

6. Višestruki integrali - 1. dio

1. Nacrtati područje integracije i promijeniti redoslijed

integriranja u integralu $I = \int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y) dy$.

2. Nacrtati područje integracije i promijeniti redoslijed

integriranja u integralu $I = \int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} f(x, y) dy$.

3. Nacrtati područje integracije i izračunati vrijednost

integrala $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos y dy$.

4. Promijeniti redoslijed integriranja i izračunati vrijed-

nost integrala $\int_2^4 \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy dx$.

5. Izračunati $\iint_S y^2 \sin x dx dy$ ako je

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < 1 + \cos x\}.$$

6. Izračunati $\iint_S \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$ prijelazom na po-

larne koordinate ako je područje S omeđeno krivuljama $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = R^2$.

7. Izraziti integral $I = \iint_S \arctg \frac{y}{x} dx dy$ u polarnim ko-

ordinatama pa ga izračunati uz grafički prikaz područja integracije ako je S dio ravnine što ga omeđuju kružnice $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$ i pravci $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ i $y = \sqrt{3}x$.

8. Izračunati $\iint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ ako je

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

9. Izraziti integral $\iint_S \sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - y^2} dx dy$ u eliptičkim koordinatama pa ga izračunati ako je S dio prstena koji je omeđen elipsama $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ i $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ u prvom kvadrantu.

10. Odrediti volumen tetraedra omeđenog ravninama $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ i $z = 0$.

11. Izračunati površinu lika

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} \leq 1, y \geq 0 \right\}.$$

12. Izračunati volumen tijela određenog nejednadžbama $z \leq x^2 + y^2$, $y \geq x^2$, $y \leq 1$, $z \geq 0$.

13. Izračunati volumen tijela koje je omeđeno plohami $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 2x$, $y = 6 - x$ i $y = 1$.

14. Odrediti površinu lika koji je omeđen kružnicama $x^2 + y^2 = 2x$ i $x^2 + y^2 = 4x$ i pravcima $y = x$ i $y = 0$.

15. Odrediti površinu onog dijela ravnine $6x + 3y + 2z - 12 = 0$ koji se nalazi u prvom oktantu projicirajući zadani dio ravnine na

(i) xy - ravninu,

(ii) yz - ravninu,

(iii) xz - ravninu.

16. Odrediti površinu onog dijela plašta kružnog stošca $x^2 + y^2 = z^2$ koji leži iznad ravnine xy a odsjeca ga ravnina $z = \sqrt{2} \left(\frac{x}{2} + 1 \right)$.

17. Izračunati volumen tijela omeđenog površinama $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$ i ravninom $z = 4$.