

Ivan Slapničar

MATEMATIKA 2

<http://www.fesb.hr/mat2>

SVEUČILIŠTE U SPLITU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Split, ožujak 2008.

Sadržaj

Popis slika	xiii
Predgovor	xv
1. NEODREĐENI INTEGRAL	1
1.1 Definicija i osnovna svojstva	2
1.1.1 Tablica osnovnih integrala	6
1.2 Metode supstitucije	9
1.3 Metoda parcijalne integracije	12
1.3.1 Rekurzivne formule	15
1.4 Integriranje racionalnih funkcija	16
1.4.1 Primjer	20
1.5 Racionalne funkcije trigonometrijskih funkcija	22
1.6 Racionalne funkcije hiperbolnih funkcija	26
1.7 Integriranje nekih iracionalnih funkcija	28
1.7.1 Racionalna supstitucija	28
1.7.2 Trigonometrijske i Eulerove supstitucije	29
1.7.3 Metoda neodređenih koeficijenata	30
1.7.4 Binomni integral	32
1.8 Integriranje reda funkcija	34
1.9 Slobodan pad uz otpor zraka	39
2. ODREĐENI INTEGRAL	43

2.1	Definicija i osnovna svojstva	44
2.2	Newton-Leibnitzova formula	48
2.3	Supstitucija i parcijalna integracija	52
2.4	Teoremi o određenom integralu	54
2.5	Nepravi integral	57
2.5.1	Kriteriji konvergencije	59
2.6	Primjene određenog integrala	62
2.6.1	Površina ravninskog lika	62
2.6.2	Duljina luka ravninske krivulje	70
2.6.3	Volumen rotacionog tijela	73
2.6.4	Oplošje rotacionog tijela	76
2.6.5	Sila i rad	78
2.6.6	Hidrostatski tlak i sila	82
2.6.7	Momenti i težište	84
2.7	Numeričko integriranje	88
2.7.1	Eliptički integrali	88
2.7.2	Trapezna formula	90
2.7.3	Simpsonova formula	93
2.7.4	Richardsonova ekstrapolacija	95
2.7.5	Programi	97
3.	FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI	99
3.1	Definicija	99
3.2	Limes	106
3.3	Neprekidnost	109
3.4	Plohe drugog reda	111
3.4.1	Eliptički paraboloid	112
3.4.2	Hiperbolički paraboloid	114
3.4.3	Hiperboloid	116
3.4.4	Stožac	116

3.4.5	Cilindri	118
3.4.6	Neke zanimljive plohe	119
3.4.7	Presjek ploha	119
3.5	Parcijalne derivacije	122
3.6	Totalni diferencijal	126
3.7	Tangencijalna ravnina	129
3.8	Parcijalne derivacije kompozicije funkcija	134
3.9	Totalni diferencijal višeg reda	135
3.9.1	Taylorova formula	136
3.10	Ekstremi funkcija više varijabla	139
3.11	Implicitno zadane funkcije	148
3.12	Problem vezanog ekstrema	159
4.	VIŠESTRUKI INTEGRALI	169
4.1	Definicija i osnovna svojstva	169
4.2	Dvostruki integral	173
4.2.1	Volumen i površina	176
4.2.2	Polarne koordinate	177
4.2.3	Nepravi integral	180
4.3	Trostruki integral	183
4.3.1	Cilindrične i sferne koordinate	184
4.4	Zamjena varijabli	188
4.5	Momenti i težišta	190
4.6	Integrali ovisni o parametru	195
4.7	Varijacioni račun	200
4.7.1	Nužni i dovoljni uvjeti ekstrema	203
4.7.2	Primjeri	206
4.7.3	Uvjetni ekstrem	213
4.7.4	Eulerova metoda konačnih razlika	218

5. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE	221
5.1 Populacijska i logistička jednađba	224
5.2 Jednađbe sa separiranim varijablama	231
5.3 Polje smjerova	234
5.4 Eulerova metoda	235
5.5 Ortogonalne i izogonalne trajektorije	238
5.6 Singularna rješenja i ovojnice	242
5.7 Egzaktne jednađbe i integrirajući faktori	245
5.8 Linearne diferencijalne jednađbe prvog reda	249
5.9 Linearne diferencijalne jednađbe drugog reda	251
5.9.1 Homogene jednađbe	253
5.9.2 Nehomogene jednađbe	256
5.9.3 Jednađbe s konstantnim koeficijentima	259
5.9.4 Slobodna, gušena i prisilna titranja	265
5.10 Linearne diferencijalne jednađbe višeg reda	273
5.11 Sustavi diferencijalnih jednađbi	278
6. METODA NAJMANJIH KVADRATA I QR RASTAV	285
6.1 Problem najmanjih kvadrata	285
6.1.1 Linearna regresija	286
6.1.2 Metoda najmanjih kvadrata	289
6.2 QR rastav	295
6.2.1 QR rastav vektora i Householderov reflektor	296
6.2.2 QR rastav matrice	298
6.2.3 Numeričko računanje QR rastava	299
6.2.4 Rješavanje problema najmanjih kvadrata	300
6.2.5 Ekonomični QR rastav	302
6.2.6 QR rastav s pivotiranjem po stupcima	302
Indeks	303

