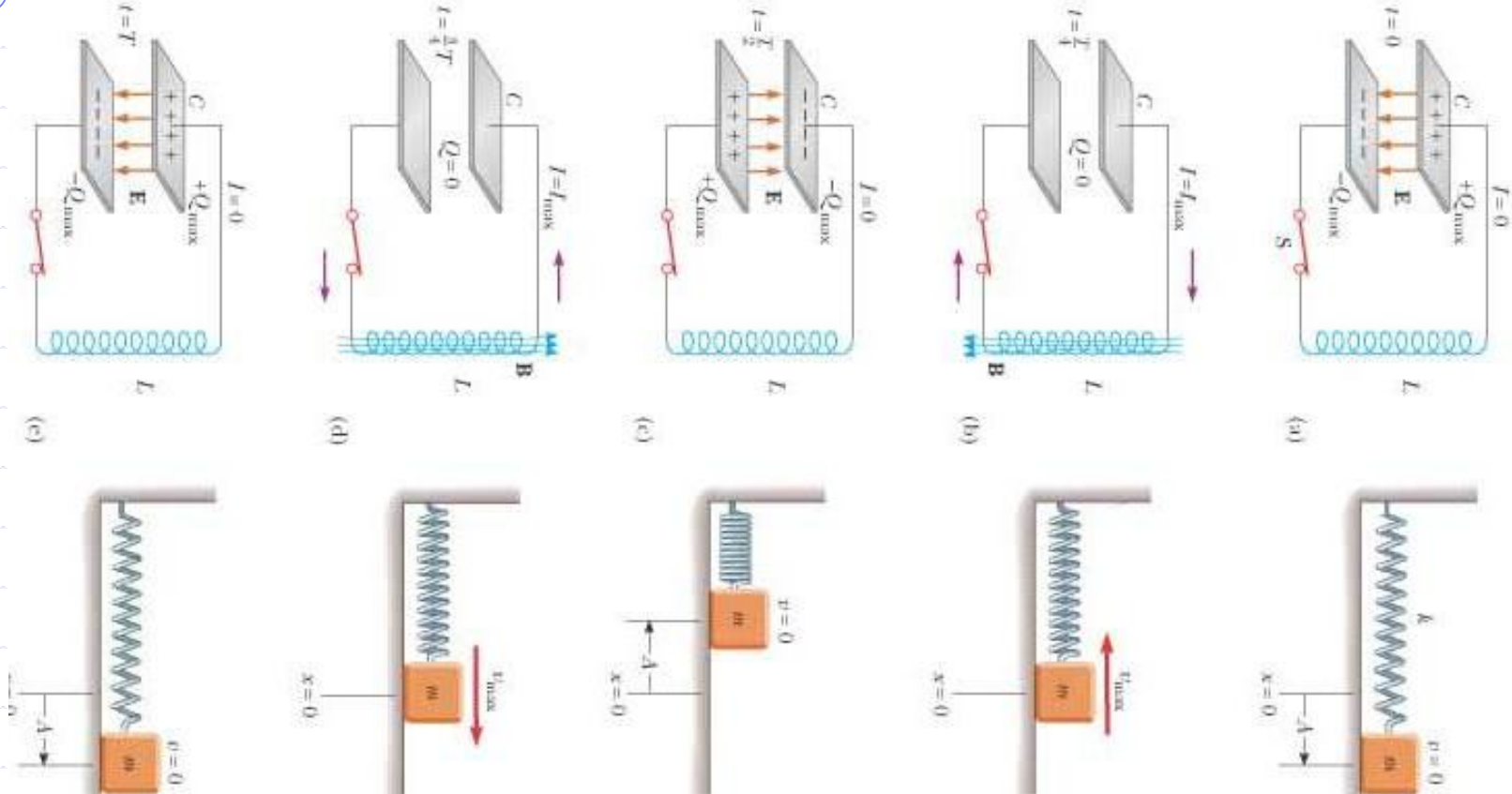
Elektromagnetski titraji i valovi.

LC titrajni krug



8 ciklusa u LC titrajnom krugu: a) kapacitet maksimalno nabijen, $I=0$, b) kapacitet se izbija, struja raste, c) kapacitet potpuno ispražnjen, $I_{\max}$, d) kapacitet se nabija, ali suprotnim polaritetom, e) kapacitet ponovo maksimalno nabijen, ali suprotnim polaritetom nego pod (a), f) kapacitet se izbija, struja raste i teče suprotnim smjerom, g) kapacitet potpuno ispražnjen, $I_{\max}$, h) kapacitet se nabija, struja se smanjuje.

