

Ivan Slapničar

Marko Matić

Matematika 1

PODSJETNIK ZA UČENJE

<http://www.fesb.hr/mat1>

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
SPLIT, 2001.

Sadržaj

1	Osnove matematike	3
2	Linearna algebra	4
3	Vektorska algebra i analitička geometrija	6
4	Funkcije realne varijable	8
5	Derivacije i primjene	9
6	Nizovi i redovi	10

Ova skripta kao i internet materijali na adresi <http://www.fesb.hr/mat1>, nastala su suradnjom CARNet-a i Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu na projektu "Predavanja, vježbe i zadaci iz Matematike 1".

Copyright ©2002, Ivan Slapničar i Marko Matić. Sva prava pridržana.

1 Osnove matematike

1. Što je sud? Dajte primjer.
2. Kako glase tablice istinitosti slijedećih logičkih operacija: konjunkcija $\wedge$, disjunkcija $\vee$, ekskluzivna disjunkcija $\underline{\vee}$, implikacija $\Rightarrow$, ekvivalencija $\Leftrightarrow$, negacija $\neg$?
3. Što je predikat? Dajte primjer.
4. Objasnite univerzalni kvantifikator $\forall$ i egzistencijalne kvantifikatore $\exists$ i $\exists!$.
5. Kako definiramo partitivni skup?
6. Što je binarna relacija? Kada kažemo da je binarna relacija refleksivna (simetrična, tranzitivna, ekvivalencija)? Primjeri.
7. Kako definiramo relaciju potpunog uređaja? Kako definiramo relaciju parcijalnog uređaja? Navedite primjere. Što je potpuno uređen skup?
8. Što je gornja, a što donja međa? Što su infimum i supremum, a što minimum i maksimum? Navedite primjere.
9. Što je funkcija? Što je domena, a što kodomena? Kako definiramo kompoziciju funkcija? Dokažite $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
10. Definirajte slijedeće vrste funkcija: surjekcija, injekcija, bijekcija, inverzna funkcija, restrikcija, ekstenzija.
11. Kada su skupovi ekvipotentni? Kako definiramo beskonačan skup?
12. Kako glase Peanovi aksiomi? Kako definiramo skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$? Kako glasi princip matematičke indukcije?
13. Dokažite da je skup $\mathbb{N}$ beskonačan.
14. Što su binomni koeficijenti? Što nam o njima kaže Pascalov trokut?
15. Kako glasi binomni poučak?
16. Kako definiramo skupove $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$?
17. Dokažite da su skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ ekvipotentni.

18. Koje baze za brojevne sustave koristimo u praksi?
19. Koji od skupova $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ su diskretni; prebrojivi; gusti?
20. Dokažite da je $\mathbb{Q}$ gust, to jest da između svaka dva različita racionalna broja imamo beskonačno racionalnih brojeva. Dokažite da postoje iracionalni brojevi tako što ćete pokazati da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
21. Objasnite princip rada računala.
22. Koja su svojstva apsolutne vrijednosti realnog broja?
23. Kako definiramo skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$? Što je $|z|$, a što $\bar{z}$? Kako zbrajamo kompleksne brojeve? Koja su svojstva operacija sa kompleksnim brojevima? Dajte primjere.
24. Što je trigonometrijski oblik kompleksnog broja? Kako prebacujemo kompleksne brojeve iz jednog u drugi oblik? Navedite primjer.
25. Nacrtajte skupove $|z - z_0| \leq r$ i $|z - z_1| + |z - z_2| \leq r$.
26. Kako glase Moivreove formule za potenciranje kompleksnih brojeva i za vađenje n -tog korjena? Dokažite Moivreovu formulu za z^2 .
27. Kako glasi eksponencijalni oblik kompleksnog broja? Kako definiramo potenciranje s kompleksnim eksponentom?

2 Linearna algebra

1. Što je sustav linearnih jednadžbi?
2. Što je matrica? Kako zbrajamo matrice? Kako množimo matrice?
3. Što je jedinična matrica; nul-matrica; transponirana matrica; simetrična matrica?
4. Kako pomoću matrice zapisujemo sustav linearnih jednadžbi?
5. Kako rješavamo trokutaste sustave? Opišite postupak Gaussove eliminacije. Što je pivotiranje?
6. Kada su vektori linearno nezavisni? Kako definiramo rang matrice? Kako određujemo rang matrice?

