Ivan Slapničar

MATEMATIKA 1

http://www.fesb.hr/mat1

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
SPLIT, 2002.

Sadržaj

Popis slika

Popis tablica

Predgovor

Ova knjiga namijenjena je studentima tehničkih i prirodnih znanosti, a u prvom redu studentima Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu (FESB). U njoj je izloženo gradivo kolegija "Matematika 1" po sadržaju koji se predaje na FESB-u. Obrađena su poglavlja Osnove matematike, Linearna algebra, Vektorska algebra i analitička geometrija, Funkcije realne varijable, Derivacije i primjene, te Nizovi i redovi. Sličan sadržaj nalazi se u većini istoimenih kolegija koji se predaju na tehničkim i prirodoslovnim fakultetima.

Budući se radi o standardnom sadržaju, nije citirana posebna literatura. Spomenut ću samo neke od knjiga koje su utjecale na sadržaj, a koje preporučujem i čitatelju:

D. Blanuša, *Viša matematika*, I. dio (1. i 2. svezak), Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.

L. Krnić i Z. Šikić, *Račun diferencijalni i integralni*, I. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

N. Uglešić, *Predavanja iz matematičke analize I*, Svučilište u Splitu, Split, 1989.

B. P. Demidović, *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1978.

U izradi ovog udžbenika također je korišteno iskustvo i zabilješke bivših i sadašnjih nastavnika matematike na FESB-u pa im ovom prilikom iskazujem svoju zahvalnost. Za pažljivo čitanje teksta i korisne primjedbe tijekom rada zahvaljujem se kolegi Marku Matiću.

U Splitu, rujna 2002.

Autor

1.

OSNOVE MATEMATIKE

U ovoj glavi prvo ćemo definirati osnovne pojmove matematičke logike koji su potrebni za praćenje predavanja. Zatim ćemo dati neke pojmove vezane uz skupove te detaljnije definirati pojam relacije, kao i razne tipove relacija na skupovima. Također ćemo vrlo općenito definirati pojam funkcije te dati teorem o inverznoj funkciji. Na kraju, razmatrat ćemo detaljnije skupove prirodnih, cijelih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva.

1.1 Osnove matematičke logike

U ovom poglavlju definirat ćemo pojam suda, osnovne operacije sa sudovima, pojam predikata te vrste kvantifikatora.

Definicija 1.1 *Sud* je svaka smislena izjava koja može biti samo istinita ili neistinita, odnosno lažna.

Primjer 1.1 *"Je li danas četvrtak?"* nije sud nego pitanje. *"Jutro je pametnije od večeri"* nema smisla kao izjava, osim u prenesenom značenju, pa nije sud. *"Danas je četvrtak"* je sud koji je istinit ili neistinit, već prema danu u kojem se izgovara. *"Svaki brod je jedrenjak"* je neistinit sud.

Istinitost suda A označimo s $\tau(A)$. Pri tome $\tau(A) = \top$ znači A *je istinit*, a $\tau(A) = \perp$ znači A *je neistinit*. Osnovne operacije sa sudovima i njihove tablice istinitosti su:

– *konjunkcija*, $A \wedge B$, [A *i* B],

$\tau(A)$	$\tau(B)$	$\tau(A \wedge B)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

– *disjunkcija*, $A \vee B$, [A *ili* B],

$\tau(A)$	$\tau(B)$	$\tau(A \vee B)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

– *ekskluzivna disjunkcija*, $A \veebar B$, [*ili* A *ili* B],

$\tau(A)$	$\tau(B)$	$\tau(A \veebar B)$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

– *implikacija*, $A \Rightarrow B$, [*A povlači B; iz A slijedi B; A je dovoljan uvjet za B; B je nužan uvjet za A*],

$\tau(A)$	$\tau(B)$	$\tau(A \Rightarrow B)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

– *ekvivalencija*, $A \Leftrightarrow B$, [*A je ekvivalentno s B; A je ako i samo ako je B; A je nužan i dovoljan uvjet za B*],

$\tau(A)$	$\tau(B)$	$\tau(A \Leftrightarrow B)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

– *negacija*, $\neg A$, [*ne A; non A*],

$\tau(A)$	$\tau(\neg A)$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Za sudove A, B i C vrijede *DeMorganovi zakoni*,

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B,$$
$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B,$$

i *zakoni distribucije*,

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$
$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Zadatak 1.1 Dajte primjere za osnovne operacije sa sudovima i protumačite tablice istinitosti. Dajte primjere za DeMorganove zakone i zakone distribucije.

Definicija 1.2 *Otvorena rečenica* ili *predikat* je izjavna rečenica koja sadrži parametre i koja postaje sud kada parametri poprime određenu vrijednost.

Na primjer, predikat x *je rođen prije* y postaje sud kada su x i y dvije osobe. Predikat s dvije varijable označavamo s $P(x,y)$.

Kod izražavanja pomoću predikata koristimo *kvantifikatore*:

- *univerzalni*, $(\forall x)P(x)$, odnosno *za svaki* x *je* $P(x)$, i
- *egzistencijalni*, $(\exists x)P(x)$, odnosno *postoji* x *takav da je* $P(x)$ te $(\exists! x)P(x)$, odnosno *postoji točno jedan* x *takav da je* $P(x)$.

Primjer 1.2 a) Neka je $P(x,y) = x$ *je rođen prije* y. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\tau[(\forall x)(\exists y) \quad P(x,y)] &= \top, \\
\tau[(\forall y)(\exists x) \quad P(x,y)] &= \top, \\
\tau[(\forall y)(\exists! x) \quad P(x,y)] &= \bot.
\end{aligned}$$

b) Neka $P(x)$ glasi $x^2 = 4$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\tau[(\forall x \in \mathbb{R}) \quad P(x)] &= \bot, \\
\tau[(\exists x \in \mathbb{R}) \quad P(x)] &= \top, \\
\tau[(\exists! x \in \mathbb{R}) \quad P(x)] &= \bot, \\
\tau[(\exists! x \in \mathbb{N}) \quad P(x)] &= \top.
\end{aligned}$$

1.2 Binarne relacije

U ovom poglavlju definirat ćemo partitivni skup, Kartezijev produkt skupova i binarnu relaciju te dati klasifikaciju binarnih relacija.

Skup je pojam koji se ne definira. Skup je zadan svojim elementima. Na primjer, skup $S = \{x, y, z, w\}$ ima elemente x, y, z i w. Tu činjenicu zapisujemo s

$$x \in S, \quad y \in S, \quad z \in S, \quad w \in S,$$

dok, recimo, $t \notin S$. S $\emptyset$ označavamo prazan skup, odnosno skup bez elemenata.

Zadatak 1.2 Ponovite pojmove podskupa, nadskupa, unije skupova, presjeka skupova i razlike skupova te osnovna svojstva tih operacija.

Partitivni skup skupa X je skup 2^X čiji su elementi svi podskupovi skupa X. Na primjer, ako je $X = \{a, b, c\}$, tada je

$$2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

Dakle, uvijek je $\emptyset \in 2^X$ i $X \in 2^X$.

Definicija 1.3 *Direktni produkt* ili *Kartezijev produkt* skupova X i Y je skup svih uređenih parova (x, y), gdje je $x \in X$ i $y \in Y$, odnosno

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Na primjer, ako je $X = \{1, 2, 3\}$ i $Y = \{a, b\}$, tada je

$$X \times Y = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}.$$

Također, $X \times \emptyset = \emptyset$ za svaki skup X.

Definicija 1.4 *Binarna relacija na skupu* X je svaki podskup $\mathcal{R} \subseteq X \times X$. Ako je uređeni par $(x, y) \in \mathcal{R}$, kažemo da je x u relaciji $\mathcal{R}$ s y, i pišemo $x \mathcal{R} y$ ili $\mathcal{R}(x, y)$. Binarna relacija je:

– *refleksivna* ako je $x \mathcal{R} x$ za svaki $x \in X$;

– *simetrična* ako $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$;

– *tranzitivna* ako $(x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$;

– *relacija ekvivalencije* ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Na primjer, neka je X skup ljudi i neka je $(x, y) \in \mathcal{R}$ ako su x i y rođeni istog dana. Očito vrijedi

$$x \mathcal{R} x, \quad x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x, \quad (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z,$$

pa je $\mathcal{R}$ relacija ekvivalencije.

Napomena 1.1 Relacija ekvivalencije na skupu X cijepa taj skup na međusobno disjunktne podskupove, takozvane *klase ekvivalencije*. Skup X se može na jedinstven način prikazati kao unija tih klasa ekvivalencije.

1.2.1 Uređeni skupovi

U ovom poglavlju definirat ćemo relaciju parcijalnog uređaja i uređeni skup te pojmove kao što su gornja međa, donja međa, infimum, supremum, minimum i maksimum. Izreku $(\forall x \in X)(\forall y \in X)$ kraće ćemo zapisati kao $\forall x, y \in X$.

Definicija 1.5 *Relacija parcijalnog uređaja* $\leq$ *na skupu* X je svaka binarna relacija na skupu X koje je refleksivna, tranzitivna i *anti-simetrična*, odnosno

$$(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y.$$

Ako je $x \leq y$ i $x \neq y$, pišemo $x < y$. Također, $x \leq y$ možemo pisati i kao $y \geq x$. Ako su, dodatno, svaka dva elementa skupa X u relaciji, odnosno $\forall x, y \in X$ vrijedi $x \leq y \vee y \leq x$, tada je $\leq$ *relacija potpunog uređaja*, a X je *uređen skup*.

Na primjer, skup ljudi je potpuno uređen s relacijom $\leq$ koju definiramo kao
$$x \leq y \Leftrightarrow x \text{ nije stariji (viši,lakši) od } y.$$
Naravno, skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ su potpuno uređeni sa standardnom relacijom uređaja $\leq$. Ako je $(X, \leq)$ uređen skup, *zatvoreni interval* definiramo kao

$$[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\},$$

a *otvoreni interval* definiramo kao

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}.$$

Slično definiramo i poluotvorene intervale, $(a, b]$ i $[a, b)$, kao i skupove tipa $[a, \cdot) = \{x \in X : a \leq x\}$.

Definicija 1.6 Neka je $(X, \leq)$ uređen skup i A neprazan podskup od X.

(i) Element $m \in X$ je *donja međa skupa* A ako $\forall a \in A$ vrijedi $m \leq a$. Skup A je *omeđen odozdo* ako ima barem jednu donju među. *Najveća donja međa* ili *infimum* skupa A je element $\inf A \in X$ sa svojstvima:

- $\inf A$ je donja međa od A;
- za svaku donju među m skupa A vrijedi $m \leq \inf A$.

Najmanji element ili *minimum* skupa A je element $\min A \in A$ koji je ujedno i donja međa skupa A.

(ii) Element $M \in X$ je *gornja međa skupa* A ako $\forall a \in A$ vrijedi $a \leq M$. Skup A je *omeđen odozgo* ako ima barem jednu gornju među. *Najmanja gornja međa* ili *supremum* skupa A je element $\sup A \in X$ sa svojstvima:

- $\sup A$ je gornja međa od A;
- za svaku gornju među M skupa A vrijedi $\sup A \leq M$.

Najveći element ili *maksimum* skupa A je element $\max A \in A$ koji je ujedno i gornja međa skupa A.

Neka je, na primjer $X = \mathbb{N}$ i $A = \{5, 6, 7, 8\} \subseteq \mathbb{N}$. Donje međe skupa A su brojevi $1, 2, 3, 4$ i 5. Najveća donja međa je $\inf A = 5$, a kako je $5 \in A$, to je i $\min A = 5$. Nadalje, gornje međe skupa A su brojevi $8, 9, 10, 11, \ldots$, a $\sup A = \max A = 8$.

Razliku između infimuma i minimuma možemo ilustrirati na skupu realnih brojeva. Neka je, dakle, $X = \mathbb{R}$ i $A = (4, 8] \subseteq \mathbb{R}$. Donje međe skupa A su svi brojevi manji ili jednaki četiri, pa je $\inf A = 4$, dok A nema minimum. S druge strane, gornje međe skupa A su svi brojevi veći ili jednaki osam i vrijedi $\sup A = \max A = 8$.

Primijetimo da su infimum, supremum, minimum i maksimum jedinstveni (ukoliko postoje). Zaista, neka je $m_1 = \inf A$ i $m_2 = \inf A$. Prema definiciji 1.6, elementi m_1 i m_2 su također donje međe skupa A, odnosno

$$m_1 \leq m_2 = \inf A \quad \text{i} \quad m_2 \leq m_1 = \inf A,$$

pa iz definicije 1.5 slijedi $m_1 = m_2$.

1.3 Funkcije

U ovom poglavlju dat ćemo osnovne pojmove vezane uz funkcije i klasifikaciju funkcija, dokazati važan teorem o inverznoj funkciji te definirati ekvipotentnost skupova i beskonačne skupove.

Definicija 1.7 *Funkcija* ili *preslikavanje* iz skupa X u skup Y je svako pravilo f po kojemu se elementu $x \in X$ pridružuje jedinstveni element $y \in Y$. Koristimo oznake

$$f : X \to Y \quad \text{ili} \quad y = f(x).$$

Skup X je *područje definicije* ili *domena* funkcije f, skup Y je *područje vrijednosti* ili *kodomena* funkcije f, x je *nezavisna varijabla* ili *argument* funkcije f, a y je *zavisna varijabla* funkcije f. Skup svih vrijednosti nezavisne varijable x za koje je funkcija doista definirana još označavamo s D_f, a skup svih vrijednosti koje poprima zavisna varijabla označavamo s R_f i zovemo *slika funkcije*,

$$R_f = \{y \in Y : (\exists x \in D_f) \text{ takav da je } y = f(x)\} \subseteq Y.$$

Nakon što smo definirali novi matematički objekt, u ovom slučaju funkciju, potrebno je definirati kada su dva objekta jednaka.

Definicija 1.8 Funkcije f i g su *jednake*, odnosno $f = g$, ako vrijedi

$$D_f = D_g \quad \wedge \quad f(x) = g(x) \text{ za } \forall x \in D_f.$$

Na primjer, funkcije $f(x) = x$ i $g(x) = \dfrac{x^2}{x}$ nisu jednake jer je $D_f = \mathbb{R}$, dok je $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definicija 1.9 *Kompozicija* funkcija $f : X \to Y$ i $g : V \to Z$, gdje je $R_f \subseteq V$, je funkcija $h : X \to Z$ definirana s $h(x) = g(f(x))$. Još koristimo oznaku $h = g \circ f$.

Kompozicija funkcija je *asocijativna*, odnosno

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Zaista, za proizvoljni x za koji je kompozicija definirana vrijedi

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)\end{aligned}$$

pa tvrdnja slijedi iz definicije jednakosti funkcija 1.8.

Definicija 1.10 Ako je $D_g \subseteq D_f$ i $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in D_g$, funkcija g je *restrikcija* ili *suženje* funkcije f, a funkcija f je *ekstenzija* ili *proširenje* funkcije g.

Na primjer, funkcija $g(x) = x^2/x$ je restrikcija funkcije $f(x) = x$ na skup $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, odnosno $g = f\ |_{D_g}$, a funkcija f je ekstenzija funkcije g. Primijetimo da je restrikcija uvijek jedinstvena, dok ekstenzija to nije. Tako je u ovom slučaju i funkcija $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definirana s

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{za } x \neq 0 \\ 1, & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

jedna od beskonačno mogućih ekstenzija funkcije g.

1.3.1 Teorem o inverznoj funkciji

Prvo ćemo definirati neke klase funkcija.

Definicija 1.11 Funkcija $f : X \to Y$ je:

- *surjekcija* ili *preslikavanje na* ako je $R_f = Y$;
- *injekcija* ili *1-1 preslikavanje* ako $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ za sve $x, x' \in D_f$;
- *bijekcija* ili *obostrano jednoznačno preslikavanje* ako je surjekcija i injekcija.

Jedan primjer bijekcije je *identiteta*, odnosno funkcija $i_X : X \to X$ definirana s $i_X(x) = x$ za svaki $x \in X$.

Teorem 1.1 *Funkcija $f : X \to Y$, gdje je $X = D_f$, je bijekcija ako i samo ako postoji funkcija $g : Y \to X$ takva da je $g \circ f = i_X$ i $f \circ g = i_Y$, gdje su i_X i i_Y odgovarajuće identitete. Funkcija g je jedinstvena, a zove se* inverzna funkcija funkcije *f i označava s f^{-1}.*

Dokaz. Potrebno je dokazati oba smjera tvrdnje teorema. Neka je f bijekcija. Potrebno je konstruirati funkciju g s traženim svojstvima. Definicija 1.11 povlači

$$(\forall y \in Y)(\exists! x \in X) \quad \text{takav da je} \quad y = f(x).$$

Stoga možemo definirati funkciju $g : Y \to X$ pravilom

$$g(y) = x \quad \text{čim je} \quad y = f(x).$$

Za svaki $x \in X$ vrijedi $g(f(x)) = g(y) = x$ pa je $g \circ f = i_X$. Slično, za svaki $y \in Y$ vrijedi $f(g(y)) = f(x) = y$ pa je $f \circ g = i_Y$ i prvi smjer je dokazan.

Dokažimo drugi smjer tvrdnje teorema. Neka postoji funkcija g s traženim svojstvima. Potrebno je pokazati da je f bijekcija. Odaberimo proizvoljni $y \in Y$. Neka je $x = g(y)$. Svojstva funkcije g povlače

$$f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = i_Y(y) = y.$$

Zaključujemo da je svaki element $y \in Y$ slika nekog elementa $x \in X$ pa je f surjekcija. Dokažimo da je f injekcija. Zaista, ako je $f(x) = f(x')$, tada je

$$x = i_X(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = i_X(x') = x'.$$

Dakle, f je bijekcija te smo dokazali i drugi smjer tvrdnje teorema.

Na kraju dokažimo jedinstvenost funkcije g. Pretpostavimo da postoje dvije funkcije s traženim svojstvima, g i g_1. Za svaki $y \in Y$ vrijedi

$$g(y) = x = i_X(g(y)) = (g_1 \circ f)(g(y)) = g_1(f(g(y))) = g_1(i_Y(y)) = g_1(y)$$

pa je $g = g_1$ prema definiciji 1.8. $\blacksquare$

1.3.2 Ekvipotencija i beskonačni skupovi

Zbog svojstava bijekcije prirodna je sljedeća definicija: skupovi X i Y su *ekvipotentni*, odnosno imaju jednako mnogo elemenata, ako postoji bijekcija između ta dva skupa.

Ekvipotencija je očito relacija ekvivalencije na skupovima. Klasa ekvivalencije kojoj pripada skup X zove se *kardinalni broj skupa* X i označava s $\operatorname{kard} X$.

Definicija 1.12 Skup X je *beskonačan*, odnosno ima beskonačno mnogo elemenata, ako je ekvipotentan sa svojim pravim podskupom. Skup X je *konačan* ako nije beskonačan.

Na primjer, skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je beskonačan, jer je funkcija $f(n) = 2n$ bijekcija između skupa prirodnih brojeva i skupa svih parnih brojeva. Dakle, zanimljivo je da parnih brojeva ima jednako mnogo kao i svih prirodnih brojeva. To očito ne vrijedi samo za parne brojeve; i skup svih brojeva koji su djeljivi s tisuću također ima jednako mnogo elemenata kao i skup $\mathbb{N}$.

1.4 Prirodni brojevi

U ovom poglavlju definirat ćemo skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, osnovne računske operacije na tom skupu i njihova svojstva te relaciju potpunog uređaja. Posebnu pažnju posvetit ćemo principu matematičke indukcije i njegovoj primjeni na dokazivanje binomnog poučka. Ponovit ćemo i neke načine zapisivanja elemenata skupa $\mathbb{N}$.

Definicija 1.13 *Skup prirodnih brojeva* $\mathbb{N}$ je skup koji zadovoljava četiri *Peanova aksioma*:

P1. postoji *funkcija sljedbenika* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;

P2. s je injekcija;

P3. postoji barem jedan element $1 \in \mathbb{N}$ koji nije ničiji sljedbenik, odnosno $s(n) \neq 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$;

P4. ako je $M \subseteq \mathbb{N}$ i ako vrijedi

(i) $1 \in M$,

(ii) $n \in M \Rightarrow s(n) \in M$,

tada je $M = \mathbb{N}$.

Aksiom P4 zove se *princip matematičke indukcije*.

Operacije na skupu $\mathbb{N}$ definiramo na sljedeći način:

– *zbrajanje* je funkcija $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa svojstvima

$$m + 1 = s(m) \quad \wedge \quad m + s(n) = s(m + n), \qquad \forall m, n \in \mathbb{N};$$

– *množenje* je funkcija $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa svojstvima

$$m \cdot 1 = m \quad \wedge \quad m \cdot s(n) = (m \cdot n) + m, \qquad \forall m, n \in \mathbb{N};$$

Dva važna teorema navodimo bez dokaza.

Teorem 1.2 *Postoji točno jedan skup sa svojstvima iz definicije 1.13. Funkcije $+$ i $\cdot$ jedine su funkcije s gornjim svojstvima.*

Ovaj teorem zapravo kaže da se uvijek radi o istom skupu $\mathbb{N}$ bez obzira na to kako označavamo njegove elemente. Razni načini označavanja prirodnih brojeva dani su u poglavlju 1.4.1.

Teorem 1.3 *Množenje i zbrajanje imaju sljedeća svojstva: za sve $m, n, p \in \mathbb{N}$ vrijedi*

(i) asocijativnost*, odnosno*

$$(m+n)+p = m+(n+p), \qquad (m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p);$$

(ii) komutativnost*, odnosno*

$$m+n = n+m, \qquad m \cdot n = n \cdot m;$$

(iii) distributivnost*, odnosno*

$$m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p, \qquad (m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p;$$

(iv) $m+n = m+p \Rightarrow n = p, \qquad m \cdot n = m \cdot p \Rightarrow n = p;$

(v) $m + n \neq m.$

Princip matematičke indukcije P4 iz definicije 1.13 koristimo za dokazivanje raznih korisnih tvrdnji. U poglavlju 1.4.3 taj princip ćemo koristiti za dokazivanje binomnog poučka, a sada navodimo sljedeći primjer.

Primjer 1.3 Dokažimo formulu

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neka je M skup svih prirodnih brojeva za koje formula vrijedi. Koristeći princip matematičke indukcije dokazat ćemo da je $M = \mathbb{N}$. Za $n = 1$ formula očito vrijedi. Stoga je $1 \in M$ i tako je ispunjen uvjet (i) aksioma P4. Ovaj uvjet zove se *baza indukcije*. Pokažimo da je ispunjen i uvjet (ii) aksioma P4, odnosno *korak indukcije*. Ako je $n \in M$, odnosno ako formula vrijedi za n, tada je

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2+n+2n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Dakle, $n+1 \in M$ pa aksiom P4 povlači $M = \mathbb{N}$, odnosno formula vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Decimalni sustav	Rimski brojevi	Binarni sustav	Oktalni sustav	Heksa-decimalni sustav
1	I	1	1	1
$s(1) = 1 + 1 = 2$	II	10	2	2
$s(2) = 2 + 1 = 3$	III	11	3	3
$s(3) = 3 + 1 = 4$	IIII ili IV	100	4	4
5	V	101	5	5
6	VI	110	6	6
7	VII	111	7	7
8	VIII	1000	10	8
9	IX	1001	11	9
10	X	1010	12	A
11	XI	1011	13	B
12	XII	1100	14	C
13	XIII	1101	15	D
14	XIV	1110	16	E
15	XV	1111	17	F
16	XVI	10000	20	10

Tablica 1.1: Brojevni sustavi

1.4.1 Brojevni sustavi

Elemente skupa prirodnih brojeva označavamo na razne načine, neki od kojih su dani u tablici 1.1.

Kod rimskih brojeva oznaka V za broj pet zapravo simbolizira ruku koja ima pet prstiju, dok oznaka X za broj deset simbolizira dvije ruke. Računala zbog tehničkih mogućnosti kreiranja samo dvaju stabilnih stanja (prekidač) koriste sustav s bazom 2, odnosno *binarni sustav*. Radi lakšeg baratanja s binarnim brojevima koriste se *oktalni sustav* s bazom osam i *heksadecimalni sustav* s bazom 16. Iz babilonskih vremena smo naslijedili *heksagezimalni sustav* s bazom 60. Danas dijelove tog sustava koristimo za prikazivanja vremena (1 sat=60 minuta= $60 \cdot 60$ sekunda) i kutova. U trgovini se također koristi i sustav s bazom 12. Taj sustav je praktičan jer je broj 12 djeljiv s dva, tri, četiri i šest. Količinu 12 često zovemo tucet ili duzina.

1.4.2 Uređaj na skupu prirodnih brojeva

Uređaj definiramo na sljedeći način.

Definicija 1.14 Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Tada je *m manji od n*, odnosno $m < n$, ako i samo ako postoji $p \in \mathbb{N}$ za koji je $m + p = n$. Nadalje, *m je manje ili jednako n*, odnosno $m \leq n$, ako vrijedi $m < n$ ili $m = n$.

S ovako definiranom relacijom potpunog uređaja $\mathbb{N}$ je uređen skup po definiciji 1.5. U skladu s poglavljem 1.2.1 možemo definirati intervale

$$[1, n]_{\mathbb{N}} = \{p \in \mathbb{N} : 1 \leq p \leq n\} = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Posebno je $[1, \cdot)_{\mathbb{N}} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$.

Sljedeća definicija nadopunjava definicije iz poglavlja 1.3.2.

Definicija 1.15 *Skup X ima n elemenata*, odnosno $\operatorname{kard} X = n$, ako je X ekvipotentan s $[1, n]_{\mathbb{N}}$. Skup X je *prebrojiv* ili *prebrojivo beskonačan*, odnosno $\operatorname{kard} X = \aleph_0$ (*alef nula*), ako je ekvipotentan s $\mathbb{N}$.

Skup prirodnih brojeva $(\mathbb{N}, \leq)$ je *diskretan* ili *diskretno uređen*, odnosno za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\{p \in \mathbb{N} : n < p < n + 1\} = \emptyset$. Ovo svojstvo će biti jasnije kada u poglavljima 1.6 i 1.7 opišemo guste skupove $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$.

1.4.3 Binomni poučak

U ovom poglavlju definirat ćemo permutaciju i kombinaciju, opisati Pascalov trokut i dokazati binomni poučak i neke njegove posljedice.

Definicija 1.16 *Permutacija n-tog reda* je svaka bijekcija s $[1, n]_{\mathbb{N}}$ u $[1, n]_{\mathbb{N}}$. *Kombinacija n-tog reda i k-tog razreda* je svaki k-člani podskup $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq [1, n]_{\mathbb{N}}$. Pri tome je dopušten i slučaj $k = 0$.

U teoremu 2.7 je dokazano da skup svih različitih permutacija n-tog reda ima $n!$ elemenata (*n faktorijela*). Faktorijele su definirane rekurzivno s

$$(n + 1)! = n!(n + 1) \quad \text{uz dogovor} \quad 0! = 1,$$

ili kao funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadana s

$$f(1) = 1, \quad f(n + 1) = f(n) \cdot (n + 1).$$

Teorem 1.4 *Broj različitih kombinacija n-tog reda i k-tog razreda K_n^k jednak je* binomnom koeficijentu

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dokaz. Svaku permutaciju n-tog reda možemo dobiti u tri koraka:

1. odaberemo jedan k-člani podskup od $[1, n]_{\mathbb{N}}$, što možemo učiniti na K_n^k načina;

2. odaberemo jednu permutaciju tog podskupa, što možemo učiniti na $k!$ načina;

3. odaberemo jednu permutaciju preostalog $(n-k)$-članog podskupa, što možemo učiniti na $(n-k)!$ načina.

Ukupan broj permutacija n-tog reda stoga je jednak

$$n! = K_n^k \cdot k! \cdot (n-k)!$$

pa je teorem dokazan. ■

Teorem 1.5 *Vrijedi*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \forall k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \leq n,$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \qquad \forall k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k < n.$$

Zadatak 1.3 Dokažite teorem 1.5.

Druga tvrdnja teorema 1.5 daje nam poznati *Pascalov trokut*:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \end{array} \tag{1.1}$$

U n-tom retku Pascalovog trokuta nalaze se binomni koeficijenti n-tog reda, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, i to poredani po razredu $k = 0, 1, 2 \cdots, n$. Vidimo da je svaki element, osim rubnih, zbroj dvaju elemenata koji se nalaze s lijeve i desne strane u retku iznad.

Teorem 1.6 (Binomni poučak) *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{1.2}$$

Na primjer, formula (1.2) i Pascalov trokut (1.1) za $n = 4$ daju

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^0b^4 + \binom{4}{1}a^1b^3 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^3b^1 + \binom{4}{4}a^4b^0\\ &= b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4.\end{aligned}$$

Binomni poučak dokazat ćemo za prirodne brojeve, no on vrijedi i za racionalne, realne i kompleksne brojeve.

Dokaz. Teorem ćemo dokazati pomoću principa matematičke indukcije P4 iz definicije 1.13. Tehnika dokazivanja slična je onoj iz Primjera 1.3.

Neka je M skup svih prirodnih brojeva za koje formula vrijedi. Dokažimo da je $M = \mathbb{N}$. Za $n = 1$ formula vrijedi jer je

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^0b^1 + \binom{1}{1}a^1b^0.$$

Dakle, $1 \in M$ pa je ispunjena baza indukcije, odnosno uvjet (i) aksioma P4. Pokažimo da je ispunjen i korak indukcije, odnosno uvjet (ii) aksioma P4. Ako je $n \in M$, odnosno ako formula vrijedi za n, tada je

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right](a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&\quad + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

U predzadnjoj jednakosti koristili smo Pascalov trokut (1.1). Dakle, $n+1 \in M$ pa aksiom P4 povlači $M = \mathbb{N}$ i teorem je dokazan. ■

Korolar 1.1 *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$(a-b)^n = (a+(-1)b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}$$

i

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

odnosno zbroj elemenata u n-tom retku Pascalovog trokuta (1.1) jednak je 2^n.

1.5 Cijeli brojevi

U ovom poglavlju ukratko ćemo dati osnovnu motivacija za uvođenje *skupa cijelih brojeva* $\mathbb{Z}$ te navesti osnovna svojstva tog skupa.

Prema definiciji 1.14 za $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$m < n \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{N}) \quad m + p = n.$$

Kako je broj p jedinstven, možemo pisati $p = n - m$. Ako je pak $n < m$, tada $n - m \notin \mathbb{N}$. Stoga skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ proširujemo s njegovom negativnom kopijom i dodajemo element 0 za koji vrijedi

$$0 \cdot m = 0 \quad \text{i} \quad 0 + m = m, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Uređaj na skupu $\mathbb{Z}$ uvodimo slično kao u definiciji 1.14. Skup $(\mathbb{Z}, \leq)$ je diskretan kao i skup $\mathbb{N}$, a razlikuju se u tome što $\mathbb{Z}$ nema najmanji element.

Skup $\mathbb{Z}$ je ekivipotentan s $\mathbb{N}$, odnosno oba skupa imaju jednako mnogo elemenata, jer je funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definirana s

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{za } n \text{ paran} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{za } n \text{ neparan} \end{cases}$$

bijekcija.

Računske operacije $+$, $-$ i $\cdot$ na skupu $\mathbb{Z}$ definiramo na poznati način te za njih vrijede svojstva slično kao u Teoremu 1.3.

1.6 Racionalni brojevi

U ovom poglavlju definirat ćemo skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ te dati osnovna svojstva tog skupa.

Na skupu

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$$

definiramo relaciju $\sim$ s

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1.$$

$\sim$ je relacija ekvivalencije, na primjer $(2, 3) \sim (4, 6) \sim (6, 9)$.

Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je skup svih klasa ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, odnosno

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}_{\sim}.$$

Računske operacije $+$, $\cdot$ i $:$ te relaciju potpunog uređaja $\leq$ na skupu $\mathbb{Q}$

definiramo redom kako slijedi:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2},$$

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2},$$

$$\frac{m_1}{n_1} : \frac{m_2}{n_2} = \frac{\frac{m_1}{n_1}}{\frac{m_2}{n_2}} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot m_2}, \quad \text{za} \quad m_2 \neq 0,$$

$$\frac{m_1}{n_1} \leq \frac{m_2}{n_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot n_2 \leq n_1 \cdot m_2.$$

Ovdje se zaista radi o definicijama, jer smo "nove" operacije i relaciju uređaja na lijevim stranama definirali pomoću poznatih operacija i uređaja na skupu $\mathbb{Z}$ na desnim stranama. Dakle, iste oznake za računske operacije i relaciju uređaja imaju različita značenja na lijevim i desnim stranama. Računske operacije i relacija uređaja na skupu $\mathbb{Q}$ su dobro definirane jer ne ovise o predstavniku klase ekvivalencije, na primjer $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6} + \frac{9}{12}$. Za računske operacije vrijede poznata svojstva slično kao u teoremu 1.3.

Za razliku od skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ koji su diskretni, skup $\mathbb{Q}$ je *gust*, odnosno između svaka dva različita racionalna broja nalazi se beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

Teorem 1.7 *Skup* $\mathbb{Q}$ *je gust.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da se između svaka dva različita racionalna broja nalazi barem jedan racionalni broj. Neka je

$$q_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad q_2 = \frac{m_2}{n_2} \quad \text{i} \quad q_1 < q_2 \quad \text{odnosno} \quad m_1 n_2 < n_1 m_2.$$

Neka je

$$q = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{2 n_1 n_2}.$$

Tada je $q_1 < q$ jer je $2 m_1 n_1 n_2 < m_1 n_1 n_2 + n_1 n_1 m_2$. Slično vrijedi $q < q_2$ i teorem je dokazan. ■

Unatoč tome što je $\mathbb{Q}$ gust, a $\mathbb{N}$ prebrojiv, oba skupa imaju jednako mnogo elemenata. Naime, skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ su ekvipotentni jer je funkcija $f : \mathbb{N} \to$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definirana s

$$\begin{array}{lllll}
(1,1)_{f(1)} & (1,2)_{f(3)} & (1,3)_{f(6)} & (1,4)_{f(10)} & \cdots \\
(2,1)_{f(2)} & (2,2)_{f(5)} & (2,3)_{f(9)} & \cdots & \\
(3,1)_{f(4)} & (3,2)_{f(8)} & \cdots & & \\
(4,1)_{f(7)} & \cdots & & & \\
\cdots & & & &
\end{array}$$

bijekcija. Oznaka $(1,1)_{f(1)}$ znači $f(1)=(1,1)$. Kako je $\mathbb{Z}$ ekvipotentan s $\mathbb{N}$, to su i skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ ekvipotentni. Konačno, iz $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ zaključujemo da je skup $\mathbb{Q}$ također ekvipotentan s $\mathbb{N}$.

1.7 Realni brojevi

U ovom poglavlju definirat ćemo skup realnih bojeva, navesti njegova osnovna svojstva, objasniti kako rade računala i definirati apsolutnu vrijednost realnog broja.

Kada racionalne brojeve nanosimo na brojevni pravac, budući je skup $\mathbb{Q}$ gust, mogli bismo pomisliti da njegovi elementi prekrivaju čitavi pravac. To, međutim, nije istina. Nanesemo li na brojevni pravac dijagonalu kvadrata sa stranicom dužine jedan, dobit ćemo po Pitagorinom poučku broj $\sqrt{2}$.

Teorem 1.8 $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

Dokaz. Prvo uočimo da je kvadrat prirodnog broja n paran ako i samo ako je n paran: ako je $n=2p$ paran, tada je $n^2=(2p)^2=4n^2$ također paran, a ako je $n=2p-1$ neparan, tada je $n^2=(2p-1)^2=4(p^2-p)+1$ neparan.

Teorem ćemo dokazati koristeći tehniku *kontradikcije* ili *protuslovlja*. Naime, ako je $\tau(A\Rightarrow B)=\top$ i ako pokažemo da je $\tau(B)=\perp$, tada prema tablici istinitosti za implikaciju iz poglavlja 1.1 slijedi $\tau(A)=\perp$.

Ako je (A) $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, tada je (B) $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, pri čemu su m i n relativno prosti, odnosno ne mogu se dalje skratiti. Međutim, tada je $m^2=2n^2$ pa je prema prvom dijelu dokaza m paran, odnosno $m=2p$. Iz $(2p)^2=2n^2$ slijedi $2p^2=n^2$ pa je n također paran. Dakle, m i n nisu relativno prosti pa je tvrdnja (B) neistinita. No, tada i tvrdnja (A) mora biti neistinita i teorem je dokazan. ∎

Definicija 1.17 *Iracionalni brojevi* su brojevi koji se nalaze na brojevnom pravcu, a nisu elementi skupa $\mathbb{Q}$. *Skup realnih brojeva* $\mathbb{R}$ je unija skupa racionalnih brojeva i skupa iracionalnih brojeva.

Računske operacije na skupu realnih brojeva definirane su na poznati način te za njih vrijede svojstva slično kao u teoremu 1.3.

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 1.9 *Vrijedi:*

(i) skup $\mathbb{R}$ je gust, odnosno između svaka dva različita realna broja postoji beskonačno realnih brojeva;

(ii) skup $\mathbb{Q}$ je gust u skupu $\mathbb{R}$, odnosno između svaka dva različita realna broja postoji beskonačno racionalnih brojeva;

(iii) skup $\mathbb{R}$ je gust u skupu $\mathbb{Q}$, odnosno između svaka dva različita racionalna broja postoji beskonačno realnih brojeva;

(iv) skup $\mathbb{R}$ je neprebrojiv;

(v) elementi skupa $\mathbb{R}$ prekrivaju čitavi brojevni pravac.

Odnos između do sada opisanih skupova brojeva je sljedeći:

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \subset \quad \mathbb{Z}}_{\text{diskretni}} \quad \subset \quad \underbrace{\mathbb{Q} \quad \subset \quad \mathbb{R}}_{\text{gusti}},$$

$$\underbrace{\mathbb{N} \quad \subset \quad \mathbb{Z} \quad \subset \mathbb{Q}}_{\text{prebrojivi}} \quad \subset \quad \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{neprebrojiv}}.$$

1.7.1 Aritmetika računala

Broj $\sqrt{2}$ ima beskonačni neperiodični decimalni zapis pa ga ne možemo zapisati ni kao decimalni broj, niti kao razlomak. Slično, broj $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = 0.\dot{3}$ ima beskonačni periodični decimalni zapis pa ga ne možemo zapisati kao decimalni broj, ali ga možemo zapisati kao razlomak. Zbog konačne memorije, računala za prikazivanje brojeva i računanje koriste jedan <u>diskretni</u> podskup skupa $\mathbb{Q}$, tako da osnovni matematički zakoni asocijacije i distribucije iz teorema 1.3 <u>ne vrijede</u>.

Princip rada računala ilustrirat ćemo na jednostavnom primjeru. Zamislimo računalo koje za pohranjivanje brojeva i računanje raspolaže s tri decimalna mjesta, s tim što se decimalna točka može pomicati,

$$.\ \sqcup\ .\ \sqcup\ .\ \sqcup\ .$$

U ovakvom računalu možemo prikazati brojeve

$$\begin{aligned}
&999,\ 998, \ldots,\ 102,\ 101,\ 100,\\
&99.9,\ 99.8, \ldots,\ 10.2,\ 10.1,\ 10.0,\\
&9.99,\ 9.98, \ldots,\ 3.14, \ldots,\ 1.41, \ldots,\ 1.00,\\
&.999,\ .998,\ .997, \ldots,\ .101,\ .100,\\
&.099,\ .098, \ldots,\ .012,\ .011,\ .010,\\
&.009,\ .008, \ldots,\ .002,\ .001.
\end{aligned}$$

Skup brojeva koje možemo prikazati je očito diskretan jer, na primjer, ne možemo prikazati niti jedan broj između 998 i 999 kao niti između .001 i .002. No, za razliku od skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ gdje su razmaci između elemenata konstantni, ovdje se duljina razmaka mijenja. U ovakvom računalu asocijativnost ne vrijedi, jer je

$$((200 + 0.4) + 0.4) + 0.4 = (200 + 0.4) + 0.4 = 200 + 0.4 = 200,$$

dok je

$$200 + (0.4 + (0.4 + 0.4)) = 200 + (0.4 + 0.8) = 200 + 1.2 = 201.$$

U odnosu na točan rezultat 201.2, pogreška u prvom slučaju iznosi 0.6%, dok u drugom slučaju iznosi 0.1%. Rezultat je točniji ako se prvo zbrajaju brojevi koji su bliže nuli, što je općenito pravilo koje vrijedi za svako računalo. Ovakvo računalo može, naravno, dati i točan rezultat $(0.5+0.5)+200 = 1+200 = 201$.

Princip rada svih računala je isti, s time što stvarna računala uglavnom raspolažu s 16 decimalnih mjesta. Na taj se način osigurava mala pogreška s kojom se mogu kvalitetno vršiti željeni proračuni.

1.7.2 Apsolutna vrijednost

U ovom poglavlju definirat ćemu apsolutnu vrijednost realnog broja i dokazati neka njena svojstva.

Definicija 1.18 *Apsolutna vrijednost realnog broja* je funkcija $| \ | : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definirana s

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{za } x \geq 0, \\ -x, & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

Na primjer,

$$|0| = 0, \quad |5| = |-5| = 5, \quad |x| = |-x|, \quad |x - y| = |y - x|.$$

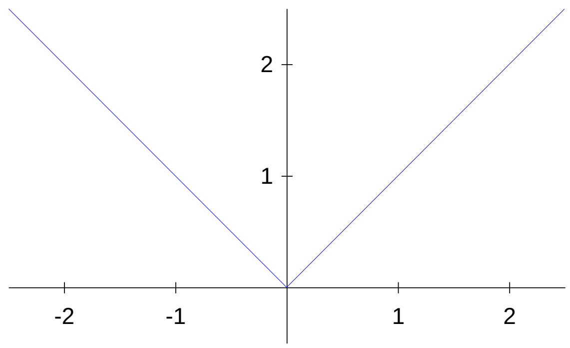
Na slici 1.1 prikazan je graf funkcije $|x|$. Graf funkcije $y = f(x)$ definiramo kao skup svih točaka xy-ravnine za koje je $y = f(x)$. Preciznije definicije funkcije i grafa dane su u poglavlju 4.

Teorem 1.10 *Za apsolutnu vrijednost vrijedi:*

(i) $|x| < r \quad \Leftrightarrow \quad -r < x < r \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-r, r)$*;*

(ii) nejednakost trokuta*,* $|x + y| \leq |x| + |y|$*, odnosno općenitije*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|;$$



Slika 1.1: Apsolutna vrijednost $|x|$

(iii) $|x-y| \geq |x|-|y|$;

(iv) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, *odnosno općenitije*

$$\left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|;$$

(v) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ *za* $y \neq 0$.

Dokaz.

(i) Za $x \geq 0$ nejednakost $|x| < r$ povlači $x < r$, a za $x < 0$ nejednakost $|x| < r$ povlači $-x < r$, odnosno $-r < x$.

(ii) Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \leq |x|$. Ako je $x+y \geq 0$, tada je $|x+y| = x+y \leq |x|+|y|$, a ako je $x+y < 0$, tada je

$$|x+y| = -(x+y) = -x-y \leq |-x|+|-y| = |x|+|y|$$

pa je prva tvrdnja dokazana. Općenitiju tvrdnju dokazujemo indukcijom (vidi primjer 1.3 i dokaz teorema 1.6). Tvrdnja očito vrijedi za $n=1$ i $n=2$. Za $n \geq 2$ imamo

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| + |x_{n+1}| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |x_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|,\end{aligned}$$

pa nejednakost trokuta vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. ■

Zadatak 1.4 Dokažite tvrdnje (iii), (iv) i (v) teorema 1.10.

1.8 Kompleksni brojevi

U ovom poglavlju definirat ćemo skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, osnovne računske operacije s kompleksnim brojevima i njihova svojstva, trigonometrijski oblik kompleksnog broja i operacije s brojevima u trigonometrijskom obliku te eksponencijalni oblik kompleksnog broja. Pretpostavljamo da čitatelj poznaje osnovna svojstva trigonometrijskih i arkus funkcija iz poglavlja 4.6.5 i 4.6.6.

Motivacija za uvođenje kompleksnih brojeva je sljedeća: jednadžba $x^2-1=0$ ima dva rješenja u skupu $\mathbb{R}$, $x=1$ i $x=-1$, dok slična jednadžba $x^2+1=0$ nema niti jedno rješenje. Stoga se *imaginarna jedinica* i definira tako što su $x=i$ i $x=-i$ rješenja jednadžbe $x^2+1=0$. Iz ove definicije slijedi

$$i^2=-1, \quad i^3=-i, \quad i^4=-i\cdot i=-(-1)=1, \quad i^5=i, \quad i^6=-1, \ \ldots.$$

Definicija 1.19 *Skup kompleksnih brojeva* $\mathbb{C}$ je skup svih brojeva oblika $z=x+iy$, gdje su $x,y\in\mathbb{R}$. Posebno je $0=0+i0$. Realni broj $x=\operatorname{Re} z$ je *realni dio* kompleksnog broja z, a realni broj $y=\operatorname{Im} z$ je *imaginarni dio* kompleksnog broja z. Dva kompleksna broja su *jednaka* ako su im jednaki realni i imaginarni dijelovi. *Konjugirano kompleksni broj* broja $z=x+iy$ je broj $\bar{z}=x-iy$. *Modul* ili *apsolutna vrijednost* kompleksnog broja z je nenegativni realni broj $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Neka su $z_1=x_1+iy_1$ i $z_2=x_2+iy_2$ dva kompleksna broja. Računske operacije su definirane na sljedeći način:

$$z_1+z_2=x_1+x_2+i(y_1+y_2),$$

$$z_1-z_2=x_1-x_2+i(y_1-y_2),$$

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+iy_1x_2+ix_1y_2+i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} \\ &= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad \text{za} \quad z_2\neq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 1.5 Dokažite da za $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vrijedi:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,

c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, za $z_2 \neq 0$,

d) $\bar{\bar{z}} = z$,

e) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$,

f) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$,

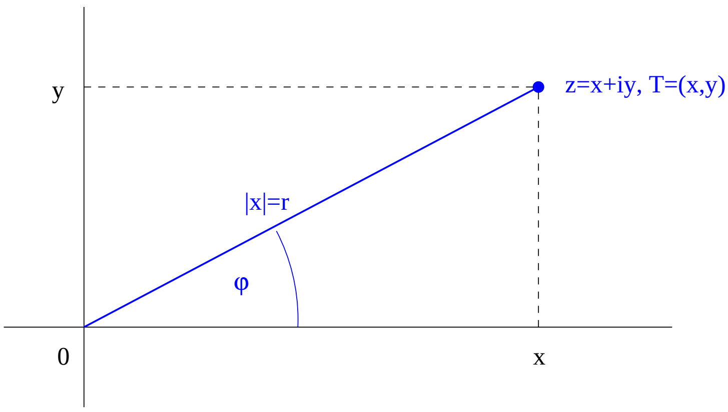
g) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$,

h) $\bar{z} \cdot z = z \cdot \bar{z} = |z|^2$,

i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,

j) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (nejednakost trokuta).

Kompleksnom broju $z = x + iy$ jednoznačno je pridružen uređeni par $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, odnosno točka $T = (x, y)$ u ravnini, kao što se vidi na slici 1.2.



Slika 1.2: Kompleksni broj

Iz slike 1.2 se vidi zašto su formule za zbrajanje kompleksnih brojeva slične formulama za zbrajanje vektora, odnosno zašto se posebno zbrajaju realni, a posebno imaginarni dijelovi.

1.8.1 Trigonometrijski oblik

Kao što se vidi na slici 1.2, kompleksni broj $z = x + iy$ je jednoznačno određen s modulom r i s kutom φ između radij-vektora $\overrightarrow{OT}$ i pozitivnog smjera x-osi. Kut φ je *argument broja z* , odnosno $\varphi = \arg z$.

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja glasi

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cos\varphi + ir\sin\varphi.$$

Veze između dva oblika su sljedeće: ako su zadani r i φ, tada je

$$x = \operatorname{Re} z = r\cos\varphi, \qquad y = \operatorname{Im} z = r\sin\varphi,$$

a ako su zadani x i y, tada je

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

pri čemu kvadrant u kojem se nalazi φ treba odrediti sa slike odnosno iz predznaka od x i y.

Primjer 1.4 a) Skup

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - i + 1| \leq 2\}$$

je krug radijusa dva sa središtem u točki $z_0 = i - 1$ (vidi sliku 1.3). Zaista, iz definicije 1.19 slijedi

$$|z - i + 1| \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 4.$$

Općenito, skup

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

je krug radijusa r oko točke z_0.

b) Skup

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{3} \wedge \operatorname{Im} z \geq 1\}$$

nacrtan je na slici 1.4. Pri tome se točke na iscrtkanom pravcu nalaze izvan skupa, kao i točka u kojoj se dva pravca sijeku.

c) Skup

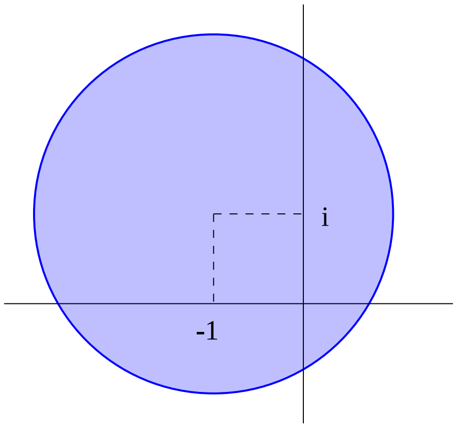
$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| + |z + 2| = 5\}$$

je elipsa sa žarištima u točkama $z_1 = 1$ i $z_2 = -2$ (vidi sliku 1.5).

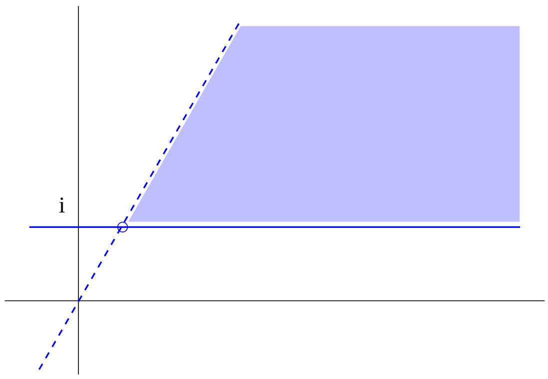
Općenito, skup

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| + |z - z_2| = r, z_1 \neq z_2, r > 0\}$$

je skup svih točaka čiji je zbroj udaljenosti do dvije fiksne točke konstantan. Moguća su tri slučaja: ako je $|z_1 - z_2| < r$, tada se radi o elipsi; ako je $|z_1 - z_2| = r$, tada se radi o dužini koja spaja točke z_1 i z_2; a ako je $|z_1 - z_2| > r$, tada se radi o praznom skupu.



Slika 1.3: Krug u kompleksnoj ravnini



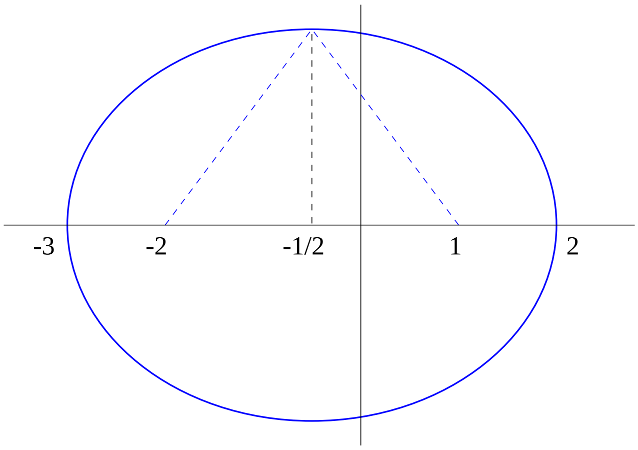
Slika 1.4: Dio kompleksne ravnine

Zadatak 1.6 Dokažite da je elipsa iz primjera 1.4.c zadana s formulom

$$\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{6.25}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Po uzoru na primjer 1.4.c analizirajte skup

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-z_1|-|z-z_2|=r, z_1 \neq z_2, r>0\}.$$



Slika 1.5: Elipsa u kompleksnoj ravnini

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja omogućuje jednostavno izvođenje računskih operacija. Adicioni teoremi daju

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\\
&= r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] \qquad (1.3)\\
&= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).
\end{aligned}
$$

Slično, za $z_2 \neq 0$ vrijedi

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Iz formule (1.3) indukcijom slijedi

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \Big(\prod_{k=1}^{n} r_k\Big)\Big(\cos\big(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\big) + i\sin\big(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\big)\Big).$$

Kada u gornju formulu uvrstimo $z_1 = \cdots = z_n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, dobijemo *Moivreovu formulu za potenciranje* s prirodnim brojem

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1.4)$$

Nadalje, *n-ti korijen* kompleksnog broja z je svaki kompleksni broj koji podignut na n-tu potenciju daje z. Vrijedi

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}. \qquad (1.5)$$

Naime, primjenom Moivreove formule (1.4) vidimo da svaki od brojeva na desnoj strani podignut na n-tu potenciju daje broj z, pa je stoga jednak n-tom korijenu iz z. Zaključujemo da svaki kompleksni broj, osim nule, ima n međusobno različitih n-tih korijena koji svi leže na središnjoj kružnici radijusa $\sqrt[n]{r}$ i dijele tu kružnicu na n jednakih dijelova.

Primjer 1.5 Izračunajmo $\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1+0i}$. Trigonometrijski oblik glasi

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0),$$

pa formula (1.5) daje

$$\sqrt[6]{1} = 1 \cdot \left(\cos \frac{0+2k\pi}{6} + i \sin \frac{0+2k\pi}{6} \right), \quad k = 0,1,2,3,4,5.$$

Uvrštavanje vrijednosti za k daje šest različitih šestih korijena:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1, \\
w_1 &= \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
w_2 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
w_3 &= \cos \pi + i \sin \pi = -1, \\
w_4 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
w_5 &= \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.7 Nacrtajte sve kompleksne šeste korijene od jedan iz primjera 1.5 i uvjerite se da dijele jediničnu kružnicu na šest jednakih dijelova. Zatim izračunajte i nacrtajte $\sqrt[6]{-1}$, $\sqrt[4]{i}$ i $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$.

1.8.2 Eksponencijalni oblik

Eksponencijalni ili *Eulerov* oblik kompleksnog broja glasi

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Ova formula slijedi iz Taylorovih razvoja funkcija $\sin x$, $\cos x$ i e^x danih u primjeru 6.19 i zadatku 6.5. Kada formalno uvrstimo $i\varphi$ umjesto x u Taylorov razvoj funkcije e^x, dobit ćemo

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{i^2\varphi^2}{2!} + \frac{i^3\varphi^3}{3!} + \frac{i^4\varphi^4}{4!} + \frac{i^5\varphi^5}{5!} + \frac{i^6\varphi^6}{6!} + \frac{i^7\varphi^7}{7!} + \cdots \\
&= 1 + i\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i\frac{\varphi^7}{7!} + \cdots .
\end{aligned}$$

Red na desnoj strani je apsolutno konvergentan pa po teoremu 6.12 smijemo prvo zbrojiti realne, a zatim imaginarne članove pa Taylorovi razvoji funkcija $\cos x$ i $\sin x$ daju

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos\varphi + i\sin\varphi. \end{aligned}$$

Pomoću Eulerovog oblika možemo definirati *potenciranje s kompleksnim eksponentom*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

2.

LINEARNA ALGEBRA

U ovoj glavi definirat ćemo pojam sustava linearnih jednadžbi i opisati postupak za njihovo rješavanje. Postupak se temelji na primjenama matričnog računa, tako da ćemo dati i osnovne pojmove o matricama i determinantama te operacijama s njima. Dok se većina studenata već susrela s problemom rješavanja sustava linearnih jednadžbi, korištenje matrica je za većinu novost.

Pojam *"linearnih"* znači da se u jednadžbama nepoznanice pojavljuju samo na prvu potenciju i da se ne pojavljuju umnošci nepoznanica. Za razliku od sustava nelinearnih jednadžbi, za takve je sustave lako ustanoviti da li su rješivi te ako jesu, riješiti ih.

Rješenje sustava od $m \geq 2$ jednadžbi s $n = 2$ nepoznanice odgovara nalaženju sjecišta m pravaca u ravnini. Očito vrijedi sljedeće:

– m pravaca se može sjeći u jednoj točki – pripadajući sustav ima točno jedno rješenje. Na primjer, sustav

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ -x + y &= -1 \end{aligned}$$

ima rješenje u točki $x = 2/3, y = -1/3$ (slika 2.1).

– m pravaca može ležati na istom pravcu – pripadajući sustav ima beskonačno rješenja;

– ako ni prvi ni drugi slučaj ne vrijede, tada sustav nema rješenje.

U poznatom Kronecker–Capellijevom teoremu 2.5 vidjet ćemo da su ova tri slučaja jedina moguća i to za proizvoljni broj nepoznanica i jednadžbi.

2.1 Matrice

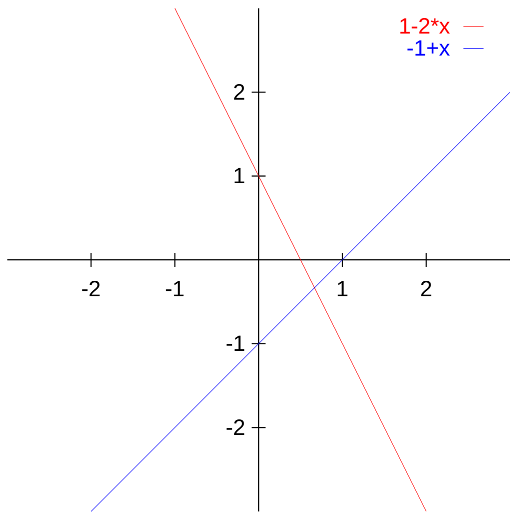
Matrice omogućuju jednostavan zapis i rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

Definicija 2.1 Pravokutna tablica brojeva

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad m, n \in \mathbb{N},$$

zove se *matrica* tipa $m \times n$. Ako su svi brojevi a_{ij} realni, tada pišemo $A \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$. Tablica se stavlja u uglate ili oble zagrade. Brojevi $a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ su *elementi matrice* ili *komponente matrice*. Brojevi

$$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$$



Slika 2.1: Pravci koji se sijeku

tvore i-ti *redak*, brojevi

$$a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$$

tvore j-ti *stupac*, a brojevi

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{\min\{m,n\},\min\{m,n\}}$$

tvore *dijagonalu* matrice A. Ako je $m = n$ kažemo da je A *kvadratna matrica* reda n. Ako je $m = 1$ kažemo da je A *retčana matrica* (ima samo jedan redak), a ako je $n = 1$ kažemo da je A *stupčana matrica*. Retčane i stupčane matrice se još zovu *vektori*.

Skup svih matrica tipa $m \times n$ još označavamo s $\mathcal{M}_{mn}$. Matrice obično označavamo velikim tiskanim slovima, $A, B, X, \ldots$ Koriste se i oznake

$$A = (a_{ij}), \quad A = [a_{ij}], \quad A = (A_{ij}), \quad A = (A)_{ij}.$$

Vektore možemo označavati i s malim štampanim slovima a, b, x, ili s masnim slovima, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$.

Na primjer, A je matrica tipa 3×4,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \pi & a_{14} \\ 1 & -0.127 & 10^{17} & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{bmatrix},$$

B i $\mathbf{c}$ su primjeri retčane odnosno stupčane matrice,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 12345 \end{bmatrix},$$

dok su $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ i $E = \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$ kvadratne matrice reda 1, a ujedno i stupčane i retčane matrice

Nakon što smo definirali novi objekt, u ovom slučaju matricu, želimo ih naučiti uspoređivati. Prvi korak je definirati kada su dva objekta jednaka.