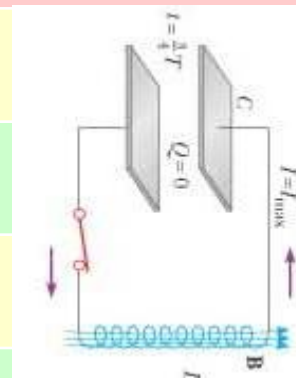
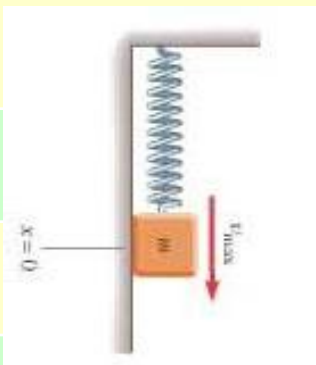
LC titrajni krug & mehanički titrajni krug



$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2$$

Analogija između električnih i mehaničkih titrajnih sistema

<i>Mehanički sistem</i>	<i>Električni sistem</i>
Pomak, s	Naboj, Q
Masa, m	Induktivitet, L
Brzina, $v=ds/dt$	Struja, $I=dQ/dt$
Konstanta opruge, k	Recipročna vrijednost kapaciteta, $1/C$
Sila, F	Elektromotorna sila, $\mathcal{E}$
Vlastita frekvencija, $\omega_0^2=k/m$	Vlastita frekvencija, $\omega_0^2=1/LC$
Koeficijent otpora, b	Otpor, R
Koeficijent prigušenja, $\delta=b/(2m)$	Koeficijent prigušenja, $\delta=R/(2L)$



Sažetak (1) – Analogija električnih i mehaničkih titrajnih sustava

- ◆ Za **analogiju između fizikalnih veličina** koje koristimo za opis titrajnih sistema vidjeti stranicu 18.
- ◆ **Analogija jednadžbi i rješenja:**

Način titranja	Mehanički sistem	Električni sistem
Neprigušeno	$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m}s = 0$ $s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0$ $Q(t) = Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$
Prigušeno	$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \frac{k}{m}s = 0$ $s(t) = s_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$	$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = 0$ $Q(t) = Q_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$ $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$
Prisilno	$m \frac{d^2s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + ks = F_0 \sin \omega t$	$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon_0 \sin \omega t$

Analogija između mehaničkog i električnog titrajnog kruga



Analogies Between Electrical and Mechanical Systems		
Electric Circuit		One-Dimensional Mechanical System
Charge	$Q \leftrightarrow x$	Position
Current	$I \leftrightarrow v_x$	Velocity
Potential difference	$\Delta V \leftrightarrow F_x$	Force
Resistance	$R \leftrightarrow b$	Viscous damping coefficient
Capacitance	$C \leftrightarrow 1/k$	(k = spring constant)
Inductance	$L \leftrightarrow m$	Mass
Current = time derivative of charge	$I = \frac{dQ}{dt} \leftrightarrow v_x = \frac{dx}{dt}$	Velocity = time derivative of position
Rate of change of current = second time derivative of charge	$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} \leftrightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Acceleration = second time derivative of position
Energy in inductor	$U_L = \frac{1}{2} LI^2 \leftrightarrow K = \frac{1}{2} mv^2$	Kinetic energy of moving object
Energy in capacitor	$U_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \leftrightarrow U = \frac{1}{2} kx^2$	Potential energy stored in a spring
Rate of energy loss due to resistance	$I^2 R \leftrightarrow b v^2$	Rate of energy loss due to friction
RLC circuit	$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \leftrightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$	Damped object on a spring

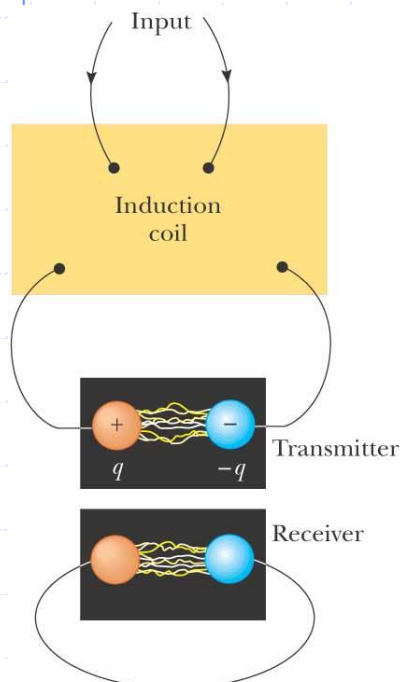
Nastajanje elektromagnetskih valova, Hertzov eksperiment



- J. Clerk Maxwell, (1864) postavio opću teoriju elektromagnetskih pojava, 4 Maxwellove jednačbe su osnova klasične elektrokinamike.
- Pokazao da je svjetlost elektromagnetski val.
- Predvidio postojanje radio valova.



