

5. Funkcije više varijabli - 2. dio

1. Odredite totalni diferencijal prvog reda funkcija:

(a) $z(x, y) = x^2 + xy - y^2$

(b) $z(x, y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$

2. Odredite totalni diferencijal drugog reda funkcija:

(a) $z(x, y) = \ln(x + y)$

(b) $z(x, y) = x \ln \frac{x}{y}$

3. Odredite derivaciju $\frac{dz}{dt}$ ako je:

(a) $z(x, y) = \frac{x}{y}, x = e^t, y = \ln t$

(b) $z(x, y) = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3$

(c) $z(x, y) = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3$

(d) $z(x, y) = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y), x = \frac{1}{t}, y = \sqrt{t}$

4. Odredite parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$ ako je:

(a) $z(x, y) = x^2 \ln y, x = \frac{u}{v}, y = 3u - 2v$

(b) $z(x, y) = x^y, x = u^2 - v^2, y = e^{uv}$

(c) $z(x, y) = \sin xy + \frac{1}{1 + x^2 + y^2}, x = uv, y = \frac{u}{v}$

(d) $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, x = u \sin v, y = u \cos v$

5. Odredite derivaciju prvog i drugog reda funkcije $y = f(x)$ zadane implicitno sa:

(a) $y - 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$

(b) $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1$

6. Odredite parcijalne derivacije prvog reda funkcije $z = f(x, y)$ zadane implicitno sa:

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(b) $e^z - xyz = 0$

7. Odredite totalni diferencijal prvog reda funkcije $z = f(x, y)$ zadane implicitno sa:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(b) $x + y + z = xyz$

8. Odredite tangencijalnu ravninu i normalu na plohu $z = x^2 + y^2$ u točki $T(1, -2, z_0)$.

9. Odredite tangencijalnu ravninu i normalu na plohu $z = \arctg \frac{y}{x}$ u točki $T(1, 1, z_0)$.

10. Pokažite da se stožac $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ i sfera $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$ diraju u točkama $(0, \pm b, c)$.