7. Kada kažemo da su dvije matrice ekvivalentne i što vrijedi u tom slučaju?
8. Kako glasi Kronecker–Capellijev teorem? Dokažite da je sustav $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rješiv ako i samo ako $\text{rang}(A) = \text{rang}([A \mid \mathbf{b}])$.
9. Što je inverzna matrica? Dokažite da je inverzna matrica jedinstvena ako postoji. Dokažite da je

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

10. Opišite postupak traženja inverzne matrice.
11. Dokažite da je matrica A reda n regularna ako i samo ako je $\text{rang}(A) = n$.
12. Definirajte slijedeće pojmove: permutacija, inverzija, parnost.
13. Što je determinanta?
14. Navedite i dokažite svojstva determinanti:
 - (a) determinanta trokutaste matrice jednaka je produktu elemenata na dijagonali,
 - (b) $\det(A) = \det(A)^T$,
 - (c) zamjenom dvaju stupaca (redaka) determinanta mijenja predznak,
 - (d) determinanta matrice s dva jednaka stupca (retka) je jednaka nuli,
 - (e) determinanta je linearna funkcija svojih stupaca (redaka),
 - (f) ako determinanta ima nul stupac (redak), tada je jednaka nuli,
 - (g) determinanta se ne mijenja ako nekom stupcu (retku) pribrojimo neki drugi stupac (redak) pomnožen s nekim brojem,
 - (h) $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$ ako obje determinante na desnoj strani postoje (bez dokaza).
15. Dokažite da su lijedeće tvrdnje ekvivalentne:
 - (a) $\text{rang}(A) = n$,
 - (b) $\det(A) \neq 0$,
 - (c) postoji A^{-1} ,
16. Kako možemo definirati rang pomoću poddeterminanti?

17. Objasnite Laplaceov razvoj determinante:

$$\det A = \sum_j a_{ij} A_{ij} = \sum_i a_{ij} A_{ij}.$$

18. Objasnite i dokažite formulu

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^T.$$

19. Izrecite i dokažite Cramerovo pravilo.

3 Vektorska algebra i analitička geometrija

1. Što je usmjereni dužina? Što je vektor? Kako definiramo jednakost dvaju vektora? Koje je osnovno svojstvo Euklidovog prostora?
2. Što su kolinearni vektori?
3. Kako definiramo nul-vektor?
4. Kako zbrajamo i oduzimamo vektore? Kako množimo vektore skalarom? Koja su svojstva tih operacija?
5. Što je radijus-vektor?
6. Što je koordinatni sustav? Kako definiramo vektore u koordinatnom sustavu? Što su skalarne, a što vektorske komponente vektora?
7. Što su koplanarni vektori?
8. Kako definiramo duljinu vektora? Što je jedinični vektor? Što su kosinusi smjerova i kako ih možemo izračunati?
9. Kako definiramo linearnu zavisnost odnosno nezavisnost vektora?
10. Što je baza prostora? Kako možemo vektor $\mathbf{x}$ prikazati u bazi $(0, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, pri čemu su $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ i $\mathbf{x}$ zadani u bazi $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$? Dajte primjer.
11. Kako glase geometrijska i koordinatna definicija skalarnog produkta? Navedite svojstva skalarnog produkta.

12. Kako pomoću skalranog produkta računamo kut između dva vektora?
13. Kako glase geometrijska i koordinatna definicija vektorskog produkta. Navedite svojstva vektorskog produkta i usporedite ih sa svojstvima determinanti.
14. Kako računamo površinu paralelograma, a kako površinu trokuta? Dajte primjere.
15. Kako glase geometrijska i koordinatna definicija mješovitog produkta. Navedite svojstva skalarnog produkta i usporedite ih sa svojstvima determinanti.
16. Objasnite zašto je $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \pm V$, gdje je V volumen paralelopipeda kojeg razapinju vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.
17. Kako računamo volumen paralelopipeda, a kako volumen tetraedra? Dajte primjere.
18. Čemu je jednako

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) ?$$
19. Izvedite jednadžbe pravca: vektorsku, parametarsku, kanonsku, kao presjek dvaju ravnina. Primjer.
20. Izvedite jednadžbe ravnine: vektorsku, segmentnu, kroz tri točke, kroz jednu točku uz zadani vektor normale $\mathbf{n}$, opći oblik. Dajte primjere.
21. Kada su dva pravca paralelna? Kada su dvije ravnine paralelne? Kako možemo odrediti kut između pravca i ravnine, dvije ravnine, dva pravca?
22. Kako određujemo sjecište dvaju pravaca, dvije ravnine, pravca i ravnine? Dajte primjere.
23. Kako određujemo udaljenost dvije točke, točke i pravca, točke i ravnine, dva pravca, dvije ravnine, pravca i ravnine? Dajte primjere.
24. Kako određujemo težište trokuta, upisanu kružnicu, opisanu kružnicu, ortocentar? Dajte primjere.
25. Kako određujemo projekciju točke na ravninu, točke na pravac, pravca na ravninu? Dajte primjere.

