Kratki pregled diferencijalnih jednadžbi

Red DJ $F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$ je n.
Rješenje je funkcija $\Phi(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0$ koja zadovoljava zadanu DJ.

Često koristimo oblik

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}),$$
$$y = \varphi(x, c_1, \cdots, c_n).$$

Problem početnih vrijednosti glasi

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}),$$
$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}.$$

Jedinstveno rješenje postoji ako je f neprekidna i ima neprekidne parcijalne derivacije na području D i $(x_0, a_0, \cdots, a_{n-1}) \in D$. Konstante c_i određujemo iz početnih uvjeta.

DJ prvog reda

$$y' = f(x, y) \quad \text{or} \quad M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0.$$

DJ je **egzaktna** akko

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Rješenje je $\mu(x, y) = C$, gdje je

$$\mu(x, y) = \int M(x, y)\, dx + \phi(y), \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = N(x, y).$$

Separabilna DJ glasi $M(x)\, dx + N(y)\, dy = 0$.

Integrirajući faktor $\mu(x, y)$ može DJ pretvoriti u egzaktnu:

$$\mu(x, y) M(x, y)\, dx + \mu(x, y) N(x, y)\, dy = 0.$$

Linearna DJ prvog reda

$$y' + g(x) y = h(x),$$

ima *integrirajući faktor* $\mu(x) = \exp(\int g(x)\, dx)$ i rješenje

$$y = \frac{1}{\mu(x)}[c + \int \mu(x)\, h(x)\, dx].$$

Primjene

Rast ili pad populacije:

$$\frac{dP}{dt} = rP \to P = P_0 e^{rt},$$

r je stopa rasta, a $P = 0$ je početna populacija.

Logistička jednadžba:

$$\frac{dP}{dt} = rP\big(1 - \frac{P}{K}\big),$$

r je stopa rasta, K je kapacitet nosivosti.

Newtonov zakon hlađenja:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{\text{ambijent}}),$$

k je stopa hlađenja.

Linearna DJ n-tog reda

$$p_n(x) y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_2(x) y'' + $$
$$+ p_1(x) y' + p_o(x) y = q(x).$$

Homogena LDJ s konst. koef.

$$p_i = \text{const}, \qquad q(x) \equiv 0.$$

Nađu se nul-točke karakterističnog polinoma:

$$p_n r^n + p_{n-1} r^{n-1} + \cdots + p_2 r^2 + p_1 r + p_0 = 0.$$

Ako je r (realna) nul-točka kratnosti k, rješenje sadrži

$$(c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{rx}.$$

Ako je $a + ib$ i $a - ib$ par kompleksnih nul-točaka kratnosti k, rješenje sadrži

$$e^{ax}[(c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k-1} x^{k-1}) \cos bx +$$
$$+ (d_0 + d_1 x + \cdots + d_{k-1} x^{k-1}) \sin bx].$$

LDJ s konstantnim koeficijentima

1. Nađi rješenje pripadne homogene jednadžbe y_h.
2. Nađi jedno partikularno rješenje y_p pomoću jedne od metoda koje slijede.
3. Opće rješenje je $y = y_h + y_p$.

Metoda neodređenih koeficijenata

$$g(x) = e^{ax}p(x)\cos bx + e^{ax}q(x)\sin bx,$$

p i q su polinomi najvećeg stupnja m. Ako je $a + ib$ nul-točka karakterističnog polinoma kratnosti k, traži se rješenje oblika

$$y_p = x^k e^{ax}[(c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m)\cos bx + \\ +(d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m)\sin bx].$$

Ovo je kriptično, ali uključuje sve slučajeve:
$g(x) = p(x)$ za $a = 0$ i $b = 0$;
$g(x) = e^{ax}$ za $p(x) = 1$ i $b = 0$;
$g(x) = \cos bx$ za $a = 1$, $p(x) = 1$ i $q(x) = 0$.

Varijacija parametara

Pretpostavi se partikularno rješenje u obliku

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots v_n y_n.$$

gdje je $v_i = v_i(x)$. Tada su $v_i'(x)$ rješenja sustava linearnih jednadžbi

$$\sum_{i=1}^{n} v_i' y_i^{(k)} = 0, \quad k = 1, \cdots, n-2,$$
$$\sum_{i=1}^{n} v_i' y_i^{(n-1)} = g.$$

Integrira se svaki $v_i'(x)$ što daje $v_i(x)$.

Primjene

Harmonijski oscilator:

Masa M je obješena na *linearnu* oprugu čija je *konstanta* jednaka K (opruga zadovoljava **Hooke-ov zakon**). DJ glasi

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + Ky = 0.$$

Otklon y je

$$y(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at, \quad a = \sqrt{\frac{K}{M}}.$$

Prigušeni sustav mase i opruge:

Sustav mase i opruge s dodatnim trenjem (prigušenje) koje djeluje silom $-Bv$, $B > 0$,
gdje je v brzina. DJ glasi

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Ky = 0.$$

Prisilne oscilacije:

Ako na masu iz prethodnog sustava dodatno djeluje vanjska sila $f(t)$, DJ glasi

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Ky = f(t).$$