Popis slika

1.1	Primitivna funkcija	4
1.2	Slobodan pad uz otpor zraka za $m = k$	39
2.1	Gornja suma	45
2.2	Donja suma	46
2.3	Rastav integrala na djelove	47
2.4	Dovoljan uvjet integrabilnosti	48
2.5	Primjena Newton-Leibnitzove formule	50
2.6	Primitivna funkcija kao odredjeni integral	53
2.7	Teorem srednje vrijednosti	55
2.8	Nepravi integral	57
2.9	Konvergentna gornja suma nepravog integrala	58
2.10	Poredbeni kriterij za odredjeni integral	61
2.11	Apsolutna konvergencija nepravog integrala	61
2.12	Površina ravninskog lika i element površine	63
2.13	Površina ravninskog lika I	64
2.14	Površina ravninskog lika II	65
2.15	Površina elipse	66
2.16	Površina ispod jednog luka cikloide	67
2.17	Polarni koordinatni sustav	68
2.18	Element površine u polarnim koordinatama	69
2.19	Površina kruga u polarnim koordinatama	69

2.20	Arhimedova spirala $r = a\varphi$	70
2.21	Element duljina luka ravninske krivulje	71
2.22	Volumen rotacionog tijela i element volumena	74
2.23	Oplošje rotacionog tijela i element oplošja	77
2.24	Hookeov zakon	79
2.25	Rezervar s vodom	80
2.26	Zaronjena tanka ploča	82
2.27	Hidrostatski pritisak na branu	83
2.28	Težište ravne ploče	84
2.29	Ravnoteža poluge	84
2.30	Ploča uniformne gustoće ρ	86
2.31	Koordinate težišta ploče	87
2.32	Trapezna formula	90
2.33	Simpsonova formula	93
3.1	Projekcija funkcije $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ na xz -ravninu uz $y = 0$. . .	100
3.2	Projekcije funkcije $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ na yz -ravninu za $x = 0$ i $x = 1$	101
3.3	Projekcije funkcije $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ na xy -ravninu za $z = 1$ i $z = 2$	101
3.4	Kružni stožac $z = \sqrt{x^2 + y^2}$	102
3.5	Eliptički stožac	103
3.6	Izobare vremenske prognoze	104
3.7	Područje definicije funkcije $z = \ln(x + y - 2)$	104
3.8	Nivo-plohe funkcije $u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$ za $u = 0.5$ i $u = 1$	105
3.9	Nivo plohe funkcije $u = -\frac{x^2+y^2}{z}$ za $u = 1$ i $u = 2$	106
3.10	Otvorene kugle za $n = 1, 2, 3$	107
3.11	Neprekidna funkcija na zatvorenom skupu	111
3.12	Elipsoid $x^2/36 + y^2/16 + z^2/4 = 1$	112
3.13	Paraboloid $z = x^2/4 + y^2$	113
3.14	(A) Nivo plohe i (B) presjeci paralelni s yz -ravninom za paraboloid $z = x^2/4 + y^2$.	113
3.15	Pomaknuti paraboloid $z - 5 = (x - 3)^2 + 4(y + 2)^2$	114

3.16	Polegnuti paraboloid $-x = y^2 + z^2$	115
3.17	Hiperbolički paraboloid $z = x^2 - y^2$	115
3.18	Nivo plohe za $z = x^2 - y^2$	116
3.19	(A) Jednokrilni i (B) dvokrilni hiperboloid za $a = b = c = 1$. . .	117
3.20	Stožac $z^2 = x^2 + y^2$	118
3.21	(A) $(x + 2)^2 + y^2/4 = 1$ i (B) $x^2 - y^2 = 1$	119
3.22	Parabolički cilindar $z = y^2$	120
3.23	$(x^2y)/(x^2 + y^2)$	120
3.24	$(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$	121
3.25	$\sin x \sin y$	121
3.26	$\exp(\sin(x/y))$	122
3.27	Presjek ploha.	123
3.28	Diferencijal funkcije jedne varijable	130
3.29	Tangencijalna ravnina paraboloida $z = -2(x - 1)^2 - y^2$ u točki $(2, 1, -3)$	132
3.30	Lokalni minimum	141
3.31	Sedlasta točka	142
3.32	Lokalni maksimum u nestacionarnoj točki	143
3.33	Implicitno zadana kružnica	150
3.34	Implicitno zadana funkcija izvedena iz kružnice	150
3.35	Implicitno zadana parabola	151
3.36	Implicitno zadan stožac	153
3.37	Sjecište krivulja $y = x$ i $y = e^{-x}$	158
3.38	Implicitno zadana funkcija $xyz = e^{-xyz}$	158
3.39	Problem vezanog ekstrema	160
3.40	Vezani ekstremi	165
3.41	Lokalni vezani minimum	166
3.42	Lokalni vezani minimum	167
4.1	Primjer višestrukog integrala	171
4.2	Područje integracije dvostrukog integrala	175