4 Funkcije realne varijable

1. Opišite načine zadavanja funkcija i navedite primjere.
2. Kako definiramo slijedeće vrste funkcija: omeđena, parna, neparna, rastuća, strogo rastuća, periodička?
3. Definirajte limes funkcije f u točki x . Dokažite da je limes jedinstven ako postoji. Kako definiramo limese s lijeva i zdesna? Navedite svojstva limesa (pravilo ukliještene funkcije; pravilo zamjene; limes zbroja, produkta, kvocijenta). Kako definiramo limese u beskonačnosti i beskonačne limese?
4. Kada kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x ? Kada kažemo da je funkcija f neprekidna na skupu $\mathcal{A}$? Koja su osnovna svojstva neprekidnih funkcija? Ilustrirajte svojstva primjerima.
5. Kakve vrste prekida imamo? Navedite nekoliko primjera.
6. Što su asimptote i kako ih računamo?
7. Nacrtajte funkcije $\sqrt{x^2}$, $(\sqrt[4]{x})^2$ i $\sqrt[4]{x^2}$.
8. Kako definiramo logaritamske funkcije? Dokažite da je

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

Dokažite da je

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$$

9. Objasnite opću sinusoidu $f(x) = A \sin(\phi x + \psi)$.
10. Dokažite kosinusov poučak i adicione teoreme.
11. Definirajte i nacrtajte sve elementarne funkcije: polinom n -tog stupnja, racionalnu funkciju, n -ti korijen, trigonometrijske funkcije, arkus funkcije, eksponencijalne funkcije i logaritamske funkcije (za različite baze), hiperbolne i area funkcije.
12. Što je inverzna funkcija i kada postoji? Što je $(f \circ f^{-1})(x)$? Nacrtajte funkcije $f(x) = \arcsin(\sin x)$ i $g(x) = \sin(\arcsin x)$.
13. Što kaže osnovni teorem algebre o nul-točkama polinoma n -tog stupnja?

14. Dostizuje li neprekidna funkcija na zatvorenom skupu svoj maksimum i minimum?
15. Kakva mora biti funkcija f da vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)?$$

5 Derivacije i primjene

1. Kako definiramo derivaciju? Koja je geometrijska interpretacija derivacije?
2. Izvedite formule za derivaciju elementarnih funkcija. Dokažite formule za derivaciju zbroja, umnoška i kvocijenta.
3. Kako deriviramo inverznu funkciju? Kako deriviramo kompoziciju funkcija? Kako deriviramo implicitno zadanu funkciju? Dajte primjere.
4. Objasnite postupak logaritamskog deriviranja. Navedite primjer.
5. Što je diferencijal? Koja je geometrijska interpretacija? Kako diferencijal možemo koristiti za približno računanje?
6. Kako definiramo derivacije i diferencijale višeg reda?
7. Izvedite formule za prvu i drugu derivaciju parametarski zadane funkcije.
8. Izrecite i dokažite Fermatov teorem.
9. Izrecite i dokažite Rolleov teorem.
10. Izrecite i dokažite Cauchyjev teorem srednje vrijednosti.
11. Izrecite i dokažite Lagrangeov teorem srednje vrijednosti. Koja je geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema? Zbog čega su važne pretpostavke teorema?
12. Navedite sedam neodređenih oblika koji se mogu javiti prilikom računanja limesa.
13. Izrecite L'Hospitalovo pravilo. Dokažite L'Hospitalovo pravilo za slučaj $\frac{0}{0}$. Navedite nekoliko primjera.