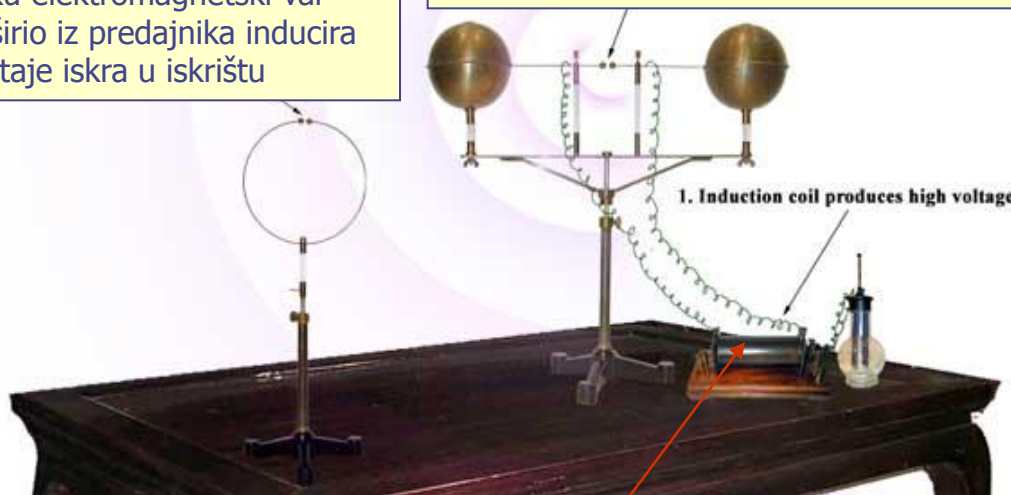
- H. Hertz, 1888. proizveo radiovalove i otkrio da je brzina širenja tih valova jednaka brzini svjetlosti.
- Prvi koji je proizveo i detektirao radiovalove.



©2004 Thomson - Brooks/Cole

U prijemniku elektromagnetski val koji se proširio iz predajnika inducira struju i nastaje iskra u iskrištu

Iskrište proizvodi elektromagnetske valove



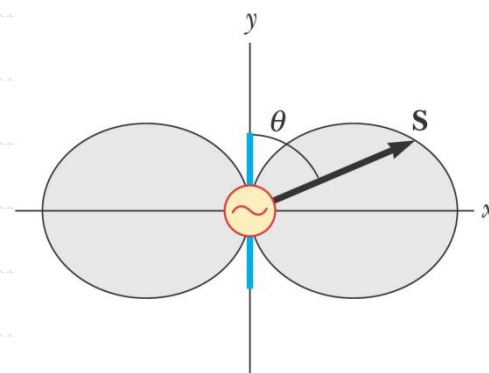
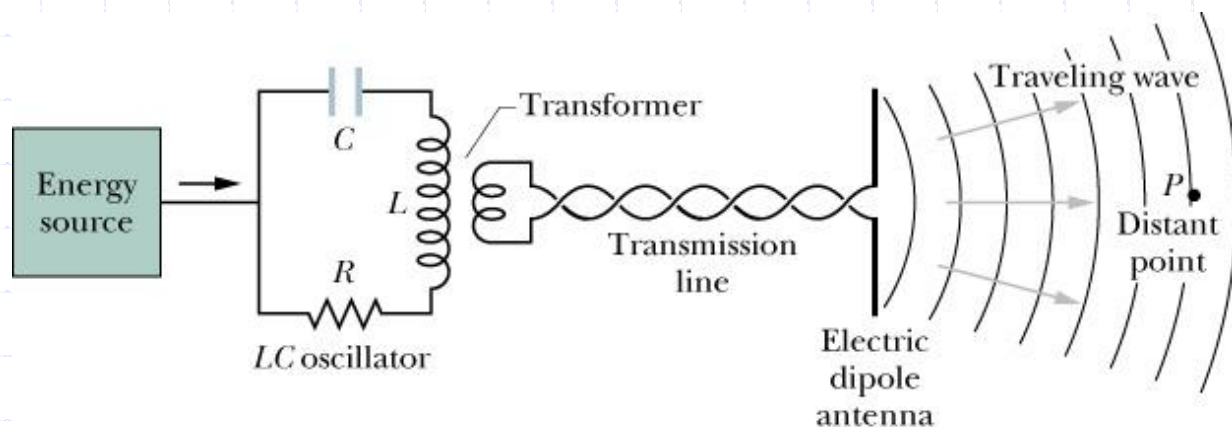
Induktor proizvodi promjenjivi visoki napon

Nastajanje elektromagnetskih valova

❑ **Elektromagnetski val nastaje kad se naboj ubrzava, tj. kad postoji promjena vektora brzine naboja (elektrona).**

❑ Najjednostavniji izvor elektromagnetskog vala je otvoreni LC titrajni krug.