4.3	Područje integracije za računanje volumena	177
4.4	Element površine u polarnim koordinatama II	178
4.5	Polukrug u prvom kvadrantu	179
4.6	Funkcija $y = e^{-x^2}$	181
4.7	Kvadrat s upisanom i opisanom četvrtinom kruga	182
4.8	Projekcija presjeka paraboloida i stošca na xz -ravninu	184
4.9	Element volumena u cilindričnim koordinatama	185
4.10	Sferne koordinate	186
4.11	Element volumena u sfernim koordinatama	187
4.12	Polukružna ploča	191
4.13	Blokada kotača i projekcija na xz -ravninu	193
4.14	Gama funkcija	199
4.15	Problem najkraćeg puta	202
4.16	Problem brahistohrone	202
4.17	Funkcija y_0 i njene varijacije	203
4.18	Cikloida kao rješenje problema najkraćeg vremena	209
4.19	Cikloida kao rješenje problema najkraćeg vremena	209
5.1	Titranje mase obješene na oprugu	222
5.2	Strujni krug	223
5.3	Struja u strujnom krugu	225
5.4	Rast svjetskog stanovništva od 1750. do 2005. godine	226
5.5	Rast svjetskog stanovništva od 1950. do 2005. godine	227
5.6	Rješenja logističke jednadžbe	230
5.7	Polje smjerova za jednadžbe (a) $y' = x + y$ i (b) $y' = x^2 + y^2 - 1234$	234
5.8	Polje smjerova logističke jednadžbe	236
5.9	Eulerova metoda	238
5.10	Ortogonalne trajektorije $y = kx$ i $x^2 + y^2 = C$	239
5.11	Ortogonalne trajektorije $x = ky^2$ i $x^2 + y^2/2 = C$	240
5.12	Tangens razlike kutova	241

5.13	Izogonálne trajektorije $y = kx$ i $r = Ce^{\varphi}$	242
5.14	Ovojnice	244
5.15	Clairautova jednadžba	245
5.16	Titranje mase obješene na oprugu uz gušenje i vanjsku silu .	266
5.17	Gušeno titranje	268
5.18	Gušeni sustav s prisilnim oscilacijama	270
5.19	Neomedjene oscilacije	272
5.20	Strujni krug s kondenzatorom, otporom i zavojnicom	272
5.21	Populacije vukova (V) i zečeva ($Z/10$) uz $V(0) = 30$ i $Z(0) = 800280$	
5.22	Polje smjerova za populacije vukova i zečeva	281
5.23	Populacije vukova i zečeva uz uvjete $V(0) = 30$ i $Z(0) = 800$.	282
6.1	Pet točaka u ravnini	286
6.2	Rješenje problema najmanjih kvadrata	288
6.3	Parabola s najboljom prilagodbom	294

Predgovor

Ovaj udžbenik namijenjen je studentima tehničkih i prirodnih znanosti, a u prvom redu studentima Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu (FESB). U udžbeniku je izloženo gradivo kolegija "Matematika 2" po sadržaju koji se predaje na FESB-u prema bolonjskom programu. Obrađena su poglavlja *Neodređeni integral*, *Određeni integral*, *Funkcije više varijabli*, *Višestruki integrali*, *Diferencijalne jednačbe* te, dodatano, poglavlje *Metoda najmanjih kvadrata i QR rastav*. Sličan sadržaj nalazi se u većini istoimenih kolegija na tehničkim i prirodoslovnim fakultetima.

Budući se radi o standardnom sadržaju, nije citirana posebna literatura. Spomenut ću samo neke od knjiga sličnog sadržaja, a koje preporučujem i čitatelju:

- D. Blanuša, *Viša matematika*, II. dio (1. i 2. svezak), Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
- P. Javor, *Matematička analiza 2*, Element, Zagreb, 2002.
- N. Uglešić, *Viša matematika II*, Sveučilište u Splitu, Split, 2000.
- B. P. Demidović, *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1978.

U izradi udžbenika korištena su iskustva i zabilješke bivših i sadašnjih nastavnika FESB-a pa im ovom prilikom iskazujem svoju zahvalnost.

Dio udžbenika izrađen je na osnovi suradnje Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske i Sveučilišta u Splitu, Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, na I-projektu "Matematika 2 – digitalni udžbenik s interaktivnim animacijama i interaktivnom provjerom znanja" (<http://www.fesb.hr/mat2>).

U Splitu, ožujka 2008.

Autor

1.

NEODREĐENI INTEGRAL

1.1	Definicija i osnovna svojstva	2
1.1.1	Tablica osnovnih integrala	6
1.2	Metode supstitucije	9
1.3	Metoda parcijalne integracije	12
1.3.1	Rekurzivne formule	15
1.4	Integriranje racionalnih funkcija	16
1.4.1	Primjer	20
1.5	Racionalne funkcije trigonometrijskih funkcija	22
1.6	Racionalne funkcije hiperbolnih funkcija	26
1.7	Integriranje nekih iracionalnih funkcija	28
1.7.1	Racionalna supstitucija	28
1.7.2	Trigonometrijske i Eulerove supstitucije	29
1.7.3	Metoda neodređenih koeficijenata	30
1.7.4	Binomni integral	32
1.8	Integriranje reda funkcija	34
1.9	Slobodan pad uz otpor zraka	39