Definicija 2.2 Matrice A i B su *jednake* ako su istog tipa i ako je

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{za sve parove indeksa } i, j.$$

2.1.1 Zbrajanje matrica

Uvedimo prvu operaciju s matricama. Mogu se zbrajati samo matrice istog tipa. Ako su matrice A i B istog tipa, tada je matrica

$$C = A + B$$

istog tipa kao i matrice A i B i vrijedi

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Dakle, matrice se zbrajaju član po član. Svojstva zbrajanja su

$$A + B = B + A \qquad \text{(komutativnost) i}$$
$$(A + B) + C = A + (B + C) \qquad \text{(asocijativnost)}.$$

2.1.2 Množenje matrice sa skalarom

Matrica se množi s nekim skalarom (brojem) tako da se svaki element matrice pomnoži s tim brojem. Drugim riječima, elementi matrice $B = \lambda A$ su

$$B_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Svojstva ove operacije proizlaze direktno iz svojstava množenja brojeva:

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B, \\ (\lambda + \mu)A &= \lambda A + \mu A, \\ \lambda(\mu A) &= (\lambda\mu)A. \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.1.3 Množenje matrica

Definicija množenja matrica je na prvi pogled neobična, ali upravo nam ona omogućava jednostvno zapisivanje sustava linearnih jednadžbi.

Matrice A i B možemo pomnožiti samo ako su *ulančane*, odnosno ako A ima onoliko stupaca koliko B ima redaka. Matrica $C = A \cdot B$ ima redaka koliko A i stupaca koliko B. Neka je, dakle, A tipa $m \times k$ i B tipa $k \times n$. Tada je matrica C tipa $m \times n$ i vrijedi

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ik} b_{kj}. \tag{2.2}$$

Element $(2, 3)$ umnoška

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \end{bmatrix}$$

nalazi se tako da stavite lijevi kažiprst na a_{21} a desni na b_{13} i kažete "puta". Tada pomičete kažiprste prema a_{22} i b_{23} govoreći "plus" dok se kažiprsti pomiču i "puta" kada stignu na cilj. Nastavite li na taj način izračunat ćete

$$a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33} + a_{24} b_{43},$$

što je upravo element $(2, 3)$ produkta.

Na primjer,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 7 & -2 \\ 30 & 17 & 16 & -5 \\ 48 & 29 & 25 & -8 \end{bmatrix}$$

Uočimo da množenje u obrnutom poretku nije definirano stoga što matrice nisu ulančane. U sljedećem primjeru su oba množenja definirana, ali umnošci nisu istog tipa:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

U sljedećem primjeru su umnošci AB i BA istog tipa, ali nisu jednaki:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}.$$

U ovom primjeru su, pak, oba umnoška jednaka:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad AB = BA = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Iz prethodnih primjera zaključujemo kako, za razliku od množenja brojeva,

množenje matrica općenito nije komutativno.

Budite oprezni, jer se ova činjenica lako zaboravi kada se manipulira s formulama koje sadrže matrice.

Teorem 2.1 (Svojstva množenja matrica) *Za proizvoljne matrice A, B i C i broj λ, ukoliko su svi umnošci definirani vrijedi:*

(i) $(AB)C = A(BC)$ *(asocijativnost),*

(ii) $A(B + C) = AB + AC$ *(distributivnost),*

(iii) $(A + B)C = AC + BC$ *(distributivnost),*

(iv) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Primijetimo da zbog općenite nekomutativnosti množenja matrica, moramo posebno navesti distributivnost prema množenju slijeva i zdesna.
Dokaz. *(i)* neka je A tipa $m \times k$, B tipa $k \times l$ i C tipa $l \times n$. Tada je AB tipa

$m \times l$, a $(AB)C$ je tipa $m \times n$. Za proizvoljni element matrice $(AB)C$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
[(AB)C]_{ij} &= \sum_{p=1}^{l} [AB]_{ip} C_{pj} \\
&= \sum_{p=1}^{l} \left(\sum_{q=1}^{k} A_{iq} B_{qp} \right) C_{pj} = \text{raspišemo sumu} \\
&= \sum_{p=1}^{l} \sum_{q=1}^{k} A_{iq} B_{qp} C_{pj} = \text{zamijenimo redoslijed zbrajanja} \\
&= \sum_{q=1}^{k} \sum_{p=1}^{l} A_{iq} B_{qp} C_{pj} = \text{grupiramo pribrojnike na drugi način} \\
&= \sum_{q=1}^{k} A_{iq} \left(\sum_{p=1}^{l} B_{qp} C_{pj} \right) \\
&= \sum_{q=1}^{k} A_{iq} [BC]_{qj} \\
&= [A(BC)]_{ij}.
\end{aligned}$$

Ostale tvrdnje dokazuju se slično. ■

2.1.4 Nul-matrica i jedinična matrica

Kod zbrajanja brojeva broj 0 je *neutralni element s obzirom na zbrajanje*, odnosno

$$x + 0 = 0 + x = x \quad \text{za svaki broj } x.$$

Analogija kod matrica je *nul-matrica* koja ima sve elemente jednake nuli. Nul-matricu označavamo s O, odnosno O_{mn} kada želimo naglasiti o kojem tipu se radi. Na primjer,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Kod množenja brojeva broj 1 je *neutralni element s obzirom na množenje*, odnosno

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \text{za svaki broj } x.$$

Analogija kod matrica je *jedinična matrica* . Ukoliko matrica nije kvadratna, jedinične matrice u odnosu na množenje slijeva i zdesna su različitog reda. Na primjer, lako vidimo da je

$$\begin{bmatrix} 12 & 5 & 7 & -2 \\ 30 & 17 & 16 & -5 \\ 48 & 29 & 25 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 7 & -2 \\ 30 & 17 & 16 & -5 \\ 48 & 29 & 25 & -8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 5 & 7 & -2 \\ 30 & 17 & 16 & -5 \\ 48 & 29 & 25 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 7 & -2 \\ 30 & 17 & 16 & -5 \\ 48 & 29 & 25 & -8 \end{bmatrix}.$$

Jediničnu matricu označavamo s I, odnosno s I_n ako želimo naglasiti o kojoj dimenziji se radi. Općenito je, dakle

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j, \\ 0 & \text{za } i \neq j, \end{cases}$$

i za svaku matricu tipa $m \times n$ vrijedi

$$I_m A = A I_n = A.$$

Jedinična matrica je poseban slučaj dijagonalne matrice. D je *dijagonalna matrica* ako jedini ne-nula elementi leže na njenoj dijagonali, odnosno

$$D_{ij} = 0 \text{ za } i \neq j.$$

2.1.5 Transponirana matrica

Uvedimo još jedan novi pojam. *Transponirana matrica* matrice A je matrica A^T koja je definirana sa

$$[A^T]_{ij} = A_{ji}.$$

Dakle, ako je A tipa $m \times n$ tada je A^T tipa $n \times m$. Na primjer,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 9 \\ 8 & 2 \end{bmatrix},$$

dok je

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Očito je $(A^T)^T = A$. Transponiranje se lijepo uklapa u ostale operacije s matricama:

$$\begin{aligned} (A+B)^T &= A^T + B^T, \\ (\mu A)^T &= \mu A^T, \\ (AB)^T &= B^T A^T. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Matrica za koju je $A^T = A$ je *simetrična matrica*. Zbog očite simetrije u prirodi, simetrične matrice su česte u primjenama.

2.1.6 Još o množenju matrica

Formula (2.2) zapravo znači da se matrice množe na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot 1) & 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot(-1)) & (1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1) \\ (4\cdot 1 + 5\cdot 5 + 6\cdot 1) & (4\cdot 2 + 5\cdot 3 + 6\cdot(-1)) & (4\cdot 0 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1) \\ (7\cdot 1 + 8\cdot 5 + 9\cdot 1) & (7\cdot 2 + 8\cdot 3 + 9\cdot(-1)) & (7\cdot 0 + 8\cdot 2 + 9\cdot 1) \end{bmatrix}$$

No, množenje matrica se može interpretirati na još dva načina:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

i

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\left[1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \quad 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \quad 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \right].$$

Zadatak 2.1 Izračunajte umnožak

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

na sva tri opisana načina.

Zadatak 2.2 Napišite programe za množenje matrica na ova tri načina u programskom jeziku Matlab. Pri tome možete koristiti program Octave On-line. Programe možete napisati i u nekom drugom programskom jeziku (basic, pascal, c, c++, FORTRAN ili java). Postoji li još mogućih interpretacija matričnog množenja?

2.2 Matrični zapis sustava linearnih jednadžbi

Sustav

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned}$$

možemo zapisati kao

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

odnosno kao

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2.4}$$

pri čemu su matrice A, $\mathbf{x}$ i $\mathbf{b}$ zadane s

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Istoznačnost ova dva zapisa slijedi iz definicije jednakosti matrica 2.2. Matrica A se zove *matrica sustava*, a vektor $\mathbf{b}$ se zove *slobodni vektor* ili vektor slobodnih članova. Zbog jednostavnosti možemo izostaviti vektor $\mathbf{x}$ jer se njegovo prisustvo podrazumijeva pa stoga često zapisujemo *proširenu matricu sustava*

$$\begin{bmatrix} A & \big| & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Slično, sustav u obliku

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 1 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

možemo zapisati kao

$$A\mathbf{x} - \mathbf{b} = O_{21},$$

gdje je O_{21} odgovarajuća nul-matrica.

Sada možemo lako dokazati sljedeći teorem.

Teorem 2.2 *Ako su* $\mathbf{x}_1$ *i* $\mathbf{x}_2$ *različita rješenja sustava* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*, tada je*

$$\mathbf{x}(\lambda) = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$$

također rješenje tog sustava za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Dokaz. Iz svojstava množenja matrica skalarom i množenja matrica slijedi

$$A\mathbf{x}(\lambda) = \lambda A\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)A\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{b} = \mathbf{b},$$

pa je teorem dokazan. ∎

Ovaj teorem nam zapravo kaže da je uvijek ispunjen točno jedan od tri slučaja:

1. sustav nema rješenje,
2. sustav ima točno jedno rješenje,
3. sustav ima beskonačno rješenja,

kao što smo vidjeli u uvodu. Detalje o tome kada nastupa koji od ovih slučajeva daje nam Kronecker–Capellijev teorem 2.5.

2.3 Rješavanje trokutastih sustava

Matrica U je *gornje trokutasta* ako

$$i > j \Longrightarrow u_{ij} = 0.$$

Drugim riječima, svi elementi koji leže ispod dijagonale su nula. Primjer gornje trokutaste matrice reda pet je

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{55} \end{bmatrix}$$

Slično, matrica L je *donje trokutasta* ako

$$i < j \Longrightarrow l_{ij} = 0,$$

odnosno elementi iznad dijagonale su nula.

Teorem 2.3 *Ako su svi dijagonalni elementi kvadratne gornje trokutaste matrice U različiti od nule, tada sustav $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima jedinstveno rješenje.*

Dokaz. Ilustrirajmo prvo rješavanje sustava za $n = 5$. Prvo napišimo sustav u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4 + u_{15}x_5 &= b_1 \\ u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + u_{24}x_4 + u_{25}x_5 &= b_2 \\ u_{33}x_3 + u_{34}x_4 + u_{35}x_5 &= b_3 \\ u_{44}x_4 + u_{45}x_5 &= b_4 \\ u_{55}x_5 &= b_5 \end{aligned}$$

Peta jednadžba sadrži samo nepoznanicu x_5 i možemo je riješiti odmah:

$$x_5 = \frac{b_5}{u_{55}}.$$

Dobivenu vrijednost od x_5 možemo uvrstiti u četvrtu jednadžbu koju potom riješimo i dobijemo

$$x_4 = \frac{b_4 - u_{45}x_5}{u_{44}}.$$

Uvrštavanjem x_4 i x_5 u treću jednadžbu te rješavanjem te jednadžbe dobijemo

$$x_3 = \frac{b_3 - u_{34}x_4 - u_{35}x_5}{u_{33}}.$$

Nastavljajući ovim postupkom dobijemo

$$x_2 = \frac{b_2 - u_{23}x_3 - u_{24}x_4 - u_{25}x_5}{u_{22}}$$

i

$$x_1 = \frac{b_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - u_{14}x_4 - u_{15}x_5}{u_{11}}.$$

Kako su po pretpostavci dijagonalni elementi u_{ii} različiti od nule, ove formule jednoznačno određuju x_i. Ovaj postupak se očito može izvesti za proizvoljnu dimenziju n pa je teorem dokazan. ∎

Ovaj postupak se jednostavno može izvršiti na računalu. Odgovarajući program u programskom jeziku C glasi

```
for (i=n;i>=1;i--){
   for (j=n;j>i;j--)
      b[i]=b[i]-u[i][j]*b[j];
   b[i]=b[i]/u[i][i];
}
```

Nakon završetka programa, rješenje $\mathbf{x}$ se nalazi na mjestu gdje se na početku nalazio vektor $\mathbf{b}$.

Program za rješavanje gornje trokutastog sustava u programskom jeziku Matlab izgleda nešto jednostavnije:

```
for i=n:-1:1
   for j=n:-1:i+1
      b(i)=b(i)-u(i,j)*b(j)
   end
   b(i)=b(i)/u(i,i)
end
```

Isti program u programskom jeziku FORTRAN, ovaj put napisan korištenjem uzlazne petlje, izgleda ovako:

```
do k=1,n
   i=n-k+1
   do j=i+1,n
      b(i)=b(i)-u(i,j)*b(j)
   enddo
   b(i)=b(i)/u(i,i)
enddo
```

Broj računskih operacija potrebnih za rješavanje gornje trokutastog sustava iznosi

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\frac{n(n+1)}{2} - n \approx n^2.$$

Na modernim računalima (Pentium 350), koja izvršavaju do 30 milijuna operacija u sekundi, rješavanje trokutastog sustava dimenzije $n = 1000$ traje oko $1/30$ sekunde.

Postupak za rješavanje donje trokutastog sustava $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je sličan i dan je u sljedećem Matlab programu:

```
for i=1:n
   for j=i+1:n
      b(i)=b(i)-l(i,j)*b(j)
   end
   b(i)=b(i)/l(i,i)
end
```

Kako se trokutasti sustavi lako rješavaju, rješenje općeg (netrokutastog) sustava dobijemo tako da pomoću Gaussove eliminacije zadani sustav svedemo na trokutasti oblik.

Zadatak 2.3 Zadajte nekoliko gornje i donje trokutastih sustava i riješite ih pomoću opisanih Matlab programa. Pri tome možete koristiti program Octave On-line.

2.4 Gaussova eliminacija

Lako vidimo da se rješenje sustava ne mijenja ako izvršimo bilo koju od sljedećih radnji:

(i) neku jednadžbu pomnožimo s brojem različitim od nule,

(ii) zamijenimo dvije jednadžbe,

(iii) jednu jednadžbu pribrojimo drugoj,

(iv) zamijenimo dvije varijable.

Radnje (i) i (iii) često vršimo istovremeno: jednoj jednadžbi dodamo drugu jednadžbu pomnoženu s nekim brojem.

Ove radnje odgovaraju sljedećim radnjama na proširenoj matrici sustava :

(i') neki redak pomnožimo s brojem različitim od nule;

(ii') zamijenimo dva retka;

(iii') jedan redak pribrojimo drugome;

(iv') zamijenimo dva stupca u matrici A.

Kombinirajući radnje (i') i (iii') imamo: jednom retku dodamo drugi redak pomnožen s nekim brojem.

Koristeći navedene transformacije matricu A svodimo na gornje trokutasti oblik. Taj postupak se zove *Gaussova eliminacija.* Neka je zadan sustav 4×4

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Neka je $a_{11} \neq 0$. Tada stavimo

$$m_{i1} = a_{i1}/a_{11}, \quad i = 2, 3, 4$$

i oduzmemo prvu jednadžbu pomnoženu s m_{i1} od i-te jednadžbe $(i = 2, 3, 4)$ te dobijemo sustav

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + a'_{34}x_4 &= b'_3 \\ a'_{42}x_2 + a'_{43}x_3 + a'_{44}x_4 &= b'_4 \end{aligned}$$

gdje je

$$a'_{ij} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}, \quad b'_i = b_i - m_{i1}b_1.$$

Primijetimo da je varijabla x_1 eliminirana iz tri posljednje jednadžbe. Brojevi m_{i1} kojima se u postupku eliminacije množi prva jednadžba zovu se *multiplikatori*. Neka je i $a'_{22} \neq 0$. Tada stavimo

$$m_{i2} = a'_{i2}/a'_{22}, \quad i = 3, 4$$

i oduzmemo drugu jednadžbu pomnoženu s m_{i2} od i-te jednadžbe $(i = 3, 4)$. Rezultat je sustav

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 &= b''_3 \\ a''_{43}x_3 + a''_{44}x_4 &= b''_4 \end{aligned}$$

gdje je

$$a''_{ij} = a'_{ij} - m_{i2}a'_{2j}, \quad b''_i = b'_i - m_{i2}b'_2.$$

Konačno, stavimo

$$m_{i3} = a''_{i3}/a''_{33}, \quad i = 4$$

i oduzmemo treću jednadžbu pomnoženu s m_{i3} od četvrte jednadžbe. Rezultat je gornje trokutasti sustav

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 &= b''_3 \\ a'''_{44}x_4 &= b'''_4 \end{aligned}$$

gdje je

$$a'''_{ij} = a''_{ij} - m_{i3}a''_{2j}, \quad b'''_i = b''_i - m_{i3}b''_2.$$

Dobiveni gornje trokutasti sustav sada riješimo na način koji je opisan u poglavlju 2.3.

Broj računskih operacija potrebnih za svođenje kvadratnog sustava reda n na gornje trokutasti oblik iznosi

$$\sum_{i=1}^{n} 2i(i-1) = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{2}{3}n^3.$$

Vidimo da je za veće dimenzije n broj računskih operacija potreban za rješavanje trokutastog sustava zanemariv u odnosu na broj računskih operacija potrebnih za svođenje na trokutasti oblik. Na modernim računalima (Pentium 350), koja izvršavaju do 30 milijuna operacija u sekundi, svođenje sustava dimenzije $n = 1000$ na trokutasti oblik traje oko 20 sekundi, dok za $n = 10000$ traje 6 sati, a za $n = 1.000.000$ traje 100^3 puta duže, odnosno oko 700 godina.

Postupak Gaussove eliminacije koji smo upravo opisali za sustav reda četiri na očit se način može poopćiti na sustave proizvoljnog reda. Ukoliko je neki od brojeva s kojima dijelimo jednak nuli, potrebno je dodatno koristiti postupak pivotiranja koji je opisan u poglavlju 2.4.2.

Postupak Gaussove eliminacije možemo interpretirati i kao množenje proširene matrice sustava s lijeve strane s *elementarnim matricama transformacije*. Neka je $\begin{bmatrix} A & \big| & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ proširena matrica sustava (2.5) i neka je

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & 0 \\ -m_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1 & \big| & \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} &= M_1 \begin{bmatrix} A & \big| & \mathbf{b} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & 0 \\ -m_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & b'_3 \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & b'_4 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Dalje, neka je

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 & 0 \\ 0 & -m_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
\left[A_2 \;\middle|\; \mathbf{b}_2\right] &= M_2 \left[A_1 \;\middle|\; \mathbf{b}_1\right] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 & 0 \\ 0 & -m_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}
\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & b'_3 \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & b'_4 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} & b''_3 \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} & b''_4 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Konačno, neka je

$$
M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{43} & 1 \end{bmatrix}.
$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
\left[A_3 \;\middle|\; \mathbf{b}_3\right] &= M_3 \left[A_2 \;\middle|\; \mathbf{b}_2\right] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{43} & 1 \end{bmatrix}
\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} & b''_3 \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} & b''_4 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} & b''_3 \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} & b'''_4 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Zadatak 2.4 Napišite program za svođenje proširene matrice sustava na trokutasti oblik.

2.4.1 Primjeri

Sljedeći primjeri pokazuju tri slučaja koja se mogu dogoditi prilikom rješavanja sustava pomoću Gaussove eliminacije.

Primjer 2.1 Riješimo sustav

$$
\begin{aligned}
x - 2y + z &= 5\\
2x + y - 2z &= -3\\
-x - y &= 0
\end{aligned}
$$

Tada imamo

$$
\begin{bmatrix} A_1 & \big| & \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} A & \big| & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -13 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right],
$$

$$
\begin{bmatrix} A_2 & \big| & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} A_1 & \big| & \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -13 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{14}{5} \end{array}\right].
$$

Iz ovog gornje trokutastog sustava lako vidimo da je

$$
z = 2, \quad y = -1, \quad x = 1.
$$

Sustav ima jedinstveno rješenje. Rješenje sustava geometrijski odgovara točki u kojoj se sijeku tri ravnine.

Postupak rješavanja sustava opisan u poglavlju 2.4 idealan je za računala. Kada sustav rješavamo "ručno", tada koristimo pojednostavljeno pisanje. Naime, zapisujemo samo proširene matrice odgovarajućih sustava, a sa strane naznačimo koje operacije na retcima vršimo. Pri tom operacije biramo tako da, ukoliko je moguće, izbjegnemo razlomke. Sustav iz primjera 2.1 rješava se na sljedeći način:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-2\,\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -13 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ 5\,\mathrm{III}+3\,\mathrm{II} \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right].$$

Sljedeći primjer pokazuje kako izgleda trokutasti oblik kada imamo parametarska rješenja:

Primjer 2.2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -5 & -2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-2\,\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{I} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}+2\,\mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Četvrti redak glasi $0 = 0$, što je točno. Iz trećeg retka slijedi

$$x_4 = -1,$$

a iz drugog retka slijedi

$$x_3 = 0.$$

Vrijednosti nezavisnih varijabli x_1 i x_2 dobijemo iz prvog retka,

$$x_2 = t, \quad x_1 = 1 - 2t.$$

Sustav ima parametarsko rješenje, odnosno beskonačno rješenja koja ovise o jednom parametru t,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ t \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Primijetimo da smo mogli i x_1 uzeti za parametar, odnosno

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \frac{1}{2} - \frac{s}{2} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

je također oblik rješenja sustava.

Sljedeći primjer pokazuje kako iz trokutastog oblika možemo zaključiti da sustav nema rješenja.

Primjer 2.3

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{I} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{III}-2\,\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Četvrti redak glasi $0 = 1$, što je nemoguće pa sustav nema rješenja.

Formalan opis slučajeva koji mogu nastati prilikom rješavanja sustava daje nam Kronecker–Capellijev teorem 2.5.

Napomena 2.1 U praksi se sustavi jednadžbi često rješavaju koristeći računala, pri čemu dolazi do pogrešaka zaokruživanja kako je opisano u poglavlju 1.7.1. Zbog toga se neka pitanja vezana uz Kronecker–Capellijev teorem, kao što su utvrđivanje linearne nezavisnosti skupa vektora (vidi poglavlje 2.5) i određivanje ranga matrice (vidi poglavlje 2.6), ne mogu riješiti numeričkim računanjem.

2.4.2 Pivotiranje

Ukoliko je element kojim moramo dijeliti da bi dobili multiplikatore m_{ij} jednak nuli, tada moramo zamijeniti odgovarajuće retke proširene matrice sustava. Na primjer,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array} \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{III}+\mathrm{II} \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

pa je rješenje sustava

$$z = 1, \quad y = -1, \quad x = 0.$$

U praksi je poželjno vršiti zamjenu redaka i kada je broj kojim dijelimo jako blizu nule. Gotovi programi uvijek vrše zamjenu redaka i to na način da se najveći element po apsolutnoj vrijednosti u stupcu kojeg poništavamo dovede na vodeću poziciju. Na taj način uvijek vrijedi $|m_{ij}| \leq 1$ što doprinosi numeričkoj stabilnost algoritma.

2.4.3 Elementarne matrice transformacija

U poglavlju 2.4 smo vidjeli kako je pribrajanje jednom retku nekog drugog retka pomnoženog nekim brojem ekvivalentno množenju s elementarnom matricom M s lijeva. No, i ostale operacije na retcima možemo interpretirati na sličan način. Neka je $A \in \mathcal{M}_{45}$. Tada produkt

$$D_2 A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \pi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} A$$

odgovara množenju drugog retka matrice A s brojem π. Općenito, matrica D_i se od jedinične matrice razlikuje samo u jednom elementu i to $(D_i)_{ii} \neq 1$ i $(D_i)_{ii} \neq 0$.

Na sličan način, pomoću produkta

$$P_{13} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

vršimo zamjenu prvog i trećeg retka matrice A. Općenito, matrica $P = P_{ij}$ se od jedinične matrice razlikuje samo u četiri elementa i to

$$(P_{ij})_{ii} = (P_{ij})_{jj} = 0, \qquad (P_{ij})_{ij} = (P_{ij})_{ji} = 1.$$

Matrica P se zove *matrica permutacije*. Ona je simetrična, $P = P^T$, i vrijedi $P^T P = PP^T = I$. Dakle, matrica P je regularna, a njena inverzna matrica je upravo P^T (vidi poglavlje 2.8).

Zadatak 2.5 Neka je $A \in \mathcal{M}_{45}$. Na koji način možemo pomoću množenja matrice A elementarnim matricama trećem stupcu dodati trostruki prvi stupac; zamijeniti drugi i peti stupac; treći stupac pomnožiti s dva?

2.5 Linearna nezavisnost

Neka su $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k \in \mathcal{M}_{n1}$ stupčani vektori. Vektor

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{a}_k, \quad \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

zove se *linearna kombinacija* vektora $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$.

Definicija 2.3 Vektori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k$ su *linearno nezavisni* ako za sve skalare $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

U protivnom su vektori $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ *linearno zavisni*.

Drugim riječima, $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ su linearno zavisni ako i samo ako postoje $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ takvi da je

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

i da je barem jedan od λ_i različit od nule, odnosno

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_k| > 0.$$

Ovaj uvjet još zapisujemo kao $\sum_i |\lambda_i| > 0$. Ekvivalentna formulacija gornjeg uvjeta glasi $\sum_i \lambda_i^2 > 0$. Linearna zavisnost skupa vektora znači i da je jedan od tih vektora linearna kombinacija preostalih – ako je na primjer $\lambda_1 \neq 0$, tada je

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \mathbf{a}_k.$$

Linearna kombinacija i linearna nezavisnost retčanih vektora definira se analogno. Bez dokaza navodimo sljedeće tvrdnje:

(a) ako je neki od vektora $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ nul-vektor, tada su ti vektori linearno zavisni,

(b) ako među vektorima $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ ima jednakih, tada su ti vektori linearno zavisni,

(c) ako su vektori $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ linearno nezavisni, tada je svakih $p < k$ vektora izabranih između tih vektora također linearno nezavisno,

(d) ako su vektori $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ linearno zavisni, tada su i vektori

$$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \cdots, \mathbf{a}_q$$

linearno zavisni za bilo koje vektore $\mathbf{a}_{k+1}, \cdots, \mathbf{a}_q$,

(e) bilo kojih $n+1$ vektora iz skupa $\mathcal{M}_{n1}$ (ili $\mathcal{M}_{1n}$) su linearno zavisni.

Primjer 2.4 Vektori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ definirani s

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

su nezavisni, jer

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3 + \lambda_4\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$$

povlači $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Dodamo li ovom skupu peti vektor $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}^T$, tada su vektori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{a}$ linearno zavisni jer je jedan od njih linearna kombinacija ostalih,

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 + \delta\mathbf{e}_4.$$

Napomena 2.2 Skup vektora $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ tvori jednu *bazu* četverodimenzionalnog vektorskog prostora $\mathcal{M}_4$. Općenito, svaki skup od n linearno nezavisnih vektora n-dimenzionalnog prostora tvori jednu bazu tog prostora te se svaki vektor iz tog prostora može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze.

2.6 Rang matrice

Rang matrice A jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih stupaca. Maksimalan broj linearno nezavisnih stupaca jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih redaka matrice (ovu tvrdnju navodimo bez dokaza). Iz toga slijedi da je

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T).$$

Također, ako je A tipa $m \times n$, tada je očito

$$\operatorname{rang}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Iz primjera 2.4 zaključujemo kako jedinična matrica I_n ima rang n. Matrice M_i iz poglavlja 2.4 te matrice D_i i P_{ij} iz poglavlja 2.4.3, također uvijek imaju rang jednak dimenziji.

Iz ovih primjera zaključujemo da rang matrice lako možemo raspoznati iz trokutastog oblika. Kako elementarne transformacije iz poglavlja 2.4 ne mijenjaju rang matrice, zaključujemo da je postupak traženja ranga istovjetan s postupkom Gaussove eliminacije. Tako je, dakle, rang matrice sustava iz primjera 2.1 jednak tri, kao i rang matrice sustava iz primjera 2.2, dok je rang matrice sustava iz primjera 2.3 jednak dva, a rang proširene matrice sustava iz istog primjera jednak tri.

Definicija 2.4 Matrice A i B istog tipa su *ekvivalentne* ako imaju isti rang. Pišemo $A \sim B$.

Teorem 2.4 *Ako su matrice A i B ekvivalentne, tada se matrica B može dobiti iz matrice A pomoću elementarnih transformacija koje se sastoje od množenja retka s brojem različitim od nule, zamjene dvaju redaka i dodavanja jednog retka drugome te istih operacija sa stupcima.*

Dokaz. Pomoću navedenih elementarnih transformacija matricu A možemo svesti na oblik

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je rang(A) jednak broju dijagonalnih elemenata koji su jednaki jedan. Kako A i B imaju isti rang, to i matricu B možemo svesti na isti oblik. Sada lako nađemo niz elementarnih transformacija koje matricu A prebacuju u matricu B. ■

Kako se sve navedene elementarne transformacije mogu izvesti množenjem matrice A elementarnim matricama transformacija bilo s lijeva bilo s desna, a te matrice su regularne (vidi poglavlje 2.8), zaključujemo da je $A \sim B$ ako i samo ako postoje regularne matrice matrice S i T takve da je

$$B = SAT.$$

2.7 Kronecker–Capellijev teorem

Sljedeći teorem nam opisuje strukturu rješenja sustava linearnih jednadžbi u ovisnosti o rangu matrice sustava i rangu proširene matrice sustava.

Teorem 2.5 (Kronecker–Capelli) *Za sustav* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *vrijedi:*

(i) Sustav ima rješenje ako i samo ako matrice A *i* $\begin{bmatrix} A & | & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ *imaju isti rang.*

(ii) Ako je $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\begin{bmatrix} A & | & \mathbf{b} \end{bmatrix})$*, tada sustav ima ista rješenja kao i sustav koji dobijemo kada uzmemo* $\operatorname{rang}(A)$ *nezavisnih jednadžbi, odnosno* $\operatorname{rang}(A)$ *linearno nezavisnih redaka matrice* $\begin{bmatrix} A & | & \mathbf{b} \end{bmatrix}$*.*

(iii) Neka sustav ima rješenje i neka je n *broj nepoznanica. Tada je rješenje jedinstveno ako i samo ako je* $\operatorname{rang}(A) = n$*. Ako je* $\operatorname{rang}(A) < n$*, tada sustav ima beskonačno rješenja koja su izražena pomoću* $n - \operatorname{rang}(A)$ *parametara.*

Dokaz. (i) Neka sustav ima rješenje $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ i neka su

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$$

stupci matrice A. Iz poglavlja 2.1.6 zaključujemo da matrično množenje $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ možemo pisati i kao

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}. \tag{2.6}$$

Dakle, $\mathbf{b}$ je linearna kombinacija stupaca matrice A pa je $\operatorname{rang}(\begin{bmatrix} A & | & \mathbf{b} \end{bmatrix}) \leq \operatorname{rang}(A)$. Kako se dodavanjem stupca rang ne može smanjiti, zaključujemo da je $\operatorname{rang}(\begin{bmatrix} A & | & \mathbf{b} \end{bmatrix}) = \operatorname{rang}(A)$.

Obratno, neka je $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\begin{bmatrix} A & | & \mathbf{b} \end{bmatrix}) = r$. Kako već među stupcima matrice A ima r linearno nezavisnih, zaključujemo da je $\mathbf{b}$ linearna kombinacija stupaca matrice A, odnosno da postoje brojevi $x_1, x_2, \cdots, x_n$ za koje vrijedi (2.6). U matričnom obliku to odgovara zapisu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, što znači da je $\mathbf{x}$ rješenje sustava.

Dokaze tvrdnji (ii) i (iii) izostavljamo. ∎

Zadatak 2.6 Protumačite primjere 2.1, 2.2 i 2.3 prema teoremu 2.5.

Posebno je lagana primjena Kronecker–Capellijevog teorema na *homogene* sustave, odnosno sustave oblika

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Homogeni sustav očito uvijek ima *trivijalno* rješenje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Iz teorema 2.5 slijedi da će homogeni sustav imati i netrivijalna (parametarska) rješenja ako i samo ako je $\operatorname{rang}(A) < n$, pri čemu je n broj nepoznanica.

2.8 Inverzna matrica

Kod množenja realnih brojeva svaki broj različit od nule ima svoj inverz, odnosno

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1, \quad \forall x \neq 0.$$

U skupu kvadratnih matrica $\mathcal{M}_n$ imamo sljedeću definiciju.

Definicija 2.5 Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ je *regularna* (*invertibilna*, *nesingularna*) ako postoji matrica $B \in \mathcal{M}_n$ za koju vrijedi

$$AB = BA = I.$$

Matrica je *singularna* ako nije regularna.

Matrica B je, ukoliko postoji, jedinstvena. Tu tvrdnju dokazujemo na sljedeći način: pretpostavimo da je C neka druga matrica za koju vrijedi $AC = CA = I$. Tada je

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B.$$

Stoga možemo uvesti oznaku $B = A^{-1}$. Matrica A^{-1} zove se *inverzna matrica* matrice A. Dakle, za svaku regularnu matricu vrijedi

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \tag{2.7}$$

Kao što kod brojeva broj nula nema inverz, postavlja se pitanje da li su sve kvadratne matrice regularne. Odgovor na to pitanje daje sljedeći teorem.

Teorem 2.6 *Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ je regularna ako i samo ako je* $\operatorname{rang}(A) = n$.

Dokaz. Neka je $\operatorname{rang}(A) = n$ i neka $\mathbf{e}_i$ označava i-ti stupac jedinične matrice. Po Kronecker–Capellijevom teoremu 2.5 svaki od sustava $A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ ima jedinstveno rješenje. Neka je

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}.$$

Tada je očito $AX = I$. Slično, $\operatorname{rang}(A^T) = n$ povlači da svaki od sustava $A^T\mathbf{y}_i = \mathbf{e}_i$ ima jedinstveno rješenje. Ako stavimo

$$Y = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_n \end{bmatrix},$$

tada je očito $A^TY = I$, odnosno $Y^TA = I$. Sada imamo

$$Y^T = Y^TI = Y^T(AX) = (Y^TA)X = IX = X,$$

pa je $X = Y^T = A^{-1}$, odnosno A je regularna.

Obratno, neka je A regularna. Pretpostavimo da teorem ne vrijedi, odnosno $\operatorname{rang}(A) < n$. Kako su stupci od A zavisni, zaključujemo da postoji vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ takav da je $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. No iz $A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{0}$ slijedi da je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, što je kontradikcija. ■

Skup $\mathcal{G}_n$ svih regularnih matrica ima sljedeća svojstva:

(i) $\mathcal{G}_n \neq \mathcal{M}_n$,

(ii) $I \in \mathcal{G}_n$,

(iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ za $\forall A, B \in \mathcal{G}_n$,

(iv) $(A^{-1})^{-1} = A$ za $\forall A \in \mathcal{G}_n$.

Svojstvo (i) slijedi iz teorema 2.6, svojstvo (ii) vrijedi jer $II = I$ povlači $I^{-1} = I$, svojstvo (iii) slijedi iz

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

a svojstvo (iv) slijedi iz (2.7).

Dokaz teorema 2.6 nam daje postupak za računanje inverzne matrice. Naime, svi sustavi $A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ imaju zajedničku matricu sustava pa proširene matrice svih n sustava možemo pisati zajedno,

$$\begin{bmatrix} A & | & I \end{bmatrix}.$$

Kada pomoću elementarnih transformacija dobijemo oblik

$$\begin{bmatrix} I & | & B \end{bmatrix},$$

tada je $A^{-1} = B$. Ukoliko se ne može dobiti ovaj oblik, A je singularna.

Zadatak 2.7 Nađite inverznu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

i provjerite da vrijedi (2.7).

2.9 Determinante

Za definiciju determinante potreban nam je pojam permutacije. *Permutacija* brojeva $1, 2, \ldots, n$ je svaka uređena n-torka $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ u kojoj se svaki od brojeva $1, 2, \ldots, n$ javlja točno jedanput. Brojevi i_p i i_q su u inverziji ako je $p < q$ i $i_p > i_q$. Permutacija je *parna* ako je broj inverzija u njoj paran, a *neparna* inače. Sljedeća tablica prikazuje sve permutacije brojeva $1, 2, 3$, broj inverzija i parnost:

permutacija	# inverzija	parnost
(1,2,3)	0	parna
(1,3,2)	1	neparna
(2,1,3)	1	neparna
(2,3,1)	2	parna
(3,1,2)	2	parna
(3,2,1)	3	neparna

Vidimo da je pola permutacija parno, a pola neparno. To vrijedi za svaki n.

Teorem 2.7 *Vrijedi sljedeće:*

(i) broj permutacija od n brojeva jednak je

$$n(n-1)(n-2)\cdots 1 \equiv n!,$$

(ii) ako u permutaciji $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ zamijenimo mjesta brojevima i_p i i_q, $p \neq q$, parnost će se promijeniti.

Dokaz.

(i) Prvo mjesto u permutaciji možemo popuniti s n brojeva, a drugo mjesto u permutaciji možemo popuniti s preostalih $n-1$ brojeva. To znači da prva dva mjesta možemo popuniti na $n(n-1)$ različitih načina pa prvu tvrdnju možemo dokazati indukcijom.

(ii) Ako dva susjedna elementa zamijene mjesta, tada se parnost promijeni. Pretpostavimo sada da je $q - p > 1$, odnosno i_p i i_q nisu susjedi. Tada i_p možemo prebaciti na q-tu poziciji s $q - p$ zamjena susjednih elemenata udesno. Pri tome su se svi elementi $i_{p+1}, \ldots, i_q$ pomakli za jedno mjesto ulijevo. Sada pomoću $q - p - 1$ zamjena susjednih elemenata ulijevo prebacimo element i_q s pozicije $q - 1$ na poziciju p. Pri tome se ostali elementi $i_{p+1}, \ldots, i_{q-1}$ vrate na svoja originalna mjesta, a i_p i i_q su zamijenili mjesta. Ukupno smo izvršili $2(q-p) - 1$, dakle neparni broj zamjena susjednih elemenata pa se parnost promijenila. ■

Zadatak 2.8 Odredite parnost permutacije $(1,3,5,7,6,2,4)$, a zatim zamijenite i_2 i i_5 na način koji je opisan u dokazu teorema 2.7.

Sada možemo definirati determinantu.

Definicija 2.6 *Determinanta* matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ je broj

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \Pi_n} (-1)^{k(\pi)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \tag{2.8}$$

pri čemu je Π_n skup svih permutacija $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, a $k(\pi)$ je broj inverzija u permutaciji π.

Determinantu matrice A još označavamo s $|A|$. Na primjer,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

i

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$
$$+ a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Formulu za determinantu matrice 3×3 jednostavnije pamtimo pomoću *Sarrusovog pravila*.

Za izračunavanje formule (2.8) potrebno je $(n-1)n!$ množenja i $n!-1$ zbrajanja, što je praktično neizvedivo za veliki n. U poglavlju 2.9.1 ćemo vidjeti kako se determinante efikasno računaju pomoću Gaussove eliminacije.

Svaki umnožak u formuli (2.8) ima točno jedan element iz svakog retka i svakog stupca, pri čemu su indeksi redaka navedeni u osnovnoj permutaciji $(1, 2, \ldots, n)$. No, svaki umnožak možemo zapisati i tako da indeksi stupaca budu u osnovnoj permutaciji. Indeksi redaka tada stoje u inverznoj permutaciji permutacije π. Može se pokazati da inverzna permutacija ima istu parnost kao i π. Stoga vrijedi

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \Pi} (-1)^{k(\pi)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \tag{2.9}$$

Zadatak 2.9 Izračunajte determinantu matrice 3×3 prema formuli (2.9) i usporedite s izrazom (2.9) kojeg smo dobili prema formuli (2.8).

2.9.1 Svojstva determinanti

Navodimo najvažnija svojstva determinanti. Dokazi nekih tvrdnji dani su u obliku uputa ili naznaka ili u vrlo sažetom obliku.

D1. *Determinanta trokutaste matrice jednaka je produktu elemenata na dijagonali.*

Ako je A recimo gornje trokutasta matrica, tada svi umnošci u (2.8), osim $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, imaju barem jedan element iz donjeg trokuta pa su jednaki nula. Na primjer, za jediničnu matricu vrijedi

$$\det(I) = 1.$$

D2. $\det(A) = \det(A^T)$.

Jednakost vrijedi zbog formula (2.8) i (2.9). Iz ovog svojstva zaključujemo da sva svojstva koja ćemo navesti za retke vrijede i za stupce.

D3. *Zamjenom dvaju stupaca determinanta mijenja predznak.*

Zamjenom dvaju stupaca u svakom umnošku u formuli (2.8) dolazi do zamjene dvaju elemenata u permutaciji drugih indeksa pa se po teoremu 2.7 u svakom umnošku parnost permutacije promijeni.

D4. *Determinanta matrice s dva jednaka stupca je nula.*

Svojstvo slijedi stoga što po svojstvu D3 zamjenom dvaju redaka determinanta mijenja predznak, a kako smo zamijenili iste retke determinanta se ne mijenja. Koji broj jedini ostaje isti kada promijeni predznak?

D5. *Determinanta je multilinearna funkcija svojih stupaca, odnosno*

$$\begin{vmatrix} \cdots & \beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c} & \cdots \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} \cdots & \mathbf{b} & \cdots \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \cdots & \mathbf{c} & \cdots \end{vmatrix}.$$

Ovo svojstvo slijedi direktno iz formule (2.8). Posebno zaključujemo da za matricu A_1 koja se dobije tako što se svi elementi nekog stupca matrice A pomnože s brojem α vrijedi

$$\det(A_1) = \alpha \det(A).$$

Također, ako matrica A ima nul-stupac, tada je $\det(A) = 0$.

D6. *Determinanta se ne mijenja ako jednom stupcu pribrojimo neki drugi stupac pomnožen s nekim brojem.*

Po svojstvu D5 vrijedi

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \cdots & \mathbf{a}+\beta\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{b} & \cdots \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \cdots & \mathbf{a} & \cdots & \mathbf{b} & \cdots \end{vmatrix} \\
&\quad + \beta \begin{vmatrix} \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{b} & \cdots \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

a po svojstvu D4 je druga determinanta na desnoj strani jednaka nula.

D7. *Za matrice* $A, B \in \mathcal{M}_n$ *vrijedi*

$$
\det(AB) = \det(A)\det(B).
$$

Na primjer, za regularnu matricu A

$$
\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = 1
$$

povlači

$$
\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.
$$

D8. *Determinanta je različita od nule ako i samo ako su stupci matrice linearno nezavisni, odnosno ako je matrica regularna.*

Ako je $\operatorname{rang}(A) < n$, tada je jedan od stupaca linearna kombinacija ostalih pa ga, koristeći operacije iz svojstva D6, možemo poništiti. Tada je $\det(A) = 0$ po svojstvu D5.

Obratno, ako je $\det(A) = 0$, tada matrica A mora biti singularna, odnosno $\operatorname{rang}(A) < n$, jer bi u protivnom $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ povlačilo $\det(A) \neq 0$.

Napomena 2.3 Koristeći svojstva D3, D5 i D6 lako možemo pratiti kako se determinanta mijenja kada vršimo elementarne transformacije na matrici – determinanta ili promijeni predznak ili se uveća za neki faktor ili ostane ista. Nakon što Gaussovom eliminacijom dobijemo trokutasti oblik, determinantu lako izračunamo po svojstvu D1. Napose, ako koristimo samo matrice transformacije M_i opisane u poglavlju 2.4, čija je determinanta jednaka jedan, tada je determinanta polazne matrice jednaka determinanti trokutaste matrice.

Zadatak 2.10 Izračunajte

$$
\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}
$$

pomoću formule (2.9) i pomoću Gaussove eliminacije (vidi primjer 2.1).

2.9.2 Podmatrice i poddeterminante

Rang matrice možemo definirati i pomoću podmatrica. Neka je zadana matrica A tipa $m \times n$. Na presjeku r redaka i s stupaca matrice A nalazi se matrica tipa $r \times s$ koju zovemo *podmatrica* ili *submatrica* matrice A. Naravno da je i A svoja vlastita podmatrica, kao i svaki element od A. *Poddeterminante* matrice A su determinante kvadratnih podmatrica matrice A.

Teorem 2.8 *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) $\operatorname{rang}(A) = r$.

(ii) Barem jedna poddeterminanta od A reda r je različita od nule, a sve poddeterminante reda većeg od r su jednake nula.

2.9.3 Laplaceov razvoj determinante

Neka D_{ij} označava determinantu podmatrice koja se dobije kada iz kvadratne matrice A ispustimo i-ti redak i j-ti stupac. *Algebarski komplement* ili *kofaktor* elementa a_{ij} je broj

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Ako pribrojnike u formulama (2.8) ili (2.9) grupiramo po elementima koji se nalaze u i-tom retku dobijemo *Laplaceov razvoj determinante* po elementima i-tog retka,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Slično, ako pribrojnike grupiramo po elementima koji se nalaze u j-tom stupcu, tada dobijemo razvoj determinante po elementima j-tog stupca,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Na primjer, koristeći svojstva determinanti i Laplaceov razvoj imamo

$$\begin{vmatrix} -2 & 8 & 8 & -4 \\ 3 & 12 & 15 & -3 \\ 7 & 28 & -14 & 14 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} + \mathrm{I} \\ \mathrm{III} + \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} + 3\,\mathrm{I} \end{matrix}$$

$$= 42 \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & 9 & -3 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 20 & 16 & -3 \end{vmatrix} = 42(-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 8 & 9 & -3 \\ 8 & 2 & 0 \\ 20 & 16 & -3 \end{vmatrix} = 4032.$$

2.9.4 Računanje inverzne matrice

Postoji još jedan važan izraz za inverznu matricu.

Teorem 2.9 *Neka je A regularna matrica i neka je $\tilde{A}$ matrica čiji su elementi algebarski komplementi A_{ij}. Tada je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}^T.$$

Dokaz. Stavimo $B = \tilde{A}^T / \det(A)$. Tada je

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj} = \frac{1}{\det(A)}\sum_k a_{ik}A_{jk}.$$

Za $i = j$ suma na desnoj strani predstavlja Laplaceov razvoj determinante matrice A po i-tom retku pa je $(AB)_{ii} = 1$. Za $i \neq j$ suma na desnoj strani predstavlja Laplaceov razvoj determinante s dva jednaka retka pa je jednaka nuli. Dakle, $AB = I$. Slično se pokaže $BA = I$ pa je teorem dokazan. ∎

Zadatak 2.11 Nađite inverznu matricu matrice A iz zadatka 2.7 koristeći prethodni teorem.

2.9.5 Cramerovo pravilo

Sljedeći teorem daje formulu za rješenje sustava linearnih jednadžbi kada je matrica sustava regularna.

Teorem 2.10 (Cramer) *Neka je A regularna matrica i neka je D_i determinanta matrice koja se dobije kada se i-ti stupac matrice A zamijeni s vektorom $\mathbf{b}$. Tada su komponente rješenja sustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dane s*

$$x_i = \frac{D_i}{\det(A)}.$$

Dokaz. Matrica A je regularna pa je

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}^T\mathbf{b}.$$

Ova jednakost napisana po komponentama glasi

$$x_i = \frac{1}{\det(A)}\sum_k A_{ki}b_k = \frac{1}{\det(A)}D_i$$

pa je teorem dokazan. ∎

Zadatak 2.12 Neka je matrica sustava

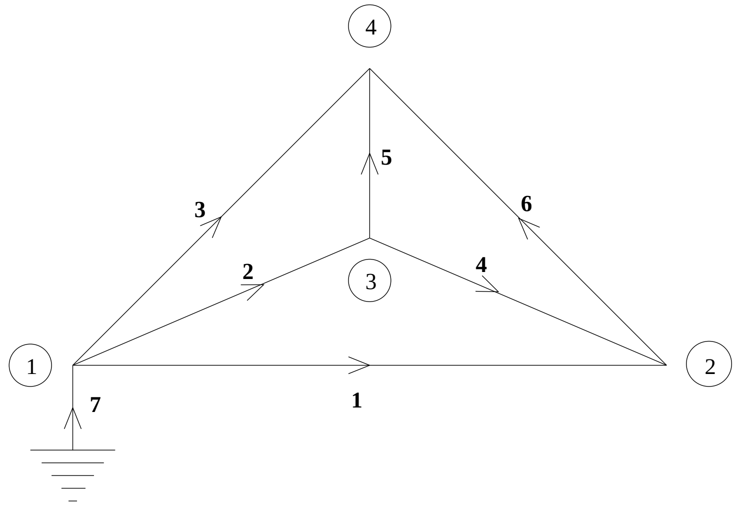
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

regularna. Riješite sustav pomoću Cramerovog pravila i provjerite rješenje.

2.10 Rješavanje električne mreže

U ovom poglavlju pokazat ćemo kako se pomoću matričnog računa mogu rješavati električne mreže. Zanimljivo ja da se u tom postupku koriste mnoga svojstva matrica i sustava jednadžbi koja smo opisali u prethodnim poglavljima. Stoga praćenje primjera nije jednostavno i zahtijeva odlično poznavanje prethodnih poglavlja.

Promotrimo mrežu prikazanu na slici 2.2[1].

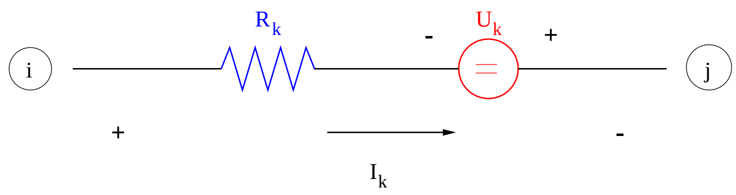


Slika 2.2: Električna mreža

Grane mreže su označene s brojevima od 1 do 7, a čvorovi mreže s brojevima od 1 do 4. Grana k se sastoji od serijskog spoja otpora R_k i naponskog izvora U_k, a kroz granu teče struja I_k (vidi Sliku 2.3). Čvor i ima napon (potencijal) V_i. Naš zadatak je izračunati struje I_k ako znamo otpore R_k i naponske izvore U_k.

Za rješavanje mreže koristimo dva zakona:

[1] Ovaj primjer izradio je prof. dr. sc. Krešimir Veselić, Fernuniversität Hagen, Njemačka.



Slika 2.3: Standardna grana mreže

- *prvi Kirchoffov zakon* po kojemu je zbroj struja koje ulaze u pojedini čvor jednak nula i
- *Ohmov zakon* po kojemu je

$$\text{struja kroz otpor} = \frac{\text{napon na otporu}}{\text{otpor}}.$$

Ako struje koje ulaze u čvor označimo s predznakom $-$, a struje koje izlaze iz čvora s predznakom $+$, tada prvi Kirchoffov zakon primijenjen na čvorove 1–4 daje

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
I_1 & +I_2 & +I_3 & & & & -I_7 & = & 0\\
-I_1 & & & -I_4 & & +I_6 & & = & 0\\
& -I_2 & & +I_4 & +I_5 & & & = & 0\\
& & -I_3 & & -I_5 & -I_6 & & = & 0
\end{array}$$

Vidimo da se radi o homogenom sustavu linearnih jednadžbi koji ima četiri jednadžbe i sedam nepoznanica, $I_1, \ldots, I_7$. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & -1\\ -1 & & & -1 & & 1 & \\ & -1 & & 1 & 1 & & \\ & & -1 & & -1 & -1 & \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} I_1\\ I_2\\ I_3\\ I_4\\ I_5\\ I_6\\ I_7 \end{bmatrix},$$

tada matrični zapis sustava glasi

$$AI = 0. \tag{2.10}$$

Matrica A zove se *matrica incidencija* ili *matrica susjedstva* zadane električne mreže. Ako zadnji stupac matrice A premjestimo na prvo mjesto, dobit ćemo gornje trokutastu matricu pa lako vidimo da je $\operatorname{rang}(A) = 4$.

Ako k-ti vodič ide od čvora i prema čvoru j, tada Ohmov zakon daje

$$R_k I_k = V_i - V_j + U_k.$$

Dakle, imamo još jedan sustav linearnih jednadžbi koji glasi

$$\begin{aligned}
R_1I_1 &= V_1 - V_2 + U_1\\
R_2I_2 &= V_1 - V_3 + U_2\\
R_3I_3 &= V_1 - V_4 + U_3\\
R_4I_4 &= -V_2 + V_3 + U_4\\
R_5I_5 &= V_3 - V_4 + U_5\\
R_6I_6 &= V_2 - V_4 + U_6\\
R_7I_7 &= -V_1 + 0 + U_7
\end{aligned}$$

Neka je R dijagonalna matrica otpora vodiča (matrica čiji su dijagonalni elementi otpori), V vektor napona čvorova i U vektor naponskih izvora na vodičima,

$$R = \begin{bmatrix} R_1 &&&&&& \\ & R_2 &&&&& \\ && R_3 &&&& \\ &&& R_4 &&& \\ &&&& R_5 && \\ &&&&& R_6 & \\ &&&&&& R_7 \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix}.$$

Uz ove oznake gornji sustav možemo zapisati u matričnom obliku kao

$$RI = A^T V + U. \tag{2.11}$$

Primijetimo da se i u matričnom zapisu Ohmovog zakona ponovo javlja matrica incidencija A, ovaj put transponirana.

Matrica R je dijagonalna, a njeni dijagonalni elementi (otpori) su veći od nule pa je prema tome R regularna i vrijedi

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} &&&&&& \\ & \frac{1}{R_2} &&&&& \\ && \frac{1}{R_3} &&&& \\ &&& \frac{1}{R_4} &&& \\ &&&& \frac{1}{R_5} && \\ &&&&& \frac{1}{R_6} & \\ &&&&&& \frac{1}{R_7} \end{bmatrix}$$

Kada jednadžbu (2.11) pomnožimo s matricom R^{-1} s lijeve strane, dobit ćemo novi ekvivalentan sustav

$$I = R^{-1} A^T V + R^{-1} U. \tag{2.12}$$

Pomnožimo sada ovu jednadžbu s matricom incidencija A s lijeve strane. To nam daje sustav

$$AI = AR^{-1}A^T V + AR^{-1}U = 0. \tag{2.13}$$

Zadnja jednakost u ovoj jednadžbi slijedi iz prvog Kirchoffovog zakona (2.10).

Radi lakšeg snalaženja uvedimo nove oznake,

$$K = AR^{-1}A^T, \qquad L = -AR^{-1}U. \tag{2.14}$$

Matrica K i vektor L su poznati jer su matrice A i R i vektor U zadani. Matrica K je dimenzije 4×4, a vektor L je dimenzije 4×1. Matrica K je simetrična jer je

$$K^T = (AR^{-1}A^T)^T = (A^T)^T(R^{-1})^T A^T = AR^{-1}A^T = K.$$

Uz ove oznake jednadžba (2.13) daje sustav od četiri jednadžbe i četiri nepoznanice

$$KV = L. \tag{2.15}$$

Primijetimo da u električnoj mreži čvorova uvijek ima manje nego vodiča. Stoga je ovaj sustav manjih dimenzija od sustava (2.10) pa je njega povoljnije rješavati.

Prema Kronecker-Cappelijevom teoremu sustav (2.15) će imati jedinstveno rješenje V ako i samo ako je $\operatorname{rang}(K) = 4$. Da je taj uvjet zaista ispunjen možemo zaključiti pomoću sljedećeg važnog teorema koji navodimo bez dokaza.

Teorem 2.11 *Ako je matrica A tipa $m \times k$ i matrica B tipa $k \times n$, tada je*

$$\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) - k \leq \operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\}.$$

Pored toga, za svaku matricu A vrijedi

$$\operatorname{rang}(AA^T) = \operatorname{rang}(A^T A) = \operatorname{rang}(A).$$

Da bi primijenili teorem 2.11, uočimo da matricu K možemo zapisati kao

$$K = AR^{-1}A^T = AS^{-1}(S^{-1})^T A^T = FF^T,$$

gdje je $F = AS^{-1}$, a $S = (s_{ij})$ je dijagonalna matrica čiji su dijagonalni elementi $s_{kk} = \sqrt{R_k}$. Kako je $\operatorname{rang}(A) = 4$ i $\operatorname{rang}(S) = \operatorname{rang}(R) = 7$, prva tvrdnja teorema 2.11 daje

$$4 + 7 - 7 \leq \operatorname{rang}(AS^{-1}) = \operatorname{rang}(F) \leq \min\{4, 7\},$$

odnosno $\operatorname{rang}(F) = 4$. Druga tvrdnja teorema 2.11 sada povlači $\operatorname{rang}(K) = \operatorname{rang}(F) = 4$ pa sustav (2.15) ima jedinstveno rješenje V.

Konačno, nakon što smo izračunali napone u čvorovima V, struje kroz vodiče I lako izračunamo uvrštavanjem u jednadžbu (2.12).

Za kraj, izračunajmo napone u čvorovima V i struje u vodičima I za električnu mrežu sa slike 2.2 za slučaj kada su otpori svih vodiča jednaki 10 oma, $R_k = 10\,\Omega$, a u vodičima 1, 4 i 5 se nalaze naponski izvori od jednog volta, $U_1 = U_4 = U_5 = 1\,\mathrm{V}$. Uvrštavanje u relaciju (2.14) daje

$$K = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje sustava (2.15) daje napone u čvorovima

$$V = \begin{bmatrix} 0 \text{ V} \\ 0.75 \text{ V} \\ -0.25 \text{ V} \\ 0.5 \text{ V} \end{bmatrix},$$

a uvrštavanje u jednadžbu (2.12) daje struje u vodičima

$$I = \begin{bmatrix} 0.025 \text{ A} \\ 0.025 \text{ A} \\ -0.05 \text{ A} \\ 0 \text{ A} \\ 0.025 \text{ A} \\ 0.025 \text{ A} \\ 0 \text{ A} \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.13 Gornje rješenje dobiveno je pomoću sljedećeg programa napisanog u programskom jeziku Matlab:

```
A=[1 1 1 0 0 0 -1; -1 0 0 -1 0 1 0; 0 -1 0 1 1 0 0; 0 0 -1 0 -1 -1 0]
R=diag([10 10 10 10 10 10 10])
U=[1 0 0 1 1 0 0]'
R1=inv(R)
K=A*R1*A'
L=-A*R1*U
V=K\L
I=R1*(A'*V+U)
```

U prvom retku programa matrica A je zadana po retcima, pri čemu su retci odvojeni znakom `;`. U drugom retku programa naredba `diag` koristi se za kreiranje dijagonalne matrice čiji su dijagonalni elementi jednaki elementima zadanog vektora. U trećem, petom i zadnjem retku znak `'` označava transponiranu matricu. U četvrtom retku koristi se naredba `inv` koja daje inverznu matricu. U sedmom retku znak \ znači rješavanje sustava.

Izvedite gornji program u Matlabu. Zatim riješite električnu mrežu sa slike 2.2 za neke druge vrijednosti otpora R_k i naponskih izvora U_k. Zadajte neku drugu električnu mrežu i riješite je na isti način. Pri rješavanju zadatka možete koristiti program Octave On-line.