❑ Titranje električnog i magnetskog polja prenosi se iz otvorenog titrajnog kruga u okolni prostor.



$$I \sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

Valna jednačba elektromagnetskog vala (1)

- Maxwellove jednačbe u homogenom i izotropnom sredstvu bez naboja i struja:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad \text{operator nabla}$$

- Primijenimo operaciju rotor ($\nabla \times$) na (3) Maxwellovu jednačbu:

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{iz prve(1) Maxwellove jed.}$$

- Deriviramo jednačbu (4) po vremenu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$

Brzina širenja elektromagnetskog vala u vakuumu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Brzina širenja elektromagnetskog vala u sredstvu

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

Valna jednađžba elektromagnetskog vala (2)

- Na isti naćin se dobije i valna jednađžba za magnetsko polje, tako da se jednađžba (3) derivira po vremenu a da se na jednađžbu (4) primijeni operator "rotacije".

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = -\Delta \vec{B} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{B} = -\mu\epsilon \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

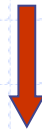
$$\Delta \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$



$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$



Maxwellove jednađžbe za elektrićno i magnetsko polje po komponentama. Za svaku komponentu vrijedi jednađžba:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$



$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0$$

Elektromagnetski valovi (1)

- ◆ Titranje električnog i magnetskog polja prenosi se iz **otvorenog titrajnog kruga** (što se postiže povećavanjem razmaka između ploča kondenzatora i zavoja zavojnice; ovaj se uređaj naziva i **titrajući dipol**) u okolni prostor.
- ◆ Oko kruga nastaje elektromagnetsko polje; **otvoreni je titrajni krug izvor elektromagnetskih valova**.
- ◆ Pri širenju elektromagnetskih valova **električno i magnetsko polje međusobno su okomiti, a okomiti su i na smjer širenje vala**. Pri tom vektor električnog i magnetskog polja titraju u fazi.
- ◆ Valna jednačina za širenje elektromagnetskih valova dobije se iz **Maxwellovih jednačina**.
- ◆ Uz pretpostavu da se elektromagnetski valovi šire u **z** smjeru, a vektor električnog polja titra u **x** smjeru, **valne jednačine za električno i magnetsko polje, i njihova rješenja su**:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow E_x(z, t) = E_0 \sin(\omega t - kz)$$
$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow B_y(z, t) = B_0 \sin(\omega t - kz)$$

Elektromagnetski valovi (2)

- ◆ Pri širenju elektromagnetskih valova, **električno polje inducira magnetsko i obratno.**
- ◆ **Brzina širenja** elektromagnetskih valova u sredstvu s određenom dielektričnošću ϵ i permeabilnošću μ je:

$$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$$

- ◆ Brzina širenja elektromagnetskog vala **u vakuumu** ($\epsilon=\epsilon_0$, $\mu=\mu_0$) iznosi:

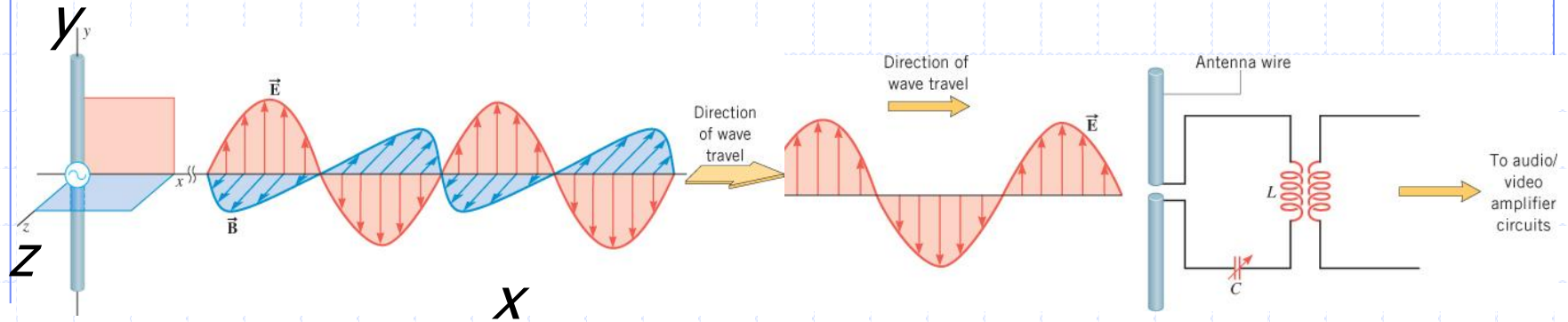
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A})}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- ◆ Pri prijelazu elektromagnetskog vala iz sredstva u kojem se širi jednom brzinom u sredstvo u kojem se širi nekom drugom brzinom **mijenja se valna duljina vala.**
- ◆ **Amplitude električnog i magnetskog polja** u svakom trenutku povezane su relacijom:

$$E/H = \sqrt{\mu/\epsilon}$$

Elektromagnetski valovi (3)

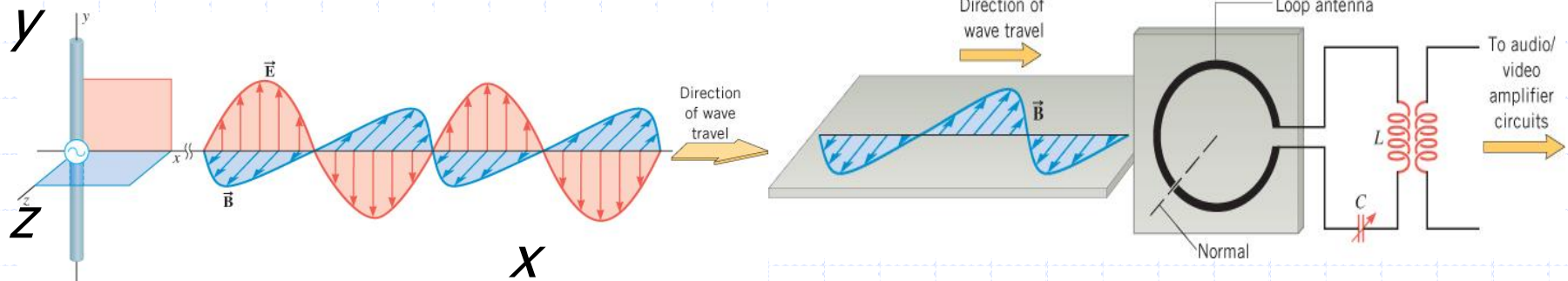
- ◆ Električno polje elektromagnetskog vala može se detektirati antenom u obliku žice koja je paralelna sa smjerom vektora električnog polja:



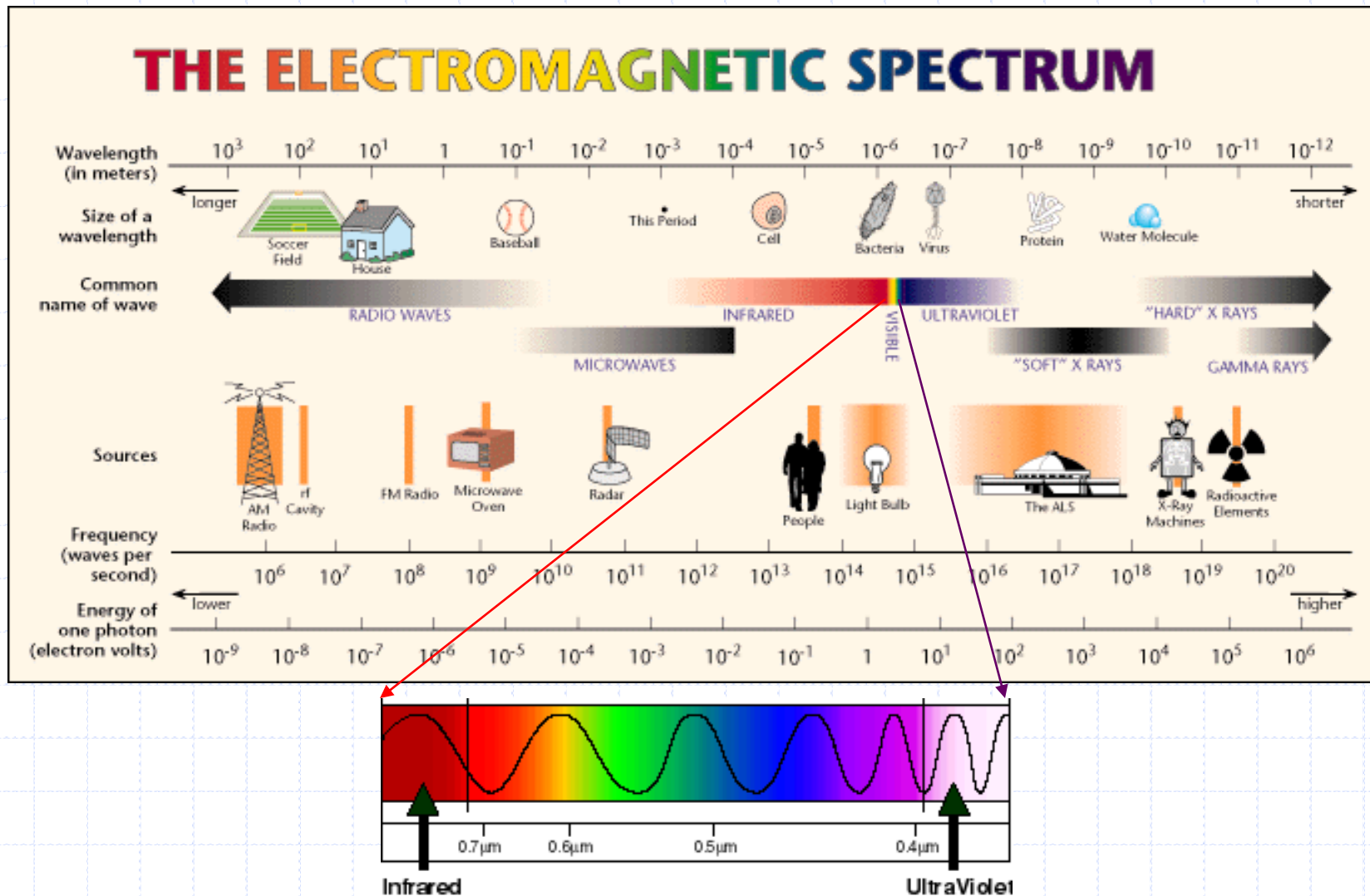
$$\vec{E}(x, t) = E_o \vec{j} \sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{B}(x, t) = B_o \vec{k} \sin(kx - \omega t)$$

- ◆ Antena u obliku petlje detektira magnetsko polje elektromagnetskog vala.
- ◆ Promjenjivi tok magnetskog polja kroz površinu koju omeđuje vodič u obliku petlje inducira napon u petlji:



Spektar elektromagnetskih valova



Radiovalovi ($\lambda \sim 3\text{km}$ do 30 cm)

- ◆ Ljudsko tijelo je dobra antena za radiovalove čija je frekvencija od oko 300 kHz do 300 MHz, što se može primijetiti kad se podešava kućna antena televizora.
- ◆ Do Zemlje dolaze radiovalovi iz dubokog Svemira, FM područje 88MHz do 108MHz, odnosno valna duljina λ u području od 3,4 m do 2,8 m.
- ◆ Nevodljivi materijali kao staklo, beton, cigle su transparentni za radiovalove, dok vodiči zbog svojih slobodnih elektrona ne propuštaju radiovalove.

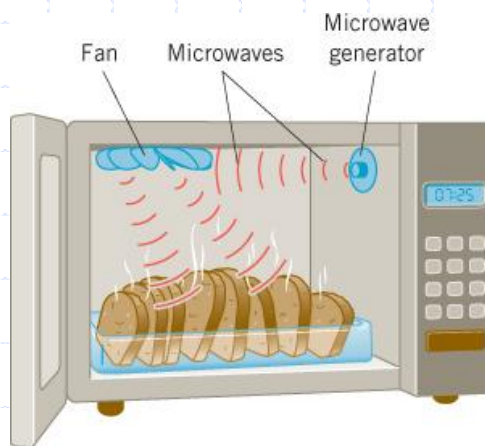


Mikrovalovi ($\lambda \sim 30 \text{ cm}$ do 1 mm , $f \sim 10^9$ - $3 \times 10^{11} \text{ Hz}$)

- ✓ Mikrovalovi prolaze kroz Zemljinu atmosferu, i jako su korisni za svemirsku komunikaciju.
- ✓ Molekula vode je permanentni dipol i kad se nađe u elektromagnetskom polju, molekula vode se postavlja u smjer polja.
- ✓ Kako se polje mijenja, molekula vode počinje titrati i u sudarima s drugim molekulama, kinetičko gibanje molekule se pretvara u toplinsko gibanje.
- ✓ Očito, da bi se neko tijelo ugrijalo u mikrovalnoj pećnici mora sadržavati vodu, suhi papirnati tanjur se ne zagrije.
- ✓ Mobiteli rade u mikrovalnom području