Ovo poglavlje bavi se nalaženjem neodređenih integrala (kraće: integrala), odnosno anti-derivacija. Prije formalne definicije neodređenog integrala, neformalno ćemo opisati osnovnu ideju. Anti-derivacija zadane funkcije je funkcija čija je derivacija jednaka zadanoj funkciji. Na primjer, kako je $(\sin x)' = \cos x$, to je anti-derivacija funkcije $\cos x$ jednaka $\sin x$. Međutim, kako je derivacija konstante jednaka nuli, to je i funkcija $\sin x + C$ također anti-derivacija funkcije $\cos x$ za svaku konstantu C . Integral zadane funkcije je skup svih njenih anti-derivacija, što zapisujemo kao

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

Zaključujemo da neke integrale možemo dobiti čitajući tablicu elementarnih derivacija [M1, §5.1.5] zdesna na lijevo. Tako je, na primjer,

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$$

Međutim, integriranje je složeniji postupak od deriviranja. Također, integral elementarne funkcije nije uvijek elementarna funkcija. Naime, dok je svaku elementarnu funkciju lako derivirati jednostavnom primjenom pravila deriviranja, pri čemu je derivacija opet elementarna funkcija, kod integriranja to nije slučaj. Tako je, na primjer, $\int e^x dx = e^x + C$, dok recimo $\int e^{x^2} dx$ nije elementarna funkcija, odnosno ne može se prikazati kao pomoću konačne primjene zbrajanja, razlike, množenja, dijeljenja i komponiranja osnovnih elementarnih funkcija [M1, §4.6.7]. Integral ove funkcije može se prikazati pomoću reda funkcija (poglavlje 1.8).

U ovom poglavlju dat ćemo definiciju i osnovna svojstva integrala, opisati osnovne metode integriranja, te postupke integriranja za nekoliko tipova funkcija (racionalne funkcije, racionalne funkcije trigonometrijskih funkcija i neke iracionalne funkcije). Opisat ćemo i postupak integriranja reda funkcija.

1.1 Definicija i osnovna svojstva

Neka je zadana funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Želimo naći funkciju F koja derivirana daje f , odnosno želimo riješiti jednačinu

$$F'(x) = f(x),$$

za one x za koje rješenje postoji.

Za slijedeću definiciju potrebno je ponoviti neke definicije. Neka je $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Interval* I je svaki od skupova

$$\begin{aligned} [a, b], \quad (a, b), \quad (a, b], \quad [a, b), \quad [a, +\infty), \\ (a, +\infty), \quad (-\infty, b), \quad (-\infty, b], \quad (-\infty, +\infty) \equiv \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nadalje, skup je *prebrojiv* ako je ekvipotentan sa skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ [M1, definicija 1.15].

Definicija 1.1 Neka je zadana funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, neka je $I \subseteq D$ interval i neka je $A \subseteq I$ konačan ili prebrojiv podskup. *Primitivna funkcija* funkcije f na intervalu I je svaka neprekidna funkcija $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $F'(x) = f(x)$ za $\forall x \in I \setminus A$.¹

¹Ukoliko je $A = \emptyset$, tada je F striktno primitivna funkcija funkcije f na intervalu I .

Ova definicija i činjenica da je derivacija konstantne funkcije jednaka nuli povlače slijedeći teorem.

Teorem 1.1 *Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu I , tada je i $F(x) + C$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu I za svaku konstantu $C \in \mathbb{R}$.*

Primjer 1.1 a) Zadana je funkcija $f(x) = 2x$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcije

$$F_1(x) = x^2, \quad F_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^0 \quad \text{i}$$

$$F_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad F_2(x) : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{1}{3}, +\infty)$$

su primitivne funkcije od f na $\mathbb{R}$ (slika 1.1 a)).

b) Prema definiciji 1.1, F_1 i F_2 su i primitivne funkcije od

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{za } x \neq 1, \\ 0, & \text{za } x = 1, \end{cases}$$

jer možemo uzeti $I = \mathbb{R}$ i $A = \{-1\}$, odnosno skup A je u ovom slučaju konačan (vidi sliku 1.1 b)).

c) F_1 i F_2 su također primitivne funkcije funkcije

$$h(x) = \begin{cases} 2x, & \text{za } x \notin \mathbb{N}, \\ 0, & \text{za } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

jer možemo uzeti $I = \mathbb{R}$ i $A = \mathbb{N}$, pri čemu je skup A prebrojiv.