3.

VEKTORSKA ALGEBRA I ANALITIČKA GEOMETRIJA

U ovoj glavi definirat ćemo pojam vektora, osnovne operacije s vektorima (zbrajanje i množenje sa skalarom), prikaz vektora u koordinatnom sustavu te produkte vektora s vektorom. Kod računanja produkata vektora svoju primjenu nalaze i determinante dimenzije 3×3. Potom ćemo pomoću vektora izvesti jednadžbu pravca u prostoru i jednadžbu ravnine te objasniti kako ispitujemo međusobne odnose točaka, pravaca i ravnina.

3.1 Vektori

U ovom poglavlju definirat ćemo pojmove dužine, usmjerene dužine i vektora te navesti osnovno svojstvo trodimenzionalnog Euklidskog prostora $\mathcal{E}$. Pretpostavljamo da su pojmovi kao što su pravac, ravnina, kut i prostor poznati.

Definicija 3.1 *Dužina* $\overline{PQ}$ je skup svih točaka pravca kroz točke P i Q koje se nalaze između točaka P i Q uključivši i njih. *Duljina* dužine $\overline{PQ}$ je udaljenost točaka P i Q i označava se s $d(P,Q)$ ili $|PQ|$.

Usmjerena dužina $\overrightarrow{PQ}$ je dužina kod koje su rubne točke uređene, odnosno točka P je početak ili *hvatište*, a točku Q svršetak. Udaljenost točaka P i Q se u ovom slučaju zove duljina (*norma* ili *intenzitet*) usmjerene dužine $\overrightarrow{PQ}$ i označava s $|\overrightarrow{PQ}|$.

Usmjerene dužine $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{P'Q'}$ su *ekvivalentne*, odnosno

$$\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'},$$

ako dužine $\overline{P'Q}$ i $\overline{PQ'}$ imaju zajedničko polovište (vidi sliku 3.1) .

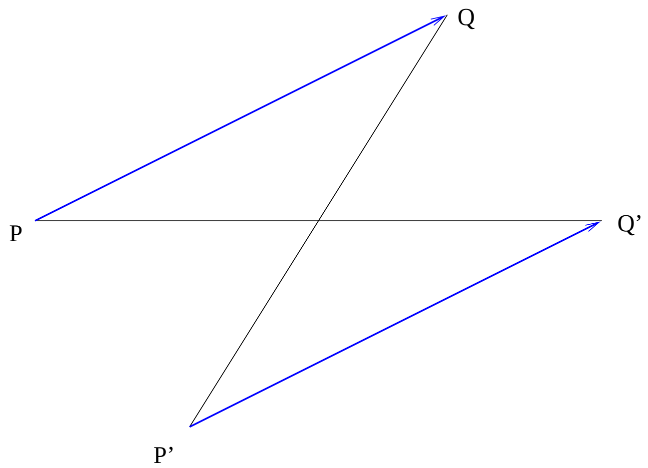
Vektor je klasa ekvivalencije usmjerenih dužina. Vektore označavamo s

$$\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}, \ldots, \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}, \ldots.$$

Ako je usmjerena dužina $\overrightarrow{PQ}$ predstavnik vektora $\mathbf{a}$, tada je *duljina* (*norma* ili *intenzitet*) vektora $\mathbf{a}$ jednaka udaljenosti točaka P i Q. Duljinu vektora označavamo s $|\mathbf{a}|$.

Nul-vektor je vektor koji ima početak i kraj u istoj točki. Nul-vektor označavamo s $\mathbf{0}$, vrijedi $|\mathbf{0}| = 0$, a njegovi predstavnici su sve usmjerene dužine oblika $\overrightarrow{PP}$.

Dokažimo da je relacija $\sim$ iz definicije 3.1 zaista relacija ekvivalencije. Prema definiciji 1.4, relacija ekvivalencije je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Očito je $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{PQ}$ pa je relacija $\sim$ refleksivna. Također, ako je $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'}$, tada je i $\overrightarrow{P'Q'} \sim \overrightarrow{PQ}$ pa je relacija $\sim$ simetrična. Dokaz tranzitivnosti je nešto složeniji. Ukoliko točke P, Q, P' i Q' ne leže na istom pravcu,



Slika 3.1: Ekvivalentne usmjerene dužine

tada je $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'}$ ako i samo ako su točke $PQQ'P'$ susjedni vrhovi paralelograma (vidi sliku 3.1). Ukoliko točke P, Q, P' i Q' leže na istom pravcu, tada je $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'}$ ako i samo ako vrijedi

$$d(P,Q) = d(P',Q') \quad \wedge \quad d(P,P') = d(Q,Q').$$

U ovom slučaju kažemo da su točke $PQQ'P'$ susjedni vrhovi degeneriranog paralelograma. Stoga, ako je

$$\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'} \qquad \wedge \qquad \overrightarrow{P'Q'} \sim \overrightarrow{P''Q''},$$

tada su točke $PQQ'P'$ susjedni vrhovi nekog paralelograma ili degeneriranog paralelograma, a isto vrijedi i za točke $P'Q'Q''P''$. Tada su i točke $PQQ''P''$ susjedni vrhovi nekog paralelograma ili degeneriranog paralelograma. Dakle $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P''Q''}$ pa je relacija $\sim$ tranzitivna.

Vezu između usmjerenih dužina i vektora daje nam *osnovno svojstvo euklidskog prostora*: ako je $P \in \mathcal{E}$ proizvoljna točka i $\mathbf{a}$ zadani vektor, tada postoji jedinstvena točka Q takva da je usmjerena dužina $\overrightarrow{PQ}$ predstavnik vektora $\mathbf{a}$. S ovim postupkom je vektor $\mathbf{a}$ sveden na početak P odnosno nanesen na P. U primjenama često pišemo i

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}.$$

Premda taj zapis nije sasvim korektan jer je vektor $\mathbf{a}$ klasa ekvivalencije, a $\overrightarrow{PQ}$ samo jedan predstavnik tog vektora, zbog osnovnog svojstva euklidskog prostora uvijek je jasno o kojem se vektoru radi. Stoga uglavnom nećemo praviti razliku između vektora i njegovog predstavnika.

Definicija 3.2 Vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ su *kolinearni* ako leže na istom ili paralelnim pravcima. Ako su vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ kolinearni, možemo odbrati točke O, A i B koje leže na istom pravcu takve da je

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \qquad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}.$$

Vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ imaju *istu orijentaciju* ako se točke A i B nalaze s iste strane točke O. Vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ imaju *suprotnu orijentaciju* ako se točke A i B nalaze s različitih strana točke O.

Iz definicije slijedi da su dva vektora jednaka ako su kolinearni, istog smjera i jednake duljine. Posebno, nul-vektor je kolinearan sa svakim vektorom i za njega nema smisla govoriti o orijentaciji.

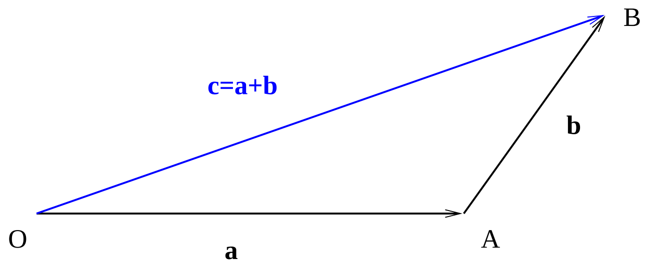
3.2 Zbrajanje vektora

U ovom poglavlju definirat ćemo operaciju zbrajanja vektora te dati njena osnovna svojstva.

Definicija 3.3 Neka su zadani vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ i točke O, A i B takve da je

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \qquad \mathbf{b} = \overrightarrow{AB}.$$

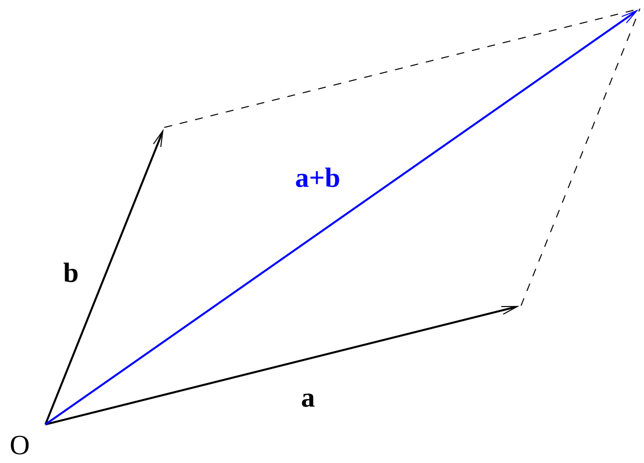
Zbroj vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ je vektor $\mathbf{c} = \overrightarrow{OB}$. Ovakav način zbrajanja vektora zove se *pravilo trokuta* i prikazan je na slici 3.2.



Slika 3.2: Zbrajanje vektora (pravilo trokuta)

Vektore također možemo zbrajati i po *pravilu paralelograma* koje je prikazano na slici 3.3. Više vektora zbrajamo po *pravilu poligona* kao što je prikazano na slici 3.4: ako su zadani vektori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ i točke $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$ takve da je

$$\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}, \quad \mathbf{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_n = \overrightarrow{A_{n-1}A_n},$$



Slika 3.3: Pravilo paralelograma

tada je

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n = \overrightarrow{OA_n}.$$

Zbrajanje vektora ima sljedeća svojstva:

Z1. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (asocijativnost),

Z2. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (komutativnost),

Z3. za nul-vektor $\mathbf{0}$ vrijedi $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$,

Z4. za svaki vektor $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$ postoji *suprotni vektor* $-\mathbf{a} = \overrightarrow{QP}$ takav da je

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Suprotni vektor je kolinearan s $\mathbf{a}$, ima istu duljinu i suprotnu orijentaciju.

Svojstva Z2, Z3 i Z4 slijede direktno iz definicije zbrajanja vektora, dok je svojstvo Z1 prikazano na slici 3.5.

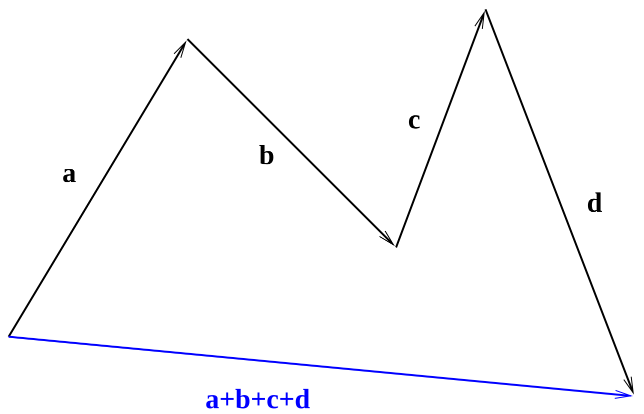
3.3 Množenje vektora skalarom

Vektor $\mathbf{a}$ množimo s realnim brojem λ na sljedeći način: ako je $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, tada je

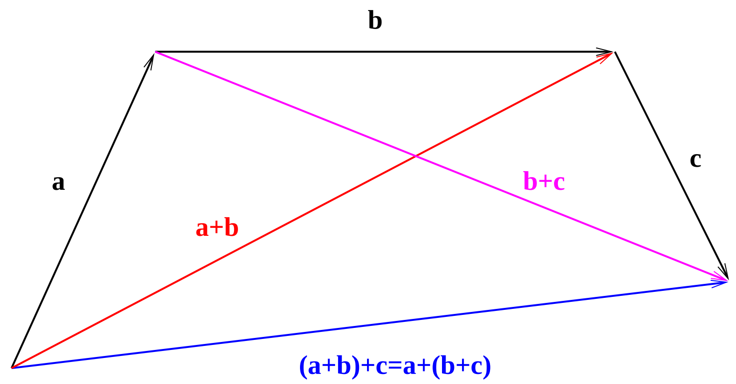
$$\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}, \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Ako je $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, odaberemo točke O i A takve da je $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$. *Produkt* vektora $\mathbf{a}$ i skalara λ je vektor

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} = \overrightarrow{OB},$$



Slika 3.4: Pravilo poligona



Slika 3.5: Asocijativnost zbrajanja vektora

pri čemu točka B leži na pravcu koji prolazi kroz točke O i A i

– za $\lambda > 0$ točka B leži s iste strane točke O kao točka A i vrijedi

$$d(O,B) = \lambda \cdot d(O,A), \qquad |\mathbf{b}| = \lambda|\mathbf{a}|,$$

– za $\lambda < 0$ točka B leži sa suprotne strane točke O od točke A i vrijedi

$$d(O,B) = -\lambda d(O,A), \qquad |\mathbf{b}| = -\lambda|\mathbf{a}| = |\lambda|\,|\mathbf{a}|.$$

Množenje vektora skalarom ima sljedeća svojstva:

M1. $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$,

M2. $(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, M3. $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$,

M4. $0\,\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \forall\mathbf{a}$,

M5. $1\,\mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad \forall\mathbf{a}$.

3.4 Prostor radijus-vektora

U mnogim primjenama je praktično uzeti predstavnike vektora koji svi imaju hvatište u istoj točki. Ako u prostoru $\mathcal{E}$ odaberemo točku O, svakoj točki P pripada jednoznačno određen vektor $\overrightarrow{OP}$. Vektor $\overrightarrow{OP}$ je *radijus-vektor* ili *vektor položaja* točke P u odnosu na hvatište O. *Skup radijus vektora* V_O je skup svih takvih vektora.

Zbrajanje radijus-vektora definira se kao i zbrajanje vektora u poglavlju 3.2, uz dodatak što zbroj opet mora biti u skupu V_O pa se koristi pravilo paralelograma. Pri tome vrijede svojstva Z1–Z4.

Množenje radijus-vektora skalarom definira se kao i množenje vektora skalarom u poglavlju 3.3, pri čemu vrijede svojstva M1–M5.

3.5 Koordinatizacija

Uvođenje koordinatnog sustava omogućava predstavljanje vektora pomoću realnih brojeva. Na taj način se pojednostavnjuje rukovanje s vektorima, jer se operacije s vektorima svode na odgovarajuće operacije s brojevima.

3.5.1 Koordinatizacija pravca

Koordinatizaciju pravca definiramo na sljedeći način: odaberemo pravac p kroz točku $O \in \mathcal{E}$ te na njemu nanesemo brojevni pravac tako da je nula u točki O. Jedinični vektor $\mathbf{i}$ definiramo kao $\mathbf{i} = \overrightarrow{OI}$, pri čemu je broju 1 brojevnog pravca pridružena točka I. Vektor $\mathbf{i}$ je jednoznačno određen i vrijedi

$$d(O, I) = |\mathbf{i}| = 1.$$

S ovim smo na pravcu p zadali *koordinatni sustav* $(O, \mathbf{i})$.

Svakoj točki T koja leži na pravcu p jednoznačno je pridružena njena *apscisa* x i vektor $\overrightarrow{OT}$. Po pravilu o množenju vektora skalarom iz poglavlja 3.3 vrijedi

$$\overrightarrow{OT} = x \cdot \overrightarrow{OI} = x\,\mathbf{i}.$$

Broj x je *skalarna komponenta* vektora $\overrightarrow{OT}$. Zbog jednoznačnosti prikaza, u koordinatnom sustavu $(O, \mathbf{i})$ koristimo sljedeće oznake

$$\overrightarrow{OT} = \{x\} \qquad \text{ili} \qquad \overrightarrow{OT} = \left[x\right].$$

Uvođenjem koordinatizacije operacije s vektorima sveli smo na operacije s brojevima: ako je

$$\overrightarrow{OS} = 3\,\mathbf{i} = \begin{bmatrix}3\end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{OT} = 2\,\mathbf{i} = \begin{bmatrix}2\end{bmatrix},$$

tada je, na primjer,

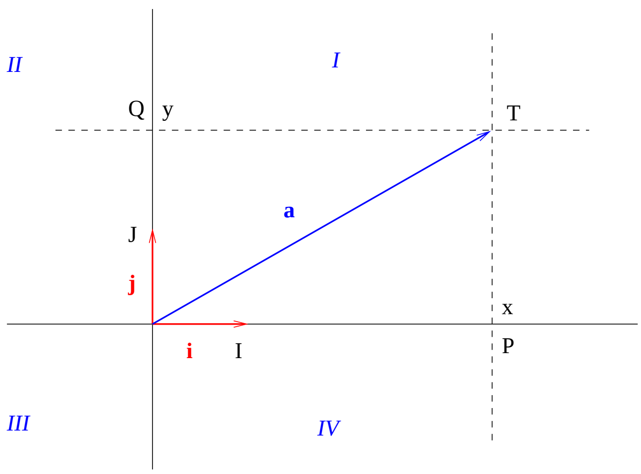
$$4\,(\overrightarrow{OS} + 2\,\overrightarrow{OT}) = 28\,\mathbf{i} = \begin{bmatrix}28\end{bmatrix}.$$

3.5.2 Koordinatizacija ravnine

U ravnini ρ koja se nalazi u prostoru $\mathcal{E}$ prvo odaberemo točku O kao ishodište. Zatim odaberemo međusobno okomite pravce p i q koji leže u ravnini ρ i prolaze kroz točku O. Na pravcima p i q definiramo koordinatne sustave $(O,\mathbf{i})$ i $(O,\mathbf{j})$, redom, pri čemu je

$$\mathbf{i} = \overrightarrow{OI}, \qquad \mathbf{j} = \overrightarrow{OJ}, \qquad |\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1.$$

Točke I i J su odabrane tako da točka I rotacijom oko točke O za kut $\pi/2$ u pozitivnom smjeru, odnosno suprotno od kazaljke sata, prelazi u točku J. S ovim smo u ravnini ρ zadali *desni pravokutni (ortogonalni) koordinatni sustav* $(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$, koji je prikazan na slici 3.6.



Slika 3.6: Koordinatizacija ravnine

Brojevni pravac koji smo nanijeli na pravac p zove se *apscisna os* ili *x-os*, a brojevni pravac koji smo nanijeli na pravac q zove se *ordinatna os* ili *y-os*. Osi dijele ravninu ρ na četiri *kvadranta* i to na $I.$, $II.$, $III.$ i $IV.$ kvadrant (slika 3.6).

Neka točka T pripada ravnini ρ. Pravac kroz točku T, koji je paralelan s pravcem q, siječe pravac p u točki P. Točka P u koordinatnom sustavu $(O, \mathbf{i})$ ima koordinatu x. Pravac kroz točku T koji je paralelan s pravcem p siječe pravac q u točki Q. Točka Q u koordinatnom sustavu $(O, \mathbf{j})$ ima koordinatu y. x i y su *koordinate* točke $T = (x, y)$ u sustavu $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, odnosno x je *apscisa*, a y je *ordinata* točke T (slika 3.6).

Neka je $\mathbf{a} = \overrightarrow{OT}$ radijus-vektor u ravnini ρ. Prema pravilu o zbrajanju vektora iz poglavlja 3.2 vrijedi (slika 3.6)

$$\overrightarrow{OT} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ},$$

odnosno

$$\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}.$$

Brojevi x i y su *skalarne komponente* radijus-vektora $\overrightarrow{OT}$ odnosno vektora $\mathbf{a}$. Radijus-vektori $x\,\overrightarrow{OI}$ i $y\,\overrightarrow{OJ}$ su *vektorske komponente* radijus-vektora $\overrightarrow{OT}$, a vektori $x\,\mathbf{i}$ i $y\,\mathbf{j}$ su vektorske komponente vektora $\mathbf{a}$.

Kako su skalarne komponente jednoznačno određene točkom T, za označavanje vektora koristimo skraćene zapise

$$\mathbf{a} = \{x, y\}, \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Vidimo da vektor u ravnini možemo zapisati kao retčanu matricu dimenzije 1×2 ili kao stupčanu matricu dimenzije 2×1. Zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom stoga odgovara zbrajanju matrica i množenju matrica skalarom.

Primjer 3.1 Neka je

$$\mathbf{a} = 2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Tada je

$$3\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 3\,(2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + \mathbf{i} + \mathbf{j}) = 9\,\mathbf{i} - 6\,\mathbf{j},$$

odnosno

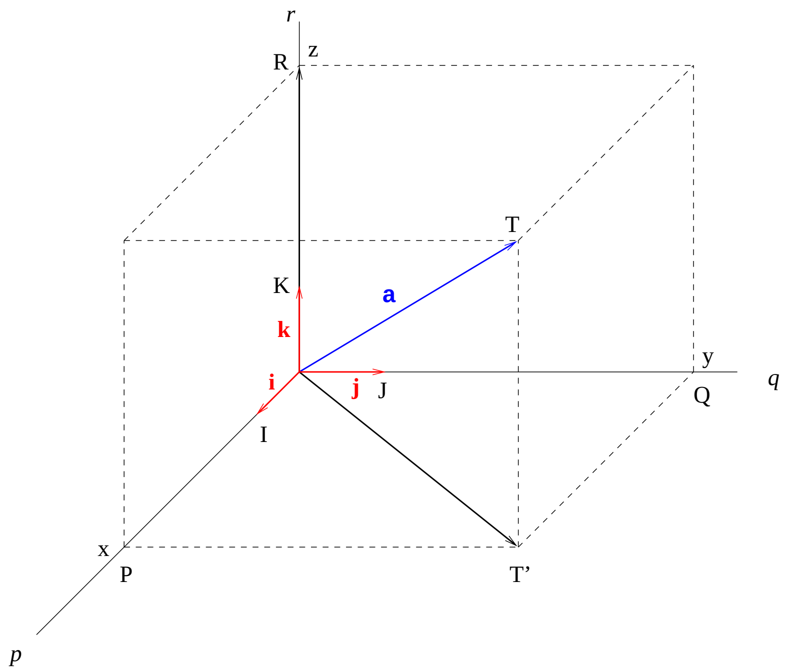
$$3\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 3\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Poglavlje ćemo završiti s dvije definicije: vektori koji leže u ravnini ρ su *kolinearni ravnini* ρ, a vektori su *komplanarni* ako imaju predstavnike koji su kolinearni jednoj ravnini. Na primjer, vektori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ su komplanarni za $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

3.5.3 Koordinatizacija prostora

Koordinatizaciju trodimenzionalnog prostora $\mathcal{E}$ dobijemo slično kao u prethodnim poglavljima. Prvo odaberemo ishodište O i međusobno okomite pravce p, q i r koji prolaze kroz točku O. U ravnini razapetoj s pravcima p i q definiramo desni pravokutni koordinatni sustav $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ na način opisan u poglavlju 3.5.2. Potom na pravcu r definiramo koordinatni sustav $(O, \mathbf{k})$ tako da vektori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ zadovoljavaju pravilo desnog vijka. Time smo definirali *desni pravokutni koordinatni sustav* $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ u prostoru $\mathcal{E}$ koji je prikazan na slici 3.7. Pri tome vrijedi

$$\mathbf{i} = \overrightarrow{OI}, \quad \mathbf{j} = \overrightarrow{OJ}, \quad \mathbf{k} = \overrightarrow{OK}, \qquad |\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1.$$



Slika 3.7: Koordinatizacija prostora

Brojevni pravci koje smo nanijeli na pravce p, q i r su *koordinatne osi* i to redom *apscisna*, *ordinatna* i *aplikatna os* (x-*os*, y-*os* i z-*os*). Tri ravnine x-y, x-z i y-z, koje su određene odgovarajućim koordinatnim osima, zovu se *koordinatne ravnine* i dijele prostor na osam *oktanata*.

Neka je zadana točka $T \in \mathcal{E}$. Ravnine paralelne s koordinatnim osima koje prolaze kroz točku T sijeku koordinatne osi u točkama P, Q i R (slika 3.7). Koordinate tih točaka u koordinatnim sustavima $(O, \mathbf{i})$, $(O, \mathbf{j})$ i $(O, \mathbf{k})$ jednake su x, y i z. Brojevi x, y i z su *koordinate* točke T, odnosno x je *apscisa*, y je *ordinata*, a z je *aplikata* točke T.

Brojevi x, y i z su također *skalarne komponente* vektora $\mathbf{a} = \overrightarrow{OT}$ u sustavu $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Prema pravilu o zbrajanju vektora iz poglavlja 3.2 vrijedi (slika 3.7)

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT'} + \overrightarrow{OR} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ} + z\,\overrightarrow{OK},$$

odnosno

$$\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

Skalarne komponente jednoznačno su određene točkom T pa za označavanje vektora koristimo skraćene zapise

$$\mathbf{a} = \{x, y, z\}, \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Kako vektor u prostoru možemo zapisati ili kao retčanu matricu dimenzije 1×3 ili stupčanu matricu dimenzije 3×1, zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom odgovara zbrajanju matrica i množenju matrica skalarom.

U koordinatnom sustavu možemo naći skalarne komponente vektora, odnosno usmjerene dužine koja je zadana s dvije točke.

Primjer 3.2 Neka su zadane točke $A = (x_A, y_A, z_A)$ i $B = (x_B, y_B, z_B)$. Kao što se vidi na slici 3.8 vrijedi

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB},$$

odnosno

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

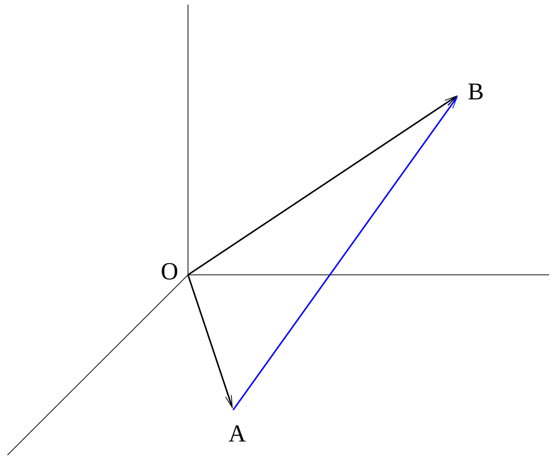
Dakle,

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j} + (z_B - z_A)\,\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix}.$$

Na primjer,

$$A = (1, 2, 3) \quad \wedge \quad B = (-1, 0, 5) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \{-2, -2, 2\}.$$

Napomena 3.1 Kod definicije pravokutnih koordinatnih sustava u ovom i prethodnom poglavlju koristili smo međusobno okomite pravce. Međutim, koordinatni sustav se može definirati i s pravcima koji nisu međusobno okomiti.



Slika 3.8: Komponente vektora

Tako kod koordinatizacije ravnine možemo uzeti bilo koja dva pravca koja prolaze kroz točku O i nisu paralelna. Slično, kod koordinatizacije prostora možemo uzeti bilo koju koordinatizaciju neke odabrane ravnine u prostoru i treći pravac koji prolazi kroz ishodište i ne leži u toj ravnini (vidi poglavlje 3.8).

3.6 Duljina vektora, jedinični vektor, kut između vektora i kosinusi smjerova

Duljina ili *norma* vektora $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$ jednaka je

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{3.1}$$

Naime, dvostrukom primjenom Pitagorinog poučka (slika 3.7) dobijemo:

$$|\overrightarrow{OT}|^2 = |\overrightarrow{OT'}|^2 + |\overrightarrow{OR}|^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OR}|^2.$$

Jedinični vektor vektora $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ je vektor

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

Iz definicije slijedi

$$|\mathbf{a}_0| = \left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1,$$

odnosno jedinični vektor ima duljinu jedan, kolinearan je vektoru $\mathbf{a}$ i ima istu orijentaciju. Na primjer, vektori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ su sami svoji jedinični vektori.

Neka je $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ i neka su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ njihovi predstavnici s hvatištem u točki O, redom. *Kut* između vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ definiramo kao kut između usmjerenih dužina $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$,

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

Prikloni kutovi vektora $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ su kutovi koje taj vektor zatvara s vektorima $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$. *Kosinusi smjerova* su kosinusi priklonih kutova.

Teorem 3.1 *Kosinusi smjerova vektora* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ *jednaki su skalarnim komponentama jediničnog vektora* $\mathbf{a}_0$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz definicije skalarnog produkta u poglavlju 3.9 (vidi primjer 3.6). ■

Ako je $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ i ako priklone kutove označimo redom s α, β i γ, tada je

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Očito je

$$\mathbf{a}_0 = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k},$$
$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Primjer 3.3 Ako je $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, tada je

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}}\,\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{14}}\,\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{14}}\,\mathbf{k},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

3.7 Linearna nezavisnost vektora

Definicija linearne nezavisnosti vektora u prostoru $\mathcal{E}$ jednaka je definiciji linearne nezavisnosti stupčanih vektora iz poglavlja 2.5, pri čemu smo se ovdje ograničili na trodimenzionalni prostor.

Linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ je vektor

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{a}_k, \quad \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

Vektori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k$ su *linearno nezavisni* ako za sve skalare $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

U protivnom su vektori *linearno zavisni*. Drugim riječima, vektori $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ su linearno zavisni ako i samo ako postoje $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ takvi da je

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0},$$

pri čemu je $\sum |\lambda_i| > 0$.

Ako je

$$\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \cdots, \mathbf{a}_k = \{x_k, y_k, z_k\},$$

tada je linearna nezavisnost vektora $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ ekvivalentna s linearnom nezavisnošću stupaca matrice

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_k \end{bmatrix}.$$

Primjer 3.4 Svaka dva kolinearna vektora i svaka tri komplanarna vektora su linearno zavisna. Svaka četiri vektora u prostoru $\mathcal{E}$ su linearno zavisna. Svaka dva nekolinearna vektora i svaka tri nekomplanarna vektora su linearno nezavisna.

3.8 Baza prostora $\mathcal{E}$

Svaka tri linearno nezavisna vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ čine *bazu* prostora $\mathcal{E}$ i definiraju koordinatni sustav $(O, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Svaki vektor $\mathbf{d}$ iz prostora $\mathcal{E}$ može se jednoznačno prikazati kao linearna kombinacija vektora baze, odnosno

$$\mathbf{d} = \alpha\, \mathbf{a} + \beta\, \mathbf{b} + \gamma\, \mathbf{c}. \tag{3.2}$$

Sljedeći primjer prikazuje postupak transformacije iz jedne baze u drugu, odnosno iz jednog koordinatnog sustava u drugi.

Primjer 3.5 Neka su u sustavu $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ zadani vektori

$$\mathbf{a} = \{1, -1, 1\}, \quad \mathbf{b} = \{1, 0, 2\}, \quad \mathbf{c} = \{0, 1, -1\}.$$

Definirajmo matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

čiji su stupci zadani vektori. Vrijedi $\det A = -2 \neq 0$ pa je prema svojstvu D8 iz poglavlja 2.9.1 matrica A regularna, odnosno njeni stupci su linearno nezavisni. Dakle, vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ čine bazu.

Da bi vektor $\mathbf{d} = \mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+3\,\mathbf{k}$ prikazali u sustavu $(O, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ trebamo riješiti jednadžbu (3.2), odnosno

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

Iz interpretacije matričnog množenja u poglavlju 2.1.6 vidimo da je ovo zapravo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\\1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

Rješenje sustava je $\alpha = -3/2$, $\beta = 5/2$ i $\gamma = 1/2$, odnosno

$$\mathbf{d} = -\frac{3}{2}\,\mathbf{a} + \frac{5}{2}\,\mathbf{b} + \frac{1}{2}\,\mathbf{c}.$$

Obratno, vektor $\mathbf{e} = 2\,\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ima u sustavu $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ zapis

$$\mathbf{e} = A\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}.$$

3.9 Skalarni produkt

Definicija 3.4 *Skalarni produkt* vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ je broj

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Još koristimo oznake $\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ i $(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Skalarni produkt ima sljedeća svojstva:

S1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ ako je $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ili $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ili $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$,

S2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \geq 0$ ako je $\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) \leq \pi/2$, a $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$ ako je $\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) > \pi/2$,

S3. vrijedi

$$\begin{aligned}&\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1,\\&\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0,\end{aligned}$$

S4. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2$, S5. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\, b_a$, gdje je

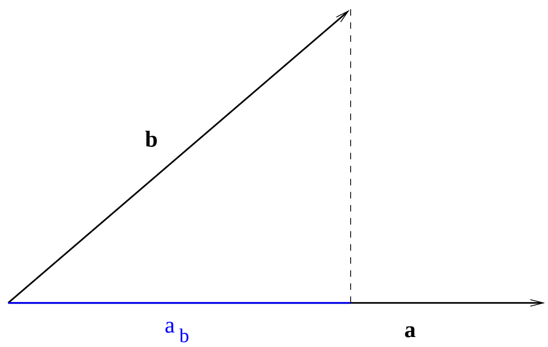
$$b_a = |\mathbf{b}| \cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

duljina projekcije vektora $\mathbf{b}$ na pravac definiran s vektorom $\mathbf{a}$ pomnožena s odgovarajućim predznakom prema svojstvu S2 (slika 3.9),

S6. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (komutativnost),

S7. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (distributivnost),

S8. $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b})$ (homogenost).



Slika 3.9: Skalarni produkt

U koordinatnom sustavu računanje skalarnog produkta je vrlo jednostavno.

Teorem 3.2 *Ako je*

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k},$$

tada je

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz svojstava S7, S8 i S3. ■

Ako su vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ zadani kao stupčane matrice, iz definicija matričnog množenja u poglavlju 2.1.3 i transponirane matrice u poglavlju 2.1.5 slijedi da skalarni produkt možemo zapisati i kao

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}.$$

Definicija skalarnog produkta 3.4 i teorem 3.2 omogućuju računanje kuta između dva vektora u prostoru pomoću formule

$$\cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\, |\mathbf{b}|}.$$

Primjer 3.6 Kosinus kuta između vektora $\mathbf{a} = \{2, -3, 1\}$ i $\mathbf{b} = \{1, 1, 0\}$ jednak je

$$\cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{4+9+1}\,\sqrt{1+1}} = -\frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Na isti način, kosinus priklonog kuta kojeg vektor $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$ zatvara s vektorom $\mathbf{i}$ jednak je

$$\cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{i}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{i}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

čime smo dokazali teorem 3.1.

Zadatak 3.1 Je li trokut $\triangle ABC$, gdje je $A = (1, 3, 1)$, $B = (0, 1, 2)$ i $C = (1, -1, 0)$ pravokutan? Je li jednakokračan?

3.10 Vektorski produkt

Definicija 3.5 *Vektorski produkt* vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ je vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ takav da je

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Pored toga, ako je $|\mathbf{c}| > 0$, tada je

$$\mathbf{c} \perp \mathbf{a} \quad \wedge \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{b},$$

pri čemu uređena trojka vektora $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ čini desni sustav (slika 3.10).

Vektorski produkt ima sljedeća svojstva:

V1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ako je $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ili $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ili ako su vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ kolinearni,

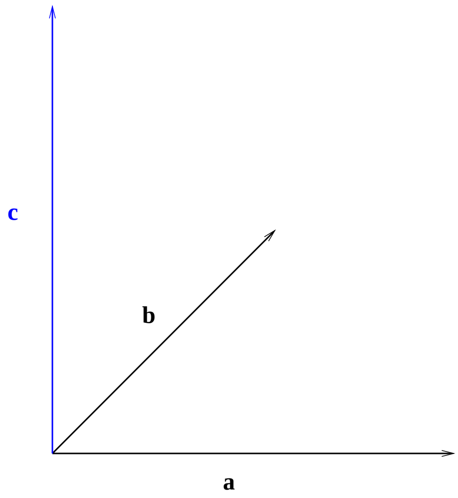
V2. vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \\
&\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \\
&\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -j,
\end{aligned}$$

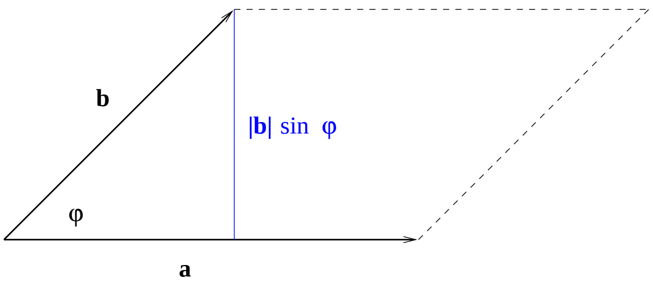
V3. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (anti-komutativnost),

V4. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (distributivnost),

V5. $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$ (homogenost),



Slika 3.10: Vektorski produkt



Slika 3.11: Modul vektorskog produkta

V6. norma $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ jednaka je površini paralelograma što ga razapinju vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (slika 3.11).

U pravokutnom koordinatnom sustavu vektorski produkt računamo pomoću determinante.

Teorem 3.3 *Ako je*

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k},$$

tada je

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k},$$

odnosno

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz svojstava V2, V4 i V5. ■

Napomena 3.2 Svojstva vektorskog produkta odgovaraju svojstvima determinanti iz poglavlja 2.9.1:

- prvi dio svojstva V2 odgovara svojstvu D4 koje kaže da je determinanta s dva jednaka retka jednaka nuli,
- svojstvo V3 odgovara svojstvu D3 koje kaže da zamjenom dvaju redaka determinanta mijenja predznak,
- svojstva V4 i V5 odgovaraju svojstvu D5.

Definicija vektorskog produkta 3.5 i teorem 3.3 omogućuju računanje površine poligonalnih likova u ravnini.

Primjer 3.7 Izračunajmo površinu trokuta $\triangle ABC$ zadanog s

$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (0, -1, 2), \qquad C = (3, 3, 0).$$

Površina trokuta jednaka je polovici površine paralelograma razapetog s vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ (slika 3.12). Kako je

$$\overrightarrow{AB} = \{-1, -3, -1\}, \qquad \overrightarrow{AC} = \{2, 1, -3\},$$

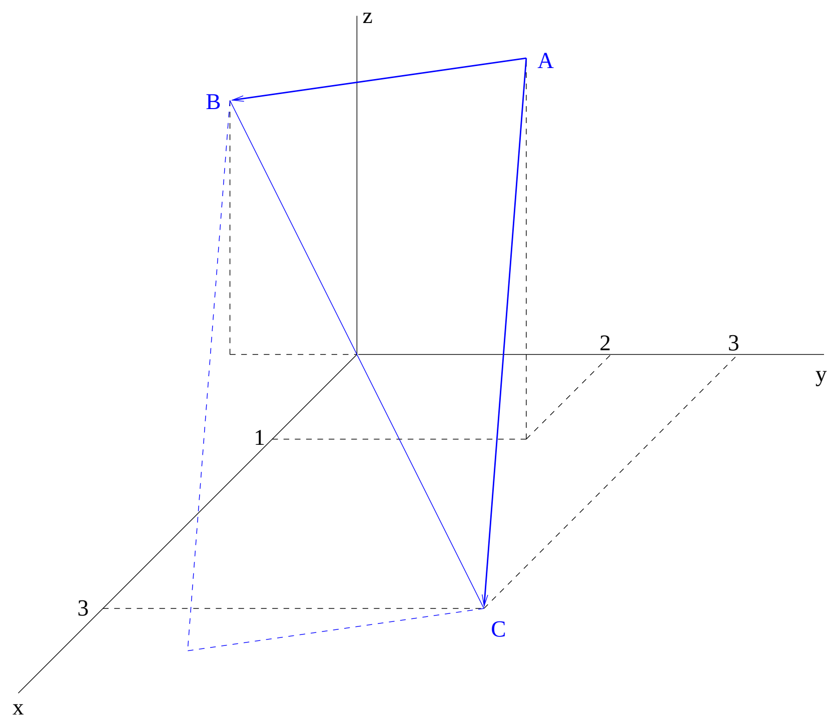
vrijedi

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2}|\mathbf{i}\,(9+1) - \mathbf{j}\,(3+2) + \mathbf{k}\,(-1+6)| = \frac{1}{2}\sqrt{150} \approx 6.12.$$

Uočimo da smo na jednostavan način riješili naočigled složeni problem, jer smo našli površinu trokuta smještenog u prostoru, a nismo ga morali niti skicirati. Na isti način možemo provjeriti leže li tri točke na pravcu, jer će u tom slučaju površina trokuta biti nula.

Na sličan način možemo izračunati površinu bilo kojeg poligonalnog lika u prostoru, jer svaki takav lik možemo podijeliti na trokute.



Slika 3.12: Površina trokuta

Zadatak 3.2 Izračunajte površinu trokuta iz prethodnog primjera pomoću paralelograma razapetog s vektorima $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$. Može li se zadatak riješiti ako promatramo paralelogram razapet s vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$?

3.11 Mješoviti produkt

Definicija 3.6 *Mješoviti produkt* ili *vektorsko-skalarni produkt* vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ je broj

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} &= |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\cos\angle(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c})\\ &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})\,|\mathbf{c}|\cos\angle(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}).\end{aligned}$$

Mješoviti produkt jednak je volumenu ili negativnoj vrijednosti volumena paralelopipeda kojeg razapinju vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$. Naime,

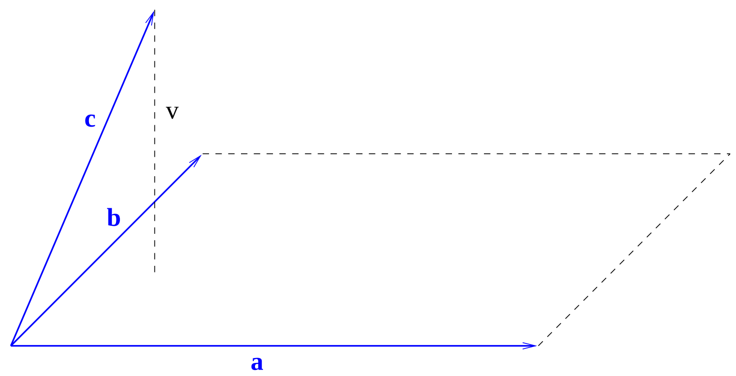
$$|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

je površina baze koja je razapeta vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, a ako s ρ označimo ravninu baze, tada je

$$|\mathbf{c}|\cos\angle(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}) = \pm|\mathbf{c}|\sin\angle(\rho,\mathbf{c}),$$

što je jednako visini ili negativnoj vrijednosti visine (slika 3.13).

Također zaključujemo da je $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$ ako i samo ako je barem jedan od vektora nul-vektor ili ako su vektori komplanarni, odnosno linearno zavisni.



Slika 3.13: Mješoviti produkt

Teorem 3.4 *Ako je*

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \qquad \mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}, \qquad \mathbf{c} = \{c_x, c_y, c_z\},$$

tada je

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz teorema 3.2 i 3.3. ■

Zadatak 3.3 Koristeći teorem 3.4 i svojstvo determinante D3 iz poglavlja 2.9.1 dokažite da je

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} \\ = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}.\end{aligned}$$

Slično kao što pomoću vektorskog produkta možemo računati površine poligonalnih likova (primjer 3.7), tako pomoću mješovitog produkta i teorema 3.4 možemo računati volumene svih tijela koja su omeđena samo s ravnim plohama.

Primjer 3.8 Izračunajmo volumen tetraedra $ABCD$ zadanog točkama

$$A = (0, -1, 0), \quad B = (3, 3, 0), \quad C = (-1, 3, 1), \quad D = (1, 1, 4).$$

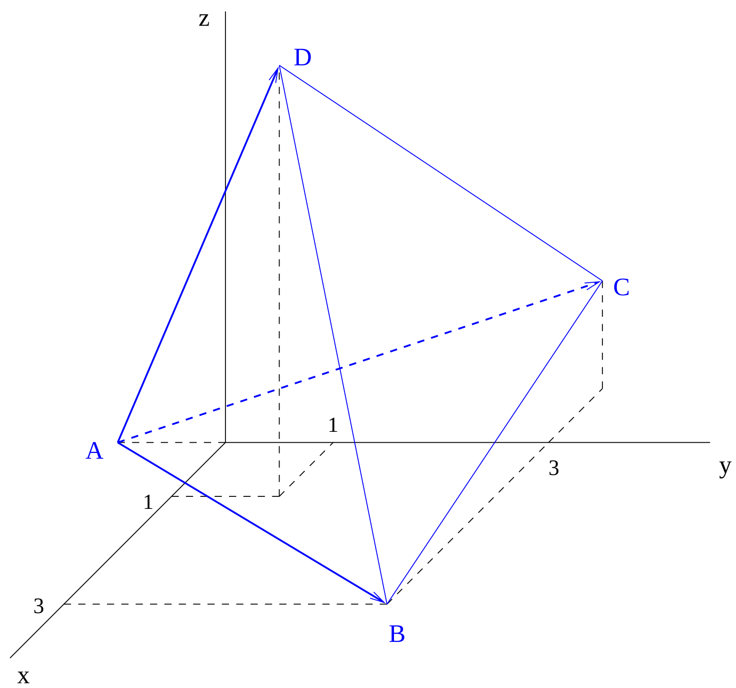
Volumen tetraedra jednak je šestini volumena paralelopipeda razapetog vektorima $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ (slika 3.14). Kako je

$$\overrightarrow{AB} = \{3,4,0\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{-1,4,1\}, \quad \overrightarrow{AD} = \{1,2,4\},$$

vrijedi

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \right| = \frac{62}{6}$$

Uočimo da smo na jednostavan način riješili naočigled složen problem, jer smo našli volumen tijela, a nismo ga morali niti skicirati. Na isti način možemo provjeriti leže li četiri točke u istoj ravnini, jer će u tom slučaju volumen tetraedra biti nula. Na sličan način možemo izračunati volumen bilo kojeg tijela koje je omeđeno samo s ravnim plohama, jer svako takvo tijelo možemo podijeliti na tetraedre.



Slika 3.14: Volumen tetraedra

Zadatak 3.4 Izračunajte volumen tetraedra iz prethodnog primjera pomoću paralelopipeda razapetog s vektorima $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BD}$. Moramo li uzeti vektore s hvatištem u istom vrhu?

3.12 Vektorsko-vektorski produkt

Vektorsko-vektorski produkt vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ je vektor

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}.$$

Može se pokazati da vrijedi

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \tag{3.3}$$

odnosno, rezultirajući vektor leži u ravnini razapetoj s vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Slično,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \tag{3.4}$$

pa rezultirajući vektor leži u ravnini razapetoj s vektorima $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

Zadatak 3.5 Dokažite formule (3.3) i (3.4) ako su vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ zadani kao u teoremu 3.4.

3.13 Pravac

Pravac p je u prostoru $\mathcal{E}$ zadan s dvije različite točke T_1 i T_2. Za svaku točku T koja leži na pravcu p vektori $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T}$ su kolinearni, odnosno postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je (slika 3.15)

$$\overrightarrow{T_1T} = t\,\overrightarrow{T_1T_2}.$$

Uz oznake

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{T_1T_2}, \qquad \mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OT_1}, \qquad \mathbf{r} = \overrightarrow{OT},$$

imamo *vektorsku jednadžbu pravca*

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = t\,\mathbf{s}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

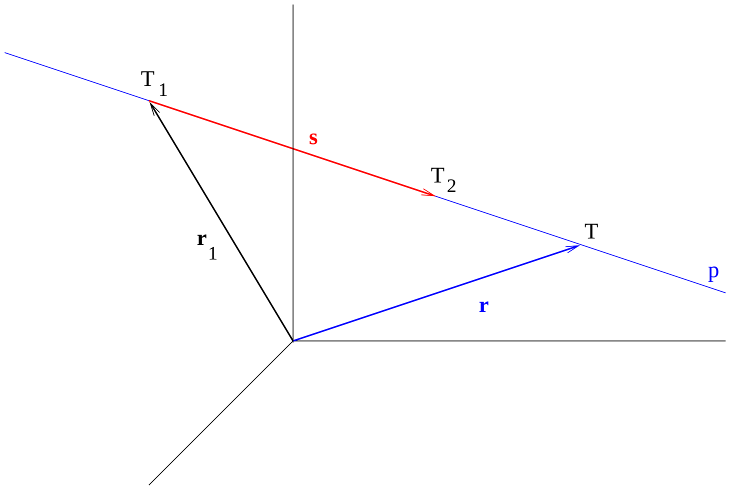
odnosno

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\,\mathbf{s}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Vektor $\mathbf{s}$ je *vektor smjera* pravca p. Za vektor smjera možemo uzeti i bilo koji drugi vektor koji je kolinearan s vektorom $\mathbf{s}$.

Neka je u koordinatnom sustavu $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$



Slika 3.15: Pravac u prostoru

Tada vektorska jednadžba pravca (3.5) prelazi u *parametarsku jednadžbu pravca*

$$\begin{cases} x = x_1 + a\,t \\ y = y_1 + b\,t \qquad\qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_1 + c\,t \end{cases} \tag{3.6}$$

Eliminacijom parametra t iz jednadžbe (3.6) dobivamo *kanonsku (simetričnu) jednadžbu pravca*

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}. \tag{3.7}$$

U gornjoj formuli nazivnici ne označavaju dijeljenje nego skalarne komponente vektora smjera pa ih pišemo i onda kada su jednaki nula.

Primjer 3.9 Jednadžba x-osi glasi

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \qquad\qquad t \in \mathbb{R}, \\ z = 0 \end{cases}$$

odnosno

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$

Naime, x-os prolazi ishodištem $O = (0, 0, 0)$, a vektor smjera joj je $\mathbf{i} = \{1, 0, 0\}$. No,

$$\frac{x + 5}{\sqrt{2}} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0},$$

je također jednadžba x-osi.

U formuli (3.7) je zapisan sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice,

$$\begin{aligned} b\,(x-x_1) &= a\,(y-y_1) \\ c\,(x-x_1) &= a\,(z-z_1) \\ c\,(y-y_1) &= b\,(z-z_1). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ove jednadžbe definiraju pravac pa sustav ima jednoparametarsko rješenje. Stoga su prema Kronecker-Capellijevom teoremu 2.5 jednadžbe linearno zavisne, a sustav je ekvivalentan sustavu od dvije linearno nezavisne jednadžbe koje odaberemo među njima.

Dakle, pravac možemo zadati s dvije linearno nezavisne jednadžbe s tri nepoznanice,

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

od kojih svaka predstavlja jednu ravninu u prostoru (poglavlje 3.14). Iz sustava (3.9) eliminacijom jedne od varijabli dobijemo kanonsku jednadžbu (3.7), iz koje onda lako dobijemo parametarsku jednadžbu pravca (3.6).

Primjer 3.10 Nađimo kanonsku i parametarsku jednadžbu pravca zadanog s (slika 3.16)

$$\begin{aligned} 2x+y+z+1&=0 \\ x-y+2z-1&=0. \end{aligned}$$

Kad od prve jednadžbe oduzmemo dvostruku drugu dobijemo $3y-3z+3=0$, odnosno

$$\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1} \qquad \text{ili} \qquad \frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

Kada zbrojimo prvu i drugu jednadžbu dobijemo $3x+3z=0$, odnosno

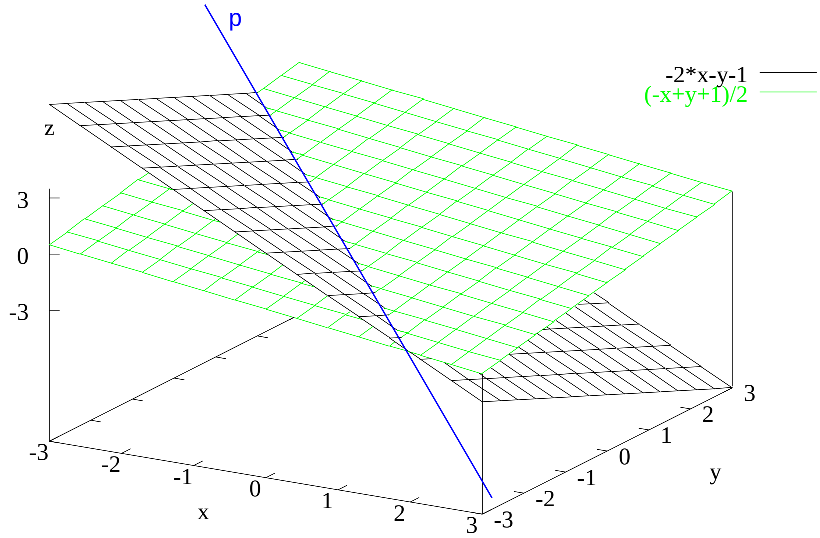
$$\frac{x}{1}=\frac{z}{-1} \qquad \text{ili} \qquad \frac{x}{-1}=\frac{z}{1}.$$

Stoga kanonska jednadžba pravca glasi

$$\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}.$$

Pravac prolazi točkom $T=(0,-1,0)$ i ima vektor smjera $\mathbf{s}=\{-1,1,1\}$. Parametarska jednadžba glasi

$$\begin{cases} x=-t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$



Slika 3.16: Pravac kao presjek ravnina

Primjer 3.11 Ako pravac p leži u x-y ravnini, tada svi izrazi koji sadrže varijablu z u (3.6), (3.7) i (3.8) nestaju. Posebno, (3.8) prelazi u

$$b\,(x-x_1)=a\,(y-y_1).$$

Ako je $a\neq 0$, imamo

$$y-y_1=\frac{b}{a}\,(x-x_1).$$

Označimo li koeficijent smjera s $k=\frac{b}{a}$, dobijemo jednadžbu pravaca kroz točku $T_1=(x_1,y_1)$ s koeficijentom smjera k,

$$y-y_1=k\,(x-x_1).$$

Ako odaberemo točku $T_1=(0,l)$, pri čemu je l odsječak na y-osi, dobijemo poznatu jednadžbu

$$y=k\,x+l.$$

3.14 Ravnina

Ravnina ρ je u prostoru $\mathcal{E}$ zadana s tri točke T_1, T_2 i T_3 koje ne leže na istom pravcu. Za svaku točku T koja leži u ravnini ρ vektori $\overrightarrow{T_1T}$, $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$ su komplanarni (slika 3.17). Stoga je volumen paralelopipeda što ga razapinju ti vektori jednak nula (primjer 3.8), odnosno

$$\overrightarrow{T_1T}\cdot(\overrightarrow{T_1T_2}\times\overrightarrow{T_1T_3})=0. \tag{3.10}$$

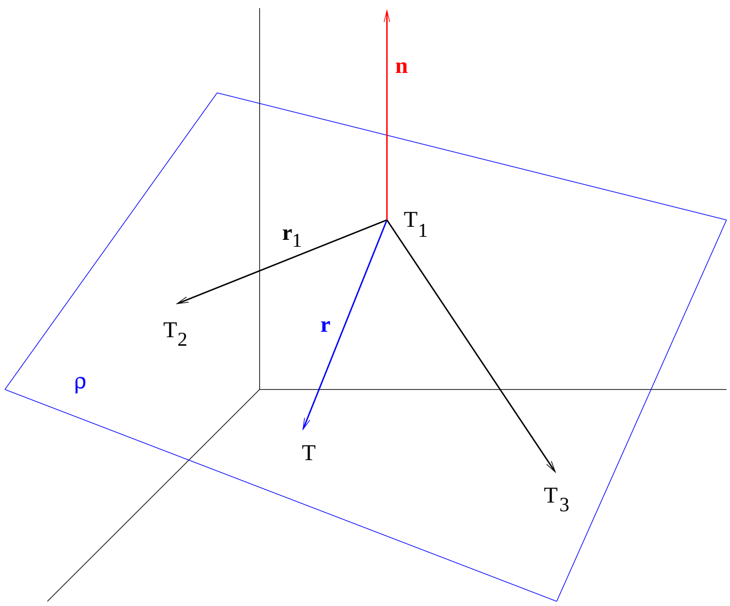
Uz oznake

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OT_1}, \qquad \mathbf{r} = \overrightarrow{OT}, \qquad \mathbf{n} = \overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_3},$$

jednadžba (3.10) prelazi u *vektorsku jednadžbu ravnine*

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{3.11}$$

Vektor $\mathbf{n}$ je *normalni vektor* ili *normala* ravnine ρ. Svaki vektor kolinearan s $\mathbf{n}$ je također normala ravnine ρ.



Slika 3.17: Ravnina u prostoru

Ako je u koordinatnom sustavu $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$

$$\mathbf{n} = \{A, B, C\}, \qquad \mathbf{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \qquad \mathbf{r} = \{x, y, z\},$$

tada vektorska jednadžba ravnine (3.11) prelazi u *jednadžbu ravnine kroz točku* $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{3.12}$$

Sređivanje gornje jednadžbe daje *opći oblik jednadžbe ravnine*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{3.13}$$

U obje jednadžbe (3.12) i (3.13) brojevi A, B i C su skalarne komponente vektora normale $\mathbf{n}$.

Ako je

$$T = (x, y, z), \qquad T_i = (x_i, y_i, z_i), \qquad i = 1, 2, 3,$$

tada jednadžbu (3.10) možemo zapisati pomoću determinante. To nam daje *jednadžbu ravnine kroz tri točke*,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.14}$$

Zadatak 3.6 Pokažite da je jednadžba (3.14) ekvivalentna s

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ako ravnina ρ ne prolazi ishodištem i ako za točke T_1, T_2 i T_3 odaberemo sjecišta ravnine s koordinatnim osima,

$$T_1 = (a, 0, 0), \qquad T_2 = (0, b, 0), \qquad T_3 = (0, 0, c), \qquad a, b, c \neq 0,$$

tada iz (3.14) rješavanjem determinante

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

dobijemo *segmentni oblik jednadžbe ravnine*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad a, b, c \neq 0.$$

3.15 Primjene

Pomoću vektora i operacija s njima te pomoću raznih oblika jednadžbi pravca i ravnine možemo ispitivati čitav niz međuodnosa i svojstava:

a) **Međusobni odnosi pravaca i ravnina.**

1. Pravci p_1 i p_2 su paralelni, $p_1 \parallel p_2$, ako za njihove vektore smjera vrijedi $\mathbf{s}_1 = t\,\mathbf{s}_2$, $t \in \mathbb{R}$. Paralelni pravci mogu, ali ne moraju ležati jedan na drugom.

2. Pravci p_1 i p_2 su okomiti, $p_1 \perp p_2$, ako za njihove vektore smjera vrijedi $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = 0$. Okomiti pravci se mogu sjeći, ali mogu biti i mimosmjerni.

3. Ravnine ρ_1 i ρ_2 su paralelne, $\rho_1 \parallel \rho_2$, ako za njihove normale vrijedi $\mathbf{n}_1 = t\,\mathbf{n}_2$, $t \in \mathbb{R}$. Paralelne ravnine mogu, ali ne moraju ležati jedna na drugoj.

4. Ravnine ρ_1 i ρ_2 su okomite, $\rho_1 \perp \rho_2$, ako za njihove normale vrijedi $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$. Okomite ravnine se sijeku u pravcu.

5. Kut između pravaca p_1 i p_2 nalazimo pomoću skalarnog produkta vektora smjera,
$$\cos\angle(p_1, p_2) = \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1|\,|\mathbf{s}_2|}.$$

6. Kut između ravnina ρ_1 i ρ_2 nalazimo pomoću skalranog produkta normala,
$$\cos\angle(\rho_1, \rho_2) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|}.$$

7. Kut između pravca p i ravnine ρ nalazimo pomoću skalranog produkta vektora smjera i normale
$$\sin\angle(p, \rho) = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{s}|\,|\mathbf{n}|}.$$

b) **Sjecišta.**

1. Točka T u kojoj se sijeku pravci p_1 i p_2, $T = p_1 \cap p_2$.
2. Pravac p koji je presjek ravnina ρ_1 i ρ_2, $p = \rho_1 \cap \rho_2$.
3. Točka T u kojoj pravac p siječe ravninu ρ, $T = p \cap \rho$: sjecište tražimo tako da parametarsku jednadžbu pravca uvrstimo u opći oblik jednadžbe ravnine i riješimo linearni sustav od jedne jednadžbe s jednom nepoznanicom (primjer 3.12).

c) **Projekcije.**

1. Projekcija točke T na pravac p (primjer 3.13).
2. Projekcija točke T na ravninu ρ (primjer 3.14).
3. Projekcija pravca p na ravninu ρ.

