

5. Funkcije više varijabli - 1. dio

1. Odredite i skicirajte područje definicije funkcija:

$$(a) \ z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(b) \ z(x, y) = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$$

$$(c) \ z(x, y) = \frac{xy + 1}{x^2 - y}$$

$$(d) \ z(x, y) = \ln(x^2 + y)$$

$$(e) \ z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + x^2 y^2}$$

$$(f) \ z(x, y) = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$$

$$(g) \ z(x, y) = \arccos \frac{x}{x + y}$$

$$(h) \ z(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$$

$$(i) \ z(x, y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2)}$$

$$(j) \ z(x, y) = \sqrt{y \sin x}$$

$$(k) \ z(x, y) = \frac{\sqrt{y^2 - 4x}}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}$$

$$(l) \ z(x, y) = \ln(x \ln(y - x))$$

2. Izračunajte sljedeće limese ili pokažite da ne postoje:

$$(a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x + y + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$$

$$(b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} \frac{\sin xy}{y}$$

$$(c) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x + y}$$

$$(d) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

3. Odredite parcijalne derivacije prvog reda funkcija:

(a) $z(x, y) = \ln \left(\sin \frac{x+a}{\sqrt{y}} \right)$

(b) $z(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$

(c) $u(x, y, z) = (xy)^z$

(d) $u(x, y, z) = x^{y^z}$

4. Odredite parcijalne derivacije drugog reda funkcija:

(a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$

(b) $f(x, y) = x^y$

(c) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

5. Odredite parcijalne derivacije drugog reda funkcije

$f(x, y) = (1+x)^m(1+y)^n$ u točki $T(0, 0)$.

6. Za funkciju $u(x, y, z) = e^{xyz}$ odredite:

(a) $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$

(b) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ i $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}$

7. Odredite $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, ako je $z(x, y) = \sqrt{2xy + y^2}$.

8. Odredite $\frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y}$, ako je $z(x, y) = x \ln(xy)$.

9. Riješite parcijalnu diferencijalnu jednadžbu $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + y$.

10. Riješite parcijalnu diferencijalnu jednadžbu $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$

uz uvjete $z(x, 0) = 1, \frac{\partial z}{\partial y}(x, 0) = x$.