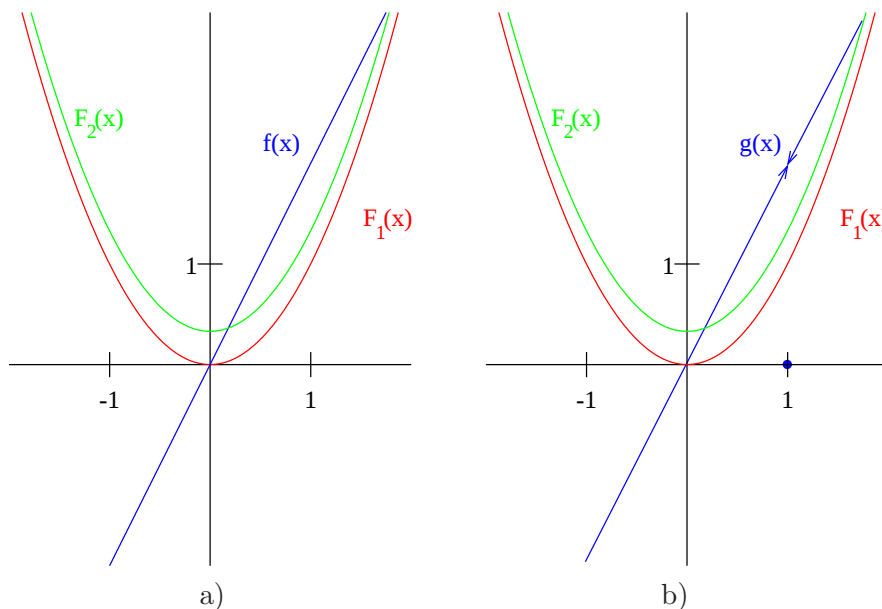
d) Neka je

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{za } -2 < x < 2, \\ x, & \text{za } 2 \leq x. \end{cases}$$

Primitivna funkcija funkcije f je

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{za } -2 < x < 2, \\ \frac{x^2}{2}, & \text{za } 2 \leq x. \end{cases}$$

Konstantu -2 u izrazu $x^2 - 2$ smo izabrali tako da se ispuni uvjet neprekidnosti funkcije F na intervalu $I = (-2, +\infty)$ prema definiciji 1.1. Naravno, i funkcija $F(x) + C$ je primitivna funkcija funkcije f za svaku konstantu C . Nacrtajte funkcije f i F .



Slika 1.1: Primitivna funkcija

Nakon što smo usvojili pojam primitivne funkcije možemo definirati neodređeni integral, no prije toga dokazat ćemo još sljedeći teorem.

Teorem 1.2 *Ako su F i G dvije primitivne funkcije funkcije f na intervalu I , tada postoji konstanta C takva da je $G(x) = F(x) + C$.*

Dokaz. Dokažimo teorem za najjednostavniji slučaj kada je $A = \emptyset$, odnosno kada se radi o striktno primitivnim funkcijama. Pretpostavke teorema povlače

$$G'(x) = F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I,$$

pa je $(G - F)'(x) = 0$, odnosno $(G - F)(x) = C$ za neku konstantu C i za svaki $x \in I$. ■

Definicija 1.2 *Neodređeni integral funkcije f na intervalu I je skup svih primitivnih funkcija funkcije f na intervalu I . Koristimo oznaku*

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

pri čemu je F neka primitivna funkcija funkcije f na intervalu I , x je *varijabla integracije*, a f je *podintegralna funkcija* ili *integrand*, a C je *konstanta integracije*.

Napomenimo da gornju jednakost interpretiramo kao jednakost među funkcijama, odnosno $F(x)$ označava funkciju F , a ne njezinu vrijednost u točki x .

Primjer 1.2 Vrijedi

$$\begin{aligned}\int dx &= x + C, \\ \int x^4 dx &= \frac{x^5}{5} + C, \\ \int e^x dx &= e^x + C.\end{aligned}$$

Napomena 1.1 Dva uvjeta iz definicije 1.1 zaslužuju dodatno objašnjenje. Uvjet da formula $F'(x) = f(x)$ vrijedi na skupu $I \setminus A$, a ne na čitavom skupu I , što je slabiji uvjet od onoga što bismo očekivali, proizlazi iz geometrijskog značenja određenog integrala (poglavlje 2). Naime, određeni integral u principu daje površinu između podintegralne funkcije i x -osi, a kako površina ne ovisi o vrijednosti funkcije u prebrojivo točaka, to se i u definiciji neodređenog integrala uzima slabiji uvjet. Drugi uvjet je da se traži neprekidnost funkcije F na čitavom intervalu I i onda kada funkcija f taj uvjet ne ispunjava. Ovaj uvjet proističe iz fizikalne interpretacije integrala. Naime, brzina je derivacija puta po vremenu [M1, §5.1], pa je stoga put integral brzine. No, dok funkcija kojom je zadana brzina može (u idealnim uvjetima) imati prekide, prijeđeni put je uvijek neprekidan. Stoga je i uvjet neprekidnosti primitivne funkcije prirodan.

Slijedeća dva teorema daju nam osnovna svojstva integrala. Prisjetimo se definicije diferencijala funkcije f [M1, §5.2],

$$df(x) = f'(x) dx.$$

Prvi teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 1.3 *Neka je $\int f(x) dx = F(x) + C$, odnosno $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I \setminus A$, i nake je funkcija F neprekidna na intervalu I . Tada za svaki $x \in I \setminus A$ vrijedi:*

- (i) $(\int f(x) dx)' = f(x)$, odnosno derivacija integrala jednaka je podintegralnoj funkciji. Ovu jednakost također interpretiramo kao jednakost među funkcijama koja vrijedi na skupu $I \setminus A$.

(ii) $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$, odnosno diferenciranje poništava integriranje.

(iii) $\int dF(x) = F(x) + C$, odnosno integriranje poništava diferenciranje do na konstantu.