Najčešće tražimo ortogonalne projekcije, ali možemo tražiti i projekcije u bilo kojem smjeru.

d) **Udaljenosti.**

1. Udaljenost točaka $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $T_2 = (x_2, y_2, z_2)$: iz postupka nalaženja komponenata vektora u primjeru 3.2 i formule za duljinu vektora (3.1) slijedi

$$d(T_1, T_2) = |\overrightarrow{T_1T_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2. Udaljenost točke T od pravca p: prvo nađemo projekciju T' točke T na pravac p, a onda izračunamo $d(T, p) = |\overrightarrow{TT'}|$ (primjer 3.13).
3. Udaljenost točke T od ravnine ρ: prvo nađemo projekciju T' točke T na ravninu ρ, a onda izračunamo $d(T, \rho) = |\overrightarrow{TT'}|$ (primjer 3.14).
4. Udaljenost pravaca p_1 i p_2, $d(p_1, p_2)$.
5. Udaljenost ravnina ρ_1 i ρ_2, $d(\rho_1, \rho_2)$.
6. Udaljenost pravca p i ravnine ρ, $d(p, \rho)$.

e) **Analiza trokuta.**

1. Težište – sjecište težišnica, odnosno pravaca koji spajaju vrh trokuta sa sredinom nasuprotne stranice.
2. Upisana kružnica – središte je sjecište simetrala kutova, odnosno pravaca koji raspolovljuju unutarnje kutove trokuta, a radijus je udaljenost središta od bilo koje stranice.
3. Opisana kružnica – središte je sjecište simetrala stranica, odnosno okomica podignutih od sredine stranice trokuta, a radijus je udaljenost središta od bilo kojeg vrha.
4. Ortocentar – sjecište visina, odnosno okomica spuštenih iz vrha trokuta na nasuprotnu stranicu.

f) **Površine i volumeni.**

1. Površina poligonalnih likova u prostoru – lik rastavljamo na trokute, a površine trokuta računamo pomoću vektorskog produkta kao u primjeru 3.7.
2. Volumeni tijela omeđenih samo s ravnim plohama – tijelo rastavljamo na tetraedre, a površine tetraedara računamo pomoću mješovitog produkta kao u primjeru 3.8.

Postupci za ispitivanje ovih međuodnosa i svojstava detaljno su opisani u vježbama.

3.15.1 Primjeri

Sljedeći primjeri ilustriraju nalaženje sjecišta pravca i ravnine, projekcije točke na pravac i udaljenosti točke od pravca te projekcije točke na ravninu i udaljenosti točke od ravnine.

Primjer 3.12 Odredimo točku T u kojoj se sijeku pravac

$$p \quad \ldots \quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}$$

i ravnina ρ zadana s $x+2y+z-3=0$. Parametarska jednadžba pravca glasi

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=3+2t \qquad\qquad t\in\mathbb{R}. \\ z=2+3t \end{cases}$$

Uvrštavanje u jednadžbu ravnine daje

$$1-t+2(3+2t)+2+3t-3=0,$$

odnosno $t=-1$. Uvrštavanje ove vrijednosti t u parametarsku jednadžbu pravca daje $x=2$, $y=1$ i $z=-1$ pa je tražena točka T jednaka (slika 3.18)

$$p\cap\rho=T=(2,1,-1).$$

Primjer 3.13 Odredimo projekciju T' točke $T=(4,4,5)$ na pravac

$$p \quad \ldots \quad \frac{x-4}{1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+1}{-1}$$

i udaljenost točke T od pravca p.

Za određivanje projekcije odredit ćemo pomoćnu ravninu ρ koja prolazi točkom T, a okomita je na pravac p. Točka T' je sjecište pravca p i ravnine ρ (slika 3.19).

Normala ravnine ρ jednaka je vektoru smjera pravca p,

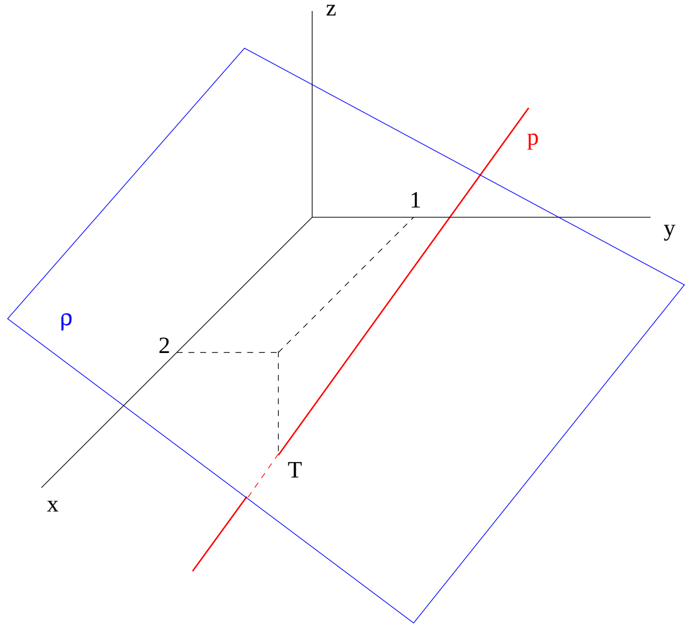
$$\mathbf{n}=\mathbf{s}=\{1,2,-1\}.$$

Ravnina prolazi točkom T pa formula (3.12) daje

$$x-4+2(y-4)-(z-5)=0.$$

Nađimo sjecište pravca i ravnine kao u primjeru 3.12: parametarska jednadžba pravca p glasi

$$\begin{cases} x=4+t \\ y=6+2t \qquad\qquad t\in\mathbb{R} \\ z=-1-t \end{cases}$$



Slika 3.18: Sjecište pravca i ravnine

pa uvrštavanje u jednadžbu ravnine daje $t = -\frac{5}{3}$. Uvrštavanje t u parametarsku jednadžbu pravca daje

$$T' = \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Konačno,

$$d(T,p) = |\overrightarrow{TT'}| = \sqrt{\left(\frac{7}{3}-4\right)^2 + \left(\frac{8}{3}-4\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-5\right)^2} = \frac{\sqrt{210}}{3} \approx 4.83.$$

Primjer 3.14 Odredimo projekciju T' točke $T = (4,4,5)$ na ravninu

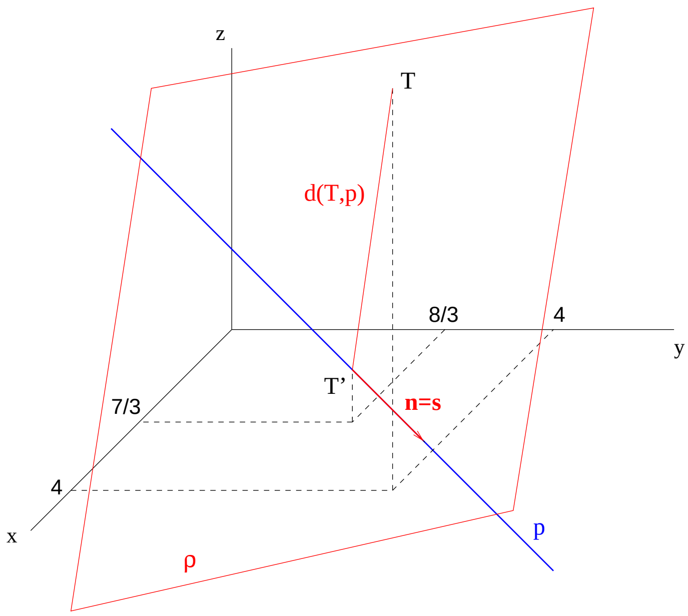
$$\rho \quad \ldots \quad 3x + 6y + 2z - 6 = 0$$

i udaljenost točke T od ravnine ρ.

Prvo ćemo naći pomoćni pravac p koji prolazi točkom T, a okomit je na ravninu ρ. Točka T' je tada sjecište pravca i ravnine (slika 3.20).

Vektor smjera pravca p jednak je normali ravnine ρ,

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} = \{3, 6, 2\}.$$



Slika 3.19: Projekcija točke na pravac

Pravac prolazi točkom T pa njegova parametarska jednadžba glasi

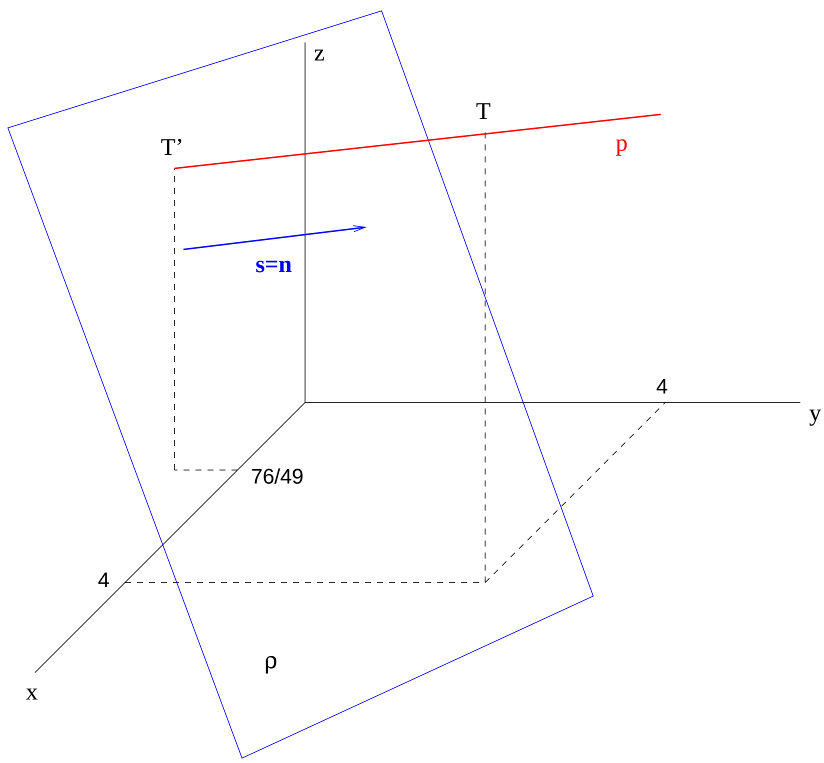
$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 4 + 6t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Slično kao u prethodnom primjeru, uvrštavanje u jednadžbu ravnine daje $t = -\frac{40}{49}$, odnosno

$$T' = \left(\frac{76}{49}, \frac{-44}{49}, \frac{165}{49}\right) \approx (1.55, -0.9, 3.37).$$

Konačno

$$d(T,\rho) = |\overrightarrow{TT'}| = \frac{280}{49} \approx 5.71.$$



Slika 3.20: Projekcija točke na ravninu

4.

FUNKCIJE REALNE VARIJABLE

Ova glava kao i sljedeća o derivacijama, posvećene su ispitivanju realnih funkcija realne varijable, dakle funkcije kod kojih su domena, i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva. Posebno ćemo promatrati tipove funkcija koje se javljaju u tehničkim primjenama, a to su funkcije oblika

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}, \qquad \mathcal{D}, \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R},$$

pri čemu $\mathcal{D}$ označava domenu, a $\mathcal{K}$ kodomenu funkcije (vidi definiciju 1.7). Za ispitivanje funkcije potrebno je znati:

– područje definicije ili domenu,

– područje vrijednosti ili kodomenu,

– područje neprekidnosti,

– ponašanje funkcije u rubovima područja definicije, uključujući ∞ i $-\infty$ kad god to ima smisla te u točkama prekida (limesi i asimptote),

– simetriju (parnost ili neparnost),

– periodičnost,

– područja monotonosti (rastuća ili padajuća funkcija),

– zakrivljenost (konveksnost ili konkavnost) i točke infleksije, odnosno točke u kojima dolazi do promjene zakrivljenosti,

– ekstreme, odnosno lokalne i globalne minimume i maksimume,

– skicirati funkciju,

– odrediti inverznu funkciju ukoliko je zadana funkcija bijekcija.

Derivacije, koje su tema sljedeće glave, koriste se kod nalaženja limesa te kod ispitivanja monotonosti, zakrivljenosti i ekstrema.

Graf funkcije općenito možemo definirati kao prikaz ovisnosti varijabli x i y pomoću krivulje u ravnini. Kako je svakoj funkciji jednoznačno pridružen njen graf, to u daljnjem izlaganju često nećemo praviti razliku između funkcije i njenog grafa, ukoliko je iz konteksta jasno na što se misli. Precizne definicije grafa funkcije ovise o načinu zadavanja funkcije pa ćemo ih navesti kasnije u odgovarajućim poglavljima.

U sljedećim poglavljima opisat ćemo načine zadavanja funkcija, te dati klasifikaciju funkcija, odnosno definirati neke važne klase funkcija. Zatim ćemo opisati pojam limesa te pomoću njega uvesti pojam neprekidnosti i opisati vrste prekida. Također ćemo navesti i svojstva limesa i neprekidnih funkcija. Potom ćemo definirati pojam asimptote i opisati kako ih nalazimo, a na kraju ćemo dati pregled elementarnih funkcija i njihovih svojstava.

4.1 Načini zadavanja funkcija

Funkciju možemo zadati tablično, eksplicitno, implicitno i parametarski.

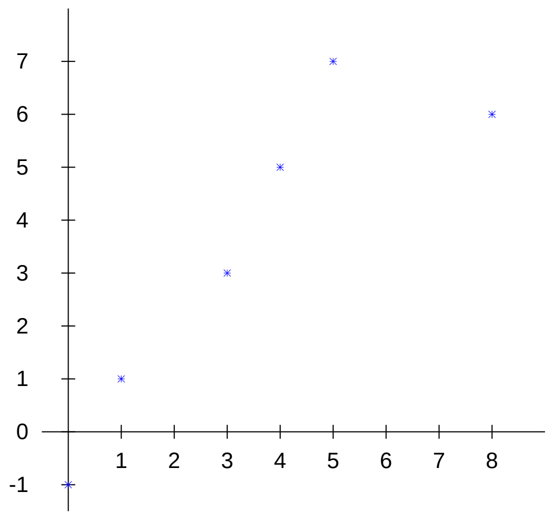
4.1.1 Tablično zadavanje

Tablično zadavanje funkcija je često u primjenama, jer se vrijednost zavisne varijable može izmjeriti samo u nekim točkama. Tako se na primjer temperatura ili tlak zraka mjeri su meteorološkim stanicama, a kod prikaza se u meteorološkim kartama te vrijednosti interpoliraju glatkim krivuljama.

Funkcija zadana s

x	0	1	3	4	5	8
$y = f(x)$	-1	1	3	5	7	6

prikazana je na slici 4.1.



Slika 4.1: Tablično zadana funkcija

Graf tablično zadane funkcije je skup točaka u ravini, $S \subset \mathbb{R}^2$, definiran s

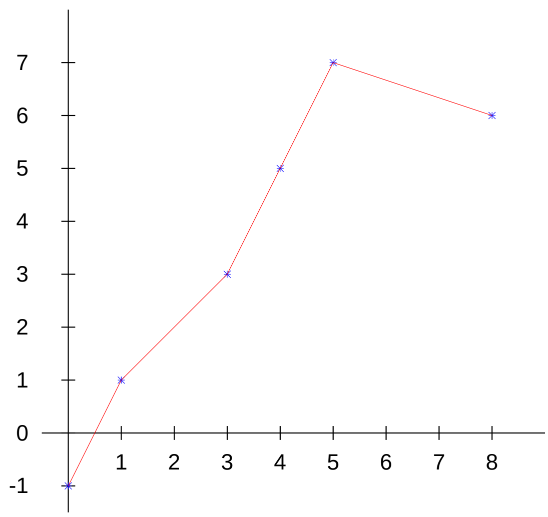
$$S = \{(x, y) : \ y = f(x)\}.$$

Za određivanje vrijednosti funkcije u ostalim točkama koristimo postupak *interpolacije*. Najjednostavnija je *linearna interpolacija* kod koje se vrijednosti funkcije između dvije susjedne točke grafa prikazuju kao da leže na pravcu između te dvije točke. Dakle, za $x \in (x_i, x_{i+1})$ se uzima (vidi primjer 3.11)

$$f(x) = y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i).$$

Tako je, na primjer (slika 4.2),

$$f(2.6) = y(1) + \frac{y(3) - y(1)}{3 - 1}(2.6 - 1) = 2.6$$



Slika 4.2: Linearna interpolacija

Važan primjer tablično zadanih funkcija su i logaritamske tablice. U tablicama su zadane vrijednosti elementarnih funkcija kao $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, $\ln x$ i e^x u određenim točkama, dok se vrijednosti funkcija u ostalim točkama nalaze odgovarajućom interpolacijom.

4.1.2 Eksplicitno zadavanje

Eksplicitno se funkcija zadaje pomoću pravila

$$y = f(x),$$

gdje je $f(x)$ izraz koji sadrži samo nezavisnu varijablu x. Dakle, eksplicitno zadana funkcija je preslikavanje $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ pri čemu su domena $\mathcal{D}$ i kodomena

$\mathcal{K}$ podskupovi skupa $\mathbb{R}$. Domena je skup svih vrijednosti nezavisne varijable x za koje izraz $f(x)$ ima smisla (definicija 1.7). Pri tome jednoj vrijednosti nezavisne varijable $x \in \mathcal{D}$ odgovara *samo jedna* vrijednost zavisne varijable y.

Graf eksplicitno zadane funkcije je krivulja u ravini, $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, definirana s

$$\Gamma = \{(x, y) : \ y = f(x), \ x \in \mathcal{D}\}.$$

Primjer eksplicitno zadane funkcije je

$$y = \frac{x^3 - 2}{2 \cos x}.$$

Domenu funkcije određujemo iz definicija elementarnih funkcija. Znamo da se ne smije dijeliti s nulom, a kako je kosinus jednak nula u svim točkama $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, zaključujemo da je $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Zadatak 4.1 Nacrtajte funkciju u raznim područjima pomoću programa NetPlot i uvjerite se da je $\mathcal{K} = \mathbb{R}$. Opišite riječima izgled funkcije.

4.1.3 Implicitno zadavanje

Implicitno se funkcija zadaje pomoću pravila

$$F(x, y) = 0,$$

gdje je $F(x, y)$ izraz koji sadrži nezavisnu varijablu x i zavisnu varijablu y. *Graf* implicitno zadane funkcije je krivulja u ravini, $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, definirana s

$$\Gamma = \{(x, y) : \ F(x, y) = 0\}.$$

Primjer implicitno zadane funkcije je

$$x + \arccos(xy) = 0.$$

Domenu funkcije ponovo određujemo iz definicija elementarnih funkcija, ali u ovom slučaj potrebne su dodatne transformacije. Funkcija $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ je inverzna funkcija kosinusa (vidi poglavlje 4.6.6). Slijedi $xy \in [-1, 1]$. Funkciju možemo zapisati i kao

$$\arccos(xy) = -x. \tag{4.1}$$

Slijedi $-x \in [0, \pi]$, odnosno $x \in [-\pi, 0]$. Za x i xy koji zadovoljavaju prethodna ograničenja možemo uzeti kosinus lijeve i desne strane jednakosti (4.1), što daje $xy = \cos(-x) = \cos(x)$ (u zadnjoj jednakosti koristili smo činjenicu da je kosinus parna funkcija, vidi poglavlje 4.6.5). Za $x \neq 0$ slijedi

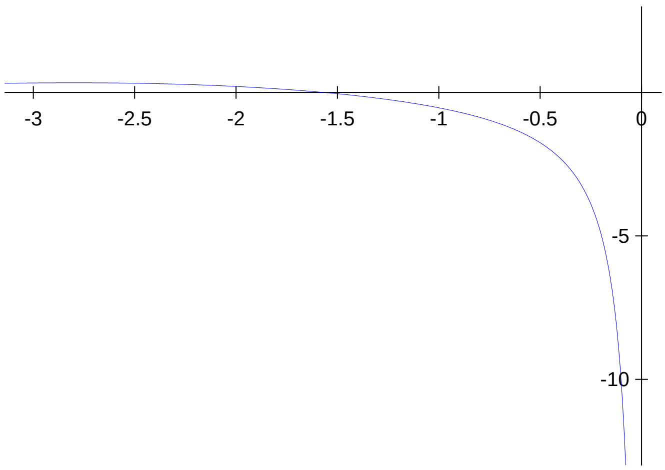
$$y = \frac{\cos(x)}{x}.$$

Da x mora biti različit od nule slijedi i iz formule (4.1) jer uvrštavanje nule daje

$$\frac{\pi}{2} = \arccos 0 = -0,$$

što je nemoguće.

Zaključimo: funkcija $x + \arccos(xy) = 0$ definirana je za $x \in [-\pi, 0)$ i na tom intervalu poprima iste vrijednosti kao eksplicitno zadana funkcija $y = \cos(x)/x$ (vidi sliku 4.3). Sama funkcija $y = \cos(x)/x$ definirana je na većem području, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (slika 4.4).



Slika 4.3: Implicitno zadana funkcija $x + \arccos(xy) = 0$

Za razliku od prethodnog primjera, izrazom $F(x, y) = 0$ može biti zadano više eksplicitno zadanih funkcija. U tom slučaju jednoj vrijednosti varijable x može odgovarati više vrijednosti varijable y.

Primjer 4.1 [Kružnica] Izrazom

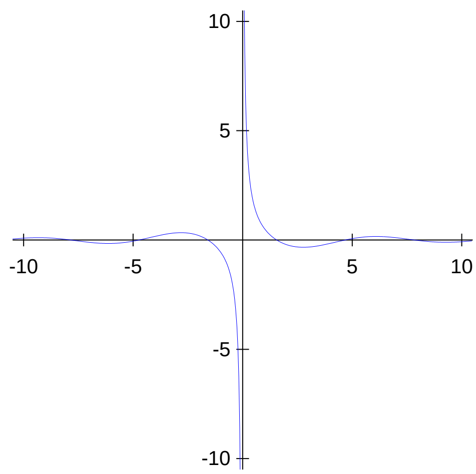
$$x^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$$

implicitno je zadana kružnica sa središtem u točki $(0, 1)$ radijusa 2. Na primjer, ovim izrazom eksplicitno su zadane dvije osnovne funkcije, $y_1(x)$ i $y_2(x)$, od kojih svaka predstavlja jednu polukružnicu. Zaista, jednadžba

$$(y-1)^2 = 4 - x^2$$

povlači

$$y - 1 = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{ili} \quad y - 1 = -\sqrt{4 - x^2},$$



Slika 4.4: Funkcija $y = \cos(x)/x$

odnosno

$$y_1 = 1 + \sqrt{4 - x^2} \quad \text{i} \quad y_2 = 1 - \sqrt{4 - x^2}.$$

Kako izraz pod korijenom mora bit veći ili jednak nuli, domene su $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = [-2, 2]$ (slika 4.5).

Napomena 4.1 Općenito, izraz

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

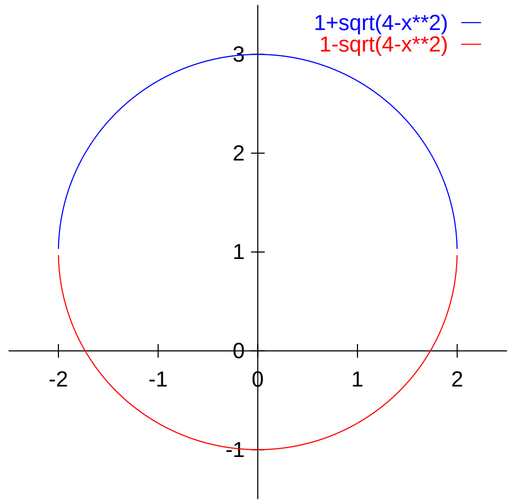
je implicitna jednadžba kružnice radijusa r sa središtem u točki (x_0, y_0).

Implicitno zadane funkcije često nije moguće svesti na eksplicitni oblik.

Primjer 4.2 Descartesov list je krivulja zadana s izrazom

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Premda funkciju (slika 4.6) nije moguće jednostavno rastaviti na eksplicitno zadane funkcije kao u primjeru 4.1, možemo je analizirati u parametarskom obliku (primjeri 4.4 i 4.12).



Slika 4.5: Implicitno zadana kružnica

4.1.4 Parametarsko zadavanje

Funkcija se zadaje parametarski tako da se x i y zadaju kao funkcije parametra t,

$$
\begin{aligned}
x &= \varphi(t) \\
y &= \psi(t), \qquad t \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Graf parametarski zadane funkcije je krivulja u ravini, $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, definirana s

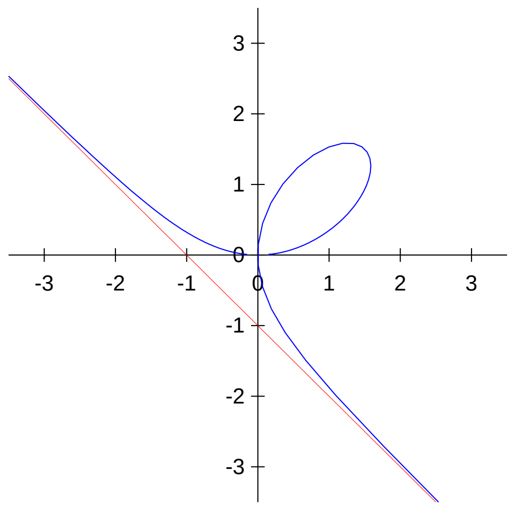
$$
\Gamma = \{(x, y) : x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in \mathcal{T}\}. \tag{4.2}
$$

Kao i kod implicitno zadanih funkcije, kod parametarski zadane funkcije jednoj vrijednosti varijable x može odgovarati više vrijednosti varijable y.

Na primjer, parametarska jednadžba kružnice iz primjera 4.1 glase

$$
\begin{aligned}
x &= 2 \sin t \\
y &= 1 + 2 \cos t, \qquad t \in [0, 2\pi].
\end{aligned}
$$

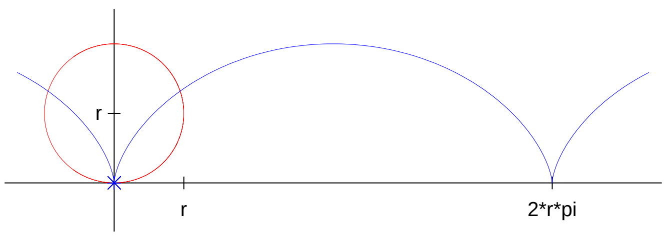
Lako se provjeri da x i y zadovoljavaju jednadžbu kružnice iz primjera 4.1. Uočljivo je da je ovo samo jedna od beskonačno mogućih parametarskih jednadžbi ove kružnice (navedite još barem jednu).



Slika 4.6: Descartesov list

Primjer 4.3 *Cikloida* je krivulja koju opisuje fiksna točka kružnice kada se ta kružnica kotrlja bez klizanja po pravcu. Parametarska jednadžba cikloide glasi (slika 4.7)

$$\begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t), \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Slika 4.7: Cikloida

Zadatak 4.2 (a) *Epicikloida* je krivulja koju opisuje točka na kružnici kada se ta kružnica bez klizanja kotrlja po vanjskom rubu druge kružnice. *Hipocikloida* je krivulja koju opisuje točka na kružnici kada se ta kružnica bez klizanja kotrlja po unutrašnjem rubu druge kružnice. Nađite jednadžbe epicikloide i hipocikloide u matematičkom priručniku i nacrtajte te krivulje pomoću programa NetPlot.

(b) Izvedite implicitnu jednadžbu cikloide:

$$x + \sqrt{2ry - y^2} - r \arccos\left(\frac{r-y}{r}\right) = 0.$$

(c) Kako glasi jednadžba cikloide koja polazi iz točke $(1, 0)$? Provjerite rješenje pomoću programa NetPlot.

Primjer 4.4 Izvedimo parametarsku jednadžbu Descartesovog lista iz primjera 4.2. Iz jednadžbe

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

vidimo da krivulja prolazi kroz točku $(0, 0)$. Ako je $x, y \neq 0$, tada jednadžbu možemo podijeliti s y^3 što daje

$$\frac{x^3}{y^3} + 1 - 3\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = 0.$$

Uvedimo novu varijablu

$$t = \frac{x}{y}$$

što daje

$$t^3 + 1 - 3t\frac{1}{y} = 0.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} y &= \frac{3\,t}{t^3+1}, \\ x &= ty = \frac{3\,t^2}{t^3+1}, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \end{aligned}$$

Zadatak 4.3 Koje dijelove Descartesovog lista na slici 4.6 dobijemo kada parametar t poprima vrijednosti u intervalima $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $[0, 1)$ i $[1, \infty)$? Kod rješavanja zadatka možete koristiti program NetPlot.

U ovoj i sljedećoj glavi vidjet ćemo da su najbolje razvijeni teoretski rezultati za analiziranje eksplicitno zadanih funkcija, dok se implicitno i parametarski zadane funkcije analiziraju pomoću odgovarajućih prilagodbi tih rezultata. Stoga je kod ispitivanja parametarski zadanih funkcija važno znati kada je i na kojem području s x i y eksplicitno zadana funkcija $y = f(x)$ ili $x = g(y)$. Pri tome je važno uočiti da su kod parametarski zadanih funkcija varijable x i y ravnopravne. Sljedeći teorem nam daje uvjete za postojanje funkcije $y = f(x)$, dok se analogni teorem za slučaj funkcije $x = g(y)$ dobije zamjenom varijabli.

Teorem 4.1 *Neka je skup* Γ *definiran relacijom (4.2) graf neke parametarski zadane funkcije. Ako je funkcija* φ *injekcija, tada je* Γ *ujedno i graf eksplicitno zadane funkcije* $y = f(x)$ *pri čemu je* $f = \psi \circ \varphi^{-1}$.

Dokaz. Neka je skup $\mathcal{D} = \varphi(\mathcal{T})$ slika funkcije φ. Kako je φ injekcija, a ujedno i surjekcija sa skupa $\mathcal{T}$ na skup $\mathcal{D}$, zaključujemo da je φ bijekcija između skupova $\mathcal{T}$ i $\mathcal{D}$. Po Teoremu o inverznoj funkciji 1.1 postoji inverzna funkcija $\varphi^{-1} : \mathcal{D} \to \mathcal{T}$. Definirajmo kompoziciju $f = \psi \circ \varphi^{-1}$. Očito vrijedi $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Nadalje,

$$y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(\varphi(t))) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x),$$

i teorem je dokazan. ■

4.2 Klasifikacija funkcija

U ovom poglavlju definirat ćemo što su

- omeđene i neomeđene funkcije,
- parne i neparne funkcije,
- rastuće i padajuće (monotone) funkcije i
- periodične funkcije.

Neka je

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}, \qquad \mathcal{D}, \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}.$$

Definicija 4.1 Funkcija f je *omeđena* ako postoji broj m takav da je $|f(x)| \leq m$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Funkcija f je *neomeđena* ako nije omeđena.

Na primjer, funkcija $|x|$ iz poglavlja 1.7.2 je neomeđena jer za svaki $m > 0$ postoji $x \in \mathcal{D}$ takav da je $|x| > m$.

Definicija 4.2 Funkcija f je *parna* ako je $f(-x) = f(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$, a *neparna* ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.

Očito i kod parne i neparne funkcije područje definicije mora biti simetrično s obzirom na ishodište. Na primjer, funkcija

$$x^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

je parna za n paran, a neparna za n neparan pa odatle i nazivi:

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = (-1)^n f(x).$$

Funkcija $|x|$ je parna: ako je $x > 0$, tada je $-x < 0$ pa vrijedi

$$|-x| = -(-x) = x = |x|,$$

a ako je $x < 0$ tada je $-x > 0$ pa vrijedi

$$|-x| = -x = |x|.$$

Definicija 4.3 Funkcija f je *rastuća* ili *uzlazna* na intervalu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ ako

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}) \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Funkcija f je *strogo rastuća* na intervalu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ ako

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}) \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Slično, funkcija f je *padajuća* ili *silazna* na intervalu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ ako

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}) \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2),$$

a *strogo padajuća* na intervalu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ ako

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}) \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Ako je $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ tada kažemo da je funkcija f (strogo) rastuća ili padajuća bez navođenja skupa.
Ako je funkcija (strogo) rastuća ili padajuća, još kažemo i da je (strogo) *monotona.*
Funkcija je *po dijelovima monotona* ako se područje definicije $\mathcal{D}$ može rastaviti na konačno mnogo podintervala takvih da je na svakom od njih funkcija monotona.

Na primjer, funkcija $|x|$ je strogo padajuća na intervalu $(-\infty, 0]$ i strogo rastuća na intervalu $[0, \infty)$, dakle po dijelovima strogo monotona. Konstantna funkcija $f(x) = 2$ (slika 4.17) je monotona i to istovremeno i rastuća i padajuća na čitavoj domeni (ali ne strogo).

Definicija 4.4 Funkcija f je *periodična* ako postoji broj $P \neq 0$ takav da za svaki $x \in \mathcal{D}$ vrijedi

$$f(x + P) = f(x).$$

Tada očito mora vrijediti $x + P \in \mathcal{D}$. Najmanji pozitivni P s ovim svojstvom zove se *osnovni period* ili *period* funkcije f.

Primjeri periodičnih funkcija su trigonometrijske funkcije.

Primjer 4.5 Funkcija *najveće cijelo*, $[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ je definirana s

$$[x] = k, \qquad k \leq x < k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s

$$f(x) = x - [x].$$

Kako je $0 \leq f(x) < 1$, to je $R_f = [0, 1)$. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x+n) = x+n-[x+n] = x+n-([x]+n) = x+n-[x]-n = x-[x] = f(x)$$

pa je f periodična funkcija s osnovnim periodom $P = 1$.

Zadatak 4.4 Nacrtajte funkcije $[x]$ i f iz primjera 4.5.

4.3 Limes

Pojam limesa je jedan od najvažnijih pojmova za razumijevanje analize funkcija. U ovom poglavlju definirat ćemo limes funkcije i dati njegova svojstva. Također ćemo definirati limes slijeva i zdesna, limes u beskonačnosti i beskonačan limes.

Definicija 4.5 Ako se vrijednost funkcije $f(x)$ približava vrijednosti a kada se nezavisna varijabla x približava točki x_0, tada kažemo da $f(x)$ teži prema a kada x teži prema x_0, odnosno

$$f(x) \to a \quad \text{kada} \quad x \to x_0.$$

Broj a je *limes* ili *granična vrijednost* funkcije f kada x teži prema x_0, odnosno

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Pored ove, više intuitivne definicije limesa, imamo i matematičku definiciju:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

ako (slika 4.8)

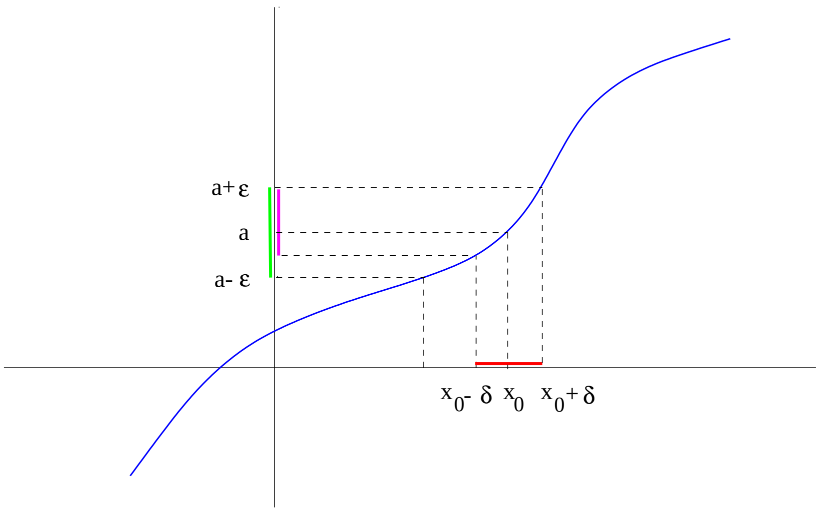
$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0) \quad x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \ \wedge \ |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Ako $\lim_{x \to x_0} f(x)$ postoji, tada kažemo da funkcija f *konvergira* u točki x_0. Ako $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ne postoji, tada kažemo da funkcija f *divergira* u točki x_0.

Iako izgleda složeno, precizna definicija limesa (4.3) nužna je za dokazivanje raznih svojstava limesa kao u teoremima 4.2 i 4.3.

Napomena 4.2 (1) Veličine ε i δ u definiciji (4.3) su općenito mali brojevi (vidi sliku 4.8).

(2) Iz definicije 4.5 vidimo da funkcija f može imati limes u nekoj točki, a da nije definirana u toj točki, ali mora biti definirana u nekoj okolini te točke.



Slika 4.8: Limes funkcije

Slika 4.8 prikazuje situaciju iz relacije (4.3). Drugim riječima, za svaki interval oko točke a postoji interval oko točke x_0, takav da se vrijednost funkcije nalazi u prvom intervalu, čim se x nalazi u drugom intervalu. U ovom slučaju se za x iz drugog intervala vrijednosti funkcije nalaze u užem intervalu, no taj interval je sadržan u polaznom intervalu oko a pa je relacija (4.3) zadovoljena.

Dokažimo prvi teorem o limesu.

Teorem 4.2 *Limes je jedinstven.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti pomoću kontradikcije. Pretpostavimo suprotno od tvrdnje teorema, odnosno da postoje dva različita limesa u točki x_0,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = b.$$

Odaberimo $\varepsilon = (b-a)/3$. Prema relaciji (4.3) postoje δ_a i δ_b takvi da

$$|x-x_0| < \delta_a \Rightarrow f(x) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \wedge \quad |x-x_0| < \delta_b \Rightarrow f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

Tada bi za $\delta = \min\{\delta_a, \delta_b\}$ moralo vrijediti

$$|x-x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \ \wedge \ f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

No, kako su intervali na desnoj strani disjunktni zbog našeg izbora ε, to je nemoguće. Dobili smo kontradikciju pa je teorem dokazan. ■

4.3.1 Svojstva limesa

Za praktično računanje limesa ne koristimo relaciju (4.3), nego svojstva limesa i osnovne limese koje ćemo upoznati tijekom predavanja.

Teorem 4.3 (Osnovna svojstva limesa) *Neka funkcije f i g imaju limese kada $x \to x_0$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x), \\
\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x), \\
\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x), \\
\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}, \qquad \textit{uz} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Dokaz. Dokažimo prvo svojstvo. Odaberimo $\varepsilon > 0$. Prema relaciji (4.3) postoje δ_f i δ_g takvi da

$$|x-x_0| < \delta_f \Rightarrow |f(x)-a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad |x-x_0| < \delta_g \Rightarrow |g(x)-b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pri čemu su a i b odgovarajući limesi. Neka je $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Tada $|x-x_0| < \delta$ povlači

$$|(f+g)(x)-(a+b)| = |f(x)-a+g(x)-b| \leq |f(x)-a|+|g(x)-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

i tvrdnja je dokazana. U gornjoj nejednakosti koristili smo nejednakost trokuta za apsolutnu vrijednost iz teorema 1.10 (ii).

Ostale tvrdnje dokazuju se na sličan način pomoću relacije (4.3). ■

Posebno, za konstantu c vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(c+f(x)) &= c+\lim_{x\to x_0}f(x),\\
\lim_{x\to x_0}(cf(x)) &= c\lim_{x\to x_0}f(x),\\
\lim_{x\to x_0}\frac{c}{f(x)} &= \frac{c}{\lim_{x\to x_0}f(x)}, \qquad \lim_{x\to x_0}f(x)\neq 0.
\end{aligned}$$

Sljedeća dva teorema navodimo bez dokaza.

Teorem 4.4 (Pravilo ukliǰeštene funkcije) *Neka je*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=a.$$

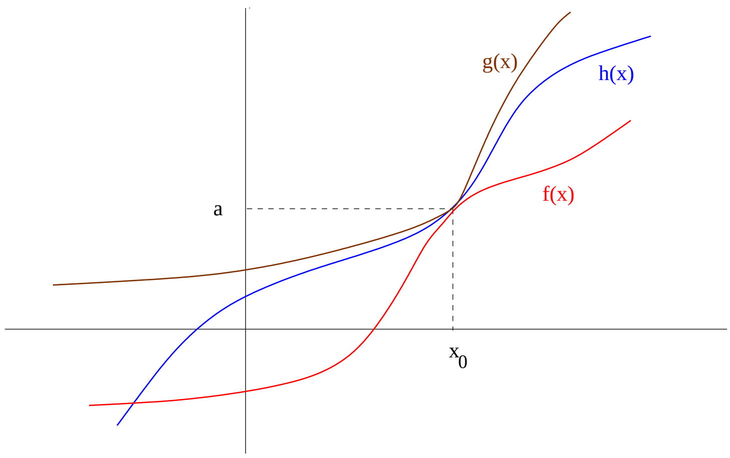
Ako postoji $\delta>0$ takav da za funkciju h vrijedi

$$x\in(x_0-\delta)\cup(x_0+\delta) \quad\Rightarrow\quad f(x)\leq h(x)\leq g(x),$$

tada je također

$$\lim_{x\to x_0}h(x)=a.$$

Situacija opisana u teoremu prikazana je na slici 4.9



Slika 4.9: Pravilo ukliǰeštene funkcije

Primjer 4.6 Dokažimo da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{4.4}$$

Neka je x blizu nule. Iz slike 4.27 zaključujemo da za $x > 0$ vrijedi

$$\operatorname{tg} x > x > \sin x,$$

pa dijeleći nejednakost sa $\sin x > 0$ imamo

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > 1.$$

Slično, za $x < 0$ vrijedi (negativni brojevi)

$$\operatorname{tg} x < x < \sin x,$$

dijeleći nejednakost sa $\sin x < 0$ ponovo imamo

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > 1.$$

Dakle, za $x \neq 0$ vrijedi i recipročna nejednakost

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Kako je

$$\lim_{x \to 0} 1 = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \cos x = 1,$$

jednakost (4.4) vrijedi po teoremu 4.6. Jednakost (4.4) se lijepo vidi i na slici 4.11.

Zadatak 4.5 Koristeći formulu $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, treću tvrdnju teorema 4.3 i jednakost (4.4) izračunajte

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}.$$

Čemu je jednak limes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \text{ ?}$$

Teorem 4.5 (Pravilo zamjene) *Neka funkcije f i g imaju iste vrijednosti u nekoj okolini točke x_0, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, osim možda u samoj točki x_0. Tada je*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

4.3.2 Limes slijeva i zdesna

Kada nezavisna varijabla x teži k x_0 slijeva ili zdesna, limesi ne moraju biti jednaki.

Vrijednost a je *limes slijeva* funkcije f u točki x_0, odnosno

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a,$$

ako

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0) \quad x \in \mathcal{D} \cap (x_0 - \delta, x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Slično, vrijednost a je *limes zdesna* funkcije f u točki x_0, odnosno

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a,$$

ako

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0) \quad x \in \mathcal{D} \cap (x_0, x_0 + \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Napomena 4.3 Svojstva limesa iz poglavlja 4.3.1 vrijede i za limese s lijeva i zdesna.

Primjer 4.7 Funkcija *predznak* ili *signum* definirana je na sljedeći način:

$$\text{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \text{sign}(x) = \frac{x}{|x|}.$$

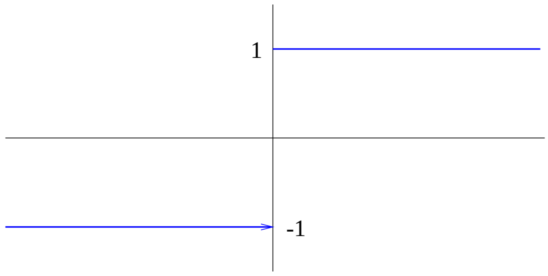
Često se po dogovoru uzima sign(0) = 1 (vidi sliku 4.10). Odredimo limese slijeva i zdesna u točki $x_0 = 0$: za $x > 0$ vrijedi $\text{sign}(x) = x/x = 1$ pa je

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{x}{|x|} = 1.$$

Za $x < 0$ vrijedi $\text{sign}(x) = x/(-x) = -1$ pa je

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{x}{|x|} = -1.$$

Iz slike 4.10 vidimo da za svaki $\varepsilon > 0$ možemo uzeti bilo koji $\delta > 0$.



Slika 4.10: Funkcija sign(x)

4.3.3 Limes u beskonačnosti

Ako je područje definicije $\mathcal{D}$ neograničene s jedne ili s obje strane, zanima nas postoji li limes funkcije kada nezavisna varijabla x teži k $-\infty$ ili $+\infty$.

Vrijednost a je limes funkcije f kada $x \to +\infty$ (*limes u desnom kraju*), odnosno

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a,$$

ako

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists M > 0) \quad x \in \mathcal{D}\ \wedge\ x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Slično, vrijednost a je limes funkcije f kada $x \to -\infty$ (*limes u lijevom kraju*), odnosno

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a,$$

ako

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists M < 0) \quad x \in \mathcal{D}\ \wedge\ x < M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

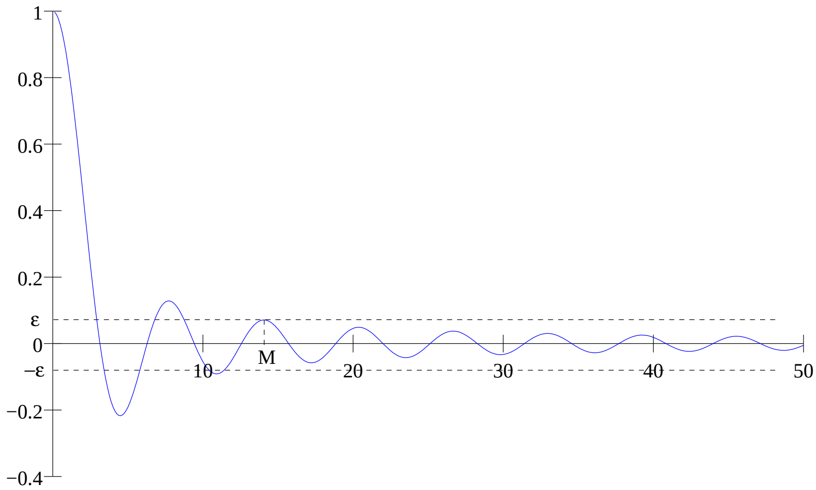
Napomena 4.4 Svojstva limesa iz poglavlja 4.3.1 vrijede i za limese u beskonačnosti.

Primjer 4.8 a) Kako je funkcija sinus omeđena, $|\sin x| \leq 1$, vrijedi (vidi sliku 4.11)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

b) Funkcija $f(x) = 1/x$ očito teži k nuli kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$. Za razliku od prvog primjera, ovdje možemo čak odrediti da li $f(x) \to 0$ s gornje ili donje strane (vidi sliku 4.12):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0_+, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0_-.$$



Slika 4.11: Funkcija $\sin x/x$

4.3.4 Beskonačan limes

Kada $x \to x_0$ također je moguće da vrijednosti funkcije f teže u beskonačnost.

Funkcija f teži u $+\infty$ kada $x \to x_0$, odnosno

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty,$$

ako

$$(\forall M > 0)\ (\exists \delta > 0) \quad x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}\ \wedge\ |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

Slično, funkcija f teži u $-\infty$ kada $x \to x_0$, odnosno

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty,$$

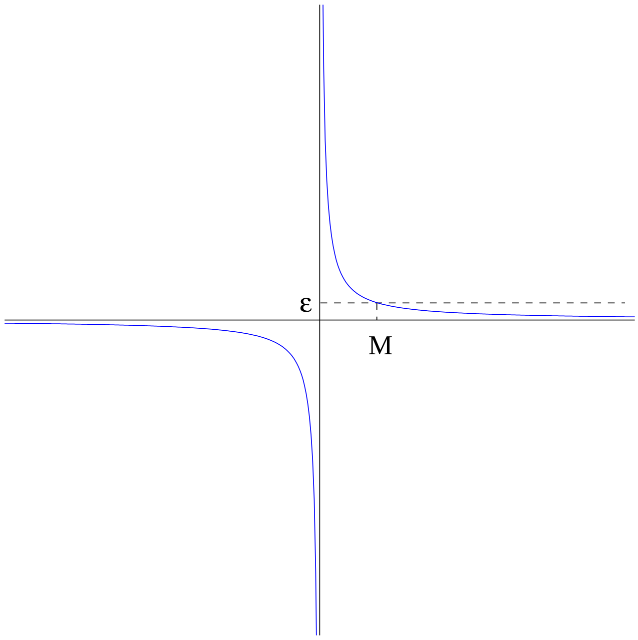
ako

$$(\forall M < 0)\ (\exists \delta > 0) \quad x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}\ \wedge\ |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < M.$$

Napomena 4.5 Beskonačne limese slijeva i zdesna definiramo na sličan način. Svojstva limesa iz poglavlja 4.3.1 vrijede i za beskonačne limese.

Na primjer, lako se vidi da je (slika 4.13)

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$$



Slika 4.12: Funkcija $1/x$

Zadatak 4.6 Koji su limesi funkcija

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^3}$$

kada $x \to 0 - 0$, $x \to 0 + 0$, $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$?

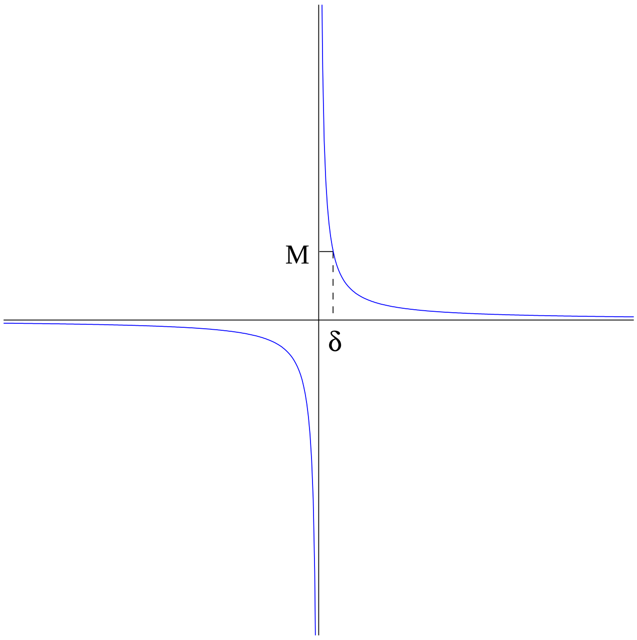
4.4 Neprekidnost

Definirat ćemo svojstvo neprekidnosti, dati svojstva neprekidnih funkcija, opisati vrste prekida koje funkcija može imati te definirati asimptote i opisati postupak za njihovo nalaženje.

Intuitivna definicija neprekidnosti je sljedeća: funkcija je neprekidna ako njen graf možemo nacrtati bez podizanja olovke s papira. Međutim, ova definicija nas ne zadovoljava jer pomoću nje nismo u mogućnosti dokazati razna svojstva neprekidnih funkcija koja koristimo u analizi. Stroga matematička definicija neprekidnosti koristi pojam limesa.

Definicija 4.6 Funkcija f je *neprekidna u točki* $x_0 \in \mathcal{D}$ ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$



Slika 4.13: Beskonačan limes

Funkcija f je *neprekidna na skupu* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ ako je neprekidna u svakoj točki skupa A. Funkcija f je *neprekidna* ako je neprekidna u svakoj točki svoga područja definicije $\mathcal{D}$.

Pomoću ove definicije i definicije limesa (4.3) možemo dokazati nekoliko izuzetno važnih svojstava neprekidnih funkcija. Tri teorema u sljedećem poglavlju navodimo bez dokaza.

4.4.1 Svojstva neprekidnih funkcija

Teorem 4.6 *Neka su funkcije f i g neprekidne u točki x (na skupu $\mathcal{A}$). Tada su u točki x (na skupu $\mathcal{A}$) neprekidne i funkcije $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ i $\dfrac{f}{g}$ uz $g(x) \neq 0$ ($g(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathcal{A}$).*

Dokaz ovog teorema sličan je dokazu teorema 4.3.

Teorem 4.7 *(i) Ako je funkcija f neprekidna u točki x, a funkcija g neprekidna u točki $y = f(x)$, tada je kompozicija $g \circ f$ neprekidna u točki x.*

(ii) Ako je

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y$$

i ako je funkcija g neprekidna u točki y, tada je

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big) = g(y).$$

Druga tvrdnja teorema nam olakšava nalaženje limesa, jer nam omogućava da s limesom "uđemo" u neprekidnu funkciju.

Primjer 4.9 a) Zbog neprekidnosti funkcije e^x i teorema 4.7 (ii) vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2x^2-1}{1-x^2}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{1-x^2}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

b) Broj e je definiran kao (vidi poglavlje 6.1.3)

$$e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Zbog neprekidnosti funkcija $\ln x$ i $\sqrt{x}$ i teorema 4.7 (ii) vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+0}\ln(1+x)^{\frac{1}{2x}} &= \ln\big(\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}\big) = \ln\big(\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\big)^{\frac{1}{2}}\\ &= \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

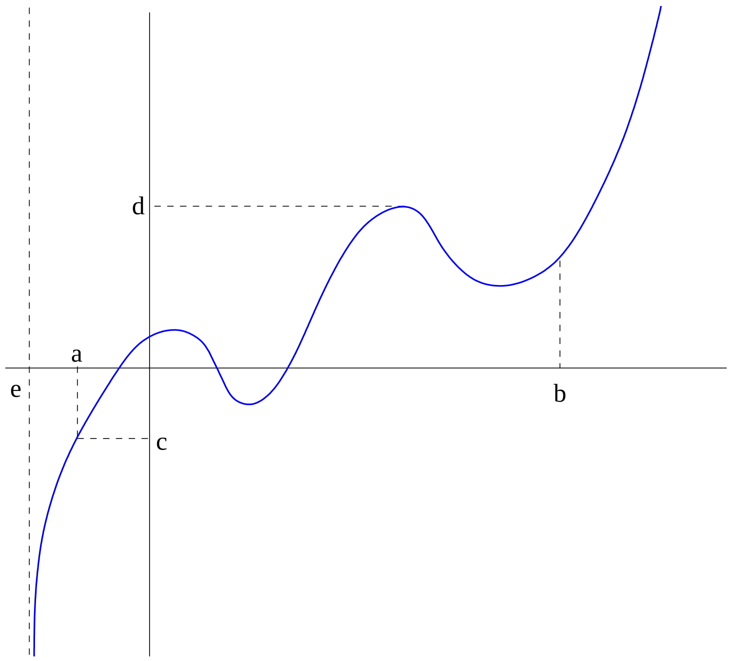
Teorem 4.8 *Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$, $a<b$. Tada vrijedi:*

(i) ako restrikcija $f\,|_{[a,b]}$ nije konstanta, tada je slika tog intervala, $f([a,b]) = [c,d] \subseteq \mathbb{R}$, također zatvoreni interval;

(ii) restrikcija $f\,|_{[a,b]}$ poprima na intervalu $[a,b]$ svoj minimum i maksimum, kao i svaku vrijednost između njih.

Situacija iz teorema prikazana je na slici 4.14. Zatvorenost intervala je bitna, jer je funkcija na slici neprekidna i na intervalu $(e,a]$, ali teorem ne vrijedi.

Napomena 4.6 Druga tvrdnja teorema 4.8 ima važan korolar: ako je $\operatorname{sign} f(a) \neq \operatorname{sign} f(b)$, tada postoji točka $x \in (a,b)$ takva da je $f(x)=0$. Ovu činjenicu koriste numeričke metode za nalaženje nul-točaka funkcije, kao, na primjer, metoda bisekcije.



Slika 4.14: Neprekidna funkcija

4.4.2 Vrste prekida

Razlikujemo tri vrste prekida funkcije: uklonjivi prekid, prekid prve vrste i prekid druge vrste.

Definicija 4.7 Neka je funkcija f definirana u nekoj okolini $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, osim možda u samoj točki x_0. Funkcija f ima *uklonjivi prekid* u točki x_0 ako je

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a \in \mathbb{R},$$

pri čemu f ili nije definirana u točki x_0 ili je $f(x_0) \neq a$. Prekid se ukloni tako što se definira $f(x_0) = a$.

Funkcija f ima *prekid prve vrste* u točki x_0 ako su limesi slijeva i zdesna u točki x_0 konačni i različiti.

Funkcija f ima *prekid druge vrste* u točki x_0 ako je barem jedan od limesa slijeva ili zdesna beskonačan ili ne postoji.

Na primjer, funkcija $f(x) = x^2/x$ ima uklonjivi prekid u točki $x = 0$. Prekid se ukloni tako što definiramo $f(0) = 0$, u kojem slučaju dobijemo neprekidnu funkciju $f(x) = x$. Funkcija $\operatorname{sign}(x)$ (slika 4.10) ima u točki $x = 0$

prekid prve vrste. Naime, u toj točki postoje limesi slijeva i zdesna koji su konačni, ali različiti. Funkcije x^{-1} (slika 4.12), x^{-2}, x^{-3}, ..., sve imaju prekid druge vrste u točki $x = 0$, jer su limesi s obje strane beskonačni.

Primjer 4.10 Navodimo dva zanimljiva primjera prekida druge vrste.

a) Funkcija

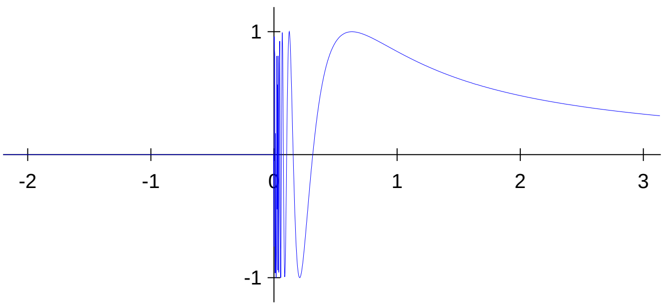
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

ima prekid druge vrste u točki $x = 0$ (vidi sliku 4.15). Naime, funkcija $\sin \frac{1}{x}$ sve brže titra kada $x \to 0 + 0$ pa limes zdesna ne postoji (u svakom, ma koliko malom, intervalu oko nule funkcija poprimi sve vrijednosti između -1 i 1).

b) Funkcija $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ definirana s

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ima u svakoj točki prekid druge vrste. Naime, kako su po teoremu 1.9 (ii) i (iii) skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$ gusti jedan u drugom, funkcija nema limes ni u jednoj točki (u svakom, ma koliko malom, intervalu oko bilo koje točke funkcija beskonačno puta poprimi vrijednost 0 i vrijednost 1).



Slika 4.15: Funkcija $\sin \frac{1}{x}$

4.5 Asimptote

Asimptota funkcije je pravac sa svojstvom da udaljenost između točke na grafu funkcije i tog pravca teži k nuli kada točka na grafu odmiče u beskonačnost. Funkcija može imati vertikalne, horizontalne i kose asimptote.

Pravac $x = x_0$ je *vertikalna asimptota funkcije* f *u točki* x_0 *s lijeve strane* ako je $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$ ili $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty$. Analogno, pravac $x = x_0$ je *vertikalna asimptota funkcije* f *u točki* x_0 *s desne strane* ako je $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$ ili $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty$. Vertikalne asimptote se mogu nalaziti u točkama prekida funkcije ili u otvorenim rubovima područja definicije.

Na primjer, pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota funkcije $\frac{1}{x}$ s obje strane (slika 4.12). Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota funkcija $\ln x$, $\log x$ i $\log_2 x$ (slika 4.25) s desne strane. U ovom slučaju vertikalna asimptota se nalazi u rubu područja definicije.

Pravac $y = y_0$ je *horizontalna asimptota funkcije* f *u lijevoj strani* ako je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$. Analogno, pravac $y = y_0$ je *horizontalna asimptota funkcije* f *u desnoj strani* ako je $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$. Na primjer pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota funkcije $\frac{1}{x}$ u obje strane, kao i $y = 0$ horizontalna asimptota funkcija 2^x i e^x u lijevoj strani (slika 4.23).