Mikrovalna pećnica:

$\lambda = 12,2 \text{ cm}$, $f = 2.45 \text{ GHz}$, $P \sim 1 \text{ kW}$, $E = 2 \text{ kV/m}$

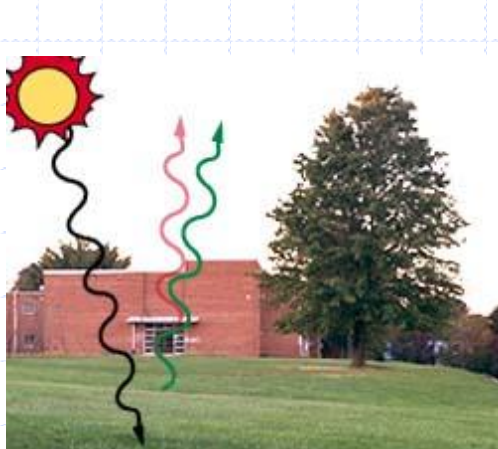
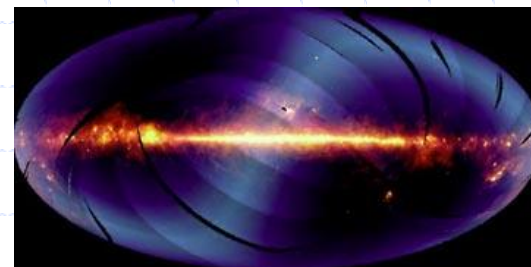


Satelitska slika Amazone u mikrovalnom području $\lambda = 20 \text{ cm}$



Infracrveno zračenje ($\lambda \sim 1\text{ mm}$ do 780 nm , $f \sim 300\text{ GHz}$ do 385 THz)

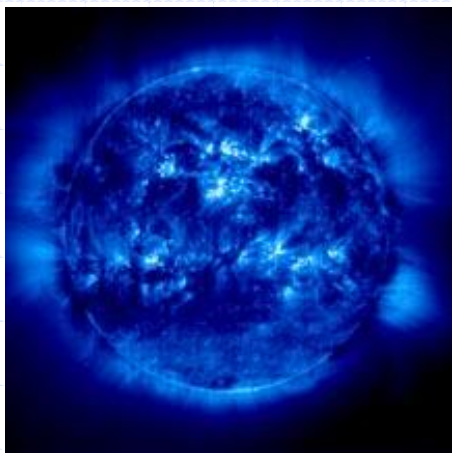
- ✓ Infracrveno zračenje neposredno iza vidljivog dijela spektra, prodire u tkivo do dubine od 3 mm , zato se ne smije gledati u Sunce, treba nositi kvalitetne sunčane naočale.



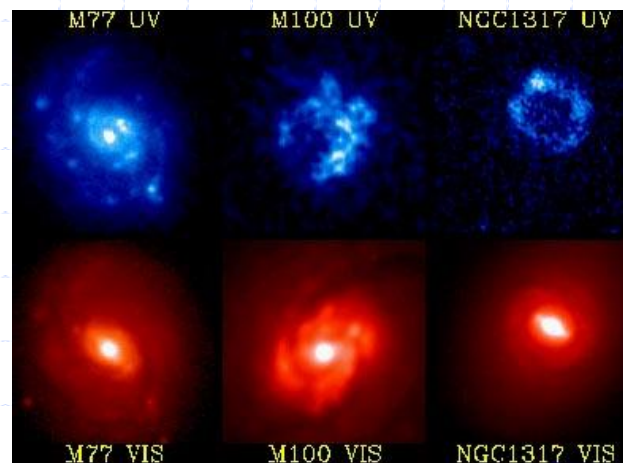
Ultraljubičasto $f=8 \times 10^{14}$ do $2,4 \times 10^{16}$ Hz

- ◆ Ultraljubičasto zračenje, izaziva dermatološke efekte: preplanulost, aktivira sintezu D vitamina, ali izaziva i rak kože.
- ◆ Sloj ozona (O_3) apsorbira ultraljubičasto zračenje $\lambda < 320$ nm i tako štiti Zemlju.
- ◆ Ultraljubičasto zračenje, čija je valna duljina $\lambda < 300$ nm, izaziva biološke efekte disocirajući molekule.
- ◆ Obično staklo koje sadrži željezni oksid je neprozirno za ultraljubičasto zračenje.