Teorem 1.4 *Neodređeni integral je linearan, odnosno*

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)) dx = \alpha_1 \int f_1(x) dx + \cdots + \alpha_n \int f_n(x) dx + C.$$

Dokaz. Neka je $F_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f_i za $i = 1, \dots, n$. To znači da je $(F_i(x))' = f_i(x)$ za svaki $x \in I \setminus A_i$, pri čemu je A_i prebrojiv podskup od I , odnosno $\int f_i(x) dx = F_i(x) + C_i$. Dakle, jednakost

$$(\alpha_1 F_1(x) + \cdots + \alpha_n F_n(x))' = \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)$$

vrijedi za svaki $x \in I \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$. Kako je skup $\bigcup_{i=1}^n A_i$ također prebrojiv, zaključujemo da je funkcija $\alpha_1 F_1(x) + \cdots + \alpha_n F_n(x)$ jedna primitivna funkcija funkcije $\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)$. Stoga vrijedi

$$\begin{aligned} \int (\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)) dx &= \alpha_1 F_1(x) + \cdots + \alpha_n F_n(x) + K \\ &= \alpha_1 \left(\int f_1(x) dx - C_1 \right) + \cdots \\ &\quad + \alpha_n \left(\int f_n(x) dx - C_n \right) + K \\ &= \alpha_1 \int f_1(x) dx + \cdots + \alpha_n \int f_n(x) dx + C, \end{aligned}$$

gdje je $C = K - \alpha_1 C_1 - \cdots - \alpha_n C_n$. ■

1.1.1 Tablica osnovnih integrala

Kao što smo već kazali, tablicu osnovnih integrala dobijemo čitajući tablicu osnovnih derivacija [M1, §5.1.5] zdesna na lijevo, uz odgovarajuće

manje prilagodbe. Za konstantnu funkciju i potencije vrijedi:

$$\begin{aligned}\int 0 \cdot dx &= C, \\ \int dx &= \int 1 \cdot dx = x + C, \\ \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \int \frac{1}{x^n} dx &= -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \\ \int x^r dx &= \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1, \quad x > 0, \\ \int x^{-1} dx &= \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.\end{aligned}$$

Dokažimo zadnju formulu: za $x > 0$ vrijedi $\ln|x| = \ln x$ pa je $(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x$, dok za $x < 0$ vrijedi $\ln|x| = \ln(-x)$ pa je

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Za eksponencijalne funkcije imamo

$$\begin{aligned}\int e^x dx &= e^x + C, \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

Formule za derivacije trigonometrijskih funkcija povlače

$$\begin{aligned}\int \sin x dx &= -\cos x + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C,\end{aligned}$$

a formule za derivacije arkus funkcija povlače

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad x \in (-1, 1).\end{aligned}$$

Druge po redu jednakosti u prethodne dvije formule slijede iz jednakosti

$$\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x, \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Primijetimo da integrali funkcija $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ ne spadaju u tablične integrale.

Konačno, formule za derivacije hiperbolnih funkcija povlače

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh} x \, dx &= \operatorname{ch} x + C, \\ \int \operatorname{ch} x \, dx &= \operatorname{sh} x + C, \\ \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx &= \operatorname{th} x + C, \\ \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \, dx &= -\operatorname{cth} x + C, \end{aligned}$$

dok formule za derivacije area funkcija povlače

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-x^2} \, dx &= \begin{cases} \operatorname{arth} x + C, & \text{za } |x| < 1 \\ -\operatorname{arth} x + C, & \text{za } |x| > 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C, \quad x \neq 1, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx &= \operatorname{arsh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx &= \begin{cases} \operatorname{arch} x + C, & \text{za } x > 1 \\ -\operatorname{arch}(-x) + C, & \text{za } x < -1 \end{cases} \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{aligned}$$

Zadatak 1.1 Odredite područja definicije prethodnih integrala, odnosno sve vrijednosti x za koje odgovarajuće formule vrijede.

Primjer 1.3 *Neposredno integriranje* je najjednostavnija tehnika integriranja. Ono se sastoji u primjeni teorema 1.4 i tablice osnovnih integrala. Na primjer,

$$\begin{aligned} \int (4 \cos x + \frac{1}{2}x^3 - 3) \, dx &= 4 \int \cos x \, dx + \frac{1}{2} \int x^3 \, dx - 3 \int dx \\ &= 4 \sin x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} - 3x + C. \end{aligned}$$

Slijedeći integral rješavamo primjenom osnovnog trigonometrijskog identiteta:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.\end{aligned}$$

1.2 Metode supstitucije

Za rješavanje složenijih integrala često koristimo dvije metode supstitucije. One se sastoje u tome da se zadani integral

- 1) dopustivom zamjenom varijable integracije nekom funkcijom (bijekcijom) ili
- 2) dopustivom zamjenom nekog analitičkog izraza novom varijablom integracije

svede na tablični integral.