Ako je

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = l, \tag{4.5}$$

pri čemu je

$$k \neq 0, -\infty, +\infty, \qquad l \neq -\infty, +\infty,$$

tada je pravac $y = kx + l$ *kosa asimptota funkcije* f *u lijevoj strani*. Kosu asimptotu funkcije f u desnoj strani definiramo analogno.

Izvedimo formule (4.5). Prema slici 4.16 udaljenost od točke na krivulji do asimptote je $d(M, L)$. Prema definiciji asimptote $d(M, L) \to 0$ kada $x \to +\infty$. Kako je $\cos\alpha \neq 0$ konstanta, zaključujemo da

$$d(M, L) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(M, N) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} |f(x) - (kx + l)| = 0.$$

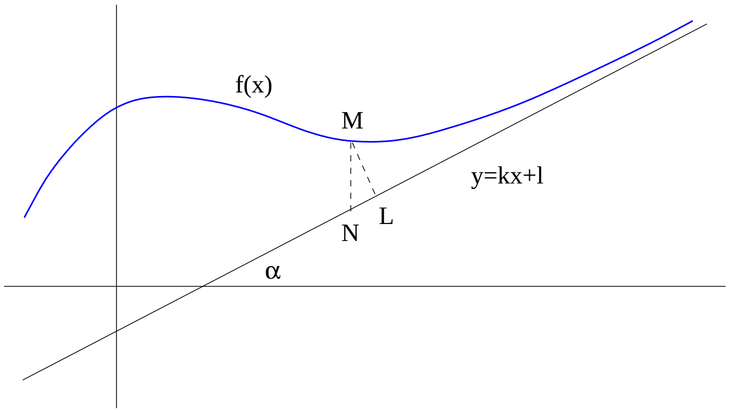
Zadnji uvjet, koji je ekvivalentan s

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - l) = 0 \tag{4.6}$$

je očito nužan i dovoljan uvjet za postojanje kose asimptote. Gornja jednakost je ekvivalentna s $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = l$. Nadalje, (4.6) povlači

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - kx - l}{x} = 0,$$

pa je $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$.



Slika 4.16: Kosa asimptota

Primjer 4.11 Ispitajmo ponašanje funkcije

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x}$$

u desnoj strani. Vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}{(1+x)\cdot\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{0+0}=+\infty$$

pa funkcija nema horizontalnu asimptotu u desnoj strani.

Potražimo kosu asimptotu: vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1$$

pa je $k=1$. Potražimo l: vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{1+x}=-1$$

pa je $l=-1$. Dakle, pravac $y=x-1$ je kosa asimptota funkcije f u desnoj strani.

Zadatak 4.7 Ispitajte ponašanje funkcije iz primjera 4.11 u lijevoj strani i u točki prekida $x=-1$. Pokušajte skicirati funkciju.

Primjer 4.12 Asimptote možemo tražiti i kod parametarski zadanih funkcija. Dokažimo da je pravac $y=-x-1$ kosa asimptota Descartesovog lista iz primjera 4.2 kao što je prikazano na slici 4.6. Descartesov list je u parametarskom obliku zadan s formulama kao u primjeru 4.4:

$$x = x(t) = \frac{3\,t^2}{t^3+1}, \qquad y = y(t) = \frac{3\,t}{t^3+1}, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Kako su x i y funkcije parametra t, prvo moramo utvrditi za koje vrijednosti parametra x teži u beskonačno. Vrijedi

$$\lim_{t\to-1-0} x(t) = \lim_{t\to-1-0} \frac{3\,t^2}{t^3+1} = \frac{3\,(-1)^2}{(-1-0)^3+1} = \frac{3}{-0} = -\infty,$$
$$\lim_{t\to-1+0} x(t) = \lim_{t\to-1+0} \frac{3\,t^2}{t^3+1} = \frac{3\,(-1)^2}{(-1+0)^3+1} = \frac{3}{+0} = +\infty.$$

Potražimo prvo kosu asimptotu u lijevoj strani. Formule (4.5) primjenjujemo na sljedeći način:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1-0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-1-0} \frac{\frac{3\,t}{t^3+1}}{\frac{3\,t^2}{t^3+1}} = \lim_{t\to-1-0} \frac{1}{t} = -1,$$
$$l = \lim_{x\to-\infty} (y - kx) = \lim_{t\to-1-0} (y(t) - (-1)x(t)) = \lim_{t\to-1-0} \left(\frac{3\,t}{t^3+1} + \frac{3\,t^2}{t^3+1} \right)$$
$$= \lim_{t\to-1-0} 3\,t \frac{1+t}{t^3+1} = \lim_{t\to-1-0} \frac{3\,t}{t^2-t+1} = \frac{3\,(-1)}{(-1)^2-(-1)+1}$$
$$= -1.$$

Dakle, pravac $y = -x-1$ je kosa asimptota Descartesovog lista u lijevoj strani. Slično se pokaže da je isti pravac kosa asimptota i u desnoj strani .

4.6 Pregled elementarnih funkcija

Opisat ćemo elementarne funkcije i njihova svojstva. Detaljno poznavanje **svih** elementarnih funkcija i **svih** njihovih svojstava nužno je za uspješnu analizu funkcija.

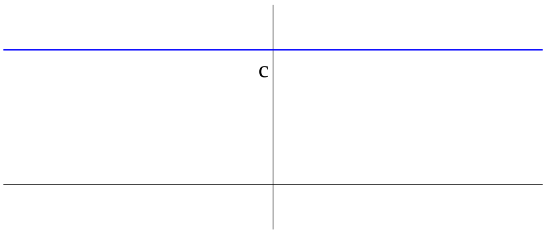
4.6.1 Konstantna funkcija

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \{c\}$, pri čemu je $c \in \mathbb{R}$, definirana s

$$f(x) = c, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

zove se *konstantna funkcija* (slika 4.17).

Konstantna funkcija je neprekidna, omeđena, parna, monotona, nema vertikalne ni kose asimptote te je očito sama sebi horizontalna asimptota u oba kraja.



Slika 4.17: Konstantna funkcija

4.6.2 Potencija

Potenciranje s prirodnim brojem je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) = x^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Potenciranje je definirano rekurzivno:

$$\begin{aligned} &x^0 = 1, \quad \forall x \neq 0, \quad (0^0 \text{ je nedefinirano}) \\ &x^1 = x, \\ &x^{n+1} = x^n \cdot x. \end{aligned}$$

Pravila potenciranja se lako dokažu indukcijom:

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n, \tag{P1}$$

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}, \tag{P2}$$

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n. \tag{P3}$$

Primjeri potencija dani su na slici 4.18. Vidimo da su (ne)parne potencije (ne)parne funkcije. Također vidimo da je za neparan n funkcija x^n bijekcija pa ima inverznu funkciju po teoremu 1.1, dok je za paran n restrikcija funkcije x^n na interval $[0, \infty)$ bijekcija pa ima inverznu funkciju.

Ako je $x \neq 0$ i $k \in \mathbb{N}$, tada su dobro definirane i funkcije $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ (vidi sliku 4.19)

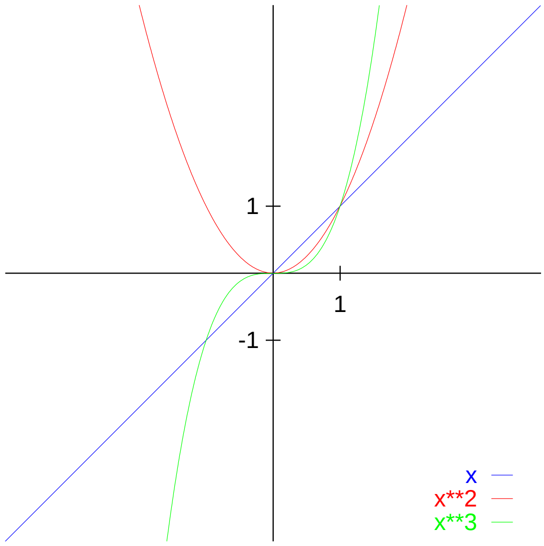
$$f(x) = x^{-k} = \frac{1}{x^k}.$$

Pravila (P1), (P2) i (P3) vrijede $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ ukoliko su izrazi dobro definirani, odnosno ukoliko nazivnik nije nula.

Potenciranje s racionalnim eksponentom

Funkciju

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$



Slika 4.18: Potenciranje s prirodnim brojem

definiramo kao inverznu funkciju funkcije x^n ili njene restrikcije na interval $[0, \infty)$, ukoliko je n paran (vidi slike 4.20 i 4.21).

Napomena 4.7 Graf inverzne funkcije simetričan je grafu zadane funkcije s obzirom na simetralu I i III kvadranta, to jest pravac $y = x$.

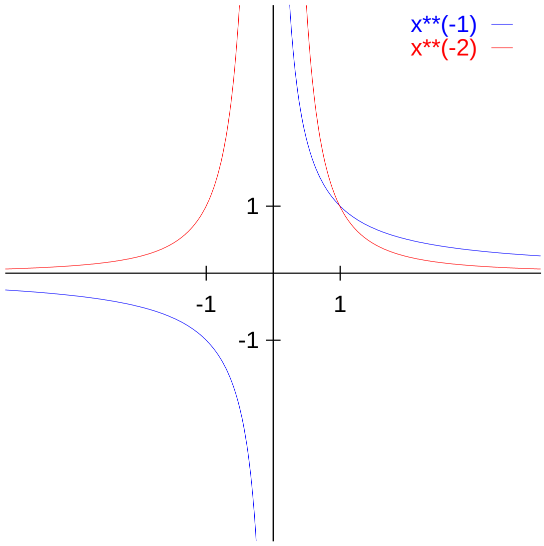
Napomena 4.8 Uz sliku 4.21 vezana je zanimljiva primjedba. Uočite da je funkcija $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ nacrtana iz dva dijela na pomalo neobičan način. Mi znamo da je $x^{1/3}$ inverzna funkcija funkcije x^3. Međutim, računala barataju samo s diskretnim podskupom skupa $\mathbb{Q}$ (vidi poglavlje 1.7.1, a broj $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = 0.\dot{3}$ ima beskonačni periodični decimalni zapis. Stoga programi za crtanje funkcije oblika $x^{1/k}$ takve slučajeve često tretiraju kao potencije s realnim eksponentom koje su definirane samo za $x > 0$ (vidi poglavlje 4.6.2). Naredba za crtanje funkcije $x^{0.33333}$ u programu Gnuplot tako daje sliku funkcije samo za $x > 0$, dok se lijeva strana dobije tako što se nacrta funkcija $-(-x)^{0.33333}$.

Nadalje, za $n \in \mathbb{N}$ možemo definirati funkciju

$$f(x) = x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}},$$

pri čemu je

$$\mathcal{D}(x^{-\frac{1}{n}}) = \mathcal{D}(x^{\frac{1}{n}}) \backslash \{0\}.$$



Slika 4.19: Funkcije $f(x) = x^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$

Također možemo definirati i funkcije oblika

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}}, \qquad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemu se područje definicije određuje na temelju prethodnih pravila. Na primjer,

$$\mathcal{D}(x^{\frac{2}{3}}) = \mathbb{R}, \qquad \mathcal{D}(x^{\frac{3}{2}}) = [0, \infty).$$

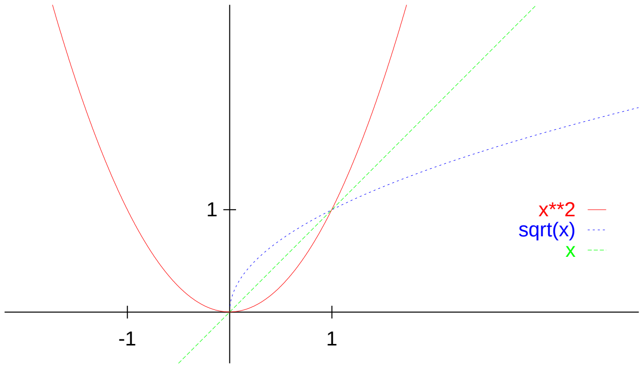
Zadatak 4.8 Koje od funkcija x^k, $x^{1/k}$, $k \in \mathbb{Z}$, su omeđene (odozdo, odozgo), parne ili neparne, monotone ili po dijelovima monotone, neprekidne ili imaju prekide (kakvi su ti prekidi) te koje imaju vertikalne, horizontalne ili kose asimptote ?

Prisjetimo se da je skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ zapravo skup klasa ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Ukoliko su m i n relativno prosti tada je područje definicije uvijek jednoznačno određeno i vrijedi

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

Ukoliko m i n nisu relativno prosti tada može doći do situacije kao u sljedećem primjeru:

$$f(x) = (\sqrt[4]{x})^2 = \sqrt{x}, \qquad \mathcal{D} = [0, \infty)$$
$$\text{galeb}(x) = \sqrt[4]{x^2}, \qquad \mathcal{D} = \mathbb{R}.$$



Slika 4.20: Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$

Dok je prva funkcija prikazana na slici 4.20, funkcija galeb(x) prikazana je na slici 4.22.

Slično je i $\sqrt{x^2} = |x|$ (vidi sliku 1.1).

Potenciranje s realnim brojem

Za $x > 0$ i $a \in \mathbb{R}$ definiramo funkciju $f(x) = x^a$ sa

$$x^a = \begin{cases} \inf\{x^q : q \in \mathbb{Q} \wedge q > a\}, & \text{za } x > 1 \\ 1, & \text{za } x = 1 \\ (\frac{1}{x})^{-a}, & \text{za } x < 1. \end{cases}$$

Pored toga, $0^x = 0, \forall x \neq 0$, a 0^0 je neodređeni oblik.

Pravila potenciranja (P1), (P2) i (P3) vrijede i za potenciranje s racionalnim i realnim brojevima, a također vrijede i sljedeća svojstva:

$$[(0 < x < y) \ \wedge \ (a > 0)] \quad \Rightarrow \quad x^a < y^a, \tag{P4}$$

$$[(x > 1) \ \wedge \ (a < b)] \quad \Rightarrow \quad x^a < x^b, \tag{P5}$$

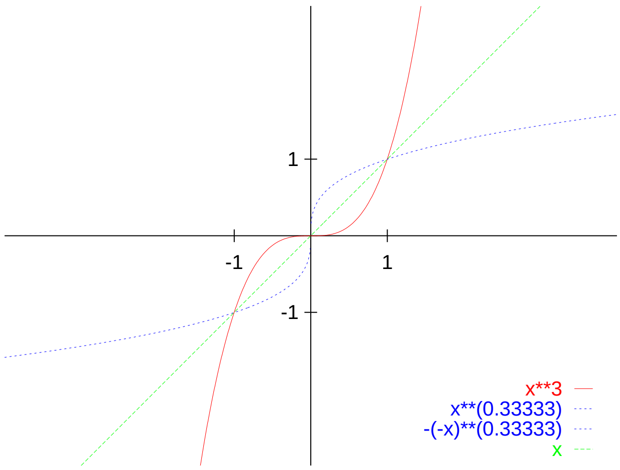
$$[(0 < x < 1) \ \wedge \ (a < b)] \quad \Rightarrow \quad x^a > x^b. \tag{P6}$$

4.6.3 Eksponencijalna funkcija

Ako fiksiramo bazu $a \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, $a \neq 1$, tada možemo definirati funkciju

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad \exp_a(x) \equiv \exp_a x = a^x,$$

čije se vrijednosti računaju po prethodnim pravilima potenciranja. Iz svojstva (P5) slijedi da je $\exp_a$ za $a > 1$ strogo rastuća funkcija. Također, za $a > 1$



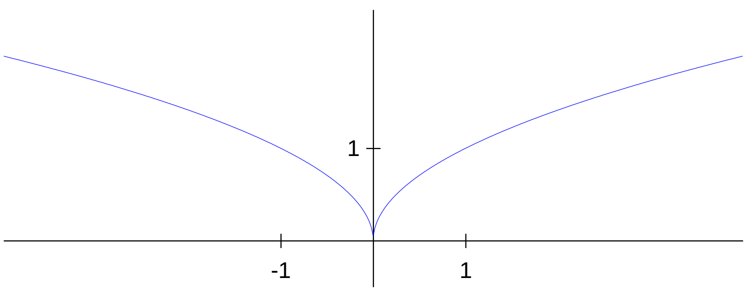
Slika 4.21: Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$

funkcija $\exp_a$ ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kada $x \to -\infty$. Nadalje, kako je

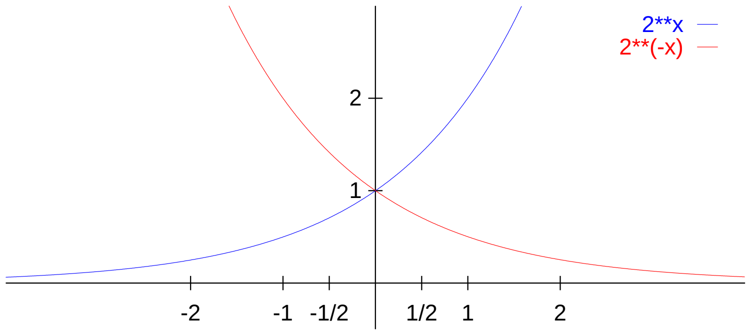
$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x},$$

to je funkcija $\exp_{\frac{1}{a}}$ simetrična funkciji $\exp_a$ s obzirom na y-os. Dakle, za $a < 1$ funkcija $\exp_a$ je strogo padajuća i ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kada $x \to +\infty$. $\exp_a$ je uvijek bijekcija (vidi sliku 4.23).

Napomena 4.9 Posebno se često koriste funkcije 10^x i e^x. Broj e se zove



Slika 4.22: Funkcija $\text{galeb}(x) = \sqrt[4]{x^2}$

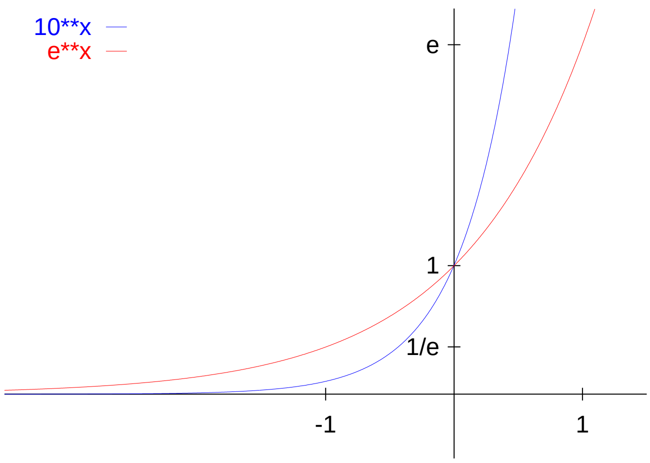


Slika 4.23: Eksponencijalne funkcije 2^x i 2^{-x}

baza prirodnih logaritama, definiran je kao

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

i približno je jednak $e \approx 2.7182\ldots$ (vidi sliku 4.24).



Slika 4.24: Funkcije 10^x i e^x

4.6.4 Logaritamska funkcija

Kako je $\exp_a$ bijekcija, logaritamsku funkciju definiramo kao inverznu funkciju eksponencijalne funkcije (vidi slike 4.25 i 4.26):

$$\log_a \equiv \exp_a^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.$$

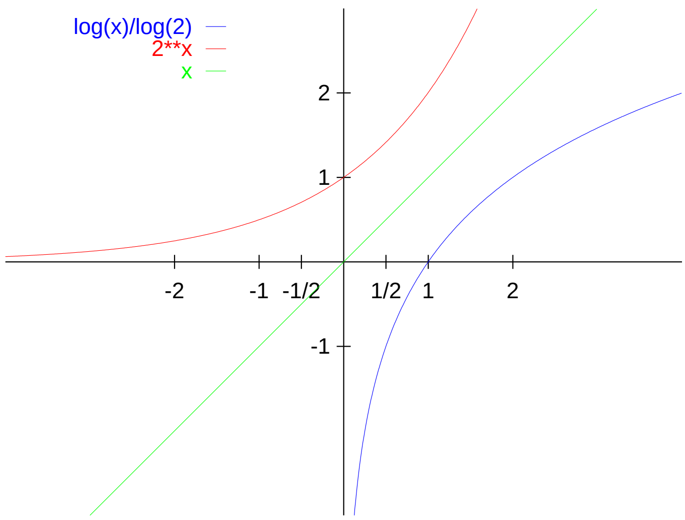
Posebno se koriste *Briggsovi* ili *dekadski* logaritmi s bazom 10,

$$\log_{10} x \equiv \log x,$$

i *prirodni* logaritmi s bazom e,

$$\log_e x \equiv \ln x.$$

ln je kratica od l*ogaritam* n*aturalis*.

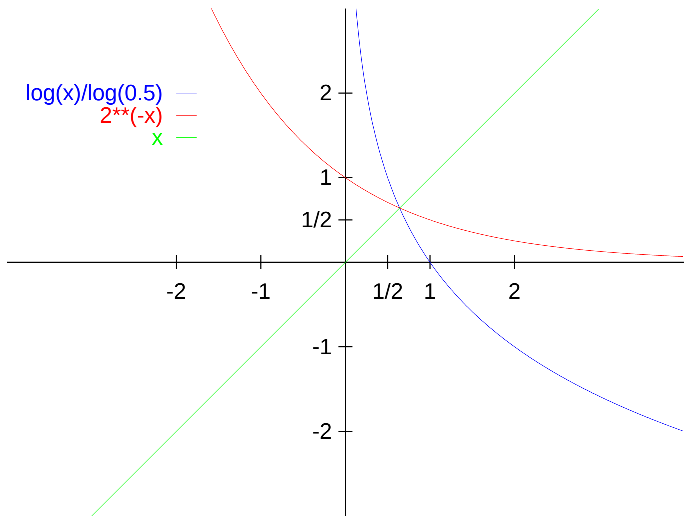


Slika 4.25: Funkcija $f(x) = \log_2 x$

Zbog svojstava inverznih funkcija vrijedi (teorem 1.1)

$$\begin{aligned} (\log_a \circ \exp_a)(x) &= \log_a(a^x) = x, \qquad &\forall x \in \mathbb{R}, \\ (\exp_a \circ \log_a)(x) &= a^{\log_a(x)} = x, \qquad &\forall x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Zadatak 4.9 Nacrtajte funkcije $\log_a(a^x)$ i $a^{\log_a(x)}$.



Slika 4.26: Funkcija $f(x) = \log_{1/2} x$

Svojstva logaritama

Najvažnija svojstva logaritamskih funkcija su:

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x \quad \text{(veza dvaju baza)}, \tag{L1}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \tag{L2}$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0, \tag{L3}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad x, y > 0, \tag{L4}$$

$$\log_a x^y = y \log_a x, \quad x > 0, \tag{L5}$$

$$x^r = a^{r \cdot \log_a x}, \quad x > 0. \tag{L6}$$

Dokaz svojstva (L1): jednakost $x = x$ možemo koristeći logaritme s bazama a i b zapisati kao

$$a^{\log_a x} = b^{\log_b x}.$$

Uvrštavanje $b = a^{\log_a b}$ u gornju nejednakost i primjena svojstva potenciranja (P2) daju

$$a^{\log_a x} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} = a^{\log_a b \cdot \log_b x}.$$

Kako su u prethodnoj jednakosti baze jednake, to moraju biti jednaki i eksponenti, odnosno svojstvo (L1) vrijedi.

Dokaz svojstva (L2): kada u svojstvo (L1) uvrstimo $x = a$ dobijemo

$$1 = \log_a a = \log_a b \cdot \log_b a.$$

Dokaz svojstva (L3): slično kao u dokazu svojstva (L1) izraz $xy = x \cdot y$ možemo zapisati kao

$$a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Svojstva (L4–L6) dokazuju se slično.

Napomena 4.10 Kako većina programa za crtanje funkcija može crtati samo funkcije $\log x$ i $\ln x$, kod crtanja funkcija $\log_2 x$ i $\log_{1/2} x$ na slikama 4.25 i 4.26 korištena su svojstva (L1) i (L2). Program Gnuplot pomoću kojeg su nacrtane slike funkciju $\ln x$ označava s `log(x)`.

Zadatak 4.10 Nacrtajte funkcije $\log x$, $\ln x$, $\log_3 x$ i $\log_{1/3} x$. Jesu li te funkcije omeđene, monotone, neprekidne i imaju li asimptote?

4.6.5 Trigonometrijske funkcije

Promotrimo središnju jediničnu kružnicu implicitno zadanu s

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Tu kružnicu ćemo u ovom slučaju još zvati i *trigonometrijska kružnica*. Njen opseg jednak je

$$O = 2r\pi = 2 \cdot 1 \cdot \pi.$$

Broj π ima beskonačni neperiodični decimalni zapis, a njegovih prvih pedeset znamenaka glasi

3.14159265358979323846264338327950288419716939937508

Broj π možemo definirati na različite načine. Tako je, na primjer, π jednak limesu beskonačnog niza brojeva (vidi zadatak 6.1):

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 \cdots}}}}_{n-1 \text{ korijen}}} \tag{4.7}$$

Također, π možemo definirati i pomoću sume beskonačnog reda brojeva (vidi poglavlje 6.2.4):

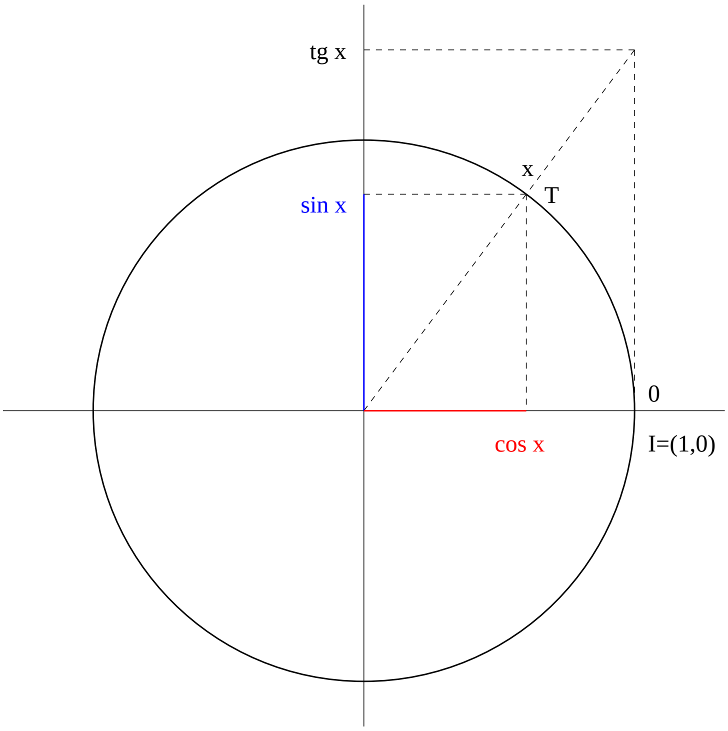
$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots\right).$$

Zanimljiva priča o tome kako je Arhimed izračunao broj π s pogreškom manjom od 0.1% nalazi se na `http://www.ima.umn.edu/~arnold/graphics.html`.

Definirajmo prvo funkcije *sinus* i *kosinus*. Na trigonometrijsku kružnicu nanesimo brojevni pravac tako da se broj 0 brojevnog pravca nalazi u točki $I = (1, 0)$ u koordinatnom sustavu ravnine, dok se pozitivni dio brojevnog pravca namata na kružnicu u pozitivnom smjeru (obrnuto od kazaljke na satu). Tada se točka x brojevnog pravca nalazi u točki

$$T = (\cos x, \sin x)$$

u koordinatnom sustavu (slika 4.27). Drugim riječima, $\cos x$ je apscisa, a $\sin x$ ordinata točke T u kojoj se nalazi broj x.



Slika 4.27: Trigonometrijska kružnica

Promatrajući sliku 4.27 možemo zaključiti sljedeće:

– funkcije $\sin x$ i $\cos x$ su omeđene (definicija 4.1), odnosno vrijedi

$$\sin x, \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1],$$

– $\sin x$ je neparna, a $\cos x$ je parna funkcija (definicija 4.2),

- $\sin x$ i $\cos x$ su periodične funkcije a osnovnim periodom 2π (definicija 4.4),
- $\sin x$ i $\cos x$ su neprekidne funkcije (definicija 4.6),
- nul-točke funkcija $\sin x$ i $\cos x$ su

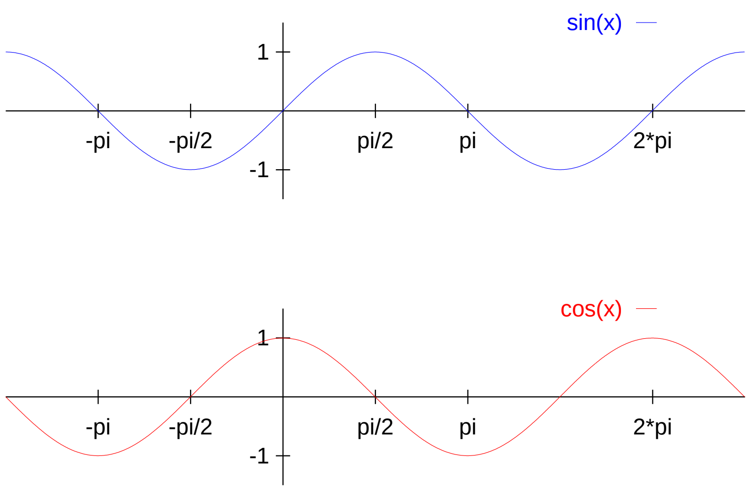
$$\begin{aligned} \sin x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

- primjena Pitagorinog poučka na pravokutni trokut s katetama $\sin x$ i $\cos x$ i hipotenuzom jednakom 1 daje *osnovni trigonometrijski identitet*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{4.9}$$

(gornji izraz je identitet, a ne jednadžba, stoga što vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$).

Funkcije $\sin x$ i $\cos x$ prikazane su na slici 4.28.



Slika 4.28: Sinus i kosinus

Pomoću sinusa i kosinusa definiramo *tangens* i *kotangens*:

$$\operatorname{tg} x \equiv \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Vidimo da tangens nije definiran u nul-točkama kosinusa, dok kotangens nije definiran u nul-točkama sinusa. Formula (4.8) i definicije sinusa i kosinusa stoga povlače

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} &: \mathbb{R} \setminus \Big\{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\Big\} \to \mathbb{R}, \\
\operatorname{ctg} &: \mathbb{R} \setminus \{k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

U svim točkama u kojima su obje funkcije definirane očito vrijedi

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Pored toga, zbog proporcionalnosti

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{1},$$

geometrijski prikaz tangensa je kao na slici 4.27.

Da bi odredili ponašanje funkcije $\operatorname{tg} x$ u točkama prekida, moramo posebno promotriti limese slijeva i zdesna. Definicija funkcije $\cos x$ (vidi slike 4.27 i 4.28) povlači

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-0}{+0} = +\infty, \\
\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-0}{-0} = -\infty.
\end{aligned}
$$

Iz ove analize također možemo zaključiti da je u svim točkama oblika $x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ limes slijeva jednak $+\infty$, a limes zdesna jednak $-\infty$. Dakle, funkcija $\operatorname{tg} x$ u svim točkama prekida ima prekid druge vrste (definicija 4.7), a pravci

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

su vertikalne asimptote s obje strane (vidi poglavlje 4.5).

Slična analizu možemo napraviti i za funkciju $\operatorname{ctg} x$. Tangens i kotangens prikazani su na slikama 4.29 i 4.30.

Promatrajući slike 4.29 i 4.30 zaključujemo sljedeće:

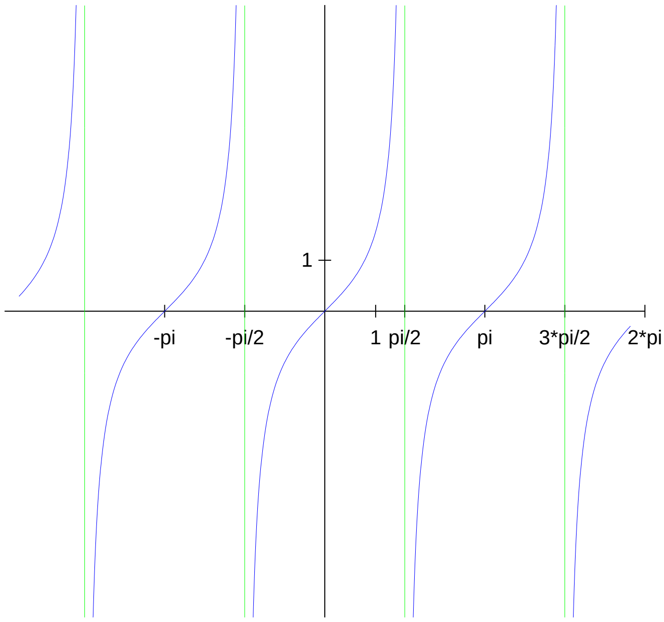
– obje funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ su neparne, i to stoga što su kvocijent jedne parne i jedne neparne funkcije (definicija 4.2),

– $\operatorname{tg} x$ je strogo rastuća funkcija (definicija 4.3) na svakom podintervalu otvorenog intervala

$$\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\Big), \qquad k \in \mathbb{Z},$$

a $\operatorname{ctg} x$ je strogo padajuća funkcija na svakom podintervalu otvorenog intervala

$$(k\pi, \ (k+1)\pi), \qquad k \in \mathbb{Z},$$



Slika 4.29: Tangens

– $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ su periodične funkcije a osnovnim periodom 2π (definicija 4.4),

– nul-točke funkcije $\operatorname{tg} x$ su nul-točke funkcije $\sin x$, a nul-točke funkcije $\operatorname{ctg} x$ su nul-točke funkcije $\cos x$ (vidi formulu (4.8)).

Napomena 4.11 Osnovne vrijednosti funkcija $\sin x$, $\cos x$ i $\operatorname{tg} x$ nalaze se u tablici 4.1 Vrijednosti ovih funkcija u točkama $-\pi/6$, $-\pi/4$, $-\pi/3$, $-\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$, ..., lako odredimo koristeći tablicu i svojstva funkcija (periodičnost, parnost, odnosno neparnost). Vrijednosti funkcija u nekim drugim točkama kao $\pi/12$, $7\pi/12$, ..., možemo odrediti pomoću prethodnih vrijednosti i adicionih teorema koji su opisani kasnije.

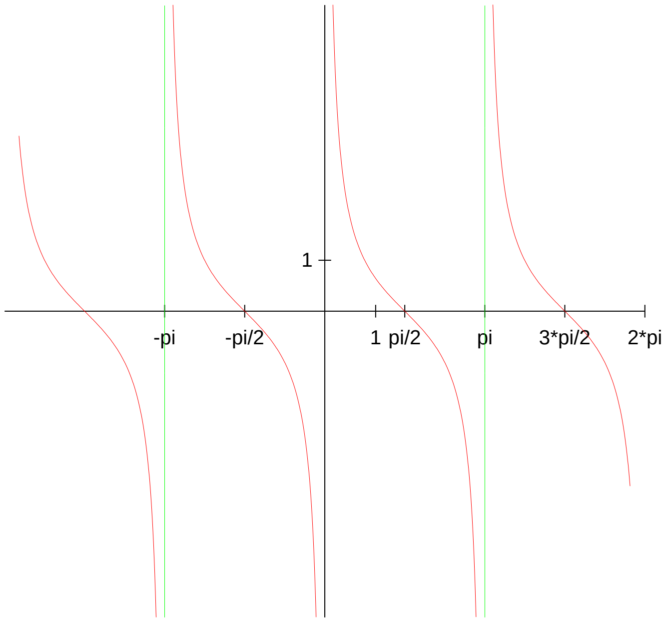
Opća sinusoida

Opća sinusoida je funkcija oblika

$$f(x) = A\sin(\omega x + \varphi), \qquad A, \omega > 0.$$

Broj A je *amplituda* i vrijedi

$$f : \mathbb{R} \to [-A, A].$$



Slika 4.30: Kotangens

Osnovni period opće sinusoide je

$$P = \frac{2\pi}{\omega},$$

a *fazni pomak*, odnosno nul-točka desno od koje opća sinusoida počinje rasti, je

$$x_0 = -\frac{\varphi}{\omega}.$$

Kako je $\sin 0 = 0$, formula za fazni pomak slijedi iz jednakosti $\omega x + \varphi = 0$, a kako je osnovni period funkcije $\sin x$ jednak 2π, formula za period slijedi iz

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	$-$

Tablica 4.1: Osnovne vrijednosti trigonometrijskih funkcija

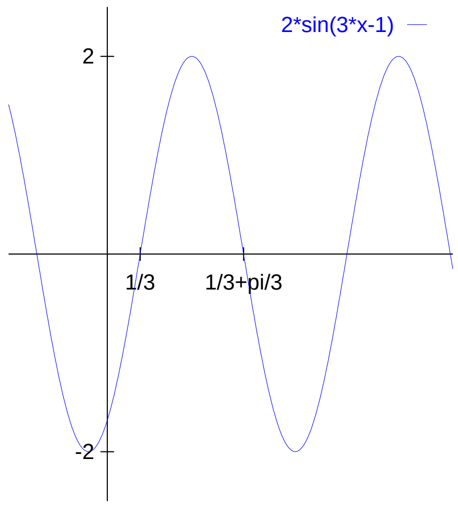
jednakosti

$$\sin(\omega(x+P)+\varphi)=\sin(\omega x+\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \omega P=2\pi.$$

Na primjer, opća sinusoida

$$f(x)=2\sin(3x-1)$$

ima amplitudu $A=2$, period $2\pi/3$ i nul-točku $x_0=1/3$ (slika 4.31).



Slika 4.31: Opća sinusoida

Funkciju $\cos x$ također možemo promatrati kao opću sinusoidu uz $A=1$, $\omega=1$ i $\varphi=\pi/2$, odnosno

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Slično je i

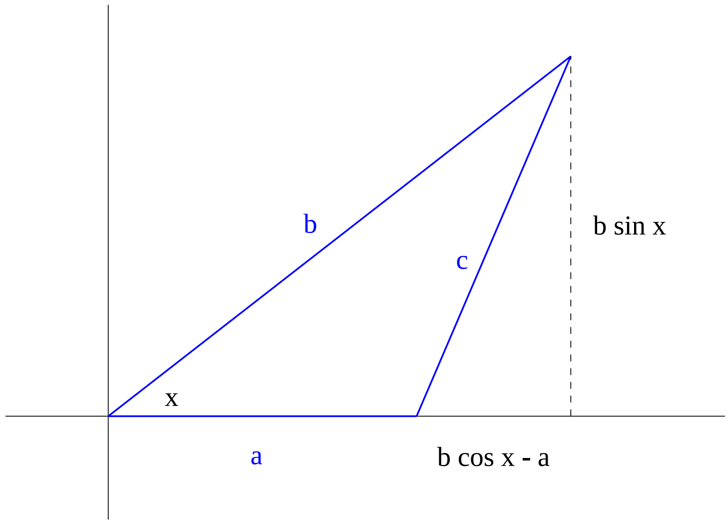
$$\sin x=\cos(x-\pi/2). \tag{4.10}$$

Kosinusov poučak i adicioni teoremi

U ovom poglavlju izvest ćemo neke veze između trigonometrijskih funkcija.

Za pravokutni trokut s katetama a i b i hipotenuzom c, Pitagorin poučak glasi $c^2=a^2+b^2$. Za trokut koji nije pravokutan Pitagorin poučak i osnovni trigonometrijski identitet (4.9) daju *kosinusov poučak* (vidi sliku 4.32):

$$\begin{aligned}c^2&=(b\sin x)^2+(b\cos x-a)^2=b^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x-2ab\cos x+a^2\\&=a^2+b^2-2ab\cos x.\end{aligned}$$



Slika 4.32: Kosinusov poučak

Adicioni teoremi nam daju formule za sinus i kosinus zbroja i razlike kutova. Promotrimo sliku 4.33.

Primjena kosinusovog poučka na trokut $\triangle OQP$ daje

$$|\overline{PQ}|^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos(u-t).$$

S druge strane, iz Pitagorinog poučka slijedi

$$\begin{aligned}
|\overline{PQ}|^2 &= (\cos t - \cos u)^2 + (\sin u - \sin t)^2 \\
&= \cos^2 t - 2\cos t\cos u + \cos^2 u + \sin^2 u - 2\sin u\sin t + \sin^2 t \\
&= 1 + 1 - 2\cos t\cos u - 2\sin u\sin t.
\end{aligned}$$

Izjednačavanje gornjih izraza daje prvi adicioni teorem

$$\cos(u-t) = \cos u\cos t + \sin u\sin t. \tag{A1}$$

Kako je sinus neparna, a kosinus parna funkcija, zamjena $t \to -t$ daje

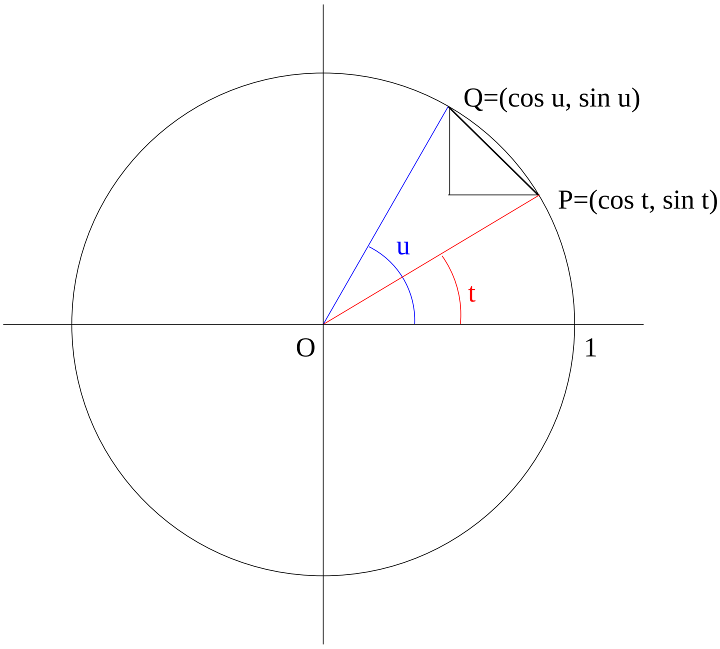
$$\cos(u+t) = \cos u\cos t - \sin u\sin t. \tag{A2}$$

Dalje, za $u = t$ imamo

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t. \tag{A3}$$

Zamjena $t \to t - \pi/2$ u (A2) daje

$$\cos\left(u + t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos u\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \sin u\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Slika 4.33: Adicioni teoremi

pa jednakost (4.10) povlači

$$\sin(u+t) = \cos u \sin t + \sin u \cos t. \tag{A4}$$

Konačno, kada u (A4) izvršimo zamjenu $t \to -t$ imamo

$$\sin(u-t) = -\cos u \sin t + \sin u \cos t, \tag{A5}$$

a kada u (A4) uvrstimo $u = t$ imamo

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t. \tag{A6}$$

Koristeći osnovne adicione teoreme možemo izvesti i razne druge formule.

Zadatak 4.11 Izvedite formule koje funkcije $\sin 3x$, $\sin 4x$, $\sin \frac{1}{2}x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$ i $\cos \frac{1}{2}x$ prikazuju pomoću funkcija $\sin x$ i $\cos x$. Izvedite još nekoliko veza između trigonometrijskih funkcija koje se nalaze u Matematičkom priručniku ili logaritamskim tablicama.

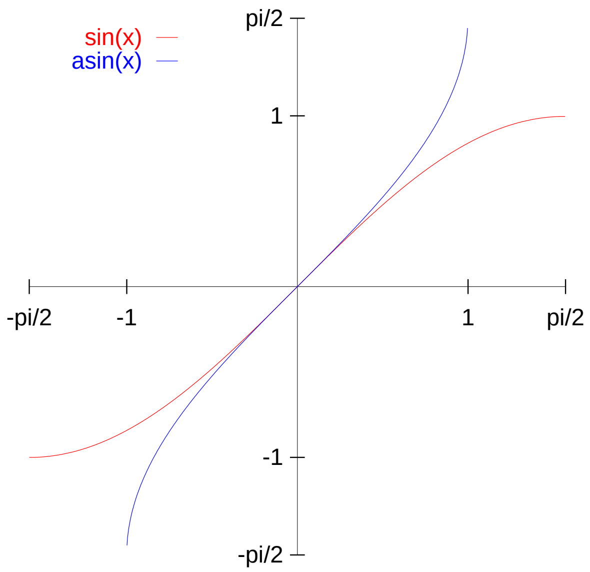
4.6.6 Arkus funkcije

Arkus funkcije ili *ciklometrijske funkcije* su inverzne funkcije odgovarajućih restrikcija trigonometrijskih funkcija. Naime, ni jedna od trigonometrijskih funkcija nije bijekcija (funkcija ne može biti bijekcija čim je periodična). Međutim, u primjenama se često javlja potreba za njihovim inverzima, pa su inverzi definirani za pogodno odabrane restrikcije koje jesu bijekcije. Pri tome se najčešće biraju restrikcije na odgovarajući interval koji je najbliži nuli.

Na slici 4.28 vidimo da je restrikcija sinusa na interval $[-\pi/2, \pi/2]$ bijekcija. *Arkus sinus* je inverzna funkcija te restrikcije pa vrijedi

$$\arcsin \equiv \sin^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Funkcija $\arcsin x$ prikazana je na slici 4.34. Vidimo da je funkcija strogo rastuća, neparna, neprekidna i nema asimptota.



Slika 4.34: Arkus sinus

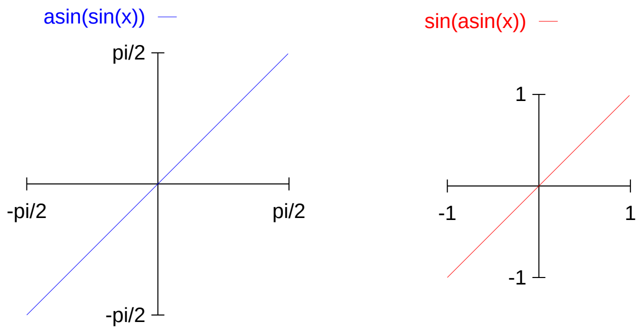
Prema Teoremu o inverznoj funkciji 1.1 vrijedi (slika 4.35):

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= x, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin(\arcsin x) &= x, \qquad x \in [-1,1] \end{aligned}$$

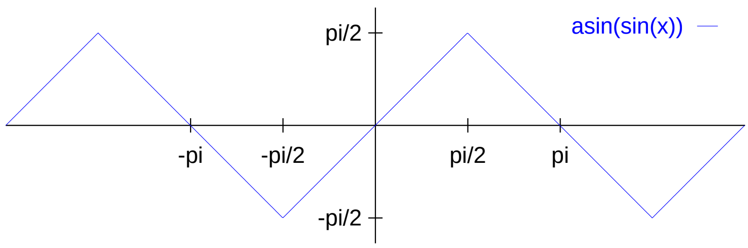
Međutim, funkcija $\arcsin(\sin x)$ je definirana za svaki $x \in \mathbb{R}$, a njen graf dan je na slici 4.36.

Funkcija *arkus kosinus* je inverzna funkcija restrikcije funkcije $\cos x$ na interval $[0, \pi]$ (vidi sliku 4.28) i vrijedi

$$\arccos \equiv \cos^{-1} : [-1,1] \to [0, \pi].$$



Slika 4.35: Kompozicije restrikcije sinusa s arkus sinusom



Slika 4.36: Funkcija $\arcsin(\sin x)$

Funkcija $\arccos x$ prikazana je na slici 4.37. Ona je strogo padajuća, neprekidna i nema asimptota.

Funkcija *arkus tangens* je inverzna funkcija restrikcije funkcije $\operatorname{tg} x$ na interval $(-\pi/2, \pi/2)$ (vidi sliku 4.29) i vrijedi

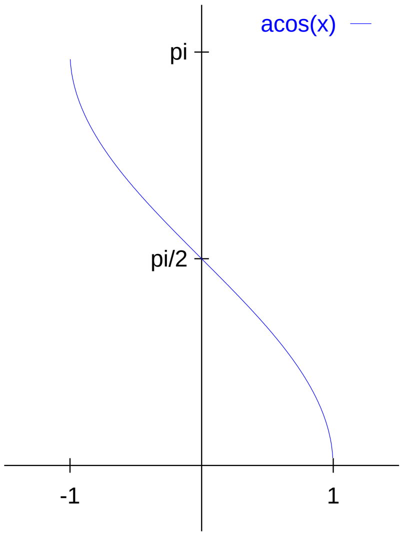
$$\operatorname{arctg} \equiv \operatorname{tg}^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Funkcija $\operatorname{arctg} x$ je strogo rastuća, neparna i neprekidna te ima horizontalne asimptote i to pravac $y = -\pi/2$ u lijevom i $y = \pi/2$ u desnom kraju (slika 4.38).

Slično, funkcija *arkus kotangens* je inverzna funkcija restrikcije funkcije $\operatorname{ctg} x$ na interval $(0, \pi)$ (vidi sliku 4.30) pa vrijedi

$$\operatorname{arcctg} \equiv \operatorname{ctg}^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi).$$

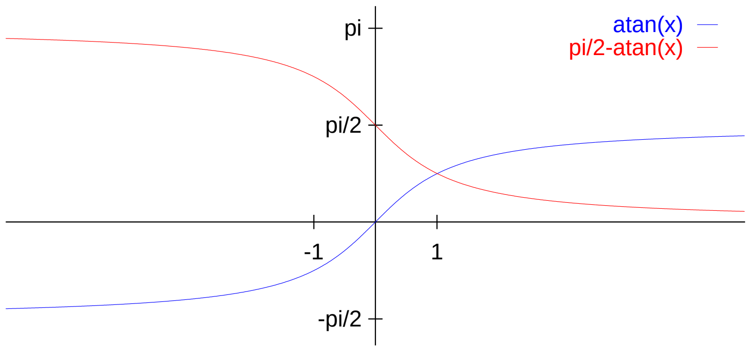
Funkcija $\operatorname{arcctg} x$ je strogo padajuća i neprekidna te ima horizontalne asimptote i to pravac $y = \pi$ u lijevom i $y = 0$ u desnom kraju (slika 4.38). Kako



Slika 4.37: Arkus kosinus

program za crtanje Gnuplot nema ugrađenu funkciju arcctg x, tu funkciju smo nacrtali koristeći vezu

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$



Slika 4.38: Arkus tangens i arkus kotangens

Zadatak 4.12 Nacrtajte funkcije

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(\arccos x), & f(x) &= \arccos(\cos x), \\ f(x) &= \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x), & f(x) &= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x), \\ f(x) &= \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x), & f(x) &= \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x), \\ f(x) &= \sin(\arccos x), & f(x) &= \arccos(\sin x). \end{aligned}$$

4.6.7 Klasifikacija elementarnih funkcija

Elementarna funkcija je svaka funkcija koja nastaje primjenjujući konačan broj puta zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i komponiranje na do sada opisane elementarne funkcije. Pri tome je

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x), \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Primjer 4.13 Funkcija $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = 3^{x^2-2} \cdot \sin(\sqrt[4]{x}) + 1$$

je elementarna funkcija jer je sastavljena na sljedeći način:

$$f = [f_1 \circ (f_2 - f_3)] \cdot (f_4 \circ f_5) + f_6,$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \exp_3(x), \qquad & f_2(x) &= x^2, \qquad & f_3(x) &= 2, \\
f_4(x) &= \sin(x), \qquad & f_5(x) &= \sqrt[4]{x}, \qquad & f_6(x) &= 1.
\end{aligned}
$$

Algebarske funkcije su one elementarne funkcije koje nastaju komponiranjem potencije s racionalnim eksponentom (vidi poglavlje 4.6.2 i racionalne funkcije s racionalnim koeficijentima (vidi poglavlje 4.6.8). Sve ostale elementarne funkcije su *transcendentne funkcije*.

Na primjer, funkcija

$$f(x) = \sqrt[4]{\left(\frac{x^2+1}{2x^3-5x}\right)^5}$$

je algebarska, dok je funkcija

$$f(x) = \left(\frac{x^2+1}{2x^3-5x}\right)^{\sqrt{2}}$$

transcendentna.

Od algebarskih funkcija posebno nas zanimaju polinomi i racionalne funkcije (vidi poglavlje 4.6.8), a od transcendentnih funkcija posebno nas zanimaju hiperbolne funkcije i njima inverzne area funkcije (vidi poglavlje 4.6.9).

4.6.8 Polinomi i racionalne funkcije

Polinom n-tog stupnja je funkcija

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

pri čemu su *koeficijenti* a_i realni brojevi i vrijedi $a_n \neq 0$. Napomenimo da je prirodno definirati i polinome čiji su koeficijenti kompleksni brojevi. Takvi polinomi se razmatraju u Matematici 3.

Za polinome vrijedi sljedeći važan teorem kojeg navodimo bez dokaza, a koji slijedi iz poznatog *Osnovnog teorema algebre*.

Teorem 4.9 *Svaki polinom n-tog stupnja p_n ima točno n kompleksnih nul-točaka z_i za koje vrijedi $p_n(z_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Drugim riječima, p_n se dade rastaviti kao*

$$p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n).$$

Nadalje, strogo kompleksne nul-točke (one za koje je $\operatorname{Im} z_i \neq 0$) se uvijek javljaju u konjugirano kompleksnim parovima, odnosno

$$p_n(z_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_n(\bar{z}_i) = 0.$$

Primijetimo da u iskazu teorema nul-točke z_i ne moraju biti međusobno različite. Ako je neki broj z nul-točka koja se u gornjem rastavu pojavljuje k puta, tada kažemo da je z k-terostruka nul-točka polinoma p_n ili *nul-točka kratnosti k.*

Zadnja tvrdnja teorema također ima zanimljive posljedice. Tako polinom drugog stupnja može imati samo ili dvije realne ili dvije konjugirano kompleksne nul-točke, a ne može imati jednu realnu i jednu strogo kompleksnu nul-točku. Na primjer,

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 1 &= 2(x-1)\big(x+\frac{1}{2}\big), \\ x^2 + x + 1 &= \left(x - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Slično, polinom trećeg stupnja može imati ili tri ili jednu realnu nul-točku, a polinom četvrtog stupnja može imati ili četiri ili dvije ili nijednu realnu nul-točku.

Zadatak 4.13 Nacrtajte nekoliko polinoma različitih stupnjeva pomoću programa NetPlot i opišite njihovo ponašanje.

Racionalna funkcija je kvocijent dvaju polinoma,

$$r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}.$$

Očito vrijedi

$$r : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q_m(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}.$$

U točkama prekida racionalna funkcija ima ili vertikalu asimptotu s obje strane ili uklonjivi prekid.

Ako je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika, $n < m$, tada kažemo da je r *prava racionalna funkcija.* Ako je $n \geq m$, tada možemo podijeliti polinom p_n s polinomom q_m, odnosno vrijedi

$$r(x) = s_k(x) + \frac{t_l(x)}{q_m(x)},$$

pri čemu su s_k i t_l također polinomi. *Ostatak*

$$\frac{t_l(x)}{q_m(x)}$$

je prava racionalna funkcija, odnosno vrijedi $l < m$. Na primjer,

$$\frac{2x^3 - x^2 + 4x - 2}{x^2 - 2x + 3} = 2x + 3 + \frac{4x - 11}{x^2 - 2x + 3}.$$

4.6.9 Hiperbolne i area funkcije

Hiperbolne funkcije definiramo pomoću eksponencijalne funkcije e^x (poglavlje 4.6.3). Hiperbolne funkcije su zanimljive jer su rješenja mnogih problema u fizici i tehnici izražena pomoću njih. Veze između hiperbolnih funkcija slične su vezama između trigonometrijskih funkcija.

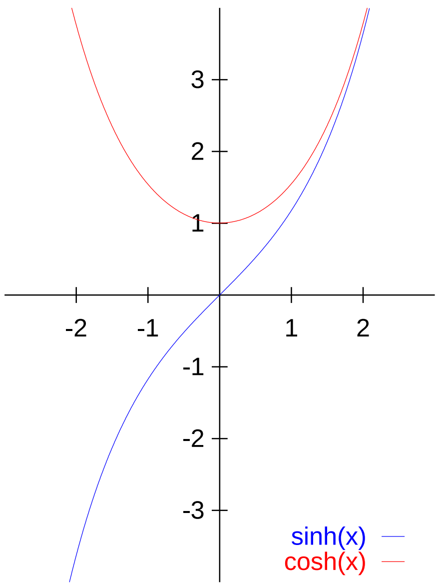
Sinus hiperbolni je funkcija

$$\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

a *kosinus hiperbolni* je funkcija

$$\operatorname{ch} : \mathbb{R} \to [1, +\infty), \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Funkcije $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ prikazane su na slici 4.39.



Slika 4.39: Sinus hiperbolni i kosinus hiperbolni

Vidimo da je sinus hiperbolni neparna, a kosinus hiperbolni parna funkcija te da je sinus hiperbolni strogo rastuća funkcija. Kosinus hiperbolni se još zove i *lančanica*, jer lanac obješen o dvije točke u gravitacijskom polju zauzme oblik dijela te krivulje. Za funkcije $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ vrijedi

$$\begin{aligned} &\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \\ &\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x \\ &\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Zadatak 4.14 Dokažite svojstva (4.11). Usporedite ta svojstva s trigonometrijskim identitetom (4.9) i adicionim teoremima (A3) i (A6). Opišite sličnosti i razlike?

Slično kao kod trigonometrijskih funkcija, *tangens hiperbolni* definiramo kao kvocijent sinusa i kosinusa, a *kotangens hiperbolni* kao kvocijent kosinusa i sinusa, odnosno

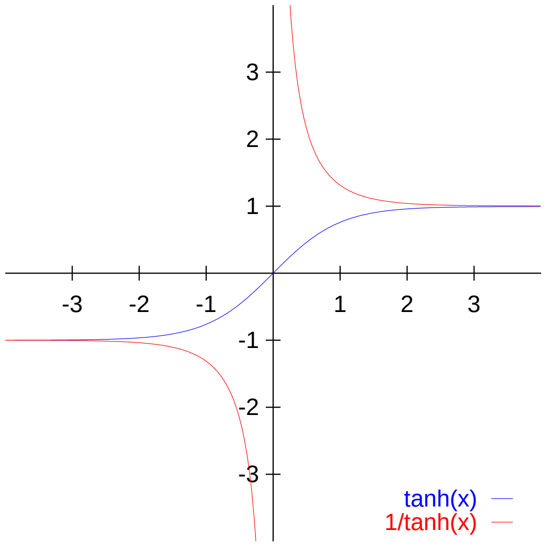
$$\begin{aligned} \operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, &\qquad \operatorname{th} &: \mathbb{R} \to (-1, 1), \\ \operatorname{cth} x &= \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, &\qquad \operatorname{cth} &: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \end{aligned}$$

Funkcije $\operatorname{th} x$ i $\operatorname{cth} x$ prikazane su na slici 4.40. Funkcija $\operatorname{th} x$ je neparna, strogo rastuća i neprekidna te ima horizontalne asimptote $y = -1$ i lijevom i $y = 1$ u desnom kraju. Funkcija $\operatorname{cth} x$ je neparna, strogo padajuća i ima prekid druge vrste u točki $x = 0$. Njene horizontalne asimptote su također pravci $y = -1$ i lijevom i $y = 1$ u desnom kraju, a pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota s obje strane.