Slika Sunca u ultraljubičastom dijelu spektra $\lambda = 171 \times 10^{-10}$ m

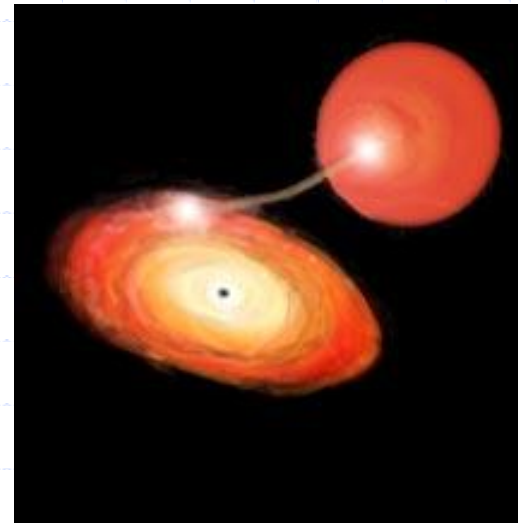


Tri različite galaksije snimljene u ultraljubičastom (gore) i vidljivom (dolje) dijelu spektra



X-zračenje (rendgensko zračenje), W. Roentgen 1895

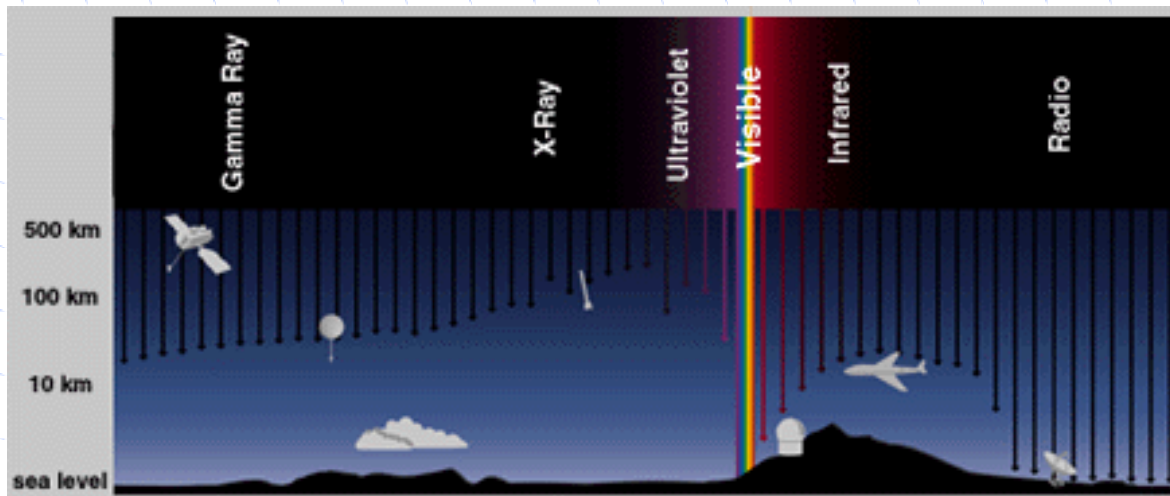
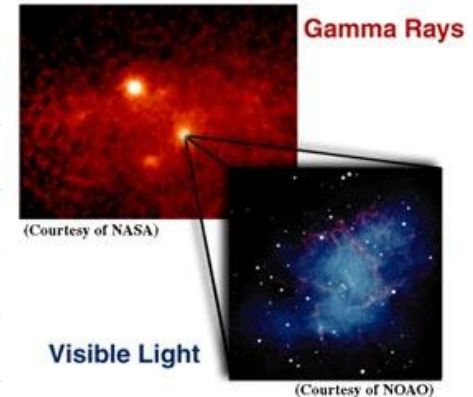
- ◆ $f=2,4 \times 10^{16}$ do 5×10^{19} Hz, $\lambda \sim$ manja od dimenzija atoma
- ◆ Individulani fotoni ovog zračenja imaju energiju od 100 eV do 0.2 MeV, tako da svaki pojedini foton može ostvariti interakciju s materijom
- ◆ 1970., kombinacija računala i X-zračenja omogućila je tehniku CT (computer thomography) (tomos – grčki sloj)
- ◆ Kad se materija ugrije preko milijun stupnjeva zrači X-zrake



Gama zračenje

- ◆ Gama zračenje je najintenzivnije, izvori gama zrake su pobuđene jezgre (radioaktivni atomi), nuklearne eksplozije.
- ◆ Gama zrake ne prolaze kroz atmosferu.
- ◆ Gama zraka ubija žive stanice (liječenje raka, Co-bomba)
- ◆ Detektori gama zraka se nalaze uglavnom van atmosfere.

The Crab Nebula



Neke primjene elektromagnetskih valova