Teorem 1.5 *Neka je zadana funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Neka je I_1 neki drugi interval i neka je funkcija $\varphi : I_1 \rightarrow I$ derivabilna bijekcija. Neka je i inverzna funkcija $\varphi^{-1} : I \rightarrow I_1$ također derivabilna. Ako je $\psi : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $(f \circ \varphi)\varphi'$ na intervalu I_1 , odnosno ako je*

$$\int (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt = \psi(t) + C,$$

tada je $F = \psi \circ \varphi^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f na intervalu I , odnosno

$$\int f(x) dx = \psi(\varphi^{-1}(x)) + C, \quad x \in I.$$

Drugim riječima, $\int f(x) dx$ možemo rješavati pomoću supstitucije $x = \varphi(t)$, pri čemu je φ bijekcija:

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \psi(t) + C = \{t = \varphi^{-1}(x)\} = \psi(\varphi^{-1}(x)) + C.\end{aligned}$$

Bijektivnost funkcije φ je nužna za vraćanje supstitucije natrag.

Dokaz. Po pretpostavci teorema, funkcija ψ je neprekidna jer je to primitivna funkcija. Funkcija φ^{-1} je neprekidna jer je derivabilna pa je funkcija $F = \psi \circ \varphi^{-1}$ neprekidna na intervalu I . Nadalje, postoji konačan ili prebrojiv skup $A_1 \subset I_1$ takav da je

$$\psi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad \forall t \in I_1 \setminus A_1.$$

Zbog bijektivnosti funkcije φ je i skup $A = \varphi(A_1) \subset I$ također konačan ili prebrojiv te vrijedi

$$x = \varphi(t) \in I \setminus A \iff t = \varphi^{-1}(x) \in I_1 \setminus A_1.$$

Dakle, za $x \in I \setminus A$ vrijedi

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\psi \circ \varphi^{-1})'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

pa je F primitivna funkcija funkcije f na intervalu I i teorem je dokazan. ■

Primjer 1.4 Vrijedi

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{1 + t^2}{t^3} 6t^5 dt = 6 \int (t^2 + t^4) dt \\ &= 6 \frac{t^3}{3} + 6 \frac{t^5}{5} = \{t = \sqrt[6]{x}\} = 2x^{\frac{3}{6}} + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + C \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + C. \end{aligned}$$

Primijetimo da funkcija $\varphi(t) = t^6$ nije bijekcija za $t \in \mathbb{R}$. Međutim, kako je zadani integral definiran samo za $x > 0$, možemo uzeti da $t > 0$, pa ja za takve t funkcija t^6 bijekcija.

Teorem 1.6 *Neka je dana funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Neka postoje interval I_1 , derivabilna funkcija $\varphi : I \rightarrow I_1$ i funkcija $g : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ za koje vrijedi*

$$f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x), \quad \forall x \in I.$$

Neka je $G : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije g na intervalu I_1 , odnosno

$$G'(t) = g(t), \quad \forall t \in I_1 \setminus A_1,$$

pri čemu je $A_1 \subset I_1$ konačan ili prebrojiv skup. Neka je skup A definiran s $A = \{x \in I : \varphi(x) \in A_1\}$. Tada je $F = G \circ \varphi$ primitivna funkcija funkcije f na intervalu I , odnosno za svaki $x \in I$ vrijedi

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int g(\varphi(x))\varphi'(x) dx \left\{ \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right\} = \int g(t) dt \\ &= G(t) + C = G(\varphi(x)) + C = F(x) + C. \end{aligned}$$

Dokaz. Funkcija G je po pretpostavci neprekidna na intervalu I_1 , a funkcija φ je derivabilna i neprekidna na intervalu I . Stoga je funkcija $F = G \circ \varphi$ neprekidna na intervalu I . Nadalje, skup A je konačan ili prebrojiv pa za $x \in I \setminus A$ vrijedi $\varphi(x) \in I_1 \setminus A_1$ i

$$F'(x) = (G \circ \varphi)'(x) = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x) = f(x),$$

odnosno F je primitivna funkcija funkcije f na intervalu I . ■

Primjer 1.5 a) Vrijedi

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x+3} dx &= \left\{ \begin{array}{l} 2x+3 = t \\ 2 dx = dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{t^3} + C \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(2x+3)^3} + C. \end{aligned}$$

b) Vrijedi

$$\int \cos 5x dx = \left\{ \begin{array}{l} 5x = t \\ 5 dx = dt \end{array} \right\} = \int \cos t \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \sin t + C = \frac{1}{5} \sin 5x + C.$$

c) Vrijedi

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} &= \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{l} x+1 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C \\ &= \operatorname{arctg}(x+1) + C. \end{aligned}$$

d) Vrijedi

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(1+x^2)^r} &= \left\{ \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t^r} = \frac{1}{2} \int t^{-r} dt \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \ln |t| + C_1, & \text{za } r = 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-r+1}}{-r+1} + C_2, & \text{za } r \neq 1 \end{array} \right. \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1, & \text{za } r = 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{-r+1}}{-r+1} + C_2, & \text{za } r \neq 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Integrale u primjeru 1.5 a), b) i c) smo formalno mogli riješiti i koristeći teorem 1.5, odnosno pomoću supstitucija

$$x = \varphi(t) = \frac{t-3}{2}, \quad x = \varphi(t) = \frac{1}{5}t, \quad x = \varphi(t) = t-1,$$

redom, koje su sve bijekcije na skupu $\mathbb{R}$.