Zadatak 4.15 Koristeći svojstva funkcije e^x izračunajte limese

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x, &\qquad &\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x, \\ &\lim_{x \to -\infty} \operatorname{cth} x, &\qquad &\lim_{x \to +\infty} \operatorname{cth} x, \\ &\lim_{x \to 0-0} \operatorname{cth} x, &\qquad &\lim_{x \to 0+0} \operatorname{cth} x. \end{aligned}$$

Area funkcije su inverzne funkcije hiperbolnih funkcija. Primijetimo da su sve hiperbolne funkcije bijekcije, osim $\operatorname{ch} x$ pa za kosinus hiperbolni inverznu funkciju definiramo za restrikciju $\operatorname{ch} |_{[0,+\infty)}$. Funkcije *area sinus hiperbolni*, *area kosinus hiperbolni*, *area tangens hiperbolni* i *area kotangens hiperbolni*



Slika 4.40: Tangens hiperbolni i kotangens hiperbolni

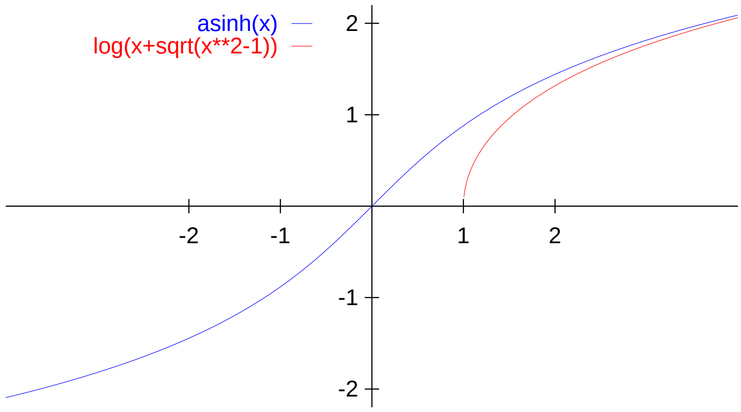
definirane su redom na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arsh} x &= \operatorname{sh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \\
&\quad \operatorname{arsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\
\operatorname{arch} x &= \operatorname{ch}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \\
&\quad \operatorname{arch} : [1, +\infty) \to [0, +\infty), \\
\operatorname{arth} x &= \operatorname{th}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \\
&\quad \operatorname{arth} : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \\
\operatorname{arcth} x &= \operatorname{cth}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \\
&\quad \operatorname{arcth} : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

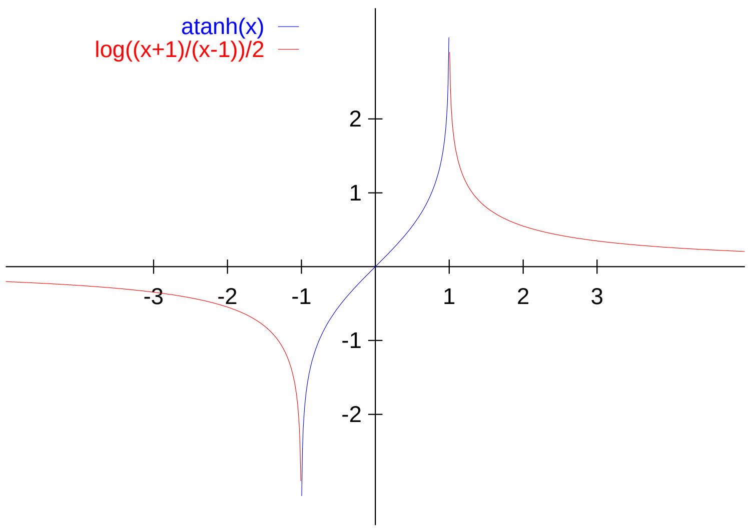
Area funkcije se ponekad označavaju i s velikim početnim slovom kao na primjer $\operatorname{Arsh} x$. Funkcije $\operatorname{arsh} x$ i $\operatorname{arch} x$ prikazane su na slici 4.41, a funkcije $\operatorname{arth} x$ i $\operatorname{arcth} x$ na slici 4.42.

Zadatak 4.16 a) Dokažite da su formule za area funkcije te njihove domene i kodomene zaista dane s odgovarajućim izrazima u (4.12).

b) Koje su horizontalne i vertikalne asimptote funkcija $\operatorname{arth} x$ i $\operatorname{arcth} x$ (vidi



Slika 4.41: Area sinus hiperbolni i area kosinus hiperbolni



Slika 4.42: Area tangens hiperbolni i area kotangens hiperbolni

sliku 4.42)? Dokažite da su to asimptote tako što ćete izračunati odgovarajuće limese.

c) Nacrtajte funkcije

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{sh}(\mathrm{arsh}\, x), & f(x) &= \mathrm{arsh}(\mathrm{sh}\, x),\\
f(x) &= \mathrm{ch}(\mathrm{arch}\, x), & f(x) &= \mathrm{arch}(\mathrm{ch}\, x),\\
f(x) &= \mathrm{th}(\mathrm{arth}\, x), & f(x) &= \mathrm{arth}(\mathrm{th}\, x),\\
f(x) &= \mathrm{cth}(\mathrm{arcth}\, x), & f(x) &= \mathrm{arcth}(\mathrm{cth}\, x).
\end{aligned}$$

5.

DERIVACIJE I PRIMJENE

Ova je glava posvećena derivacijama i njihovim primjenama. To je jedno od najvažnijih područja matematičke analize, još poznato i kao *diferencijalni račun*.

Za derivaciju općenito možemo reći je da je ona mjera promjene. Stoga nam derivacije omogućuju određivanje područja na kojem funkcija raste ili pada, nalaženje točaka u kojima funkcija dostiže najmanju ili najveću vrijednost te određivanje područja na kojima je funkcija konkavna ili konveksna. Rješavanje navedenih zadataka sastavni je dio rješavanja mnogih problema koji se javljaju u inženjerskim primjenama pa je stoga potpuno poznavanje diferencijalnog računa nužno za svakog inženjera.

Klasične primjene zbog kojih se u XVII. stoljeću i razvio diferencijalni račun su nalaženje brzine i ubrzanja (primjer 5.2) i nalaženje jednadžbe tangente (poglavlje 5.1.1).

5.1 Derivacija

U ovom poglavlju definirat ćemo derivaciju te derivacije slijeva i zdesna, izvesti formule za jednadžbe tangente i normale i dati osnovna pravila deriviranja. Potom ćemo izvesti formule za derivacije svih elementarnih funkcija iz poglavlja 4.6.

Definicija 5.1 Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je *derivabilna u točki* $x_0 \in \mathcal{D}$ ako postoji limes

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Broj $f'(x_0)$ je *derivacija funkcije* f *u točki* x_0. $f'(x)$ definirana na ovaj način je također funkcija i vrijedi

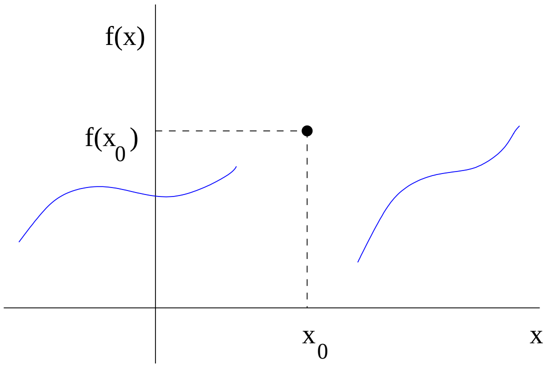
$$f' : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D} \to \mathbb{R}.$$

Ako je $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, tada je funkcija f *derivabilna na skupu* $\mathcal{A}$, a ako je $\mathcal{A} = \mathcal{D}$, tada je f *derivabilna funkcija*. Ako je pored toga funkcija f' neprekidna, tada je f *neprekidno derivabilna* ili *glatka* funkcija.

Definicija limesa 4.5 povlači da u *izoliranoj točki* x_0 derivacija $f'(x_0)$ ne postoji, premda je funkcija f definirana u toj točki (vidi sliku 5.1).

Dokažimo sljedeći važan teorem.

Teorem 5.1 *Ako je funkcija f derivabilna u točki x_0, tada je i neprekidna u toj točki.*



Slika 5.1: Izolirana točka

Dokaz. Derivabilnost funkcije f u točki x_0 povlači

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= f'(x_0)\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Dakle, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, pa je funkcija f neprekidna u točki x_0 po definiciji 4.6. ■

Vidimo da funkcija nema derivaciju u točkama prekida. Obrat teorema ne vrijedi, odnosno ako je funkcija f neprekidna u točki x_0, ne mora imati derivaciju u toj točki (vidi primjer 5.3).

Ako u definiciji 5.1 *prirast nezavisne varijable* u točki x_0 označimo s

$$\Delta x = x - x_0,$$

a *prirast funkcije* $y = f(x)$ u točki x_0 označimo s

$$\Delta f(x_0) \equiv \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0),$$

tada imamo

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kada u ovoj formuli zamijenimo x_0 s x, dobijemo izraz za derivaciju koji je pogodan za primjene,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{5.1}$$

Iz teorema 5.1 slijedi da u definiciji 5.1 i formuli (5.1) brojnik i nazivnik istovremeno teže k nuli, odnosno derivacija je definirana kao limes neodređenog oblika $\frac{0}{0}$. Međutim, takvi neodređeni limesi se mogu izračunati, što nam daje formule za derivacije zadanih funkcija.

Primjer 5.1 a) Za konstantnu funkciju $f(x) = c$ po formuli (5.1) vrijedi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

b) Za funkciju $f(x) = cx$ vrijedi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c(x + \Delta x) - cx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\Delta x}{\Delta x} = c.$$

c) Za funkciju $f(x) = x^2$ vrijedi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

d) Adicioni teoremi (A4) i (A5) povlače

$$\sin(u + t) - \sin(u - t) = 2 \cos u \sin t.$$

Primjena ove formule daje

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin[(x + \frac{\Delta x}{2}) + \frac{\Delta x}{2}] - \sin[(x + \frac{\Delta x}{2}) - \frac{\Delta x}{2}]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

U predzadnjoj jednakosti koristili smo treću tvrdnju teorema 4.3 o limesu produkta, a u zadnjoj jednakosti koristili smo zadatak 4.5.

e) Na sličan način možemo pokazati da je

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Dokažite ovu formulu.

Primijetimo da su po definiciji 5.1 sve ove funkcije glatke, jer su im derivacije neprekidne.

Derivacija je nezaobilazni alat u rješavanju mnogih problema u fizici, mehanici i općenito tehnici. Isaac Newton je u XVII. stoljeću započeo razvijati diferencijalni račun baveći se problemom određivanja brzine.

Primjer 5.2 Neka je s

$$s = f(t)$$

dan zakon prema kojem se točka T giba po pravcu, pri čemu s označava prijeđeni put, a t označava vrijeme. Pretpostavimo da je kretanje započelo iz ishodišta, odnosno $f(0) = 0$. Tada točka T do trenutka t_0 prevali put $s_0 = f(t_0)$, a do trenutka $t > t_0$ put $s = f(t)$. *Prosječna brzina* kojom se točka T gibala u vremenu od trenutka t_0 do trenutka t jednaka je

$$\frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ako je f derivabilna funkcija, tada kada $t \to t_0$ gornji izraz teži k trenutačnoj brzini točke T u trenutku t_0,

$$v_0 = v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s - s_0}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = f'(t_0).$$

Dakle, brzina je derivacija puta po vremenu. Na sličan način možemo pokazati i da je ubrzanje (akceleracija) derivacija brzine po vremenu. Vidimo da u ovom slučaju vrijedi općenita tvrdnja, izrečena na početku poglavlja, o derivaciji kao "mjeri promjene".

5.1.1 Tangenta i normala

Gottfried Wilhelm Leibnitz, filozof i matematičar, u XVII. stoljeću je nezavisno od Newtona razvio osnove diferencijalnog računa rješavajući problem nalaženja tangente zadane krivulje u nekoj točki.

Neka je krivulja zadana s formulom $y = f(x)$, pri čemu je f derivabilna funkcija. *Sekanta* krivulje $y = f(x)$ koja prolazi točkama $(x_0, f(x_0))$ i $(x, f(x))$, pri čemu je $x_0 \neq x$, je pravac s koeficijentom (vidi sliku 5.2)

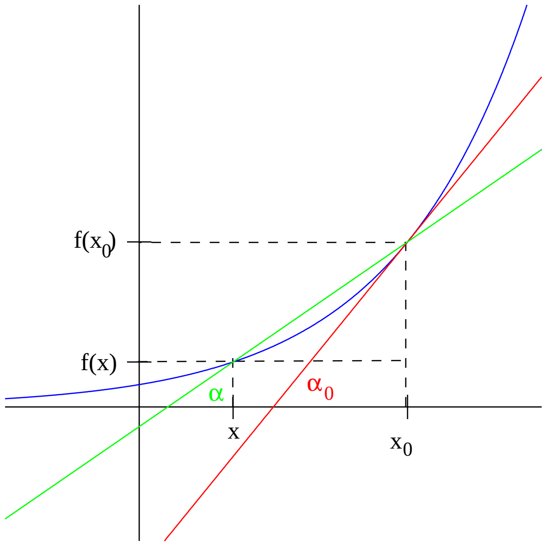
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Kada $x \to x_0$, tada sekanta teži k tangenti krivulje $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$, čiji je koeficijent smjera jednak $\operatorname{tg} \alpha_0$. Očito vrijedi

$$x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha \to \operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0).$$

Stoga je *jednadžba tangente* na krivulju $y = f(x)$ u točki x_0 dana s

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.2}$$



Slika 5.2: Tangenta na krivulju

Normala na krivulju $y = f(x)$ u točki x_0 je pravac koji prolazi kroz točku $(x_0, f(x_0))$ i okomit je na tangentu u toj točki. Jednadžba normale stoga glasi

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

pri čemu smo pretpostavili da je $f'(x_0) \neq 0$.

5.1.2 Derivacije slijeva i zdesna

Ako u definiciji 5.1 ili formuli (5.1) umjesto limesa izračunamo limes slijeva odnosno zdesna (vidi poglavlje 4.3.2), dobit ćemo derivaciju slijeva odnosno zdesna u zadanoj točki.

Definicija 5.2 *Derivacija slijeva* funkcije f u točki x je broj

$$f'(x_-) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

ukoliko limes na desnoj strani postoji. *Derivacija zdesna* funkcije f u točki x je broj

$$f'(x_+) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

ukoliko limes na desnoj strani postoji.

Uspoređujući ovu definiciju s definicijom derivacije (5.1) zaključujemo da derivacija $f'(x)$ postoji ako i samo ako u točki x postoje derivacije slijeva i zdesna i ako su one jednake.

Primjer 5.3 Funkcija $|x|$ (definicija 1.18) je neprekidna, ali je moramo rastaviti kako bi je mogli derivirati:

– za $x \geq 0$ vrijedi $|x| = x$ pa je $|x|' = 1$,

– za $x < 0$ vrijedi $|x| = -x$ pa je $|x|' = -1$.

Dakle,

$$|x|' = \operatorname{sign}(x),$$

pri čemu je funkcija sign definirana u primjeru 4.7 i prikazana na slici 4.10. Vidimo da derivacija $|x|'$ ima u točki $x = 0$ prekid prve vrste te da funkcija $|x|$ ima u točki $x = 0$ derivacije slijeva i zdesna.

5.1.3 Pravila deriviranja

Pravila koja ćemo dati u ovom poglavlju znatno olakšavaju računanje derivacija zadanih funkcija.

Teorem 5.2 *Ako su funkcije $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ derivabilne na skupu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$, tada za svaki $x \in \mathcal{A}$ vrijedi*

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x), \\
(f-g)'(x) &= f'(x) - g'(x), \\
(f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \qquad g(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Dokaz. Dokažimo zadnju tvrdnju teorema. Prema formuli (5.1) vrijedi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} g(x) - f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)} \\
&= \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} g(x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Dokaz prve tri tvrdnje ostavljamo za vježbu. ■

Primjer 5.4 a) Treća tvrdnja teorema 5.2 i primjer 5.1 povlače

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

b) Četvrta tvrdnja teorema 5.2 i primjer 5.1 povlače

$$\begin{aligned}
(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}, \\
(\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} \\
&= -\frac{1}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da po su definiciji 5.1 sve derivirane funkcije glatke, jer su im derivacije neprekidne na čitavom području definicije.

Sljedeća dva teorema navodimo bez dokaza.

Teorem 5.3 (Deriviranje inverzne funkcije) *Neka je funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ bijekcija, neka je derivabilna u točki x i neka je $f'(x) \neq 0$. Neka je inverzna funkcija $f^{-1} : \mathcal{K} \to \mathcal{D}$ neprekidna u točki $y = f(x)$. Tada je*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Primjer 5.5 a) Za funkciju $y = x^2$ koja ima inverznu funkciju za $x \geq 0$ teorem 5.3 daje

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Sada na lijevoj i na desnoj strani imamo funkciju od y pa možemo zamijeniti y s x što nam daje standardni zapis

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad x > 0.$$

Dodatno ograničenje $x \neq 0$ smo morali uvesti jer dijeljenje s nulom nije moguće. Na slici 4.20 vidimo da funkcija $\sqrt{x}$ nema derivaciju u točki $x = 0$.

b) Za funkciju $y = \sin x$ koja ima inverznu funkciju za $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ vrijedi

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

odnosno, nakon zamjene y s x,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Funkcija $\arcsin x$ je definirana na intervalu $[-1, 1]$ (poglavlje 4.6.6), dok njena derivacija nije definirana u rubovima tog intervala kako bi se izbjeglo dijeljenje s nulom.

c) Za funkciju $y = \operatorname{tg} x$ koja ima inverznu funkciju za $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ (vidi sliku 4.38) vrijedi

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2},$$

odnosno, nakon zamjene y s x,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Teorem 5.4 (Deriviranje kompozicije funkcija) *Ako je funkcija f derivabilna u točki x, a funkcija g derivabilna u točki $y = f(x)$, tada je kompozicija $g \circ f$ derivabilna u točki x i vrijedi*

$$[g(f(x))]' = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Ovaj način deriviranja je vrlo čest. Sada ćemo navesti samo dva primjera, a dvije važne primjene dat ćemo u poglavljima o deriviranju implicitno zadane funkcije 5.1.4 i logaritamskom deriviranju 5.1.6.

Primjer 5.6 a) Ako je $y = f(x)$, tada je

$$(y^2)' = 2yy'.$$

Tako iz primjera 5.1 i 5.4 za $y = x^3 - 3x^2 + 5x$ slijedi

$$\begin{aligned}[(x^3 - 3x^2 + 5x)^2]' &= 2(x^3 - 3x^2 + 5x)(x^3 - 3x^2 + 5x)' \\ &= 2(x^3 - 3x^2 + 5x)(3x^2 - 6x + 5).\end{aligned}$$

b) Ako je $y = f(x)$, tada teorem 5.6 i primjer 5.1 povlače

$$(\sin y)' = (\cos y)y'.$$

Tako za funkciju $f(x) = \sin(\cos x)$ vrijedi

$$f'(x) = \cos(\cos x)(\cos x)' = \cos(\cos x)(-\sin x).$$

5.1.4 Deriviranje implicitno zadane funkcije

Implicitno zadanu funkciju $F(x, y) = 0$ deriviramo tako da izraze koji sadrže zavisnu varijablu y deriviramo koristeći Teorem o deriviranju kompozicije 5.4.

Na primjer, želimo odrediti tangentu na elipsu

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

u točki $x = 1$, $y > 0$. Kako su lijeva i desna strana jednadžbe elipse jednake, jednake su im i derivacije. Pored toga, y^2 deriviramo kao u primjeru 5.6. Dakle,

$$\frac{2x}{4} + 2yy' = 0,$$

odnosno

$$y' = -\frac{x}{4y}.$$

Vidimo da smo dobili izraz za derivaciju y' kao funkciju od x i y. Za točku u kojoj tražimo jednadžbu tangente vrijedi

$$y(1) = +\sqrt{1 - \frac{1^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(pozitivnu vrijednost korijena smo uzeli zbog uvjeta $y > 0$) pa je koeficijent smjera tangente dan s

$$y'(1) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

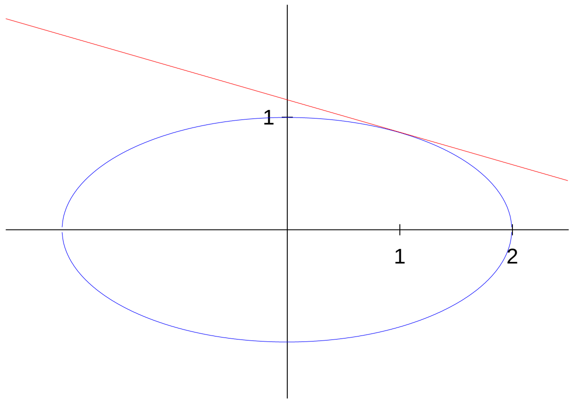
Uvrštavanje u formulu (5.2) nakon sređivanja daje jednadžbu tražene tangente,

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{5.3}$$

Zadana elipsa i njena tangenta prikazane su na slici 5.3.

5.1.5 Derivacije elementarnih funkcija

U ovom poglavlju izvest ćemo derivacije osnovnih elementarnih funkcija iz poglavlja 4.6.



Slika 5.3: Elipsa i tangenta

Trigonometrijske i arkus funkcije

Za trigonometrijske funkcije iz poglavlja 4.6.5 vrijedi:

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x, && x \in \mathbb{R},\\
(\cos x)' &= -\sin x, && x \in \mathbb{R},\\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\},\\
(\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}
$$

Ove formule su dokazane u primjerima 5.1 i 5.4.

Za arkus funkcije definirane u poglavlju 4.6.6 vrijedi (vidi primjer 5.5):

$$
\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, && x \in (-1,1),\\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, && x \in (-1,1),\\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, && x \in \mathbb{R},\\
(\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}, && x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Za eksponencijalnu funkciju definiranu u poglavlju 4.6.3 vrijedi

$$
(a^x)' = a^x \ln a, \qquad a > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{5.4}
$$

Posebno, za $a = e$ zbog $\ln e = 1$ vrijedi

$$(e^x)' = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.5}$$

pa je e^x jedina funkcija koju deriviranje "ne mijenja". Izvod formule je nešto složeniji. Koristeći definiciju derivacije (5.1) i teorem 4.3 imamo

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\ &= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Uvedimo supstituciju $a^{\Delta x} = t + 1$, odnosno

$$\Delta x = \frac{\ln(t+1)}{\ln a},$$

što povlači

$$\Delta x \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \to 0.$$

Koristeći redom teorem 4.3, teorem 4.7 i primjer 4.9 b) imamo

$$\begin{aligned}(a^x)' &= a^x \lim_{t \to 0} \frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}} \\ &= a^x \ln a \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \ln(t+1)} \\ &= a^x \ln a \frac{1}{\lim_{t \to 0} \ln(t+1)^{1/t}} \\ &= a^x \ln a \frac{1}{\ln \left(\lim_{t \to 0} (t+1)^{1/t} \right)} \\ &= a^x \ln a \frac{1}{\ln e} \\ &= a^x \ln a,\end{aligned}$$

što smo i željeli dokazati.

Za logaritamsku funkciju iz poglavlja 4.6.4 vrijedi

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0.$$

Posebno, za $a = e$ imamo

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Zaista, Teorem o deriviranju inverzne funkcije 5.3 i formula (5.4) daju

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Hiperbolne i area funkcije

Derivacije hiperbolnih funkcija iz poglavlja 4.6.9 lako dobijemo pomoću formule (5.5) i osnovnih pravila deriviranja:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x, && x \in \mathbb{R},\\
(\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x, && x \in \mathbb{R},\\
(\operatorname{th} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, && x \in \mathbb{R},\\
(\operatorname{cth} x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Derivacije area funkcija dobijemo primjenjujući Teorem o deriviranju inverzne funkcije 5.3 na formule (5.6):

$$\begin{aligned}
(\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, && x \in \mathbb{R},\\
(\operatorname{arch} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, && x \in (1,+\infty),\\
(\operatorname{arth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}, && x \in (-1,1),\\
(\operatorname{arcth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}, && x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Zadatak 5.1 a) Opišite sličnosti i razlike između derivacija hiperbolnih i area funkcija i derivacija trigonometrijskih i arkus funkcija.

b) Dokažite formule (5.6) i (5.7).

c) Nađite asimptote funkcija u (5.7) i skicirajte te funkcije.

Potencije

Derivacija potencije dana je s

$$(x^r)' = r x^{r-1}, \qquad r \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

Dokažimo ovu formulu: koristeći Teorem o deriviranju kompozicije 5.4 i formule za derivaciju eksponencijalne i logaritamske funkcije imamo

$$(x^r)' = \left(e^{r \ln x}\right)' = e^{r \ln x}(r \ln x)' = x^r r \frac{1}{x} = r x^{r-1}.$$

Formula za derivaciju potencije vrijedi i u svim ostalim slučajevima u kojima je x^r definirano (vidi poglavlje 4.6.2).

Zadatak 5.2 Nađite jednadžbe tangente i normale na krivulju $y = \sqrt[3]{\sin(\ln x)}$ u točki $x = e^{\pi/6}$.

5.1.6 Logaritamsko deriviranje

Logaritamsko deriviranje koristimo za deriviranje funkcija oblika

$$y = h(x) = f(x)^{g(x)}.$$

U onim točkama u kojima derivacija postoji vrijedi

$$\big(f(x)^{g(x)}\big)' = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Postupak kojim se dolazi do derivacije sastoji se od tri koraka koji se lako pamte:

- logaritmiramo obje strane,
- deriviramo obje strane, pri čemu y deriviramo kao složenu funkciju (kompoziciju),
- sredimo dobivenu jednakost.

Ovaj jednostavan postupak ilustrirat ćemo sljedećim primjerom.

Primjer 5.7 Izračunajmo derivaciju funkcije

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Logaritmiranje daje

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln(1+x).$$

Deriviranje obaju strana daje

$$\frac{1}{y}y' = -\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot 1,$$

pri čemu smo $\ln y$ derivirali po teoremu 5.4. Konačno, sređivanje ove jednakosti daje

$$y' = y\left(-\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}\right) = (1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right).$$

Zadatak 5.3 Izračunajte derivacije funkcija

$$y = x^x, \qquad y = x^{x^x}.$$

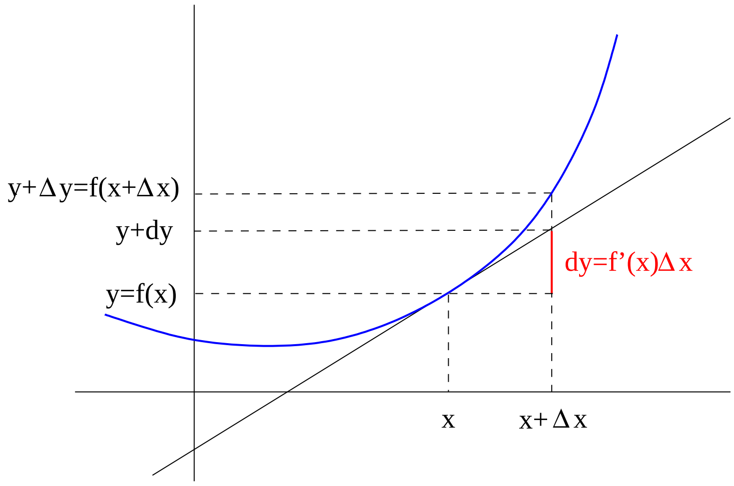
5.2 Diferencijal

Za razliku od derivacije koja daje koeficijent smjera tangenta, diferencijal je linearna aproksimacija prirasta funkcije u okolini neke točke.

Definicija 5.3 Neka je funkcija $y = f(x)$ derivabilna u točki x. *Diferencijal funkcije f u točki x* je izraz

$$dy \equiv df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Geometrijsko značenje diferencijala prikazano je na slici 5.4. Ono slijedi iz definicije tangensa kuta u pravokutnom trokutu $\triangle ABC$ s vrhovima $A = (x, f(x))$, $B = (x + \Delta x, f(x))$ i $C = (x + \Delta x, f(x) + dy)$ jer je $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$.



Slika 5.4: Diferencijal

Iz formule (5.1) i definicije 5.3 slijedi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0,$$

pa zaključujemo da razlika $\Delta y - dy$ teži k nuli brže od Δx. To se također može vidjeti i na slici 5.4.

Isto tako, za dovoljno male Δx vrijedi

$$\Delta y \approx dy. \tag{5.8}$$

Oznaka "$\approx$" znači "približno jednako". Što je "dovoljno malo", a što "približno jednako" zavisi od primjene, Više o tome bit će govora u sljedećem poglavlju.

Diferencijal se lako računa pomoću derivacija. Tako je, na primjer,

$$d\sin x \equiv d(\sin x) = (\sin x)'\Delta x = \cos x\Delta x.$$

Također,

$$dx \equiv d(x) = (x)'\Delta x = \Delta x.$$

Iz ove jednakosti i definicije diferencijala slijedi

$$dy = f'(x)dx, \tag{5.9}$$

odnosno

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \tag{5.10}$$

što je još jedan način zapisivanja derivacije (usporedite formule (5.10) i (5.1)). Formule (5.8) i (5.10) zapravo znače da krivulju možemo dobro aproksimirati s njenom tangentom za dovoljno male vrijednosti od Δx.

Svojstva diferencijala slična su svojstvima derivacija iz teorema 5.2.

Teorem 5.5 *Ako su funkcije $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ derivabilne na skupu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$, tada u svakoj točki $x \in \mathcal{A}$ vrijedi*

$$\begin{aligned} d(f+g) &= df + dg, \\ d(f-g) &= df - dg, \\ d(f\cdot g) &= df\cdot g + f\cdot dg, \\ d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{df\cdot g - f\cdot dg}{g^2}, \qquad g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Dokaz. Dokažimo, na primjer, treću tvrdnju teorema. Koristeći teorem 5.2 imamo

$$d(f\cdot g) = (f\cdot g)'dx = (f'\cdot g + f\cdot g')dx = f'dx\cdot g + f\cdot g'dx = df\cdot g + f\cdot dg.$$

Ostale tvrdnje lako se dokažu na sličan način. ■

5.2.1 Približno računanje

Jedna od važnih primjena diferencijala je približno računanje. Neka smo vrijednost nezavisne varijable x izmjerili s pogreškom koja po apsolutnoj vrijednosti ne prelazi neki Δx. Ako pomoću tako izračunatog x računamo vrijednost funkcije $y = f(x)$, tada po (5.8) *apsolutna pogreška* u tako izračunatoj vrijednosti funkcije približno iznosi

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)\Delta x|,$$

dok *relativna pogreška* iznosi

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}.$$

Ovo je krasna ideja, uz uvjet da znamo preciznije kazati što znači "≈".

Primjer 5.8 Izračunajmo približno $\sqrt[4]{84}$ koristeći činjenicu da je $\sqrt[4]{81} = 3$. Vrijedi

$$\sqrt[4]{84} = \sqrt[4]{81+3} = 3\sqrt[4]{1+\frac{1}{27}}.$$

Definirajmo funkciju

$$f(x) = 3\sqrt[4]{1+x}$$

i odaberimo $x_0 = 0$ i $\Delta x = 1/27$. Koristeći diferencijal imamo

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{84} &= f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ &= f(x_0) + \frac{3}{4}(1+x_0)^{-\frac{3}{4}}\Delta x = 3 + \frac{3}{4}\cdot 1 \cdot \frac{1}{27} = 3.02\dot{7}.\end{aligned}$$

Točna vrijednost na četiri decimale je 3.0274 pa smo u ovom slučaju uz vrlo jednostavne operacije dobili dobru aproksimaciju izbjegavši pri tome računanje četvrtog korijena.

Pri računanju $\sqrt[4]{84}$ zaporavo smo koristili prva dva člana Taylorovog reda odabrane funkcije. Taylorov red je tema kojom se bavi poglavlje 6.5 pa će tamo također biti više riječi o ocjeni pogreške prilikom ovakvog približnog računanja.

5.3 Više derivacije i diferencijali

Neka je $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ zadana funkcija. Njena derivacija $f' : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je također funkcija pa je možemo derivirati. *Druga derivacija* funkcije f je derivacija funkcije f', odnosno

$$f'' \equiv (f')' : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D} \to \mathbb{R}.$$

Indukcijom definiramo *n-tu derivaciju* funkcije f kao derivaciju njene $(n-1)$-ve derivacije,

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Primjer 5.9 a) Za više derivacije funkcije $y = e^{kx}$ vrijedi

$$\begin{aligned}y' &= e^{kx}\cdot k = ke^{kx}, \\ y'' &= ke^{kx}\cdot k = k^2e^{kx}, \\ y''' &= k^2e^{kx}\cdot k = k^3e^{kx},\end{aligned}$$

pa indukcijom zaključujemo da je n-ta derivacija jednaka

$$y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

b) Za polinom

$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

vrijedi

$$\begin{aligned}
y' &= 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1, \\
y'' &= 6a_3x + 2a_2, \\
y''' &= 6a_3, \\
y^{IV} &= 0, \\
y^{V} &= 0, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Lako vidimo da općenito za polinom n-tog stupnja $p_n(x)$ vrijedi

$$p_n^{(k)}(x) = 0, \qquad k > n.$$

Diferencijale višeg reda definiramo analogno. Neka je $y = f(x)$ dva puta derivabilna funkcija. *Diferencijal drugog reda funkcije* f je diferencijal njenog diferencijala dy, odnosno

$$d^2f \equiv d^2y = d(dy).$$

Pri tome prema formuli (5.9) vrijedi

$$d^2y = d(dy) = (dy)'dx = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)dx^2.$$

Primijetimo da se ovdje prilikom deriviranja dx tretira kao konstanta.

Iz ove formule slijedi još jedan koristan izraz za drugu derivaciju:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}. \tag{5.11}$$

Nadalje, ako je $y = f(x)$ n puta derivabilna funkcija, tada je *diferencijal n-tog reda* funkcije f dan s

$$d^nf \equiv d^ny = d(d^{n-1})y = f^{(n)}dx^n.$$

5.4 Deriviranje parametarski zadane funkcije

Jedna od važnih primjena diferencijala je deriviranje parametarski zadanih funkcija. Derivaciju parametarski zadane funkcije

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad t \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R},$$

računamo pomoću formule (5.10):

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\psi(t))}{d(\varphi(t))} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Često se koristi i kraći zapis

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \qquad \dot{y} = \psi'(t), \quad \dot{x} = \varphi'(t),$$

pri čemu y' označava deriviranje po nezavisnoj varijabli x, a $\dot{x}$ i $\dot{y}$ označava deriviranje po parametru.

Primjer 5.10 Odredimo tangentu na krivulju zadanu s

$$x = 2\cos t, \quad y = \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

u točki $x = 1$, $y > 0$. Ovo je parametarski zadana elipsa iz poglavlja 5.1.4 koja je prikazana na slici 5.3. Formula (5.10) daje

$$y' = \frac{\cos t}{-2\sin t}.$$

Odredimo t: iz $x = 1 = \cos t$ slijedi $\cos t = 1/2$ pa je $t = \pi/3$ ili $t = -\pi/3$. Uvjet $y > 0$ povlači $t = \pi/3$ i $y = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$. Dakle,

$$y'(1) = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{-2\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{\frac{1}{2}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

pa je jednadžba tražene tangente dana s (5.3).

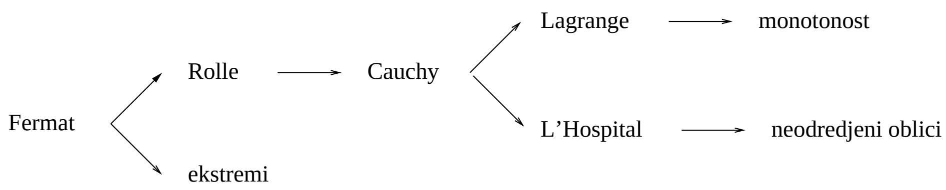
Formulu za drugu derivaciju parametarski zadane funkcije također dobijemo primjenom formule (5.10):

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\dot{x}dt} = \frac{\frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}dt}{\dot{x}dt} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

Ovu formulu smo također mogli izvesti koristeći formulu (5.11).

5.5 Teoremi diferencijalnog računa

U ovom poglavlju dokazat ćemo osnovne teoreme diferencijalnog računa. To su Fermatov teorem, Rolleov teorem, Cauchyjev teorem, Lagrangeov teorem i L'Hospitalov teorem (L'Hospitalovo pravilo). Fermatov teorem služi za ispitivanje ekstrema (poglavlje 5.7) i za dokazivanje Rolleovog teorema. Rolleov teorem služi za dokazivanje Cauchyjevog teorema srednje vrijednosti. Lagrangeov teorem slijedi iz Cauchyjevog teorema i služi za dokazivanje Teorema o monotonosti (poglavlje 5.6). Cauchyjev teorem služi za dokazivanje L'Hospitalovog pravila, a L'Hospitalovo pravilo služi za nalaženje limesa u slučaju neodređenih oblika. Odnose između navedenih teorema možemo prikazati i shematski:



5.5.1 Fermatov i Rolleov teorem

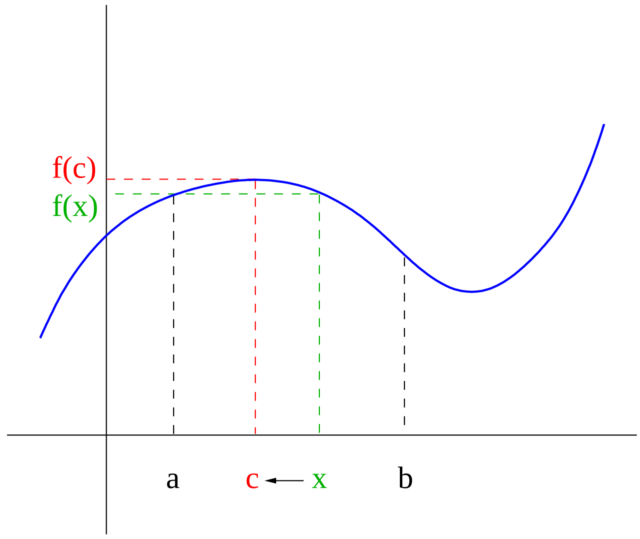
Teorem 5.6 (Fermat) *Neka funkcija f poprima u točki $c \in (a,b) \subseteq \mathcal{D}$ svoju najmanju ili najveću vrijednost na intervalu (a,b). Ako derivacija u točki c postoji, tada je $f'(c) = 0$.*

Dokaz. Dokažimo teorem za slučaj da funkcija f u točki c poprima najveću vrijednost na intervalu (a,b) (dokaz u slučaju najmanje vrijednosti je sličan). Ako f nije derivabilna u točki c, tada je teorem dokazan. Ako $f'(c)$ postoji, tada u točki $x = c$ postoje i derivacije slijeva i zdesna i one su jednake. Vrijedi (vidi sliku 5.5):

$$
\begin{aligned}
f'(c_-) &= \lim_{x\to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \left(\frac{-}{-}\right) \geq 0,\\
f'(c_+) &= \lim_{x\to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \left(\frac{-}{+}\right) \leq 0.
\end{aligned}
$$

Kako su ova dva limesa jednaka, oba moraju biti jednaka nuli pa je $f'(c) = 0$.
■

Odabir otvorenog intervala u iskazu Fermatovog teorema je važan stoga što je u slučaju zatvorenog intervala moguće da funkcija poprima najmanju ili najveću vrijednost u točki koja se nalazi u intervalu, a u kojoj derivacija nije nula: ako na primjeru sa slike 5.5 promatramo zatvoreni interval $[a,b]$, tada



Slika 5.5: Fermatov teorem

funkcija svoju najmanju vrijednost na tom intervalu dostiže upravo u točki b u kojoj je očito $f'(b) \neq 0$.

Posljedica Fermatovog teorema je i sljedeći korolar.

Korolar 5.1 *Funkcija f može imati ekstrem u točki $x \in \mathcal{D}$ samo ako nije derivabilna u x (odnosno, ako f' ne postoji u x) ili ako je $f'(x) = 0$.*

Više govora o ekstremima bit će u poglavlju 5.7.

Teorem 5.7 (Rolle) *Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, derivabilna na otvorenom intervalu (a, b) te neka je $f(a) = f(b)$. Tada postoji točka $c \in (a, b)$ takva da je $f'(c) = 0$.*

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja. Ako je funkcija f konstantna na intervalu $[a, b]$, odnosno $f(x) = k$, $\forall x \in [a, b]$, tada je $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$ pa je teorem dokazan. Ako f nije konstantna, tada ona poprima svoju najveću ili najmanju vrijednost na intervalu (a, b) u nekoj točki $c \in (a, b)$ pa tvrdnja slijedi iz Fermatovog teorema 5.6. ■

5.5.2 Cauchyjev i Lagrangeov teorem srednje vrijednosti

Teorem 5.8 (Cauchy) *Neka su funkcije f i g neprekidne na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i derivabilne na otvorenom intervalu (a, b) te neka je $g'(x) \neq 0$*

za svaki $x \in (a, b)$*. Tada postoji točka* $c \in (a, b)$ *takva da je*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dokaz. Pretpostavka $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in (a, b)$ povlači da je $g(a) \neq g(b)$. Naime, ako bi vrijedilo $g(a) = g(b)$, tada bi po Rolleovom teoremu postojala točka x iz intervala (a, b) za koju je $g'(x) = 0$. Sada možemo definirati funkciju

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Funkcija F je dobro definirana jer je nazivnik u gornjem izrazu različit od nule. Očito vrijedi $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ i $F(a) = F(b) = 0$. Nadalje, kako su f i g neprekidne na intervalu $[a, b]$ i derivabilne na intervalu (a, b), takva je i F. Funkcija F stoga ispunjava pretpostavke Rolleovog teorema 5.7 pa postoji točka $c \in (a, b)$ takva da je $F'(c) = 0$. Dakle,

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c),$$

i teorem je dokazan. ∎

Ako u Cauchyjevom teoremu odaberemo $g(x) = x$, tada je $g'(x) = 1$ i $g(b) - g(a) = b - a$ pa imamo sljedeći važan teorem.

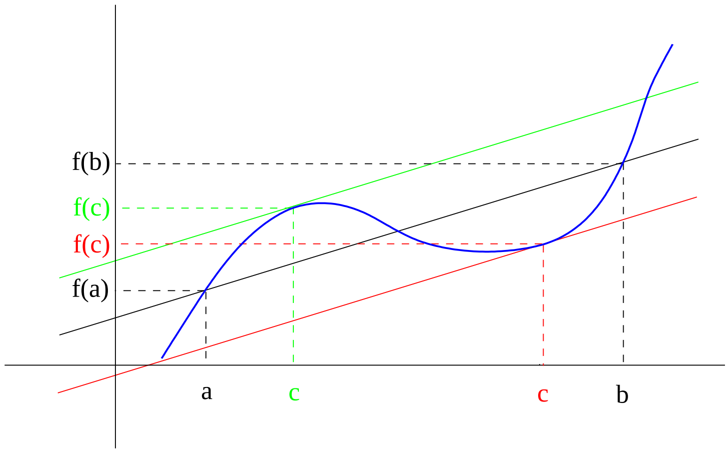
Teorem 5.9 (Lagrange) *Neka je funkcija* f *neprekidna na zatvorenom intervalu* $[a, b]$ *i derivabilna na otvorenom intervalu* (a, b)*. Tada postoji točka* $c \in (a, b)$ *takva da je*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Lagrangeov teorem ima zanimljivu geometrijsku interpretaciju koja je prikazana na slici 5.6. Vrijednost

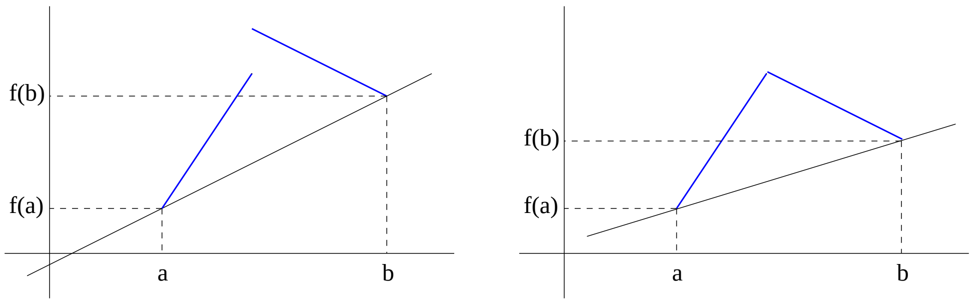
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

je koeficijent smjera sekante koja prolazi kroz točke $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$, a vrijednost $f'(c)$ je koeficijent smjera tangente kroz točku $C = (c, f(c))$. Lagrangeov teorem dakle znači da (ako su ispunjene pretpostavke) postoji točka u kojoj je tangenta paralelna sa sekantom. Zbog toga se često za oba teorema u ovom poglavlju koristi i naziv *Teorem srednje vrijednosti.* Primijetimo da Lagrangeov teorem samo kaže da točka c postoji. To ne isključuje mogućnost da postoji više takvih točaka, kao što je slučaj na slici 5.6. Može li postojati beskonačno takvih točaka?



Slika 5.6: Geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema

Da bi bolje razumjeli Lagrangeov teorem, važno je uočiti zbog čega su važne pretpostavke da je f neprekidna na intervalu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu (a, b). Ukoliko f nije neprekidna, tada je moguća situacija kao na slici 5.7 a) pa tražena točka c ne postoji. Ukoliko je f neprekidna ali nije derivabilna, tada je moguća situacija kao na slici 5.7 b) pa tražena točka c opet ne postoji.



a) b)

Slika 5.7: Pretpostavke Lagrangeovog teorema

Tvrdnju Lagrangeovog teorema možemo zapisati na još nekoliko načina. Često se koristi zapis

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Uz oznaku

$$\vartheta \equiv \frac{c-a}{b-a}$$

vrijedi

$$c = a + \vartheta(b - a), \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

pa se Lagrangeov teorem često zapisuje u obliku

$$f(b) - f(a) = f'(a + \vartheta(b - a))(b - a), \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Dalje, koristeći oznake $a = x$ i $b = x + \Delta x$ možemo pisati

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \vartheta \Delta x)\Delta x, \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

5.5.3 L'Hospitalovo pravilo i računanje limesa neodređenih oblika

Kod računanja limesa može se pojaviti jedan od sedam *neodređenih oblika*,

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$$

Neodređeni oblici $0/0$ i ∞/∞ rješavaju se pomoću L'Hospitalovog pravila, a ostali neodređeni oblici se pomoću odgovarajućih transformacija svode na jedan od ova dva oblika (vidi primjer 5.11).

Teorem 5.10 (L'Hospitalovo pravilo) *Neka za funkcije $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to c} g(x) = 0,$$

pri čemu je $c \in (a, b) \subseteq \mathcal{D}$. Neka su f i g neprekidne na skupu $[a, b]$ i neprekidno derivabilne na skupu $(a, c) \cup (c, b)$. Neka je $g(x) \neq 0$ za svaki $x \in (a, c) \cup (c, b)$. Ako postoji $\lim_{x \to c} f'(x)/g'(x) = k$, pri čemu je $k \in \mathbb{R}$ ili $k = +\infty$ ili $k = -\infty$, tada je

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Dokaz. Kako su f i g neprekidne, to je $f(c) = g(c) = 0$ pa je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}.$$

Za svaki $x \in (a, c) \cup (c, b)$ funkcije f i g ispunjavaju pretpostavke Cauchyjevog teorema 5.8 na intervalu $[x, c]$ ako je $x < c$, odnosno $[c, x]$ ako je $x > c$. Po Cauchyjevom teoremu postoji točka $\bar{x} \in (x, c)$, odnosno $\bar{x} \in (c, x)$, za koju je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})}.$$

Prijelaz na limes kada $x \to c$ i korištenje činjenice da $\bar{x} \to c$ čim $x \to c$, daje

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = \lim_{\bar{x} \to c} \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = k,$$

i teorem je dokazan. ■

Važno je uočiti da pretpostavke L'Hospitalovog teorema traže samo da limes $\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x)$ postoji, a ne da je $g'(c) \neq 0$. Ukoliko dodatno vrijedi $g'(c) \neq 0$, odnosno $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada možemo iskoristiti teorem 4.3 pa dokaz L'Hospitalovog teorema postaje još jednostavniji:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \lim_{x \to c} \frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \frac{\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\lim_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Napomena 5.1 (i) L'Hospitalovo pravilo vijedi i kada $x \to +\infty$ ili $x \to -\infty$, za neodređeni oblik ∞/∞ te za limese i derivacije slijeva ili zdesna.

(ii) L'Hospitalovo pravilo se može primijeniti više puta uzastopce ako se ponovo dobije jedan od neodređenih oblika $0/0$ ili ∞/∞ te ako nove funkcije ispunjavaju uvjete teorema 5.12 ili neke njegove varijante iz prethodne točke (vidi primjer 5.11).

(iii) Ostali neodređeni oblici se pogodnim transformacijama mogu svesti na jedan od oblika $0/0$ ili ∞/∞ (vidi primjer 5.11).

Primjer 5.11 a) Limes kojeg smo izračunali u primjeru 4.6 možemo još jednostavnije izračunati pomoću L'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

b) U sljedećem slučaju L'Hospitalovo pravilo moramo primijeniti dva puta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Iz ovog primjera indukcijom možemo zaključiti da **eksponencijalna funkcija s bazom većom od 1 raste brže od bilo koje potencije!**

c) U ovom primjeru potrebno je izvršiti nekoliko transformacija. Izračunajmo

$$\lim_{x \to 0+0} x^x = \left(0^0\right) = \lim_{x \to 0+0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x\to 0+0} x \ln x}.$$

U zadnjoj jednakosti koristili smo neprekidnost funkcije e^x i teorem 4.7 (vidi primjer 4.9). Izračunajmo limes u eksponentu posebno:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+0} x\ln x &= (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0+0} x = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, traženi limes je

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = e^0 = 1.$$

d) Sljedeći primjer također možemo primijeniti na široku klasu zadataka:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) &= (\infty-\infty) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}\right) \\
&= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}} \\
&= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

5.6 Monotonost

Predznak derivacije nam također kazuje da li funkcija raste ili pada na nekom intervalu. Pojam rastuće i padajuće (monotone) funkcije dan je u definiciji 4.3. U dokazu sljedećeg teorema koristit ćemo Lagrangeov teorem srednje vrijednosti 5.9.

Teorem 5.11 *Neka je funkcija f derivabilna na intervalu (a, b). Tada vrijedi:*

(i) funkcija f je rastuća na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$;

(ii) funkcija f je padajuća na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a, b)$;

(iii) ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo rastuća na intervalu (a, b);

(iv) ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo padajuća na intervalu (a, b).

Dokaz. Dokažimo prvu tvrdnju, pri čemu treba dokazati oba smjera.

Neka je f rastuća i derivabilna na intervalu (a, b). Trebamo dokazati da je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$. Odaberimo proizvoljni $x \in (a, b)$. Kako je f rastuća, za $\Delta x < 0$ vrijedi $f(x + \Delta x) \leq f(x)$ pa je

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

S druge strane, za $\Delta x > 0$ vrijedi $f(x + \Delta x) \geq f(x)$ pa je

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Kako je f derivabilna, to je

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Točka x je bila proizvoljno odabrana pa zaključujemo da je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$.

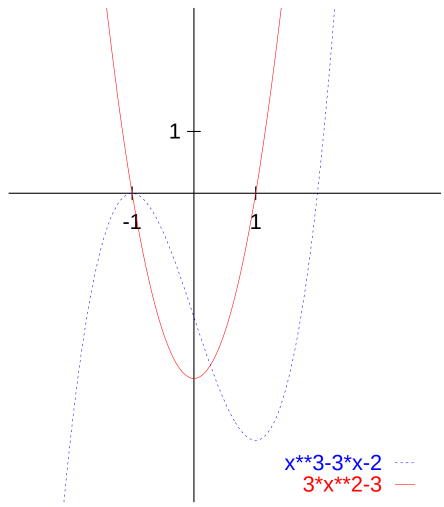
Dokažimo drugi smjer. Neka je f derivabilna na intervalu (a, b) i neka je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$. Trebamo dokazati da je f rastuća po definiciji 4.3. Odaberimo dvije točke $x_1, x_2 \in (a, b)$, takve da je $x_1 < x_2$. Po Lagrangeovom teoremu 5.9 postoji točka $c \in (x_1, x_2)$ takva da je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0.$$

Kako je $x_2 - x_1 > 0$, zaključujemo da je nužno $f(x_2) \geq f(x_1)$, odnosno f je rastuća na intervalu (a, b). S ovim smo dokazali prvu tvrdnju teorema. Dokaz ostalih tvrdnji je sličan. ■

Dok prve dvije tvrdnje teorema vrijede u jednom i u drugom smjeru (ako i samo ako), zadnje dvije tvrdnje vrijede samo u jednom smjeru. Kao primjer zašto kod tih tvrdnji ne vrijedi drugi smjer, možemo uzeti funkciju $y = x^3$ koja je strogo rastuća na čitavom skupu $\mathbb{R}$, ali je $y'(0) = 0$.

Primjer 5.12 Odredimo intervale monotonosti funkcije $f(x) = x^3 - 3x - 2$. Vrijedi $f'(x) = 3x^2 - 3$. Stoga funkcija f raste za $3x^2 - 3 \geq 0$. Nakon rješavanja nejednadžbe zaključujemo da je f rastuća na intervalima $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$. Štoviše, pošto u prethodnoj nejednakosti jednakost vrijedi samo za $x = -1$ i $x = 1$, zaključujemo da je na tim intervalima f strogo rastuća. Slično, funkcija f pada za $3x^2 - 3 \leq 0$, odnosno f je strogo padajuća na intervalu $(-1, 1)$. Funkcija f i njena derivacija prikazane su na slici 5.8.



Slika 5.8: Intervali monotonosti

5.7 Ekstremi

Kod ekstrema razlikujemo lokalne i globalne ekstreme. Za ispitivanje lokalnih ekstrema koristimo Fermatov teorem 5.6 i Teorem o monotonosti 5.11.

U definiciji lokalnih ekstrema te u iskazima i dokazima teorema o ekstremima, koristimo pojam ε-okoline: *ε-okolina točke x* je interval $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ pri čemu je $\varepsilon > 0$.

Definicija 5.4 (i) Funkcija f ima *lokalni minimum* $f(c)$ u točki $c \in \mathcal{D}$ ako postoji ε-okolina točke c takva da je f neprekidna na toj okolini i pri tome vrijedi $f(x) > f(c)$ za svaki $x \in (c-\varepsilon, c) \cup (c, c+\varepsilon)$.

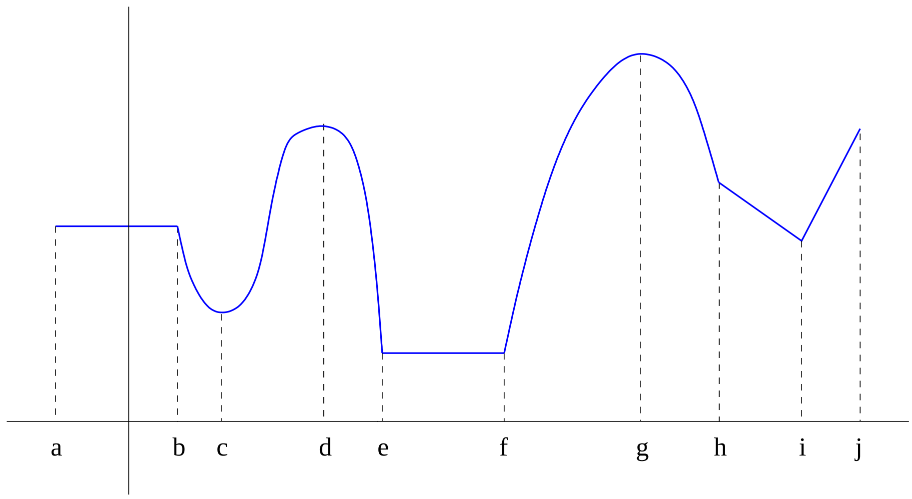
(ii) Funkcija f ima *lokalni maksimum* $f(c)$ u točki $c \in \mathcal{D}$ ako postoji ε-okolina točke c takva da je f neprekidna na toj okolini i pri tome vrijedi $f(x) < f(c)$ za svaki $x \in (c-\varepsilon, c) \cup (c, c+\varepsilon)$.

(iii) Funkcija f ima *globalni minimum* $f(c)$ u točki $c \in \mathcal{D}$ ako je $f(x) \geq f(c)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.

(iv) Funkcija f ima *globalni maksimum* $f(c)$ u točki $c \in \mathcal{D}$ ako je $f(x) \leq f(c)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.

Razlike između lokalnih i globalnih ekstrema prikazane su na slici 5.9. Kod lokalnih ekstrema se traži da je vrijednost funkcije u točki ekstrema strogo najmanja ili najveća na nekoj okolini. S druge strane, definicija globalnih ekstrema dozvoljava da se globalni ekstrem nalazi u više točaka pa čak i na nekom intervalu. Na primjer, za prikazanu funkciju $f : [a, j] :\to \mathbb{R}$ vrijedi sljedeće:

- ni jedna točka u intervalu $[a, b]$ nije ni lokalni, niti globalni ekstrem;
- u točki c funkcija ima lokalni minimum, ali ne i globalni minimum;
- u točki d funkcija ima lokalni maksimum, ali ne i globalni maksimum;
- sve točke u intervalu $[e, f]$ su točke globalnog minimuma, a ni jedna nije točka lokalnog minimuma;
- u točki g funkcija istovremeno ima lokalni i globalni maksimum;
- u točki i funkcija ima lokalni minimum.



Slika 5.9: Lokalni i globalni ekstremi

Za iskazivanje teorema koji daju uvjete za postojanje ekstrema, potrebna nam je sljedeća definicija.

Definicija 5.5 Neka je funkcija f neprekidna u točki c. Točka c je *stacionarna točka* funkcije f ako je $f'(c) = 0$. Točka c je *kritična točka* funkcije f ako je c stacionarna točka ili ako f nije derivabilna u točki c.

Na primjer, za funkciju prikazanu na slici 5.9 stacionarne točke su sve točke u intervalima (a, b) i (e, f) te točke c, d i g. Kritične točke su sve navedene točke te još točke a, b, e, f, h i i.

Razlikujemo dvije vrste uvjeta za postojanje lokalnog ekstrema u nekoj točki: *nužan uvjet* je uvjet kojeg ispunjava svaka točka u kojoj funkcija ima lokalni ekstrem; *dovoljan uvjet* je uvjet koji znači da funkcija u nekoj točki ima lokalni ekstrem čim je taj uvjet ispunjen.

Teorem 5.12 (Nužan uvjet za postojanje ekstrema) *Neka je funkcija f neprekidna u točki c. Ako funkcija f ima lokalni ekstrem u točki c, tada je c kritična točka funkcije f.*

Dokaz. Ako funkcija f nije derivabilna u točki c, tada je teorem dokazan (nemamo što dokazivati). Ako je f derivabilna u točki c i ima lokalni ekstrem u toj točki, tada po definiciji 5.4 funkcija f ima u točki c najveću ili najmanju vijednost na nekoj ε-okolini točke c. Sada po Fermatovom teoremu 5.6 vrijedi $f'(c) = 0$. ■

Na primjer, vidimo da su točke c, d, g i i u kojima funkcija prikazana na slici 5.9 ima lokalne ekstreme ujedno i kritične točke te funkcije. S druge strane, vidimo da teorem 5.12 daje samo nužan, a ne i dovoljan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema, jer funkcija nema lokalne ekstreme u ostalim kritičnim točkama.

Teorem 5.12 ćemo ilustrirati još jednim primjerom.

Primjer 5.13 a) Funkcija $f(x) = x^2$ ima lokalni (i globalni) minimum u točki $x = 0$. Teorem 5.12 vrijedi jer je $f'(x) = 2x$ pa je $f'(0) = 0$.

b) Funkcija $f(x) = |x|$ ima lokalni (i globalni) minimum u točki $x = 0$. Teorem 5.12 vrijedi jer je funkcije nije derivabilna u točki 0.

c) Za funkciju $f(x) = x^3$ vrijedi $f'(x) = 3x^2$ pa je $f'(0) = 0$. Međutim, $f(0)$ nije lokalni ekstrem pa vidimo da obrat teorema 5.12 ne vrijedi, odnosno teorem daje samo nužan uvjet za postojanje ekstrema.

