4. Nizovi i redovi - 2. dio

1. Ispitajte konvergenciju redova pomoću D'Alembertovog kriterija:

   (a) $\dfrac{1}{e} + \dfrac{8}{e^2} + \dfrac{27}{e^3} + \dfrac{64}{e^4} + \cdots$

   (b) $\dfrac{1!}{2^1+1} + \dfrac{2!}{2^2+1} + \dfrac{3!}{2^3+1} + \cdots$

   (c) $\dfrac{2!}{10} + \dfrac{3!}{10^2} + \dfrac{4!}{10^3} + \cdots$

   (d) $1 + \dfrac{1}{a} + \dfrac{2^b}{a^2} + \dfrac{3^b}{a^3} + \cdots, \quad a > 1,\, b \in \mathbb{R}.$

2. Ispitajte konvergenciju redova pomoću Cauchyjevog kriterija:

   (a) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots$

   (b) $\dfrac{3}{2 \cdot \operatorname{arctg} 1} + \dfrac{3^2}{2^2 \cdot \operatorname{arctg}^2 2} + \dfrac{3^3}{2^3 \cdot \operatorname{arctg}^3 3} + \cdots$

   (c) $\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^9 + \cdots$

   (d) $\sin 2 + 2^2 \sin 1 + 3^3 \sin \dfrac{2}{3} + 4^4 \sin \dfrac{2}{4} + \cdots$

3. Ispitajte konvergenciju redova pomoću poredbenog kriterija:

   (a) $1 + \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{3} + \dfrac{\ln 4}{4} + \cdots$

   (b) $1 + \dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + \dfrac{1}{\ln 4} + \cdots$

   (c) $\dfrac{1}{1001} + \dfrac{1}{2001} + \dfrac{1}{3001} + \cdots$

   (d) $1 + \dfrac{|\sin 2a|}{2^3} + \dfrac{|\sin 3a|}{3^3} + \dfrac{|\sin 4a|}{4^3} + \cdots$

4. Ispitajte konvergenciju redova pomoću Leibnizovog kriterija:

   (a) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(\ln n)^n}$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

5. Ispitajte konvergenciju redova:

   (a) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$

   (b) $\sin 1+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{3^2}+\frac{\sin 4}{4^2}+\cdots$

6. Ispitajte konvergenciju redova:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$;

   (c) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$;

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right]^{n^2}$;

   (e) $1+\frac{1}{2^{\sin 2a}}+\frac{1}{3^{\sin 3a}}+\frac{1}{4^{\sin 4a}}+\cdots$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$;

   (g) $1+\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}-\frac{32}{243}+\cdots$

(h) $\cos 1 + \dfrac{\cos 2}{\sqrt{2^3}} + \dfrac{\cos 3}{\sqrt{3^3}} + \dfrac{\cos 4}{\sqrt{4^3}} + \cdots$

7. Izračunajte sume redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(c) $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 10} + \cdots$

(d) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right)$.

8. Odredite područje konvergencije redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2 \cdot 3^n}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4[1+3+\cdots+(2n-1)]-1} \cdot \left(\frac{x+2}{2x+1} \right)^{2n}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$.