14. Dokažite da je derivabilna funkcija strogo rastuća na nekom otvorenom intervalu ako i samo je njena derivacija veća od nule.
15. Definirajte lokalne i globalne ekstreme.
16. Što je kritična, a što stacionarna točka?
17. Kako glasi nuždan uvjet ekstrema?
18. Kako glasi dovoljan uvjet ekstrema? (Preko promjene predznaka prve derivacije ili preko druge ili viših derivacija) Dokažite navede dovoljne uvjete ekstrema.
19. Kako definiramo konveksnost i konkavnost? Koja su svojstva grafa konveksne i konkavne funkcije? Kako možemo provjeriti konveksnost i konkavnost pomoću druge derivacije?
20. Što je točka infleksije i kada postoji?
21. Kako ispitujemo tok funkcije? Navedite primjer.
22. Kako ispitujemo tok parametarski zadane funkcije? Navedite primjer.

6 Nizovi i redovi

1. Što je niz? Kada je niz padajući, a kada strogo padajući? Kada je niz monoton?
2. Kako definiramo limes niza? Riješite osnovnu nejednadžbu konvergencije za neki konkretan niz.
3. Dokažite da je limes niza jedinstven.
4. Što je gomilište? Što je $\limsup a_n$, a što $\liminf a_n$?
5. Što je podniz? Kako još možemo definirati gomilište (pomoću podniza)?
6. Konvergentan niz je omeđen. Dokaz.
7. Svaki niz ima monoton podniz. Dokaz.
8. Monoton i omeđen niz je konvergentan. Dokaz.

9. Dokažite da je niz

$$e \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

konvergentan (rastući i omeđen odozgo).

10. Kako možemo odrediti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}?$$

11. Navedite dovoljan uvjet konvergencije niza (niz konvergira ako i samo ako je Cauchyjev).

12. Dokažite

$$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1, \quad \sqrt[n]{n} \rightarrow 1.$$

13. Što je red brojeva? Kako definiramo sumu reda (limes niza parcijalnih suma)?

14. Što je geometrijski red? Opišite Zenonov paradoks.

15. Dokažite nuždan uvjet konvergencije reda ($a_n \rightarrow 0$).

16. Opišite konvergenciju reda

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

u ovisnosti o parametru p .

17. Dokažite da harmonijski red

$$\sum \frac{1}{n}$$

divergira.

18. Opišite konvergenciju reda

$$\sum \frac{(n+1)^\alpha}{(n!)^\beta}$$

u ovisnosti o parametrima α i β .

19. Opišite kriterije konvergencije za redove s pozitivnim članovima – poredbeni; D'Alembertov; Cauchyjev; Raabeov.

20. Što je apsolutna konvergencija? Da li apsolutna konvergencija nekog reda povlači i konvergenciju tog reda?
21. Kako glasi Leibnitzov kriterij konvergencije i za kakve ga redove koristimo?
22. Što je niz funkcija? Navedite primjer.
23. Kako definiramo konvergenciju po točkama (običnu konvergenciju) niza funkcija? Navedite primjere.
24. Kako definiramo uniformnu konvergenciju niza funkcija? Da li uniformna konvergencija povlači običnu konvergenciju? Navedite primjer.
25. Što je red funkcija? Navedite primjer.
26. Kako definiramo konvergenciju po točkama (običnu konvergenciju) reda funkcija? (Ili kao konvergenciju redova brojeva koji se dobiju kada uvrštavamo točke iz domene ili kao običnu konvergenciju pripadnog niza parcijalnih suma funkcija.) Navedite primjere.
27. Definirajte uniformnu i apsolutnu konvergenciju reda funkcija. Kako glasi Weierstrašov kriterij konvergencije?
28. Kako se nalazi područje konvergencije reda funkcija? Dajte primjer.
29. Što je red potencija i njegov radijus konvergencije?
30. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum \frac{1}{n} x^n.$$

Uputa: prvo se nađe područje apsolutne konvergencije pomoću kriterija za konvergenciju redova s pozitivnim članovima, a potom se posebno ispituju rubovi područja apsolutne konvergencije.
31. Kada možemo derivirati red funkcija? Kako deriviramo red potencija? Navedite nekoliko primjera.
32. Kako glasi Taylorova formula i čemu služi? Što je ostatak?
33. S kojom točnošću Taylorov (ili MacLaurinov) red aproksimira zadanu funkciju u nekoj točki?

34. Koje vrijednosti funkcije $\ln x$ možemo izračunati pomoću MacLaurinovog reda funkcije

$$\ln \frac{1+x}{1-x}?$$

35. Kako glase MacLaurinovi redovi za funkcije e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\ln((1+x)/(1-x))$? Izvedite te redove i njihovo područje konvergencije.