Za iskazivanje teorema koji daju dovoljne uvjete za postojanje ekstrema, potrebna nam je sljedeća definicija.

Definicija 5.6 Funkcija f *mijenja predznak u točki* c, ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da su vrijednosti funkcije f na intervalu $(c-\varepsilon, c)$ stalnog i suprotnog predznaka od vrijednosti te funkcije na intervalu $(c, c+\varepsilon)$.

Primijetimo da funkcija može mijenjati predznak u nekoj točki, a da pri tome nije definirana u toj točki.

Teorem 5.13 (Dovoljan uvjet za postojanje ekstrema) *Ako prva derivacija f' mijenja predznak u kritičnoj točki c, tada funkcija f ima lokalni ekstrem u točki c. Pri tome vrijedi sljedeće: ako f' mijenja predznak s $-$ na $+$, tada je $f(c)$ lokalni minimum, a ako f' mijenja predznak s $+$ na $-$, tada je $f(c)$ lokalni maksimum.*

Dokaz. Ako derivacija f' mijenja predznak s $-$ na $+$, tada po teoremu 5.11 funkcija f strogo pada na intervalu $(c-\varepsilon, c)$ i strogo raste na intervalu $(c, c+\varepsilon)$. Stoga funkcija f ima u točki c lokalni minimum po definiciji 5.4. Ako derivacija f' mijenja predznak s $+$ na $-$, tada na sličan način zaključujemo da funkcija f ima u točki c lokalni maksimum. ■

Na primjer, funkcije iz primjera 5.13 a) i b) ispunjavaju uvjete teorema, dok funkcija iz primjera 5.13 c) te uvjete ne ispunjava.

Dovoljan uvjet za postojanje ekstrema možemo izraziti i pomoću druge derivacije.

Teorem 5.14 (Dovoljan uvjet za postojanje ekstrema) *Neka je u stacionarnoj točki c funkcija f dva puta derivabilna. Ako je $f''(c) \neq 0$, tada funkcija f ima lokalni ekstrem u točki c. Pri tome vrijedi sljedeće: ako je $f''(c) > 0$, tada je $f(c)$ lokalni minimum, a ako je $f''(c) < 0$, tada je $f(c)$ lokalni maksimum.*

Dokaz. Druga derivacija f je derivacija prve derivacije pa pretpostavka da $f''(c)$ postoji zbog definicije 5.1 znači da prva derivacija f' postoji ne samo u točki c, već i u nekoj ε-okolini točke c. Neka je $f''(c) > 0$. Tada vrijedi

$$0 < f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c}.$$

Zadnja jednakost vrijedi jer je c stacionarna točka pa je $f'(c) = 0$. Za $x < c$ je $x - c < 0$ pa gornja nejednakost povlači $f'(x) < 0$. Za $x > c$ je $x - c > 0$ pa gornja nejednakost povlači $f'(x) > 0$. Dakle, prva derivacija f' mijenja predznak u točki c i to s $-$ na $+$ pa po teoremu 5.13 funkcija f ima lokalni minimum u točki c. Slično se dokaže da za $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$ funkcija f ima u točki c lokalni maksimum. ■

Prethodni dokaz možemo riječima iskazati i na sljedeći način: ako je $f''(c) > 0$, tada je f'' veća od nule i na nekoj okolini točke c. To znači da je prva derivacija f' strogo rastuća na toj okolini. Kako je $f'(c) = 0$, zaključujemo da je f' negativna lijevo od točke c i pozitivna desno do točke c. To pak znači da funkcija f strogo pada lijevo od točke c, a strogo raste desno od točke c pa je c točka lokalnog minimuma.

Na primjer, funkcija $f(x) = x^2$ ispunjava uvjete teorema 5.14 u točki $x = 0$, jer je $f'(0) = 0$, a $f''(0) = 2 > 0$ pa se u točki $x = 0$ nalazi lokalni minimum. S druge strane, teorem ne možemo primijeniti na funkciju $f(x) = |x|$ u točki $x = 0$, jer nije derivabilna u toj točki. Teorem također ne možemo primijeniti niti na funkciju $f(x) = x^3$ u točki $x = 0$, jer je $f'(0) = 0$ i $f''(0) = 0$. U tom slučaju možemo koristiti više derivacije (vidi teorem 5.18).

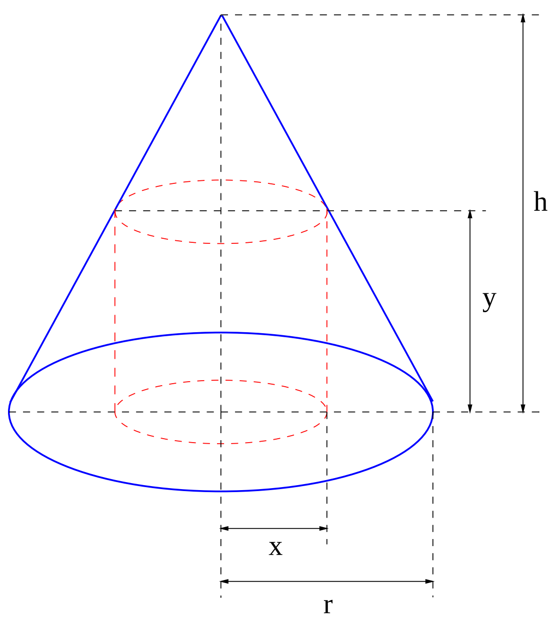
5.7.1 Geometrijski ekstrem

U ovom poglavlju objasnit ćemo postupak traženje globalnih ekstrema u slučaju kada su u problemu koji rješavamo zadana neka ograničenja. Ograničenja se često javljaju prilikom rješavanja geometrijskih i fizikalnih problema pa odatle i naziv *geometrijski ekstrem*.

Riješimo sljedeći zadatak: od svih valjaka koje možemo upisati u zadani stožac visine h i radijusa baze r, na način da donja baza valjka leži na bazi stošca, nađimo onaj koji ima najveći volumen.

Stožac i valjak prikazani su na slici 5.10. Volumen traženog valjka je

$$V = yx^2\pi.$$



Slika 5.10: Valjak upisan u stožac

Naš cilj je izraziti volumen kao funkciju jedne varijable te naći njen maksimum uz zadani uvjet da se valjak nalazi unutar stošca. Sličnost trokuta daje

$$\frac{r-x}{y}=\frac{r}{h},$$

odnosno

$$y=(r-x)\frac{h}{r}.$$

Dakle,

$$V=V(x)=(r-x)\frac{h}{r}x^2\pi.$$

$V(x)$ je neprekidna funkcija, a u našem zadatku x poprima vrijednosti u intervalu $[0,r]$. Po teoremu 4.8 neprekidna funkcija poprima na zatvorenom intervalu svoj maksimum i minimum pa zadani problem sigurno ima rješenje. Pored toga, vrijedi $V(0)=0$ i $V(r)=0$, što se također vidi sa slike. Potražimo lokalne ekstreme funkcije $V(x)$. Vrijedi

$$V'(x)=\pi\frac{h}{r}(2x(r-x)+x^2(-1))=\pi\frac{h}{r}x(-3x+2r).$$

Jednadžba $V'(x)=0$ ima dva rješenja, $x=0$ i $x=2r/3$. Prvo rješenje nije rješenje našeg zadatka, jer je $V(0)=0$. Kako je $V'(x)>0$ za $x\in(0,2r/3)$ i $V'(x)<0$ za $x\in(2r/3,r)$, zaključujemo da je $x=2r/3$ točka lokalnog maksimuma. Iz istog razloga zaključujemo da je $x=2r/3$ ujedno i točka globalnog maksimuma promatrane funkcije na intervalu $[0,r]$. Dakle, traženi valjak ima radijus $x=2r/3$, visinu $y=h/3$ i volumen

$$V=\frac{4}{27}r^2h\pi.$$

Ovisnost volumena upisanog valjka o njegovom radijusu prikazana je na slici 5.11.

5.8 Zakrivljenost

U ovom poglavlju opisat ćemo postupak za ispitivanje zakrivljenosti funkcije, pri čemu važnu ulogu ima druga derivacija zadane funkcije.

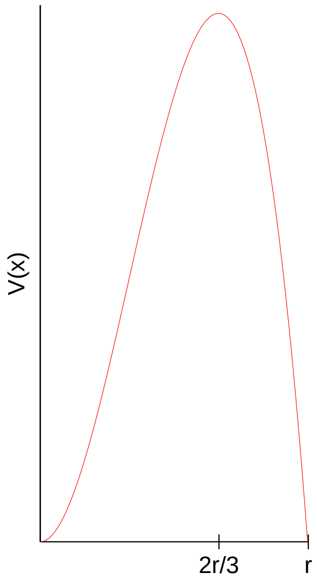
Definicija 5.7 Funkcija f je *konveksna* na intervalu $(a,b)\subseteq\mathcal{D}$ ako za proizvoljne točke $x_1,x_2\in(a,b)$ takve da je $x_1\neq x_2$ vrijedi

$$f(t\,x_1+(1-t)\,x_2)\leq t\,f(x_1)+(1-t)\,f(x_2),\qquad t\in(0,1).$$

Slično, funkcija f je *konkavna* na intervalu $(a,b)\subseteq\mathcal{D}$ ako za proizvoljne točke $x_1,x_2\in(a,b)$ takve da je $x_1\neq x_2$ vrijedi

$$f(t\,x_1+(1-t)\,x_2)\geq t\,f(x_1)+(1-t)\,f(x_2),\qquad t\in(0,1).$$

U slučaju strogih nejednakosti, funkcija f je *strogo konveksna* odnosno *strogo konkavna*.



Slika 5.11: Volumen upisanog valjka

Strogo konveksna funkcija prikazana je na slici 5.12. Na istoj slici je prikazano i geometrijsko značenje definicije 5.7. Funkcija prikazana na slici 5.13 a) je konkavna, ali ne i strogo konkavna, dok je funkcija na slici 5.13 b) istovremeno i konveksna i konkavna.

Napomena 5.2 Za graf konveksne funkcije vrijedi sljedeće:

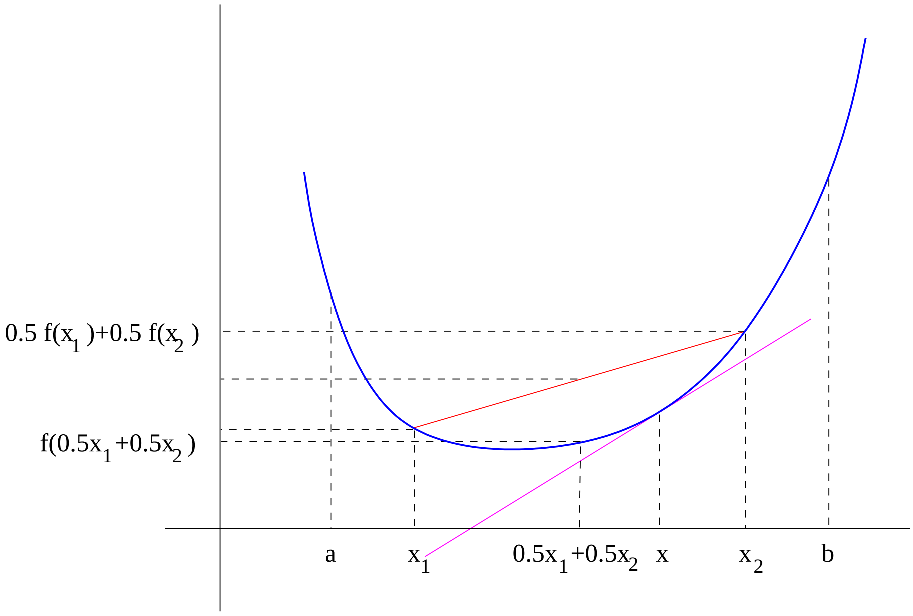
a) graf zakreće na gore na intervalu (a, b);

b) u svakoj točki $x \in (a, b)$ graf se nalazi iznad tangente u toj točki (vidi sliku 5.12);

c) za proizvoljne točke $x_1, x_2 \in (a, b)$ takve da je $x_1 < x_2$, graf restrikcije $f\,|_{[x_1,x_2]}$ nalazi se ispod spojnice točaka $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ (vidi sliku 5.12);

d) ako je funkcija f derivabilna na intervalu (a, b), tada je f (strogo) konveksna na intervalu (a, b) ako i samo ako je derivacija f' (strogo) rastuća na intervalu (a, b).

Zadatak 5.4 Kako glase tvrdnje analogne onima iz napomene 5.2 za konkavne funkcije?



Slika 5.12: Strogo konveksna funkcija

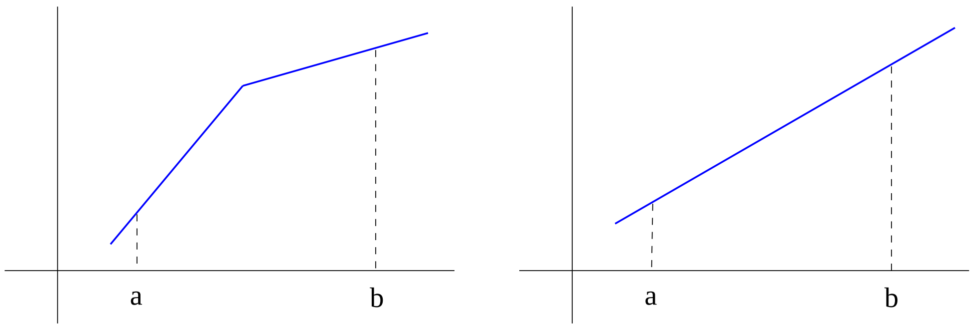
Teorem 5.15 (Dovoljan uvjet zakrivljenosti) *Neka je funkcija f dva puta derivabilna na intervalu (a,b). Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (a,b)$, tada je funkcija f strogo konveksna na intervalu (a,b). Ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in (a,b)$, tada je funkcija f strogo konkavna na intervalu (a,b).*

Dokaz. Kako f'' postoji na intervalu (a,b), to po definiciji derivacije na tom intervalu postoji i prva derivacija f'. Dokažimo prvu tvrdnju teorema. Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (a,b)$, tada je po teoremu 5.11 prva derivacija f' strogo rastuća na tom intervalu pa je funkcija f konveksna po napomeni 5.2 d). Dokaz druge tvrdnje je sličan. ■

Ovaj teorem daje samo dovoljan, ali ne i nužan uvjet zakrivljenosti. Na primjer, funkcija $f(x) = x^4$ je konveksna na čitavom skupu $\mathbb{R}$, ali je $f''(0) = 0$.

U proučavanju funkcija zanimaju nas točke u kojima se zakrivljenost mijenja.

Definicija 5.8 Glatka funkcija f ima *infleksiju* u točki c ako postoji ε-okolina točke c, $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \in \mathcal{D}$, takva da je f strogo konveksna na intervalu $(c-\varepsilon, c)$ i strogo konkavna na intervalu $(c, c+\varepsilon)$ ili obrnuto. Točka $(c, f(c))$ je *točka infleksije* grafa funkcije f.



a) b)

Slika 5.13: Konkavna i konveksna funkcija

Teorem 5.16 (Nužan uvjet za postojanje infleksije) *Ako funkcija f ima infleksiju u točki c i ako $f''(c)$ postoji, tada je $f''(c) = 0$.*

Dokaz. Kako $f''(c)$ postoji, definicija derivacije 5.1 povlači da prva derivacija f' postoji u nekoj okolini točke c. Također, kako je f' derivabilna u točki c, to je i neprekidna u točki c. Neka funkcija f ima infleksiju u točki c i to tako da je, na primjer, strogo konveksna lijevo od točke c i strogo konkavna desno od točke c. To po napomeni 5.2 d) znači da je f' strogo rastuća lijevo od točke c i strogo padajuća desno od točke c, odnosno f' ima lokalni maksimum u točki c. No tada je $f''(c) = 0$ po teoremu 5.12. ■

Prethodni teorem daje samo nužan, ali ne i dovoljan uvjet za postojanje infleksije. Na primjer, za funkcije $f(x) = x^3$ i $f(x) = x^4$ vrijedi $f''(0) = 0$, a samo prva funkcija ima infleksiju u točki $x = 0$, dok druga nema.

Teorem 5.17 (Dovoljan uvjet za postojanje infleksije) *Neka je funkcija dva puta derivabilna na nekoj ε-okolini točke c, osim možda u točki c. Ako f'' mijenja predznak u točki c, tada funkcija f ima infleksiju u točki c.*

Dokaz. Neka f'' mijenja predznak u točki c. Tada je po teoremu 5.15 funkcija f konveksna lijevo od točke c, a konkavna desno od točke c, ili obrnuto pa stoga ima infleksiju u točki c. ■

Na primjer, za funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$ vrijedi

$$f''(x) = (-2)\cos^{-3} x(-\sin x), \qquad f''(0) = 0.$$

Očito je $f''(x) < 0$ za $-\pi/2 < x < 0$ i $f''(x) > 0$ za $0 < x < \pi/2$. Dakle, funkcija $\operatorname{tg} x$ je po teoremu 5.15 konkavna za $-\pi/2 < x < 0$ i konveksna za $0 < x < \pi/2$, pa ima infleksiju u točki $x = 0$.

Konačno, za ispitivanje lokalnih ekstrema i točaka infleksije možemo koristiti i više derivacije. Sljedeći važan teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 5.18 *Neka funkcija f ima u nekoj ε-okolini točke c neprekidne derivacije do uključivo reda n, pri čemu je $n \geq 3$. Neka je*

$$f''(c) = f'''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0, \qquad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Ako je n neparan, tada funkcija f ima infleksiju u točki c. Ako je n paran i ako je uz to još i $f'(c) = 0$, tada funkcija f ima lokalni ekstrem u točki c i to minimum za $f^{(n)}(c) > 0$ i maksimum za $f^{(n)}(c) < 0$.

Primjer 5.14 a) Za funkciju $f(x) = x^4$ vrijedi $f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{IV}(0) = 24 \neq 0$. Kako je $f'(0) = 0$ i $f^{IV}(0) > 0$, zadana funkcija ima po teoremu 5.18 lokalni minimum u točki $x = 0$.

b) Za funkciju $f(x) = x^5$ vrijedi $f''(0) = f'''(0) = f^{IV}(0) = 0$, $f^{V}(0) = 120 \neq 0$. Kako je $n = 5$ neparan, iz teorema 5.18 slijedi da zadana funkcija ima infleksiju u točki $x = 0$. U ovom slučaju radi se o "horizontalnoj infleksiji", jer je $f'(0) = 0$, odnosno tangenta u točki infleksije je paralelna s x-osi.

c) Za funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$ vrijedi $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 2 \neq 0$ pa je po teoremu 5.18 točka $x = 0$ točka infleksije. U ovom slučaju radi se o "kosoj infleksiji", jer je $f'(0) = 1$, odnosno tangenta u točki infleksije zatvara s x-osi kut od $\pi/4$.

Zadatak 5.5 Ispitajte područja konveksnosti i konkavnosti te nađite točke infleksije i lokalne ekstreme funkcija $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{arctg} x$. Kod točaka infleksije utvrdite da li se radi o horizontalnim ili kosim infleksijama.

5.9 Ispitivanje toka funkcije

Ispitivanje toka funkcije je složen postupak u kojem se primjenjuje sve što je do sada rečeno o funkcijama i derivacijama. Ispitivanje funkcije $y = f(x)$ sastoji se od sljedećih koraka:

1. **Područje definicije** – potrebno je poznavati elementarne funkcije iz poglavlja 4.6 i postupke za rješavanje jednadžbi ili nejednadžbi.

2. **Parnost** – provjerava se pomoću definicije 4.2.

3. **Periodičnost** – provjerava se pomoću definicije 4.4. Pri tome je važno uočiti da elementarna funkcija (vidi poglavlje 4.6.7) ne može biti periodična ako ne sadrži neku od trigonometrijskih funkcija.

4. **Nul-točke** – postupak se sastoji od rješavanja jednadžbe $f(x) = 0$.

5. **Asimptote (vertikalne, horizontalne i kose)** – postupak koji je opisan u poglavlju 4.5 sastoji se od nalaženje limesa te primjene L'Hospitalovog pravila iz poglavlja 5.5.3 ukoliko je to potrebno. Pri tome je nužno voditi računa o sljedećem:

   a) asimptote je najbolje tražiti u opisanom redoslijedu,

   b) kod traženja horizontalnih i kosih asimptota limese kada $x \to -\infty$ i kada $x \to +\infty$ uvijek treba računati posebno,

   c) treba biti oprezan u slučaju parnih korijena kada $x \to -\infty$, na primjer

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = -1.$$

6. **Ekstremi** – potrebno je provjeriti nužne i dovoljne uvjeta ekstrema. Provjera nužnih uvjeta vrši se po teoremu 5.12. Potrebno je naći stacionarne i kritične točke po definiciji 5.5, odnosno potrebno je odrediti područje definicije prve derivacije f' i riješiti jednadžbu $f'(x) = 0$. Provjera dovoljnih uvjeta ekstrema može se vršiti na tri načina:

   a) pomoću promjene predznaka prve derivacije (teorem 5.13),

   b) pomoću druge derivacije (teorem 5.14) ili

   c) pomoću viših derivacija (teorem 5.18).

7. **Intervali monotonosti** – nakon što smo u prethodnoj točki izračunali prvu derivaciju f', intervale monotonosti određujemo promatrajući predznake od f' po teoremu 5.11.

8. **Intervali zakrivljenosti** – prvo je potrebno izračunati drugu derivaciju f''. Potom intervale konveksnosti i konkavnosti možemo odrediti pomoću teorema 5.15 promatrajući predznake od f''. Također možemo pogledati gdje prva derivacija f' raste, a gdje pada i primijeniti napomenu 5.2 d).

9. **Točke infleksije** – potrebno je naći točke u kojima druga derivacija f'' mijenja predznak, odnosno točke koje ispunjavaju dovoljne uvjete infleksije po teoremu 5.17. Za provjeru dovoljnih uvjeta infleksije možemo koristiti i više derivacije po teoremu 5.18. U tom slučaju potrebno je prvo naći točke u kojima je druga derivacija f'' jednaka nuli, odnosno točke koje zadovoljavaju nužan uvjet infleksije po teoremu 5.16.

10. **Graf funkcije** – potrebno je sve do sada dobivene informacije o funkciji spojiti u suvislu sliku. Prilikom crtanja grafa moguće je otkriti nelogičnosti, odnosno pogreške u prethodnom računu te ih ispraviti.

Kao primjer, ispitat ćemo tok i nacrtati graf funkcije

$$y = f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}.$$

1. **Područje definicije**
   Domena funkcije je $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2. **Parnost**
   Vrijedi $f(-1) = \sqrt[3]{2+1} = \sqrt[3]{3}$, dok je $f(1) = \sqrt[3]{2-1} = \sqrt[3]{1} = 1$. Zaključujemo da funkcija nije ni parna ni neparna jer je $f(-x) \neq f(x)$ i $f(-x) \neq -f(x)$.

3. **Periodičnost**
   Funkcija nije periodična, jer je elementarna, a ne sadrži neku od trigonometrijskih funkcija.

4. **Nul-točke**
   Riješimo jednadžbu $y = 0$. Vrijedi

   $$\sqrt[3]{2x^2 - x^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(2-x) = 0$$

   pa su nul-točke jednake $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$.

5. **Asimptote**

   a) **Vertikalne asimptote**
   Funkcija nema vertikalnih asimptota jer je $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

   b) **Horizontalne asimptote**
   U lijevoj strani vrijedi

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{2x^2 - x^3} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x} - 1\right)} \\ &= \lim_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = (-\infty)\cdot(-1) = +\infty\end{aligned}$$

   pa funkcija nema horizontalnu asimptotu u lijevoj strani. U desnoj strani vrijedi

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{2x^2 - x^3} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x} - 1\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = (+\infty)\cdot(-1) = -\infty\end{aligned}$$

   pa funkcija nema horizontalnu asimptotu ni u desnoj strani. Dakle, funkcija nema horizontalnih asimptota, no dobili smo korisne informacije.

c) **Kose asimptote**
U lijevoj strani vrijedi

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2x^2-x^3}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}=-1\equiv k.$$

Dalje,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}f(x)-kx&=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x=(+\infty-\infty)\\&=\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1\right)\\=(-\infty\cdot 0)&\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}-1\right)^{-2/3}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{2}{x}-1\right)^{-2/3}=\frac{2}{3}\equiv l.\end{aligned}$$

Dakle, pravac $y=-x+\frac{2}{3}$ je kosa asimptota u lijevoj strani. U desnoj strani vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{2x^2-x^3}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}=-1\equiv k.$$

Dalje,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)-kx&=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x=(-\infty+\infty)\\&=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1\right)=(+\infty\cdot 0)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}-1\right)^{-2/3}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{2}{x}-1\right)^{-2/3}=\frac{2}{3}\equiv l.\end{aligned}$$

Dakle, pravac $y=-x+\frac{2}{3}$ je kosa asimptota i u desnoj strani.

6. **Ekstremi**
   Izračunajmo prvu derivaciju:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - x^3)^{-2/3}(4x - 3x^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x(4-3x)}{\sqrt[3]{x^4(2-x)^2}}.$$

   Područje definicije derivacije jednako je $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Dakle, dvije kritične točke funkcije su $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$. Za $x \in \mathcal{D}_{f'}$ možemo skratiti x u brojniku i nazivniku, odnosno vrijedi

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4-3x}{\sqrt[3]{x(2-x)^2}}.$$

   Vidimo da je stacionarna točka (treća kritična točka) jednaka $x_3 = 4/3$. Dakle, imamo tri točke koje zadovoljavaju nužan uvjet ekstrema, odnosno u kojima funkcija može imati lokalne ekstreme. Dovoljne uvjete ekstrema provjerit ćemo pomoću prve derivacije, odnosno provjerit ćemo da li u kritičnim točkama prva derivacija mijenja predznak. Imamo tri slučaja:

   (i) Za $x < 0$ je brojnik veći od nule, a nazivnik manji of nule pa je $f'(x) < 0$. Drugim riječima, funkcija f je strogo padajuća na intervalu $(-\infty, 0)$.

   (ii) Za $x \in (0, 4/3)$ su i brojnik i nazivnik veći od nule, pa je $f'(x) > 0$. Drugim riječima, funkcija f je strogo rastuća na intervalu $(0, 4/3)$.

   (iii) Za $x > 4/3$ je brojnik manji od nule, a nazivnik veći od nule pa je $f'(x) < 0$. Drugim riječima, funkcija f je strogo padajuća na intervalu $(4/3, +\infty)$.

   Iz prethodnog razmatranja možemo zaključiti sljedeće:

   a) Iz (i) i (ii) slijedi da funkcija ima lokalni minimum u kritičnoj točki $x_1 = 0$. Vrijednost lokalnog minimuma je $f(0) = 0$.

   b) Iz (ii) i (iii) slijedi da funkcija ima lokalni maksimum u kritičnoj točki $x_3 = 4/3$. Vrijednost lokalnog maksimuma je $f(4/3) = 2\sqrt[3]{4}/3$.

   c) Iz (iii) također slijedi da funkcija nema lokalni ekstrem u kritičnoj točki $x_2 = 2$, jer prva derivacija ne mijenja predznak u toj točki, odnosno funkcija je strogo padajuća s obje strane te točke.

   Funkcija nema globalni maksimum ni globalni minimum jer je kodomena jednaka $\mathbb{R}$.

7. **Intervali monotonosti**
   Monotonost smo već ispitali u prethodnoj točki: funkcija je strogo padajuća na intervalima $(-\infty, 0)$ i $(4/3, +\infty)$, a strogo rastuća na intervalu $(0, 4/3)$.

8. **Intervali zakrivljenosti**
   Izračunajmo drugu derivaciju:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-3\sqrt[3]{x(2-x)^2} - \frac{4-3x}{3[x(2-x)^2]^{2/3}}[(2-x)^2 + x \cdot 2(2-x)(-1)]}{\sqrt[3]{x^2(2-x)^4}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{-3(x(2-x)^2) - \frac{1}{3}(4-3x)(2-x)(2-3x)}{\sqrt[3]{x^4(2-x)^8}} \\
&= \frac{-8}{9\sqrt[3]{x^4(2-x)^5}}.
\end{aligned}
$$

   Vidimo da je predznak od f'' obrnut od predznaka izraza $2-x$. Dakle, za $x<2$ je $f''(x)<0$ pa je funkcija f konkavna po teoremu 5.15. Za $x>2$ je $f''(x)>0$ pa je funkcija f konveksna po teoremu 5.15.

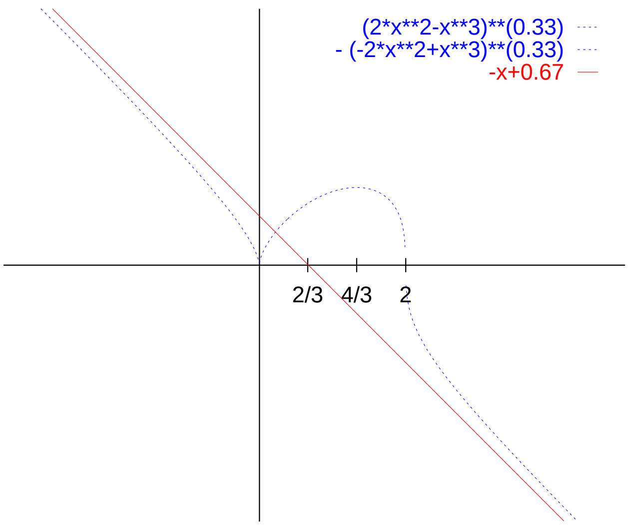
9. **Točke infleksije**
   Iz razmatranja zakrivljenosti u prethodnoj točki, po teoremu 5.17 zaključujemo da je $x=2$ jedina točka infleksije funkcije f.

10. **Graf funkcije**
    Kombinirajući sve prethodne rezultate dobijemo graf zadane funkcije i njene kose asimptote, koji je prikazan na slici 5.14. Kako je slika nacrtana pomoću programa Gnuplot, funkciju smo morali nacrtati iz dva dijela, kao što je objašnjeno u napomeni 4.8.

Zadatak 5.6 Ispitajte tok i skicirajte grafove sljedećih funkcija:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1-\ln x}{x^2}, \\
f(x) &= \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right), \\
f(x) &= \sqrt{x^2-1} \cdot \ln\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \\
f(x) &= x^{2/3}(1+x)^3, \\
f(x) &= (x-1)e^{\frac{x+1}{x-1}}, \\
f(x) &= e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}, \\
f(x) &= xe^{-\frac{x}{4}+\frac{3}{4x}}.
\end{aligned}
$$

Rješenja provjerite tako što ćete funkcije nacrtati pomoću programa NetPlot.



Slika 5.14: Graf iracionalne funkcije

5.9.1 Parametarski zadana funkcija

Postupak opisan u prethodnim poglavljima se, uz odgovarajuće izmjene, može primijeniti i za ispitivanje toka parametarski zadane funkcije. Međutim, kako su kod parametarski zadanih funkcija varijable x i y ravnopravne, postupak ispitivanja takvih funkcija može biti složeniji od ispitivanja eksplicitno zadanih funkcija.

Ispitivanje toka parametarski zadane funkcije ilustrirat ćemo na primjeru Descartesovog lista iz primjera 4.2, 4.4 i 4.12, koji je u parametarskom obliku zadan s

$$x = x(t) = \frac{3\,t^2}{t^3+1}, \qquad y = y(t) = \frac{3\,t}{t^3+1}.$$

1. **Područje definicije**
   Funkcija je definirana za $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Primijetimo da za ove vrijednosti parametra t, varijable x i y poprimaju sve vrijednosti iz skupa $\mathbb{R}$.

2. **Parnost**
   Kako kod implicitno zadane funkcije jednoj vrijednosti varijable x može odgovarati više vrijednosti varijable y, to definicija parne i neparne funkcije na način dan u definiciji 4.2 nema smisla. Kod parametarski zadanih funkcija ima smisla koristiti sljedeću definiciju: funkcija je *parna* ako je njen graf simetričan s obzirom na y-os, a *neparna* ako je njen graf simetričan s

obzirom na ishodište. Primijetimo da je ova definicija uključuje definiciju 4.2.

Ispitajmo parnost zadane funkcije po prethodnoj definiciji. Pretpostavimo da je funkcija parna. Ako je točka $(x(t), y(t))$ element grafa funkcije, tada je i točka $(-x(t), y(t))$ također element grafa funkcije. No, tada postoji $t_1 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ takav da je $(-x(t), y(t)) = (x(t_1), y(t_1))$. Uvrštavanje u definiciju funkcije daje

$$-x(t) \equiv -\frac{3\,t^2}{t^3+1} = \frac{3\,t_1^2}{t_1^3+1} \equiv x(t_1), \qquad y(t) \equiv \frac{3\,t}{t^3+1} = \frac{3\,t_1}{t_1^3+1} \equiv y(t_1).$$

Gornje jednakosti su ispunjene samo za $t = t_1 = 0$. Naime, za $t, t_1 \neq 0$ gornje jednakosti povlače

$$-\frac{3\,t^2}{3\,t_1^2} = \frac{3\,t}{3\,t_1} = \frac{t^3+1}{t_1^3+1}.$$

Nakon kraćenja prva jednakost povlači $-t/t_1 = 1$, odnosno $t_1 = -t$. Uvrštavanje u drugu jednakost daje $-1 = (t^3+1)/(-t^3+1)$, odnosno $t^3 - 1 = t^3 + 1$ što je nemoguće pa zaključujemo da funkcije nije parna.

Pretpostavimo sada da je funkcija neparna. Ako je točka $(x(t), y(t))$ element grafa funkcije, tada je i točka $(-x(t), -y(t))$ također element grafa funkcije. No, tada postoji $t_1 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ takav da je $(-x(t), -y(t)) = (x(t_1), y(t_1))$. Uvrštavanje u definiciju funkcije daje

$$-x(t) \equiv -\frac{3\,t^2}{t^3+1} = \frac{3\,t_1^2}{t_1^3+1} \equiv x(t_1), \qquad -y(t) \equiv -\frac{3\,t}{t^3+1} = \frac{3\,t_1}{t_1^3+1} \equiv y(t_1).$$

Kao i u prethodnom slučaju, gornje jednakosti su ispunjene samo za $t = t_1 = 0$. Naime, za $t, t_1 \neq 0$ gornje jednakosti povlače

$$-\frac{3\,t^2}{3\,t_1^2} = -\frac{3\,t}{3\,t_1} = \frac{t^3+1}{t_1^3+1}.$$

Nakon kraćenja prva jednakost povlači $t/t_1 = 1$, odnosno $t_1 = t$. Uvrštavanje u drugu jednakost daje $-1 = (t^3+1)/(t^3+1)$, što je nemoguće pa zaključujemo da funkcije nije neparna.

3. **Periodičnost**
   Funkcija nije periodična, jer su x i y zadane pomoću elementarnih funkcija, a ne sadrže neku od trigonometrijskih funkcija.

4. **Nul-točke**
   Jednadžba $x(t) = 0$ povlači $t = 0$, a jednadžba $y(t) = 0$ također povlači $t = 0$ pa je ishodište jedina nul-točka funkcije.

5. **Asimptote**

   a) **Vertikalne asimptote**
   Funkcija nema vertikalnih asimptota jer je $x \in \mathbb{R}$.

   b) **Horizontalne asimptote**
   U primjeru 4.12 smo pokazali da $x \to -\infty$ kada $t \to -1-0$. No,

$$\lim_{t\to -1-0} y(t) = \lim_{t\to -1-0} \frac{3\,t}{t^3+1} = \frac{3\,(-1)}{(-1-0)^3+1} = \frac{-3}{-0} = +\infty$$

   pa funkcija nema horizontalnu asimptotu u lijevoj strani. Slično, $x \to +\infty$ kada $t \to -1+0$. Kako je

$$\lim_{t\to -1+0} y(t) = \lim_{t\to -1+0} \frac{3\,t}{t^3+1} = \frac{3\,(-1)}{(-1+0)^3+1} = \frac{-3}{+0} = -\infty,$$

   zaključujemo da funkcija nema horizontalnu asimptotu ni u desnoj strani.

   c) **Kose asimptote**
   U primjeru 4.12 smo pokazali da je pravac $y = -x - 1$ kosa asimptota u obje strane.

6. **Ekstremi**
   Za razliku od implicitno zadane funkcije, kod parametarski zadane funkcije su varijable x i y ravnopravne pa možemo imati dvije vrste lokalnih ekstrema:

   a) lokalni ekstrem po x, odnosno lokalno najmanji ili najveći y i

   b) lokalni ekstrem po y, odnosno lokalno najmanji ili najveći x.

   Ekstreme po x i po y također tražimo pomoću prve i viših derivacija kako je opisano u poglavlju 5.7, odnosno koristeći teoreme 5.12, 5.13, 5.14 i 5.18. Pri tome derivacije y'_x i x'_y, kao i više derivacije, računamo po pravilima o deriviranju parametarski zadanih funkcija iz poglavlja 5.4:

$$y'_x = \frac{\dot y}{\dot x}, \qquad x'_y = \frac{\dot x}{\dot y}, \qquad y''_x = \frac{\ddot y \dot x - \dot y \ddot x}{\dot x^3}.$$

   Zbog složenosti postupka, kod ispitivanje ekstrema i monotonosti potrebno je voditi računa o mnogim detaljima.

   Nađimo ekstreme po x. Vrijedi

$$\dot x(t) = \frac{6\,t\,(t^3+1) - 3\,t^2 \cdot 3\,t^2}{(t^3+1)^2} = \frac{3\,t\,(-t^3+2)}{(t^3+1)^2},$$

$$\dot y(t) = \frac{3\,(t^3+1) - 3\,t \cdot 3\,t^2}{(t^3+1)^2} = \frac{3\,(-2\,t^3+1)}{(t^3+1)^2}.$$

Dakle,

$$y'_x = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\frac{3\,(t^3+1)-3\,t\cdot 3\,t^2}{(t^3+1)^2}}{\frac{6\,t\,(t^3+1)-3\,t^2\cdot 3\,t^2}{(t^3+1)^2}} = \frac{-2\,t^3+1}{t\,(-t^3+2)}.$$

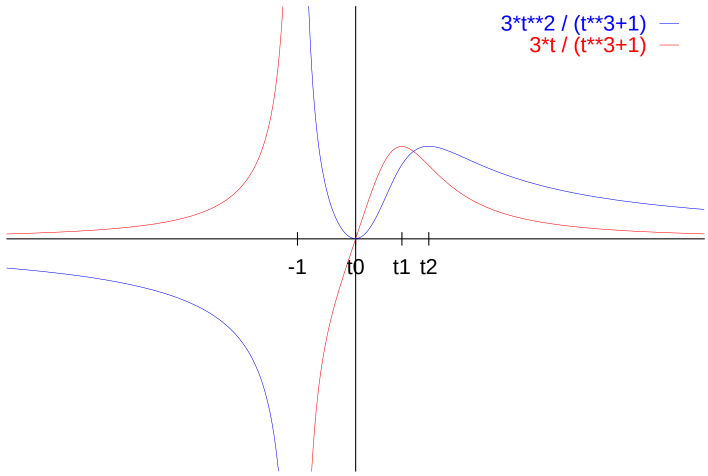
Po Teoremu o nužnim uvjetima ekstrema 5.12 imamo tri točke u kojima se mogu nalaziti lokalni ekstremi i to za vrijednosti parametra $t_1 = 0$, $t_2 = 1/\sqrt[3]{2}$ i $t_3 = \sqrt[3]{2}$. Međutim, da bi mogli ispravno primijeniti teoreme o nužnim i dovoljnim uvjetima ekstrema iz poglavlja 5.7, potrebno je da je u okolini kritičnih točaka zaista definirana neka funkcija $y = f(x)$. Po teoremu 4.1, to će sigurno biti ispunjeno ako je u okolini promatrane točke funkcija $x(t)$ injekcija. S druge strane, $x(t)$ je sigurno injekcija tamo gdje je strogo rastuća ili padajuća. Vidimo da u okolini točke t_2 vrijedi $\dot{x}(t) > 0$ pa je po Teoremu o monotonosti 5.11 funkcija $x(t)$ strogo rastuća u okolini točke t_2. Kako y'_x mijenja predznak s $+$ na $-$ u okolini točke t_2, teorem 5.13 nam kaže da se radi o lokalnom maksimumu. **To, međutim, nije dovoljno!** Naime, kako bi zaista bili sigurni da se radi o lokalnom maksimumu po x u smislu definicije 5.4, moramo još provjeriti da i funkcija $x(t)$ raste u okolini točke t_2. No, to smo već pokazali jer je u toj okolini $\dot{x}(t) > 0$ pa je naš zaključak da se radi o lokalnom minimumu opravdan. (Obrnuti slučaj pokazat ćemo kasnije).

Međutim, s ovim još nismo riješili status točaka t_1 i t_3. Pogledajmo sada ekstreme po y. Vrijedi

$$x'_y = \frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)} = \frac{t\,(-t^3+2)}{-2\,t^3+1}.$$

Očito je u okolinama točaka $t_1 = 0$ i $t_3 = \sqrt[3]{2}$ derivacija $\dot{y}(t) \neq 0$ pa je funkcija $y(t)$ injekcija. U okolini točke t_1 je $\dot{y}(t) > 0$, odnosno $y(t)$ je rastuća, a kako x'_y mijenja predznak s $-$ na $+$ radi se o lokalnom minimumu. U okolini točke t_3 derivacija x'_y također mijenja predznak s $-$ na $+$ pa bi mogli zaključiti da se radi o lokalnom minimumu po y. Kako je u toj okolini $\dot{y}(t) < 0$, odnosno $y(t)$ je padajuća, zaključujemo da se zapravo radi o lokalnom maksimumu. Naime, činjenica da $y(t)$ pada, zapravo znači da je derivacija x'_y negativna desno od točke $y(t_3)$, a pozitivna lijevo od te točke, što je zapravo definicija lokalnog maksimuma gledano od desne prema lijevoj strani.

Radi lakšeg praćenja prethodnog izlaganja, funkcije $x(t)$ i $y(t)$ te njihove derivacije po parametru t i po x i y prikazane su na slikama 5.15, 5.16 i 5.17. Vidimo da je prilikom ispitivanja toka parametarski zadane funkcije korisno detaljno ispitati i tokove funkcija $x(t)$ i $y(t)$. To je u ovom slučaju jednostavno, jer se radi o racionalnim funkcijama.



Slika 5.15: Varijable x i y Descartesovog lista

Ove slike nam daju još neke korisne informacije. Tako iz oblika funkcija $x(t)$ i $y(t)$ na slici 5.15 zaključujemo se na dijelu grafa funkcije ista vrijednosti varijable x javlja za tri različite točke (konkretno, isti x se javlja za po jedan t iz intervala $(-1, 0)$, $(0, t_2)$ i $(t_2, +\infty)$). S druge strane, svakoj vrijednosti $t \in (-\infty, -1)$ odgovara točno jedan x (funkcija $x(t)$ je na tom intervalu injekcija). Također, kako funkcija $x(t)$ raste na intervalu $(0, t_2)$, a pada na intervalu $(t_2, +\infty)$, zaključujemo da tu graf funkcije ima petlju.

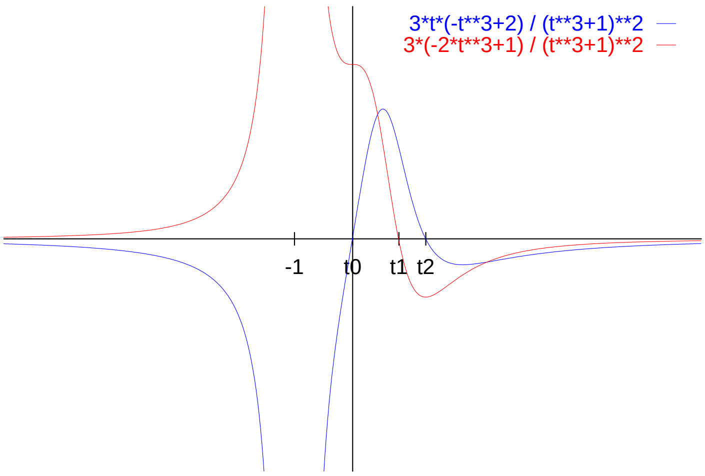
7. **Intervali monotonosti**

   Ispitat ćemo monotonost od y kao funkcije od x koristeći teorem 5.11. Radi preglednosti rezultate ćemo prikazati tablično. U tablici 5.1 prikazani su redom intervali parametra t, vrijednost derivacije y'_x te kao posljedica, monotonost odgovarajuće funkcije $y = f(x)$. Radi lakšeg crtanja grafa funkcije prikazani su i odgovarajući intervali u kojima se nalazi varijabla x te vrijednost derivacije $\dot{x}(t)$ iz koje zaključujemo da li na danom intervalu $x(t)$ raste ili pada.

   Iz tablice 5.1 se također lijepo vidi da graf krivulje ima petlju za $t \in (0, +\infty)$, odnosno za $x \in (0, \sqrt[3]{4}]$, kao i da svakoj vrijednosti $x \in (0, \sqrt[3]{4})$ odgovaraju tri vrijednosti varijable y.

8. **Zakrivljenost**

   Ispitat ćemo zakrivljenost od y kao funkcije od x. Pri tome ćemo koristiti napomenu 5.2 d), sliku 5.17 iz koje vidimo da li na odgovarajućem intervalu



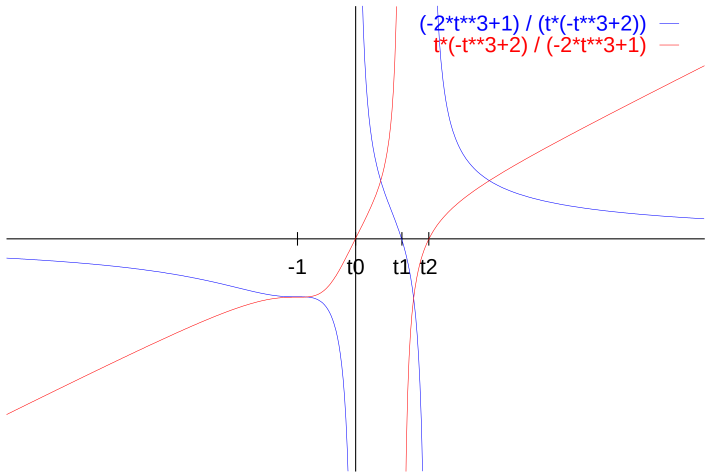
Slika 5.16: Derivacije varijabli Descartesovog lista po parametru

t	y'_x	$y = f(x)$	$x(t)$	$\dot{x}(t)$
$(-\infty, -1)$	$-$	pada	$(-\infty, 0)$	$-$
$(-1, 0)$	$-$	pada	$(0, +\infty)$	$-$
$(0, t_1)$	$+$	raste	$(0, \sqrt[3]{2})$	$+$
(t_1, t_2)	$-$	pada	$(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$	$+$
$(t_2, +\infty)$	$+$	raste	$(0, \sqrt[3]{4})$	$-$

Tablica 5.1: Monotonost Descartesovog lista

derivacija y'_x raste ili pada te sliku 5.15 iz koje vidimo da li funkcija $x(t)$ raste ili pada. Zaključujemo na sljedeći način:

- ako na nekom intervalu y'_x raste i pri tome $x(t)$ raste, tada je graf funkcije na tom intervalu konveksan;
- ako na nekom intervalu y'_x raste, a pri tome $x(t)$ pada, to zapravo znači da y'_x pada kada x raste pa je graf funkcije na tom intervalu konkavan;
- ako na nekom intervalu y'_x pada i pri tome $x(t)$ raste, tada je graf funkcije na tom intervalu konkavan;
- ako na nekom intervalu y'_x pada, a pri tome $x(t)$ pada, to zapravo znači da y'_x raste kada x raste pa je graf funkcije na tom intervalu konveksan.



Slika 5.17: Derivacije Descartesovog lista po varijablama x i y

Radi preglednosti rezultate ćemo opet prikazati tablično. U tablici 5.2 dani su redom intervali parametra t, ponašanje derivacije y'_x, ponašanje varijable $x(t)$ i konačan zaključak o zakrivljenosti.

t	y'_x	$x(t)$	zakrivljenost
$(-\infty,-1)$	pada	pada	konveksna
$(-1,0)$	pada	pada	konveksna
$(0,t_1)$	pada	raste	konkavna
(t_1,t_2)	pada	raste	konkavna
$(t_2,+\infty)$	pada	pada	konveksna

Tablica 5.2: Zakrivljenost Descartesovog lista

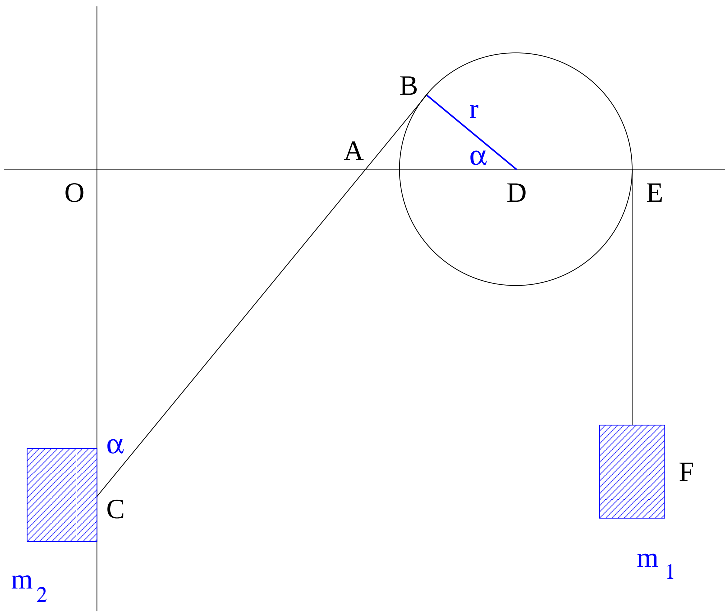
9. **Točke infleksije**
   Iz definicije 5.8 i tablice 5.2 slijedi da se infleksije nalaze u točkama za koje je $t=0$ i $t=t_2$, odnosno u točkama $(0,0)$ i $(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$.

10. **Graf funkcije**
    Kombinirajući sve prethodne rezultate dobijemo graf zadane funkcije i njene kose asimptote, koji je prikazan na slici 4.6.

5.10 Rješavanje problema ravnoteže

Diferencijalni račun izložen u prethodnim poglavljima ima mnoge važne primjene u fizici i tehnici. Ovdje ćemo kao ilustraciju detaljno opisati postupak riješavanja problema ravnoteže prikazanog na slici 5.18:

> Preko koluta radijusa r koji se nalazi na udaljenosti d od ishodišta namotana je nit duljine l na čijim su krajevima obješeni utezi s masama m_1 i m_2. Pri tome je $r < d$ i $m_1 > m_2$. Kolut se oko svoje osi vrti bez trenja, a uteg s masom m_2 se također bez trenja kliže po y-osi. Zadatak je odrediti ima li navedeni mehanički sustav položaj ravnoteže, te ukoliko ima, naći taj položaj.[1]



Slika 5.18: Položaj ravnoteže mehaničkog sustava

Sa slike 5.18 vidimo da je $d = |OD|$. Potencijalna energija E zadanog sustava u polju sile teže s gravitacijskom konstantom g dana je jednadžbom

$$E = -m_1 g|EF| - m_2 g|OC|. \tag{5.12}$$

Sustav će, kao što je poznato, imati ravnotežu tamo gdje je potencijalna energija minimalna. Naš je zadatak stoga izraziti potencijalnu energiju kao funkciju jedne varijable, utvrditi da li ta funkcija ima minimum te naći minimum ukoliko postoji.

[1] Ovaj zadatak izradio je dr. sc. Dieter Keim, Fernuniversität Hagen, Njemačka.

Pokazuje se da je najpogodnija varijabla kut α. Zbog sličnosti trokuta vrijedi $\angle ADB = \angle ACO = \alpha$. Očito je $\alpha \in (0, \pi/2]$. Trokut $\triangle ACO$ je pravokutan pa je

$$|OC| = \frac{|OA|}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Zbog pravokutnosti trokuta $\triangle ADB$ vrijedi

$$|OA| = |OD| - |AD| = d - |AD| = d - \frac{r}{\cos\alpha}$$

pa je

$$|OC| = \frac{d\cos\alpha - r}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{d\cos\alpha - r}{\sin\alpha}. \tag{5.13}$$

Označimo s l_1 duljinu dijela niti namotanog na kolut,

$$l_1 = (\pi - \alpha)r.$$

Tada je

$$|EF| = l - l_1 - |CB|.$$

Vrijedi

$$|CB| = |CA| + |AB| = \frac{|OC|}{\cos\alpha} + r\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\cos\alpha - r}{\sin\alpha\cos\alpha} + r\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{d - r\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

pa je

$$|EF| = l - (\pi - \alpha)r - \frac{d - r\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{5.14}$$

Konačno, uvrštavanje izraza (5.13) i (5.14) u formulu (5.12) daje traženu funkciju

$$E \equiv E(\alpha) = -m_1 g\left(l - (\pi - \alpha)r - \frac{d - r\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) - m_2 g\left(\frac{d\cos\alpha - r}{\sin\alpha}\right).$$

Sada treba utvrditi ima li funkcija $E(\alpha)$ minimum za $\alpha \in (0, \pi/2]$. Zapravo se u ovom slučaju također radi o geometrijskom ekstremu (vidi poglavlje 5.7.1).

Pogledajmo prvo kako se funkcija ponaša u rubovima intervala. Vrijedi

$$\begin{aligned}
E(\pi/2) &= -m_1 g\big(l - \frac{\pi}{2}r - d\big) + m_2 g r,\\
\lim_{\alpha\to 0+0} E(\alpha) &= \lim_{\alpha\to 0+0} -m_1 g\left(l - \pi r - \frac{d-r}{\sin\alpha}\right) - m_2 g\left(\frac{d-r}{\sin\alpha}\right)\\
&= -m_1 g(l - \pi r) + g(m_1 - m_2)(d - r)\lim_{\alpha\to 0+0}\frac{1}{\sin\alpha}\\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

U zadnjoj jednakosti smo koristili činjenicu da zbog pretpostavki vrijedi $m_1 - m_2 > 0$ i $d - r > 0$. Promotrimo funkciju $E(\alpha)$ na zatvorenom intervalu $[\varepsilon, \pi/2]$ pri čemu je $\varepsilon > 0$ takav da je $E(\varepsilon) > E(\pi/2)$. Takav ε sigurno postoji jer je $\lim_{\alpha\to 0+0} E(\alpha) = +\infty$. No, kako je funkcija $E(\alpha)$ na tom intervalu neprekidna, teorem 4.8 nam garantira da funkcija na tom intervalu dostiže svoj minimum. Dakle, *zadani sustav ima položaj ravnoteže.*

Ovim smo napravili važan korak u analizi zadanog sustava, jer čak i ako položaj ravnoteže ne budemo mogli točno odrediti, znamo da on postoji.

Da bi odredili položaj ravnoteže, nađimo prvo derivaciju zadane funkcije:

$$\begin{aligned}
E'(\alpha) &= -m_1 g \left(r - \frac{r\sin\alpha\cdot\sin\alpha - (d - r\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \right) \\
&\quad - m_2 g \frac{-d\sin\alpha\sin\alpha - (d\cos\alpha - r)\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\
&= \frac{-m_1 g(d - r\cos\alpha)\cos\alpha - m_2 g(-d + r\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}.
\end{aligned}$$

Izjednačavanje (brojnika) s nulom daje kvadratnu jednadžbu po $\cos\alpha$,

$$(m_1 gr)\cos^2\alpha - (m_1 gd + m_2 gr)\cos\alpha + m_2 gd = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$\begin{aligned}
(\cos\alpha)_{1,2} &= \frac{m_1 gd + m_2 gr \pm \sqrt{(m_1 gd + m_2 gr)^2 - 4\cdot m_1 gr\cdot m_2 gd}}{2m_1 gr} \\
&= \frac{m_1 gd + m_2 gr \pm \sqrt{(m_1 gd - m_2 gr)^2}}{2m_1 gr},
\end{aligned}$$

odnosno

$$(\cos\alpha)_1 = \frac{d}{r}, \qquad (\cos\alpha)_2 = \frac{m_2}{m_1}.$$

Kako je $d > r$ to je $d/r > 1$ pa je prvo rješenje nemoguće. S druge strane, po pretpostavci je $0 < m_2/m_1 < 1$ pa je rješenje jednadžbe $E'(\alpha) = 0$ dano s

$$\cos\alpha_0 = \frac{m_2}{m_1},$$

odnosno

$$\alpha_0 = \arccos\frac{m_2}{m_1}.$$

Kako je derivacija $E'(\alpha)$ neprekidna na promatranom intervalu, to je α_0 jedina kritična točka funkcije $E(\alpha)$.

Dovoljan uvjet ekstrema provjerit ćemo pomoću teorema 5.14. Pri tome možemo koristiti postupak *skraćenog deriviranja* koji se sastoji u sljedećem: ako je derivacija neke funkcije razlomak

$$f'(x) = \frac{B(x)}{N(x)}$$

i ako je $f'(x) = 0$, to jest $B(x) = 0$, tada drugu derivaciju u toj točki možemo jednostavnije izračunati koristeći sljedeću jednakost

$$f''(x) = \frac{B'(x)N(x) - B(x)N'(x)}{N^2(x)} = \frac{B'(x)N(x) - 0 \cdot N'(x)}{N^2(x)} = \frac{B'(x)}{N(x)}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} E''(\alpha)_{\text{skr.}} &= \frac{-m_1 g(r \sin\alpha)\cos\alpha - m_1 g(d - r\cos\alpha)(-\sin\alpha) - m_2 g(-r\sin\alpha)}{\sin^2\alpha} \\ &= \frac{gr(m_2 - m_1\cos\alpha) + m_1 g \sin\alpha(d - r\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}. \end{aligned}$$

Vrijedi

$$E''(\alpha_0) = \frac{0 + m_1 g \sin\alpha_0(d - r\cos\alpha_0)}{\sin^2\alpha_0} > 0$$

pa funkcija $E(\alpha)$ ima u točki α_0 lokalni minimum.

Trebamo još ustanoviti da se u točki α_0 nalazi i globalni minimum zadane funkcije na promatranom intervalu. Zaista, kako je $E''(\alpha_0) > 0$ to znači da je derivacija $E'(\alpha)$ rastuća u nekoj okolini točke α_0. Kako je $E'(\alpha_0) = 0$, to je $E'(\alpha)$ negativna lijevo od točke α_0, a pozitivna desno od točke α_0. Kako je α_0 jedina nul-točka derivacije na promatranom intervalu, slijedi da je $E'(\alpha) < 0$ za $\alpha \in (0, \alpha_0)$ i $E'(\alpha) > 0$ za $\alpha \in (\alpha_0, \pi/2)$. Teorem o monotonosti 5.11 povlači da je funkcija $E(\alpha)$ strogo padajuća na intervalu $(0, \alpha_0)$ i strogo rastuća na intervalu $(\alpha_0, \pi/2)$ pa zaključujemo je α_0 točka globalnog minimuma.

Zadani sustav će zauzeti položaj ravnoteže za kut $\alpha_0 = \arccos(m_2/m_1)$. Zanimljivo je uočiti da položaj ravnoteže ne ovisi ni o udaljenosti d, ni o radijusu koluta r, niti o duljini niti l, nego samo o omjeru masa utega. Na primjer, kada se udaljenost d poveća, tada se uteg s masom m_1 podigne, a uteg s masom m_2 spusti.

6.

NIZOVI I REDOVI

U ovoj glavi, čiji je sadržaj za većinu studenata potpuno nov, bavit ćemo se nizovima realnih brojeva, redovima realnih brojeva te nizovima i redovima funkcija. Redovi brojeva su zapravo sume beskonačno pribrojnika koji se zbrajaju u zadanom redoslijedu i premda je tih pribrojnika beskonačno, njihova suma može biti konačna. S tim problemima bavili su se već grčki matematičari pa ćemo objasniti poznati Zenonov paradoks o Ahilu i kornjači.

Kod redova funkcija najzanimljiviji su redovi potencija. Jedna od najvažnijih primjena takvih redova je razvoj elementarnih funkcija u Taylorov red potencija. Taylorov red nam omogućuje računanje vrijednosti elementarnih funkcija (npr. $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\log x$) do unaprijed zadane točnosti pomoću osnovnih računskih operacija $+, -, *, /$.

6.1 Niz realnih brojeva

U ovom poglavlju definirat ćemo niz realnih brojeva, osnovne tipove nizova, limes niza, odnosno konvergenciju niza, dokazati jedinstvenost limesa te dati nekoliko primjera.

Definicija niza je vrlo jednostavna.

Definicija 6.1 *Niz realnih brojeva* (kraće *niz*) je svaka funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Broj $a(n) \equiv a_n$ je *n-ti član* niza.

Niz možemo označiti tako da napišemo prvih nekoliko članova i opći član:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots.$$

Također koristimo oznake

$$(a_n) \quad \text{ili} \quad \{a_n\}.$$

Pri tome treba razlikovati niz $\{a_n\}$ od skupa $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Naime, kod niza svaki član ima točno određeno mjesto na kojem se nalazi, dok kod skupa to nije slučaj. Također, ako se elementi ponavljaju, tada skup ostaje isti, dok se niz mijenja.

Primjer 6.1 a) Niz čiji je opći član

$$a_n = \frac{n^2}{2n+1}$$

glasi

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}, \ldots$$

b) Niz zadan s pravilom

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1-n}{n}, & \text{za } n \text{ neparan,} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{za } n \text{ paran,} \end{cases}$$

glasi

$$0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

c) Niz zadan s pravilom

$$a_n = \begin{cases} 2n, & n \leq 3, \\ 8, & n \geq 4, \end{cases}$$

glasi

$$2, 4, 6, 8, 8, 8, 8, \ldots$$

Ovo je takozvani *stacionarni niz*, odnosno niz sa svojstvom

$$(\exists r \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad \text{takvi da} \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n = r.$$

Definicija 6.2 Niz $\{a_n\}$ je *rastući* (*padajući*, *strogo rastući*, *strogo padajući*, *monoton*) ako je takva pripadna funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Na primjer, niz

$$a_n = \frac{1}{n} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

je monoton (strogo padajući) jer vrijedi

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n.$$

S druge strane, niz

$$a_n = \frac{(-1)^n + n}{n} = 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \ldots$$

nije monoton.

Definicija 6.3 Realan broj a je *granična vrijednost* ili *limes* niza $\{a_n\}$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da} \quad n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Niz koji ima limes je *konvergentan* odnosno *konvergira*. U protivnom je niz *divergentan* odnosno *divergira*.

Iz definicije zaključujemo da kod konvergentog niza svaki ε interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ sadrži beskonačno članova niza, dok se izvan toga intervala nalazi samo konačno članova niza.

Konvergenciju niza označavamo na sljedeće načine:

$$a_n \to a, \quad \{a_n\} \to a, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim a_n = a.$$

Primjer 6.2 Dokažimo

$$\lim \frac{1}{n} = 0.$$

Zaista, neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \ \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n,$$

pa je

$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

S $[x]$ označavamo najveće cijelo pozitivnog broja x. Na primjer, za $\varepsilon = 0.2$ je $n_\varepsilon = 6$ pa se članovi niza $a_6, a_7, a_8, \ldots$ nalaze unutar intervala $(-0.2, 0.2)$. Kada smanjimo ε, tada veći broj (ali uvijek konačan) članova niza ostane izvan intervala $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, dok je uvijek beskonačno članova niza unutar tog intervala.

Postupkom iz primjera 6.2 riješili smo *osnovnu nejednadžbu konvergencije* za niz $\{a_n\}$.

Definicija 6.4 Niz $\{a_n\}$ *divergira prema* $+\infty$ ako vrijedi

$$(\forall r > 0)(\exists n_r \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da} \quad n \geq n_r \Rightarrow a_n > r.$$

Slično, niz $\{a_n\}$ *divergira prema* $-\infty$ ako vrijedi

$$(\forall r < 0)(\exists n_r \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da} \quad n \geq n_r \Rightarrow a_n < r.$$

Na primjer, niz $a_n = n$ divergira u $+\infty$, a niz $a_n = -n^2$ divergira u $-\infty$.

Napomena 6.1 Zbog jedinstvenosti terminologije u nastavku izlaganja, u prvom slučaju iz definicije 6.4 još kažemo da niz $\{a_n\}$ *konvergira prema* $+\infty$ i pišemo $\lim a_n = +\infty$. Slično, u drugom slučaju iz definicije 6.4 još kažemo da niz $\{a_n\}$ *konvergira prema* $-\infty$ i pišemo $\lim a_n = -\infty$.

Na kraju dokažimo jedinstvenost limesa.

Teorem 6.1 *Niz može imati najviše jedan limes.*

Dokaz. Neka su a i $\bar{a}$ dva različita (konačna) limesa niza $\{a_n\}$. Neka je $\varepsilon = |a-\bar{a}|/2$. Tada se unutar intervala $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ mora nalaziti beskonačno članova niza, dok se izvan toga intervala nalazi samo konačno članova niza. Isto mora vrijediti i za interval $(\bar{a}-\varepsilon, \bar{a}+\varepsilon)$. Kako su intervali disjunktni, to je nemoguće. ■

6.1.1 Gomilište i podniz

Definicija 6.5 Broj r je *gomilište* niza $\{a_n\}$ ako se u svakoj ε-okolini broja r nalazi beskonačno mnogo članova niza, odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists n' \in \mathbb{N}, n' > n) \text{ takav da } |a_{n'} - r| < \varepsilon.$$

Dalje, $+\infty$ je gomilšte niza $\{a_n\}$ ako

$$(\forall r > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists n' \in \mathbb{N}, n' > n) \text{ takav da } a_{n'} > r,$$

a $-\infty$ je gomilšte niza $\{a_n\}$ ako

$$(\forall r < 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists n' \in \mathbb{N}, n' > n) \text{ takav da } a_{n'} < r.$$

Najveće gomilište zove se *limes superior* i označava s $\limsup$, a najmanje gomilište zove se *limes inferior* i označava s $\liminf$.

Limes je ujedno i gomilište, dok gomilište ne mora biti limes. Nadalje, razlika između gomilišta i limesa je u tome što se unutar svake ε-okoline gomilišta r (koje nije ujedno i limes) nalazi beskonačno članova niza, ali se i izvan te okoline također nalazi beskonačno članova niza. Ukoliko je niz konvergentan, tada je očito

$$\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n.$$

Primjer 6.3 a) Niz

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \text{ odnosno } -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$$

je divergentan i ima dva gomilišta 1 i -1. Očito je $\liminf a_n = -1$ i $\limsup a_n = 1$.

b) Niz

$$a_n = n(1-(-1)^n), \text{ odnosno } 2, 0, 6, 0, 10, 0, \ldots$$

je također divergentan i ima gomilišta 0 i $+\infty$ te vrijedi $\liminf a_n = 0$ i $\limsup a_n = +\infty$.

Definicija 6.6 *Podniz* niza $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je svaka kompozicija $a \circ n$, gdje je $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija. K-ti član podniza $a \circ n$ je

$$(a \circ n)(k) = a(n(k)) = a_{n(k)} = a_{n_k}.$$

Drugim riječima, podniz se dobije iz polaznog niza preskakanjem članova. Podniz je očito ponovo niz.

Na primjer, podniz $\{a_{2n}\}$ niza

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

glasi

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \ldots,$$

a podniz $\{a_{2n-1}\}$ istog niza glasi

$$-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, \ldots$$

Sljedeći primjer opisuje ponašanje jednog važnog niza.

Primjer 6.4 Niz

$$a_n = q^n, \ q \in R, \qquad \text{odnosno} \qquad q, q^2, q^3, q^4, \cdots,$$

zove se *geometrijski niz*. Za $|q| < 1$ niz konvergira prema nuli. Za $q = 1$ niz je stacionaran, $1, 1, 1, \ldots$, i konvergira prema 1. Za $q = -1$ niz glasi $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ pa ima dva gomilišta 1 i -1. Za $|q| > 1$ niz divergira. Posebno, za $q > 1$ niz divergira prema $+\infty$ po definiciji 6.4, odnosno konvergira prema $+\infty$ po napomeni 6.1.

Kombinirajući definicije podniza i gomilišta 6.5 i 6.6, zaključujemo sljedeće:

(i) broj r je gomilište niza $\{a_n\}$ ako i samo ako postoji (barem jedan) podniz $\{a_{n_k}\}$ koji konvergira prema r;

(ii) ako je niz $\{a_n\}$ konvergentan, tada za svaki podniz $\{a_{n_k}\}$ vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

6.1.2 Omeđenost, monotonost i konvergencija

U ovom poglavlju dokazat ćemo četiri teorema koji povezuju monotonost, omeđenost i konvergenciju nizova i podnizova.

Teorem 6.2 *Svaki konvergentan niz je omeđen.*

Dokaz. Neka je $a = \lim a_n$. Odaberimo $\varepsilon > 0$. Tada se članovi niza

$$a_{n_\varepsilon}, a_{n_\varepsilon+1}, a_{n_\varepsilon+2}, \ldots$$

nalaze unutar intervala $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. To znači da za svaki n vrijedi

$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_\varepsilon-1}, a-\varepsilon\} \leq a_n \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_\varepsilon-1}, a+\varepsilon\}$$

i teorem je dokazan. ■

Teorem 6.3 *Svaki niz ima monotoni podniz.*

Dokaz. Neka je zadan niz $\{a_n\}$. Definirajmo skup

$$M = \{m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow a_n \geq a_m\}.$$

Na primjer, ako je niz zadan s

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 5 \text{ i } a_n = n \text{ za } n \geq 6,$$

tada je $1 \in M$, $2 \notin M$, $3 \in M$. Skup $M \subseteq \mathbb{N}$ je ili konačan ili beskonačan pa svaki od tih slučajeva razmatramo posebno.

Ako je skup M beskonačan, tada u njemu možemo odabrati strogo uzlazni niz

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots .$$

Prema definiciji skupa M vrijedi

$$a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq \cdots \leq a_{n_k} \leq \cdots .$$

Dakle, $\{a_{n_k}\}$ je rastući podniz niza $\{a_n\}$ i teorem je dokazan.

Ako je skup M konačan, odaberimo $n_1 \in \mathbb{N}$ koji je veći od svih elemenata od M. Tada postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_2 > n_1$ i $a_{n_2} < a_{n_1}$, jer bi u protivnom n_1 bio iz M. Očito je i $n_2 \notin M$. Nastavljajući ovim postupkom dobivamo strogo uzlazni niz

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots ,$$

čiji su elementi iz skupa $\mathbb{N} \setminus M$. Vrijedi

$$a_{n_1} > a_{n_2} > \cdots > a_{n_k} > \cdots$$

pa je $\{a_{n_k}\}$ strogo padajući podniz niza $\{a_n\}$. ■

Teorem 6.4 *Svaki monoton i omeđen niz je konvergentan.*

Dokaz. Dokazat ćemo slučaj kada je niz $\{a_n\}$ padajući. Neka je a najveća donja međa skupa čiji su elementi članovi niza, $a = \inf\{a_1, a_2, \cdots\}$. Tada

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \text{ takav da } a_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon.$$

Naime, u protivnom bi postojao $\varepsilon > 0$ takav da je $a_n \geq a + \varepsilon$ za svaki n, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je a infimum.

Niz je padajući pa za $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi

$$a \leq a_n \leq a_{n_\varepsilon} \leq a + \varepsilon,$$

odnosno $|a_n - a| < \varepsilon$. Dakle, definicija 6.1 povlači $\lim a_n = a$ i teorem je dokazan. ■

Koristeći ovaj teorem u poglavlju 6.1.3 dat ćemo definiciju broja e, odnosno baze prirodnih logaritama. Prethodna dva teorema nam također koriste za dokazivanje poznatog Bolzano–Weierstrassovog teorema.

Teorem 6.5 (Bolzano—Weierstrass) *Svaki omeđen niz ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Po teoremu 6.3 svaki niz ima monotoni podniz. Ako je zadani niz omeđen, tada je i monotoni podniz omeđen pa podniz konvergira po teoremu 6.4. ■

6.1.3 Broj e

Dokazat ćemo da je niz

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

rastući i omeđen odozgo pa stoga konvergira po teoremu 6.4. Limes tog niza označavamo s e,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Broj e ima beskonačni neperiodični decimalni zapis, a njegovih prvih pedeset znamenaka glasi

2.71828182845904523536028747135266249775724709369995

Dokažimo da je zadani niz omeđen:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{n}+1\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \\
&< 3.
\end{aligned}$$

Dokažimo da je zadani niz strogo rastući:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{n}+1\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} \\
&< \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} = \left(\frac{1}{n+1}+1\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Također možemo dokazati

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

Napomena 6.2 Broj e također možemo izračunati i kao sumu beskonačnog reda brojeva (vidi formulu (6.1) u poglavlju 6.2.2 i zadatak 6.5).

Zadatak 6.1 Niz (4.7), koji je u poglavlju 4.6.5 naveden kao jedna od mogućih definicija broja π, možemo definirati i rekurzivno kao niz $\{b_n\}$ koji je definiran formulama:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{2}, & b_1 &= 2^2\sqrt{2-a_1}, \\
a_n &= \sqrt{2+a_{n-1}}, & b_n &= 2^{n+1}\sqrt{2-a_n}.
\end{aligned}$$

Prema (4.7) vrijedi $\lim b_n = \pi$. Dokažite da je niz $\{b_n\}$ konvergentan tako što ćete pokazati da je strogo rastući i omeđen odozgo.

6.1.4 Svojstva limesa

Svojstva limesa nizova slična su svojstvima limesa funkcija koja su dana u poglavlju 4.3.1. Dokaz sljedećeg teorema sličan je dokazu teorema 4.3 pa ga stoga izostavljamo.

Teorem 6.6 *Neka su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konvergentni. Tada vrijedi:*

(i) $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n)$,

(ii) $\lim(a_n - b_n) = \lim(a_n) - \lim(b_n)$,

(iii) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$,

(iv) ako za svaki n vrijedi $b_n \neq 0$ i ako je $\lim b_n \neq 0$, tada je

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n},$$

(v) ako za svaki n vrijedi $a_n > 0$ i ako je $\lim a_n > 0$, tada je

$$\lim a_n{}^{b_n} = (\lim a_n)^{\lim b_n}.$$

Posebno, ako je b_n stacionaran niz, $b_n = x$, tada je

$$\lim(a_n)^x = (\lim a_n)^x.$$

Primjer 6.5 a) Za niz

$$a_n = \frac{an+b}{cn+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0,$$

vrijedi

$$\lim a_n = \lim \frac{(an+b)\cdot\frac{1}{n}}{(cn+d)\cdot\frac{1}{n}} = \frac{\lim\left(a+\frac{b}{n}\right)}{\lim\left(c+\frac{d}{n}\right)} = \frac{a}{c}.$$

b) Za niz

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2},$$

odnosno

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2}, \quad \ldots,$$

vrijedi

$$\lim a_n = \lim \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \lim \frac{1}{2} \cdot \lim \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Sljedeći teorem je sličan pravilu o ukliještenoj funkciji 4.4.

Teorem 6.7 *Ako za nizove $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_0$ povlači $a_n \leq b_n \leq c_n$ i ako je $\lim a_n = \lim c_n = a$, tada je i $\lim b_n = a$.*

Primjer 6.6 Pokažimo
$$\frac{\sin n}{n} \to 0.$$
Zaista, budući je $-1 \leq \sin n \leq 1$, to za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$
Kako $-\frac{1}{n} \to 0$ i $\frac{1}{n} \to 0$, tvrdnja slijedi iz teorema 6.7.

6.1.5 Cauchyjev niz

Prilikom dokazivanja konvergencije pomoću osnovne nejednadžbe konvergencije potrebno je poznavati limes niza. No, konvergenciju niza možemo ispitati i bez poznavanja limesa.

Definicija 6.7 Niz $\{a_n\}$ je *Cauchyjev niz* ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \text{ takav da } (\forall n \geq n_\varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}) \text{ vrijedi } |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon.$$

Teorem 6.8 *Niz je konvergentan ako i samo ako je Cauchyjev.*

Primjer 6.7 Niz $a_n = \frac{1}{n}$ je Cauchyjev pa prema tome konvergira. Zaista,
$$\left|\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon + \frac{1}{n+k}.$$
Posljednja nejednakost je sigurno ispunjena čim je $\frac{1}{n} < \varepsilon$, odnosno možemo uzeti $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$.

6.1.6 Dva važna limesa

Pokažimo
$$\lim \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{za} \quad a > 0,$$
tako što ćemo riješiti osnovnu nejednadžbu konvergencije.

Za $a = 1$ tvrdnja je očita. Za $a > 1$ vrijedi
$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon.$$
Logaritmirajući obje strane dobivamo
$$\frac{1}{n} \ln a < \ln(1+\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)} < n$$
odnosno
$$n_\varepsilon = \left[\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right] + 1.$$

Za $a < 1$ vrijedi

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a}.$$

Logaritmirajući obje strane dobivamo

$$\ln(1 - \varepsilon) < \frac{1}{n} \ln a \Leftrightarrow n > \frac{\ln a}{\ln(1 - \varepsilon)}.$$

Nejednakost je promijenila smjer prilikom dijeljenja s negativnim brojem $\ln(1-\varepsilon)$. Dakle,

$$n_\varepsilon = \left[\frac{\ln a}{\ln(1 - \varepsilon)} \right] + 1.$$

Gornji limes mogli smo odrediti i primjenjujući *proširenje po neprekidnosti*. Naime, u ovom slučaju je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{a}.$$

Sada na $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{a}$ možemo primijeniti tehnike za nalaženje limesa funkcija realne varijable (logaritamsko deriviranje, L'Hospitalovo pravilo , ...). Dakle,

$$y = \lim_{x\to+\infty} a^{1/x} \Leftrightarrow \ln y = \ln(\lim_{x\to+\infty} a^{1/x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln a = 0$$

pa je $y = 1$.

Postupak proširenja po neprekidnosti se često koristi. Tako, na primjer, iz definicije broja e iz poglavlja 6.1.3 slijedi

$$e = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

a zamjenom $x = 1/t$ slijedi

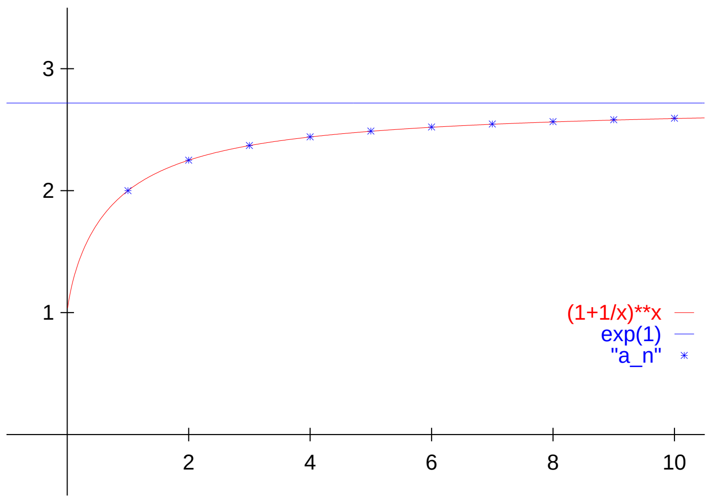
$$e = \lim_{t\to0} (1 + t)^{1/t}.$$

Slika 6.1 prikazuje $(1 + 1/x)^x$ i $(1 + 1/n)^n$.

Zadatak 6.2 Pokažite

$$\lim \sqrt[n]{n} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

tako što ćete riješiti osnovnu nejednadžbu konvergencije te pomoću proširenja po neprekidnosti.



Slika 6.1: Proširenje po neprekidnosti

6.2 Red realnih brojeva

U ovom poglavlju definirat ćemo red realnih brojeva, odnosno sumu beskonačno mnogo sumanada, zatim konvergenciju reda pomoću niza parcijalnih suma, dat ćemo nužne i dovoljne uvjete konvergencije te uvesti pojmove apsolutne i uvjetne konvergencije.

Definicija 6.8 *Red realnih brojeva* (kraće *red*) je zbroj beskonačno (prebrojivo mnogo) pribrojnika koji se nalaze u zadanom poretku. Koristimo oznake

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum a_n, \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Broj a_n je *n-ti član reda*. Broj $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ je *k-ta parcijalna suma reda* , a niz $\{s_k\}$ je *niz parcijalnih suma*.

Niz $\{s_k\}$ je jednoznačno određen nizom $\{a_n\}$ i očito vrijedi

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1}.$$

Konvergencija reda definira se pomoću niza parcijalnih suma.

Definicija 6.9 Red *konvergira* ako konvergira niz parcijalnih suma. Ako je red konvergentan, *suma reda* jednaka je limesu niza parcijalnih suma,

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \sum a_n.$$

Još koristimo izraze: red je *konvergentan*; niz $\{a_n\}$ je *zbrojiv* ili *sumabilan*.

Primjer 6.8 Promotrimo *geometrijski red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{odnosno} \quad 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots .$$

Za $q = 1$ očito vrijedi $s_k = k$ pa je $\sum q^{n-1} = \sum 1^{n-1} = +\infty$. Iz

$$(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{k-1})(1 - q) = 1 - q^k$$

za $q \neq 1$ slijedi

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} q^{n-1} = \frac{1 - q^k}{1 - q}.$$

Za $|q| < 1$ vrijedi $q^k \to 0$ (vidi primjer 6.4) pa geometrijski red konvergira i vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{1 - q}.$$

Za $q \geq 1$ je $\sum q^{n-1} = +\infty$, a za $q \leq -1$ niz $\{s_k\}$ nema limes.

Primjer 6.9 Zenon je postavio sljedeće pitanje poznato kao *Zenonov paradoks*:

> Ahil se nalazi 1 metar iza kornjače, a 10 puta je brži. Ako krenu istovremeno, dok Ahil stigne do početnog položaja kornjače, kornjača će odmaknuti malo naprijed. Dok Ahil stigne do novog položaja kornjače, kornjača će odmaknuti malo naprijed i tako dalje. Stoga Ahil nikad neće stići kornjaču, što je paradoks.

Zenon slušatelja navodi na zaključak da zbroj od beskonačno udaljenosti mora biti beskonačan, što u ovom slučaju nije točno. Zapravo se radi o geometrijskom redu i Ahil stigne kornjaču nakon

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \quad \text{metara.}$$

6.2.1 Nužan uvjet konvergencije

Teorem 6.9 *Ako je red* $\sum a_n$ *konvergentan, tada je* $\lim a_n = 0$.

Teorem možemo iskazati drukčije: ako je $\lim a_n \neq 0$, tada red $\sum a_n$ divergira.
Dokaz. Neka je

$$s = \sum a_n = \lim s_n,$$

pri čemu je $\{s_n\}$ limes niza parcijalnih suma. Kako limes niza ne ovisi o pomicanju indeksa za konačan broj mjesta, vrijedi $\lim s_{n-1} = s$. Sada imamo

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) \overset{\text{Tm. 6.6 (ii)}}{=} \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$$

i teorem je dokazan. ■

Primjer 6.10 *Harmonijski red*

$$\sum \frac{1}{n}$$

ispunjava nužan uvjet konvergencije jer je $\lim \frac{1}{n} = 0$, ali divergira, odnosno $\sum \frac{1}{n} = +\infty$. Dokažimo tu tvrdnju: niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ je strogo rastući, a za njegov podniz $\{s_{2^m}\}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
s_{2^m} =& \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&+ \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\
>& 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\
=& 1 + \frac{m}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle, $\lim_{m\to\infty} s_{2^m} = +\infty$, što povlači $\lim_{k\to\infty} s_k = +\infty$.

Napomena 6.3 Red

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$, što ćemo analizirati u sljedećem poglavlju.

6.2.2 Kriteriji konvergencije

Kod razmatranja konvergencije geometrijskog reda u primjeru 6.8, istovremeno smo odgovorili na pitanje da li red konvergira i našli njegovu sumu. Međutim, zapravo se radi o dva odvojena pitanja:

1) Da li zadani red konvergira?

2) Ukoliko red konvergira, koja mu je suma?

Često je lakše odgovoriti na prvo, nego na drugo pitanje. Tako kod redova čiji su svi članovi pozitivni, na prvo pitanje često možemo odgovoriti koristeći jedan od četiri kriterija konvergencije koje navodimo u ovom poglavlju.

Definicija 6.10 Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima, odnosno $a_n, b_n > 0$ za $\forall n \in \mathbb{N}$. Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_0$ povlači $a_n \leq b_n$, red $\sum b_n$ je *majoranta* reda $\sum a_n$, a red $\sum a_n$ je *minoranta* reda $\sum b_n$.

Teorem 6.10 (Kriteriji konvergencije) *Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima. Tada vrijede sljedeći kriteriji konvergencije:*

(i) Poredbeni kriterij I. *Red je konvergentan ako ima konvergentnu majorantu, a divergentan ako ima divergentnu minorantu.*

(ii) Poredbeni kriterij II. *Neka je*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = r.$$

Tada vrijedi:

(a) ako je $0 < r < +\infty$, tada oba reda ili konvergiraju ili divergiraju;

(b) ako je $r = 0$ i red $\sum a_n$ divergira, tada red $\sum b_n$ divergira;

(c) ako je $r = 0$ i red $\sum b_n$ konvergira, tada red $\sum a_n$ konvergira;

(d) ako je $r = +\infty$ i red $\sum a_n$ konvergira, tada red $\sum b_n$ konvergira;

(e) ako je $r = +\infty$ i red $\sum b_n$ divergira, tada red $\sum a_n$ divergira.

(iii) D'Alembertov kriterij. *Neka je*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Ako je $q < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako je $q > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.

(iv) Cauchyjev kriterij. *Neka je*

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Ako je $q < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako je $q > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.

(v) Raabeov kriterij. *Neka je*

$$\lim n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q.$$

Ako je $q > 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako je $q < 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.

Dokaz. Dokazat ćemo samo prvu varijantu poredbenog kriterija, dok dokaze ostalih tvrdnji izostavljamo.

Neka red $\sum a_n$ ima konvergentnu majorantu $\sum b_n = b$ i neka je $a_n \leq b_n$. Niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ reda $\sum a_n$ je omeđen odozgo, $s_k \leq b$. Kako je $a_n > 0$, niz $\{s_k\}$ je i strogo rastući pa konvergira po teoremu 6.4. Druga tvrdnja je očita. ■

Raabeov kriterij se obično koristi tek kada zakaže D'Alembertov kriterij, dakle kada je $\lim a_{n+1}/a_n = 1$.

Dat ćemo nekoliko primjera.

Primjer 6.11 Kako je $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, red

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

divergira jer ima divergentnu minorantu $\sum \frac{1}{n}$ (vidi primjer 6.10). Općenito, red

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

divergira za $p < 1$ zbog istog razloga (vidi napomenu 6.3).

Primjer 6.12 Promotrimo red

$$\sum \frac{1}{n(n+1)}.$$

Zbog

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

vrijedi

$$
\begin{aligned}
s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\
&= 1 - \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}
$$

Stoga je $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \lim s_k = 1$. Red

$$\sum \frac{1}{(n+1)^2}$$

također konvergira jer ima konvergentnu majorantu $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. No, tada konvergira i red

$$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \sum \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi}{6}.$$

Zadnju jednakost ćemo dokazati u Matematici 3. Konačno, prema poredbenom kriteriju red $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p \geq 2$ (vidi napomenu 6.3).

Primjer 6.13 Ispitajmo konvergenciju reda

$$\sum \frac{n}{3^n}$$

po D'Alembertovom i Cauchyjevom kriteriju. Red konvergira po D'Alembertovom kriteriju jer je

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Red konvergira po Cauchyjevom kriteriju jer je

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{3} \overset{\text{Zad. 6.2}}{=} \frac{1}{3} < 1.$$

Primjer 6.14 Sljedeći važan red daje nam prikaz broja e:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e. \tag{6.1}$$

Red konvergira po D'Alembertovom kriteriju jer je

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Zadnja jednakost u formuli (6.1) dokazat će se u zadatku 6.5.

6.2.3 Apsolutna konvergencija

U prethodnom poglavlju dani su kriteriji konvergencije za redove s pozitivnim članovima. Razmatranje redova čiji članovi imaju različite predznake je složenije. U nekim slučajevima pomaže nam teorem o apsolutnoj konvergenciji.

Definicija 6.11 Red $\sum a_n$ je *apsolutno konvergentan* odnosno *konvergira apsolutno* ako konvergira red $\sum |a_n|$.

Za redove s pozitivnim članovima koje smo razmatrali u prethodnom poglavlju vrijedi $a_n = |a_n|$ pa nema razlike između konvergencije i apsolutne konvergencije.

Sljedeća dva teorema vezana uz apsolutno konvergentne redove navodimo bez dokaza.

Teorem 6.11 *Ako je red apsolutno konvergentan, tada je i konvergentan.*

Na primjer, redovi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \cdots \tag{6.2}$$

i

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \cdots \tag{6.3}$$

su apsolutno konvergentni jer je njihov red apsolutnih vrijednosti konvergentan geometrijski red $\sum 1/2^{n-1}$. Sume su im, naravno, različite.

Apsolutno konvergentni redovi imaju sljedeće važno i korisno svojstvo.

Teorem 6.12 *Apsolutno konvergentnom redu smijemo komutirati sumande, to jest redoslijed zbrajanja ne utječe na sumu reda.*

Redovi koji su konvergentni, ali nisu apsolutno konvergentni nemaju ovo svojstvo (vidi poglavlje 6.2.4). Po prethodnom teoremu suma reda (6.2) jednaka je

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Slično, suma reda (6.3) jednaka je

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \cdots\right)\\ = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7}.\end{aligned}$$

6.2.4 Alternirani redovi

Razmatranje redova čiji članovi imaju različite predznake, a koji nisu apsolutno konvergentni, je složenije. U posebnom slučaju kada predznaci alterniraju, pomaže nam Leibnitzov kriterij konvergencije.

Red $\sum a_n$ za koji je $\operatorname{sign} a_{n+1} = -\operatorname{sign} a_n$ za svaki n zove se *alternirani red.*

Teorem 6.13 (Leibnitz) *Alternirani red $\sum a_n$ konvergira ako vrijedi:*

(i) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ *takav da* $n \geq n_0$ *povlači* $|a_{n+1}| \leq |a_n|$,

(ii) $\lim a_n = 0$.

Na primjer, *alternirani harmonijski red*

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

konvergira po Leibnitzovom kriteriju, ali ne konvergira apsolutno jer red apsolutnih vrijednosti $\sum \frac{1}{n}$ divergira. Zadnju jednakost ćemo dokazati u primjeru 6.21.

Alternirani red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

također konvergira po Leibnitzovom kriteriju, ali ne konvergira apsolutno jer red $\sum \frac{1}{2n-1}$ divergira. Zadnja jednakost bit će dokazana u Matematici 2. Pomoću ovog reda možemo izračunati vrijednost broja π, međutim konvergencija je vrlo spora.

Pokažimo da teorem 6.12 ne vrijedi za alternirani harmonijski red, odnosno suma reda koji je konvergentan ali nije apsolutno konvergentan ovisi o redoslijedu zbrajanja. Prvo primijetimo da su i pozitivni i negativni dio alterniranog harmonijskog reda beskonačni,

$$\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = +\infty, \quad \sum \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = +\infty.$$

Izborom odgovarajućeg redoslijeda zbrajanja, možemo postići bilo koju unaprijed zadanu sumu s (recimo $s > 0$): uzmemo onoliko pozitivnih članova dok ne pređemo s, zatim uzmemo onoliko negativnih članova dok se ne vratimo ispod s, zatim onoliko pozitivnih članova dok ne pređemo s, i tako dalje. Ovaj postupak možemo ponavljati unedogled jer je svaki ostatak od pozitivnog i negativnog dijela i dalje beskonačan. Dakle, suma će biti jednaka s, a pri tome koristimo sve članove reda. Ovakav postupak očito ne možemo provesti za redove (6.2) i (6.3) jer su i pozitivni i negativni dijelovi tih redova konačni.

6.3 Niz funkcija

U ovom poglavlju definirat ćemo niz funkcija, konvergenciju u točki te običnu i uniformnu konvergenciju na nekom skupu.

Definicija 6.12 Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$. Označimo s $\mathbb{R}^D$ skup svih funkcija iz D u $\mathbb{R}$. *Niz funkcija* je svaka funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^D$, pri čemu je $f(n) = f_n : D \to \mathbb{R}$. Funkcija $f_n \equiv f_n(x)$ je *n-ti član niza.*

Niz funkcija označavamo s $\{f_n\}$, $\{f_n(x)\}$,

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots, \quad \text{ili} \quad f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x), \ldots.$$

Na primjer, niz funkcija zadan s $f_n(x) = x^{n-1}$ glasi

$$1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots, x^{n-1}, \ldots. \tag{6.4}$$

Definicija 6.13 Niz funkcija $\{f_n\}$ *konvergira u točki x prema funkciji* f_0 ako niz realnih brojeva $\{f_n(x)\}$ konvergira prema $f_0(x)$. Niz funkcija $\{f_n\}$ *konvergira po točkama* ili *obično* prema funkciji f_0 na skupu A ako $\{f_n(x)\} \to f_0(x)$ za $\forall x \in A$. Simbolički zapisujemo:

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}) \text{ takav da } n \geq n_{x,\varepsilon} \Rightarrow |f_n(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon.$$

Funkcija f_0 je *limes niza funkcija* $\{f_n(x)\}$, odnosno

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f_0.$$

Ako $n_{x,\varepsilon}$ ne ovisi o x već samo o ε, odnosno $n_{x,\varepsilon} \equiv n_\varepsilon$, niz funkcija $\{f_n\}$ konvergira *uniformno* ili *jednoliko* prema funkciji f_0.

Iz definicije slijedi da je uniformna konvergencija jače svojstvo, odnosno niz funkcija koji konvergira uniformno konvergira i po točkama, dok obrnuto općenito ne vrijedi.

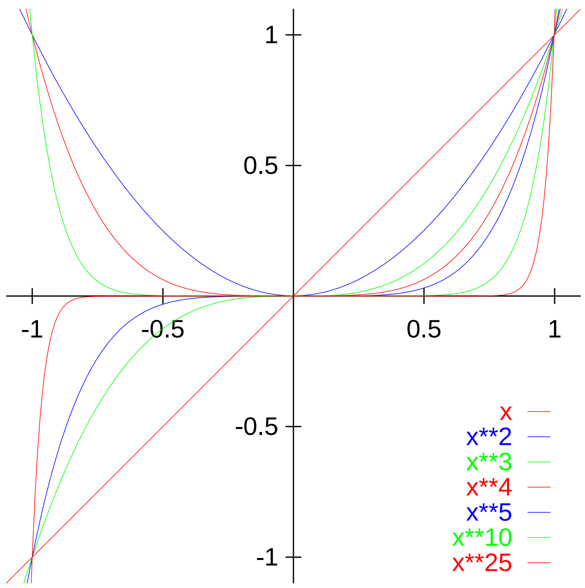
Promotrimo konvergenciju niza funkcija (6.4). Iz svojstava geometrijskog niza danog u primjeru 6.4, vidimo da niz konvergira za $x \in (-1, 1]$ prema funkciji $f_0 : (-1, 1] \to \{0, 1\}$ zadanoj s

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{za } x = 1. \end{cases}$$

Niz konvergira obično što ćemo vidjeti rješavajući osnovnu nejednadžbu konvergencije. Promotrimo prvo točke $x = 0$ i $x = 1$. Za $x = 0$ niz je stacionaran počevši od drugog člana pa je $n_{0,\varepsilon} = 2$ za $\forall\varepsilon > 0$. Za $x = 1$ niz je stacionaran od početka pa je $n_{0,\varepsilon} = 1$ za $\forall\varepsilon > 0$. Za $0 < x < 1$ vrijedi

$$|x^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln x < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\varepsilon}{\ln x}.$$

Prilikom dijeljenja negativnim brojem $\ln x$ nejednakost je promijenila smjer. Dakle, $n_{x,\varepsilon} = \left[\frac{\varepsilon}{\ln x}\right] + 1$. Slično se dobije u slučaju $-1 < x < 0$ pa se radi o običnoj konvergenciji. Konvergencija niza prikazana je na slici 6.2.



Slika 6.2: Konvergencija niza funkcija

Premda su svi članovi niza $\{x^{n-1}\}$ neprekidne funkcije, limes nije neprekidna funkcija. To se ne može dogoditi kada se radi o uniformnoj konvergenciji.

Teorem 6.14 *Ako niz neprekidnih funkcija $\{f_n\}$ konvergira uniformno prema funkciji f_0, tada je f_0 također neprekidna funkcija.*

Zadatak 6.3 Pokažite da niz neprekidnih funkcija $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ konvergira uniformno prema neprekidnoj funkciji $f_0(x) = 0$ na čitavom skupu $\mathbb{R}$.

6.4 Red funkcija

U ovom poglavlju definirat ćemo red funkcija, konvergenciju u točki, te običnu, apsolutnu i uniformnu konvergenciju na nekom skupu. Pokazat ćemo kako se može odrediti područje konvergencije reda funkcija te dati jedan lako primjenjiv kriterij konvergencije.

Definicija 6.14 *Red funkcija* je zbroj beskonačno (prebrojivo mnogo) funkcija,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n,$$

pri čemu je $f_n : D \to \mathbb{R}$. Koristimo i oznake

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n + \cdots .$$

Funkcija f_n je *n-ti član reda*, a funkcija

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$$

je *k-ta parcijalna suma*. Niz funkcija $\{s_k\}$ je *niz parcijalnih suma* reda funkcija $\sum f_n$.

Na primjer, red funkcija $\sum x^{n-1}$ možemo zapisati i kao

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots .$$

Definicija 6.15 (i) Red funkcija $\sum f_n$ *konvergira u točki x prema funkciji s* ako red realnih brojeva $\sum f_n(x)$ konvergira prema $s(x)$, odnosno ako niz realnih brojeva $s_k(x)$ konvergira prema $s(x)$.

(ii) Red funkcija $\sum f_n$ *konvergira po točkama* ili *obično* prema funkciji s na skupu A ako $\sum f_n(x)$ konvergira prema $s(x)$ za $\forall x \in A$, odnosno ako $s_k(x) \to s(x)$ za $\forall x \in A$.

(iii) Red funkcija $\sum f_n$ konvergira apsolutno na skupu A ako red brojeva $\sum |f_n(x)|$ konvergira za $\forall x \in A$.

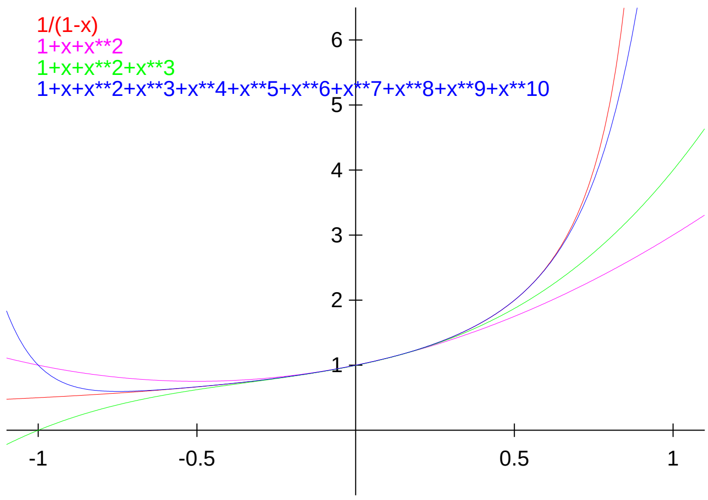
(iv) Red funkcija $\sum f_n$ konvergira uniformno prema funkciji s na skupu A ako niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira uniformno prema funkciji s na skupu A.

Dakle, konvergenciju u nekoj točki i običnu konvergenciju možemo definirati na dva načina: preko reda brojeva ili preko niza parcijalnih suma. Također, pored obične konvergencije imamo još dvije različite vrste konvergencije, apsolutnu i uniformnu.

Primjer 6.15 Iz svojstava geometrijskog reda iz primjera 6.8 slijedi da za *geometrijski red funkcija* vrijedi

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Konvergencija je apsolutna jer red $\sum |x|^{n-1}$ konvergira za $\forall x \in (-1, 1)$. Konvergencija je također uniformna prema teoremu 6.16, a prikazana je na slici 6.3.



Slika 6.3: Konvergencija geometrijskog reda funkcija

6.4.1 Ispitivanje konvergencije

Ispitati konvergenciju reda funkcija znači naći područje, odnosno sve vrijednosti x, za koje dani red konvergira. Često ispitujemo područje apsolutne konvergencije koristeći kriterije konvergencije za redove realnih brojeva iz poglavlja 6.2.2. Postupak ćemo objasniti na primjeru.

Zadan je red funkcija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1-x)^n}. \tag{6.5}$$

Cauchyjev kriterij iz teorema 6.10 daje

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^{n-1}}{|1-x|^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{\frac{n-1}{n}}}{|1-x|} = \left|\frac{x}{1-x}\right|.$$

Dakle, red (6.5) konvergira apsolutno za sve točke $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ za koje je

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| < 1,$$

odnosno za $x \in (-\infty, 1/2)$. U točki $x = 1/2$ Cauchyjev kriterij ne daje odluku pa ćemo taj slučaj razmotriti posebno:

$$\sum f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \sum 2 = +\infty.$$

Uniformnu konvergenciju možemo ispitati na sljedeći način.

Teorem 6.15 (Weierstrass) *Red funkcija $\sum f_n$, pri čemu je $f_n : D \to \mathbb{R}$, konvergira uniformno na skupu D ako ima konvergentnu majorantu $\sum a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, odnosno*

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ takav da } n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x)| \leq a_n, \forall x \in D.$$

6.4.2 Red potencija

Red potencija je poseban red funkcija $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ za koji je $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, odnosno

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{6.6}$$

ili

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots .$$

Radijus konvergencije reda potencija je broj

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{ili} \quad \rho = \frac{1}{\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Područje konvergencije reda potencija daje nam sljedeći teorem kojeg ćemo dokazati u Matematici 3.

Teorem 6.16 *Red potencija (6.6) konvergira uniformno i apsolutno na svakom segmentu $[x_0 - \rho', x_0 + \rho']$, gdje je $\rho' < \rho$, a divergira na skupu $\mathbb{R} \setminus [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$.*

Na primjer, ako je $\rho = 0$, tada red potencija konvergira samo u točki $x = x_0$ (trivijalno), a ako je $\rho = +\infty$, tada red potencija konvergira za $\forall x \in \mathbb{R}$. Konvergenciju u točkama $x = x_0 - \rho$ i $x = x_0 + \rho$ treba ispitati posebno.

Primjer 6.16 Zadan je red potencija

$$\sum \frac{1}{n} x^n.$$

Ovdje je očito $x_0 = 0$. Kako je (vidi zadatak 6.2)

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

to je $\rho = 1$ pa red konvergira uniformno i apsolutno na intervalu $(-1, 1)$. U točki $x = 1$ red glasi $\sum \frac{1}{n}$ pa divergira (vidi primjer 6.10). U točki $x = -1$ red glasi $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ (alternirani harmonijski red, poglavlje 6.2.4) pa konvergira po Leibnitzovom kriteriju. Dakle, zadani red konvergira za $x \in [-1, 1)$, a divergira inače.

Primjer 6.17 Zadan je red potencija

$$\sum \frac{1}{n^2} x^n.$$

Ovdje je također $x_0 = 0$. Kako je $\rho = 1$, red konvergira uniformno i apsolutno na intervalu $(-1, 1)$. U točki $x = 1$ red glasi $\sum \frac{1}{n^2}$ pa konvergira (vidi poglavlje 6.2.2), a u točki $x = -1$ red glasi $\sum (-1)^n \frac{1}{n^2}$ pa konvergira jer konvergira apsolutno (teorem 6.11). Dakle, zadani red konvergira apsolutno za $x \in [-1, 1]$, a divergira inače.

Zadatak 6.4 Nađite područje apsolutne konvergencije reda

$$\sum \frac{n^n}{n!} x^n.$$

Ispitivanje konvergencije u rubovima intervala je složenije pa ga izostavite.

6.4.3 Deriviranje reda funkcija

Kada funkcija $s(x) = \sum f_n(x)$ nije elementarna, ili nema prikladan analitički izraz, njenu derivaciju možemo računati derivirajući pripadni red funkcija.

Naime, ako su sve derivacije $f_n'(x)$ neprekidne i ako red $\sum f_n'(x)$ konvergira, tada vrijedi

$$\left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f_n'(x).$$

Posebno za red potencija vrijedi

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n$$

u svim točkama u kojima red $\sum a_n(x-x_0)^n$ konvergira.

Prethodne tvrdnje nećemo dokazivati, već navodimo sljedeći zanimljiv primjer.

Primjer 6.18 Izračunajmo sumu reda potencija

$$\sum nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

za $|x| < 1$. Za geometrijski red vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

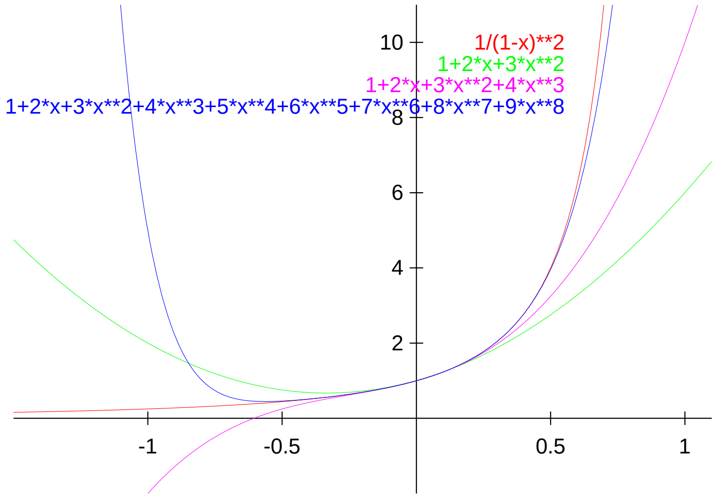
Osim toga

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Ovaj red potencija također konvergira za $|x| < 1$ pa stoga za $|x| < 1$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Konvergencija reda prikazana je na slici 6.4.



Slika 6.4: Konvergencija reda potencija

6.5 Taylorov red

Razvoj elementarnih funkcija u Taylorov red jedna je od najvažnijih primjena dosadašnjih rezultata ove glave. Pomoću Taylorove formule možemo računati vrijednosti elementarnih funkcija kao $\sin x$, e^x i $\ln x$ do željene točnosti i to koristeći samo četiri osnovne računske operacije. Dokazi teorema koje navodimo su složeni pa ih izostavljamo.

Teorem 6.17 *Neka funkcija f ima na intervalu (a,b) derivaciju reda $n+1$. Tada za proizvoljnu točku $x_0 \in (a,b)$ i za $\forall x \in (a,b)$ vrijedi*

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \tag{6.7}$$

gdje je

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{p\cdot n!}(1-\theta)^{n+1-p} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)) \tag{6.8}$$

za $p \in \mathbb{N}$ i $0<\theta<1$.

Formula (6.7) zove se *Taylorova formula* , a izraz u formuli (6.8) je *Schlömlichov oblik ostatka*. Posebno, za $p=1$ dobivamo *Cauchyjev oblik ostatka*

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),$$

a za $p = n+1$ dobivamo *Lagrangeov oblik ostatka*

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

Teorem 6.18 *Neka funkcija f ima na intervalu (a,b) derivacije proizvoljnog reda. Tada za proizvoljnu točku $x_0 \in (a,x)$ i za $\forall x \in (a,b)$ vrijedi*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{6.9}$$

ako i samo ako niz ostataka $\{R_n(x)\}$ teži k nuli za $\forall x \in (a,b)$.

Red potencija (6.9) zove se *Taylorov red* ili *Taylorov razvoj funkcije f u točki x_0*. Taylorov razvoj u točki $x_0 = 0$ zove se *MacLaurinov razvoj*,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{6.10}$$

Posebno je važna primjena Taylorovog razvoja na elementarne funkcije.

Teorem 6.19 *Taylorov red elementarne funkcije $f(x)$ konvergira prema $f(x)$ u svakoj točki svog područja konvergencije.*

Primjer 6.19 Nađimo MacLaurinov razvoj funkcije $f(x) = \sin x$. Uvrštavanje

$$\begin{aligned}
& & f(0) &= 0, \\
f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, \\
f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1, \\
f^{IV}(x) &= \sin x, & f^{IV}(0) &= 0, \\
f^{V}(x) &= \cos x, & f^{V}(0) &= 1, \ldots,
\end{aligned}$$

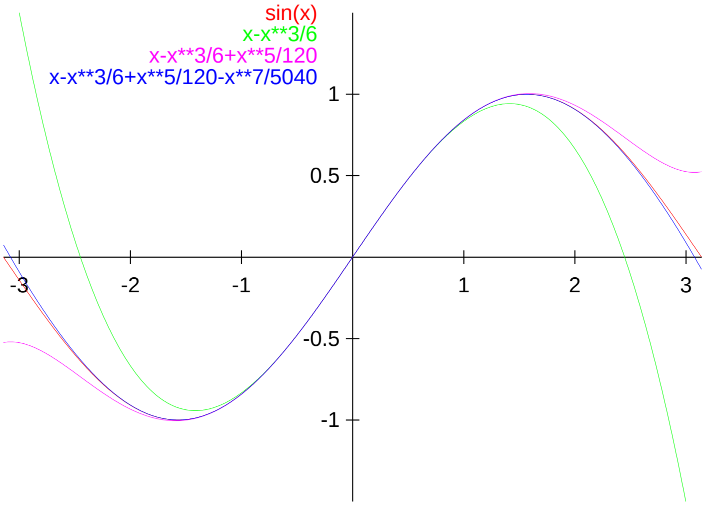
u formulu (6.10) daje

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}. \tag{6.11}$$

Zadatak još nije gotov, jer ne znamo za koje vrijednosti x formula (6.11) vrijedi. Po teoremu 6.19 formula vrijedi za sve x za koje red na desnoj strani konvergira. Po D'Alembertovom kriteriju

$$\lim \frac{\frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)!}}{\frac{|x^{2n-1}|}{(2n-1)!}} = \lim \frac{x^2}{2n(2n+1)} = 0,$$

odnosno $\rho = +\infty$ (vidi poglavlje 6.4.2), pa formula (6.11) vrijedi za $\forall x \in \mathbb{R}$. Konvergencija Taylorovog reda prikazana je na slici 6.5.



Slika 6.5: Taylorov red za $\sin x$

Taylorovu formulu (6.7) koristimo za računanje vrijednosti elementarnih funkcija.

Primjer 6.20 S kolikom točnošću

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

aproksimira funkciju $\sin x$ za $|x| \leq 1$? Koliko je $\sin 1$? Pogrešku ćemo izračunati koristeći Lagrangeov oblika ostatka:

$$|R_6(x)| = \left|\frac{x^7}{7!}\right| |-\cos(\theta x)| \leq \frac{1}{7!} < 0.0002.$$

Dakle,

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} \pm 0.0002 = 0.841\dot{6} \pm 0.0002.$$

Ovo je gotovo točnost logaritamskih tablica. Točnost je još veća za manje vrijednosti od x, jer je na primjer $|R_6(0.25)| = 0.25^7/7! < 1.3 \cdot 10^{-8}$. Izračunajte na ovaj način $\sin 0.25$ i $\sin 0.5$ i usporedite s rezultatima koje daje kalkulator!

Računala računaju funkcije $\sin x$, $\cos x$, e^x i $\ln x$ na sličan način, odnosno koristeći samo osnovne računske operacije. Postoje i "bolji" polinomi, odnosno polinomi manjeg stupnja s kojima se postiže ista ili veća točnost.

Zadatak 6.5 Izračunajte MacLaurinove razvoje

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

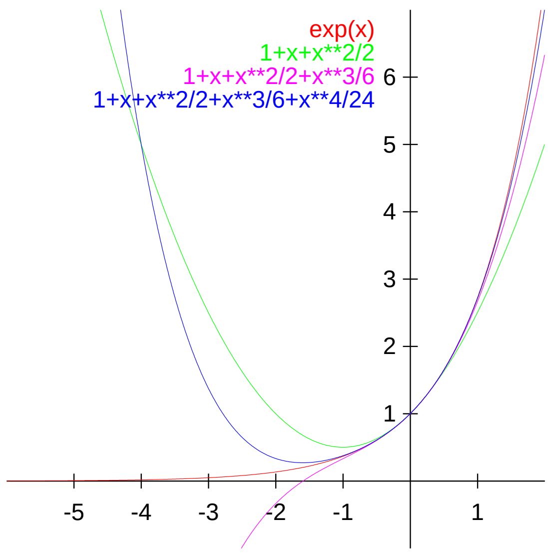
i

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Za $x = 1$ prethodna formula daje

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

što je još jedan prikaz broja e pored definicije iz poglavlja 6.1.3. Konvergencija Taylorovog reda za funkciju e^x prikazana je na slici 6.6.



Slika 6.6: Taylorov red za e^x

Funkciju $\ln x$ ne razvijamo u Taylorov red direktno, nego koristimo jedan od sljedeća dva MacLaurinova razvoja.

Primjer 6.21 Nađimo MacLaurinov razvoj funkcije $f(x) = \ln(1+x)$. Iz

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x}, \\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \\
f'''(x) &= (-1)(-2)\frac{1}{(1+x)^3}, \\
f^{IV}(x) &= (-1)(-2)(-3)\frac{1}{(1+x)^4},
\end{aligned}
$$

zaključujemo

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n},$$

pa je

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Uvrštavanje u formulu (6.10) daje

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \tag{6.12}$$

pa preostaje odrediti za koje vrijednosti x formula vrijedi, odnosno za koje vrijednosti x red potencija na desnoj strani konvergira. Radijus konvergencije reda potencija je (vidi poglavlje 6.4.2)

$$\rho = \frac{1}{\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \frac{1}{\lim \frac{n}{n+1}} = 1$$

pa formula (6.12) vrijedi za $x \in (-1, 1)$.

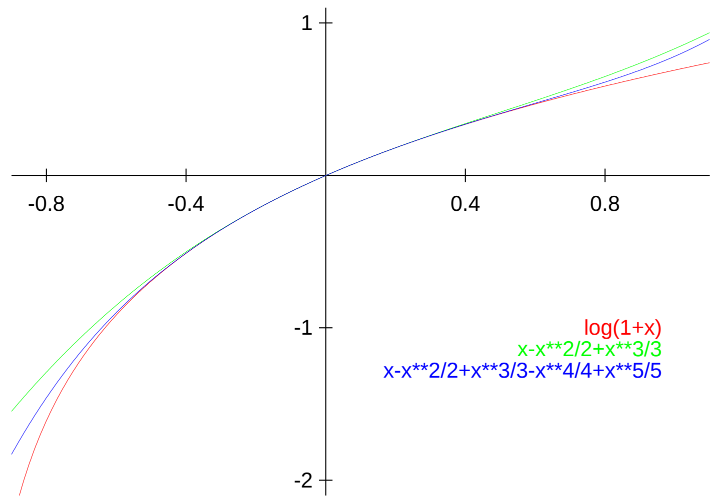
Dalje, u točki $x = 1$ red glasi $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ pa konvergira po Leibnitzovom kriteriju (vidi poglavlje 6.2.4). U točki $x = -1$ red glasi $-\sum \frac{1}{n}$ pa divergira kao što smo pokazali u primjeru 6.10.

Dakle, formula (6.12) vrijedi za $x \in (-1, 1]$ pa pomoću nje možemo izračunati vrijednosti funkcije $\ln x$ za $x \in (0, 2]$. Na primjer, $\ln 2$ možemo izračunati tako što u formulu (6.12) uvrstimo $x = 1$,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

što nam daje sumu alterniranog harmonijskog reda iz poglavlja 6.2.4. Konvergencija reda prikazana je na slici 6.7.

Ukoliko želimo izračunati, na primjer, $\ln 3$, tada nam formula (6.12) ne koristi, ali možemo korisiti sljedeći razvoj.



Slika 6.7: Taylorov red za $\ln(1+x)$

Primjer 6.22 Nađimo MacLaurinov razvoj funkcije $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$. Iz

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

slijedi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x},\\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} + (-1)\frac{1}{(1-x)^2}(-1),\\
f'''(x) &= (-1)(-2)\frac{1}{(1+x)^3} + 1(-2)\frac{1}{(1-x)^3}(-1),\\
f^{IV}(x) &= (-1)(-2)(-3)\frac{1}{(1+x)^4} + 1\cdot 2(-3)\frac{1}{(1-x)^4}(-1).
\end{aligned}$$

Zaključujemo

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n} + (n-1)!\frac{1}{(1-x)^n},$$

pa je

$$f^{(n)}(0) = ((-1)^{n-1}+1)(n-1)!,$$

odnosno

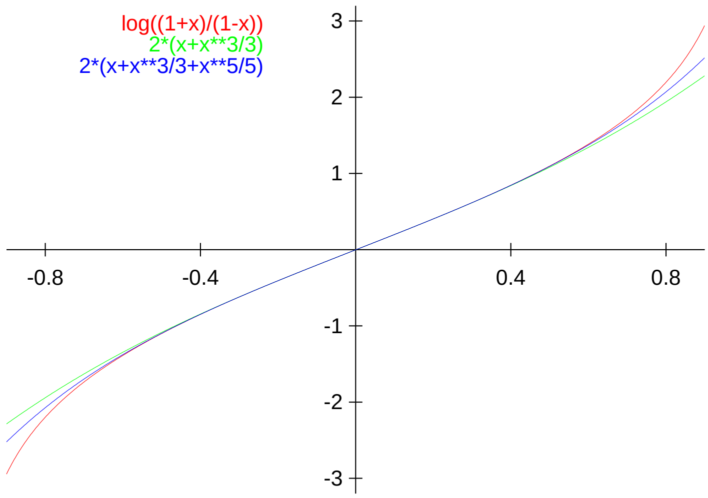
$$f^{(2n-1)}(0) = 2(2n-2)!, \quad f^{(2n)}(0) = 0.$$

Uvrštavanje u formulu (6.10) daje

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right). \tag{6.13}$$

Preostaje odrediti za koje vrijednosti x formula vrijedi. Kako je $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = x^2$, red na desnoj strani formule (6.13) konvergira za $|x| < 1$. U točki $x = 1$ red glasi $2\sum \frac{1}{2n-1}$ pa divergira, a u točki $x = -1$ red glasi $-2\sum \frac{1}{2n-1}$ pa također divergira.

Dakle, formula (6.13) vrijedi za $x \in (-1, 1)$ pa pomoću nje možemo izračunati vrijednosti funkcije $\ln x$ za $\forall x \in \mathbb{R}$. Na primjer, $\ln 3$ možemo izračunati tako što ćemo u formulu (6.13) uvrstiti $x = \frac{2}{3}$. Konvergencija reda prikazana je na slici 6.8.



Slika 6.8: Taylorov red za $\ln((1+x)/(1-x))$

Zadatak 6.6 Koliko članova reda treba za računanje $\ln 2$ na četiri decimale kada koristimo formulu (6.12), a koliko kada koristimo formulu (6.13)?

Indeks

G

H

I