Napomena 1.2 Postupak rješavanja integrala u primjeru 1.5 c) i d) se koristi u rješavanju integrala racionalnih funkcija u poglavlju 1.4.

1.3 Metoda parcijalne integracije

Ova metoda se sastoji od povoljnog rastava zadanog integrala u obliku

$$\int f(x) dx = \int u(x)v'(x) dx = \int u(x) d(v(x)),$$

i primjene slijedećeg teorema.

Teorem 1.7 *Ako su funkcije $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilne na intervalu I , tada vrijedi formula parcijalne integracije*

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) du.$$

Dokaz. Neka je $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $u(x)v'(x)$ na intervalu I , odnosno F je neprekidna i vrijedi

$$F'(x) = u(x)v'(x), \quad x \in I \setminus A,$$

pri čemu je $A \subset I$ konačan ili prebrojiv skup. Zbog derivabilnosti funkcija u i v je i funkcija $u(x)v(x)$ neprekidna na intervalu I . Stoga je funkcija

$$G(x) = u(x)v(x) - F(x)$$

neprekidna na intervalu I te za svaki $x \in I \setminus A$ vrijedi

$$\begin{aligned} G'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u(x)v'(x) \\ &= u'(x)v(x). \end{aligned}$$

Dakle, G je primitivna funkcija funkcije $u'v$ na intervalu I pa je

$$F(x) = u(x)v(x) - G(x)$$

i teorem je dokazan. ■

Izbor funkcija u i v je stvar iskustva. Tvrdnju teorema 1.7 možemo zapisati u kraćem obliku:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Primjer 1.6 a) Vrijedi

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C. \end{aligned}$$

Prilikom rješavanja pomoćnog integrala $\int dv$ nije potrebno pisati konstantu integracije, jer je dovoljna jedna konstanta integracije C na kraju zadatka.

b) Za funkciju u možemo uzeti i čitavu podintegralnu funkciju ukoliko se ona deriviranjem pojednostavi:

$$\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

c) Formulu parcijalne integracije možemo primijeniti više puta uzastopce:

$$\begin{aligned}
 \int (x^2 + 2x) \cos x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + 2x, \quad du = (2x + 2) \, dx, \\ dv = \cos x \, dx, \quad v = \int \cos x \, dx = \sin x \end{array} \right\} \\
 &= (x^2 + 2x) \sin x - \int \sin x (2x + 2) \, dx \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} u = 2x + 2, \quad du = 2 \, dx, \\ dv = \sin x \, dx, \quad v = \int \sin x \, dx = -\cos x \end{array} \right\} \\
 &= (x^2 + 2x) \sin x - \left[(2x + 2)(-\cos x) - \int (-\cos x) 2 \, dx \right] \\
 &= (x^2 + 2x) \sin x + (2x + 2) \cos x - 2 \sin x + C.
 \end{aligned}$$

Općenito, zaključujemo da integrale oblika

$$\int p_n(x) e^x \, dx, \quad \int p_n(x) \sin x \, dx, \quad \int p_n(x) \cos x \, dx,$$

gdje je p_n polinom n -tog stupnja, možemo riješiti primjenom parcijalne integracije n puta za redom.

d) Integrale slijedećeg tipa rješavamo tako da nakon dvostruke parcijalne integracije dobijemo izraz koji opet sadrži polazni integral:

$$\begin{aligned}
 \int e^x \sin x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x, \quad du = e^x \, dx, \\ dv = \sin x \, dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right\} \\
 &= e^x (-\cos x) - \int (-\cos x) e^x \, dx \\
 &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x, \quad du = e^x \, dx, \\ dv = \cos x \, dx, \quad v = \sin x \end{array} \right\} \\
 &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx.
 \end{aligned}$$

Iz prethodne jednakosti slijedi

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

Primijetimo da smo zbog svojevrzne simetrije zadatak mogli riješiti i pomoću rastava $u = \sin x$ i $dv = e^x \, dx$.

Zadatak 1.2 a) Izračunajte integral $\int x^3 \sin x \, dx$.

b) Izračunajte integral $\int x e^x \sin x \, dx$. Da li je moguće riješiti integral oblika $\int p_n(x) e^x \sin x \, dx$, gdje je p_n polinom n -tog stupnja?

c) Provjerite rješenja zadatka i primjera 1.6 deriviranjem.

1.3.1 Rekurzivne formule

Naziv *rekurzivna formula* općenito znači da se izraz ovisan o parametru n može izraziti pomoću izraza istog oblika ovisnog o istoj ili nekoj drugoj vrijednosti parametra.² Formalna definicija je sljedeća: neka za niz funkcija

$$f_n : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

postoje neodređeni integrali

$$I_n(x) = \int f_n(x) \, dx.$$

Formula oblika

$$I_n(x) = \Phi(x, I_{n-1}(x), I_{n-2}(x), \dots, I_{n-k}(x)), \quad k \leq n-1,$$

zove se *rekurzivna formula* za niz integrala $I_n(x)$.

Primjenu rekurzivnih formula za nalaženje integrala ilustrirat ćemo na slijedećem važnom primjeru koji je sastavni dio integriranja racionalnih funkcija u poglavlju 1.4. Nađimo

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za $n = 1$ vrijedi

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C.$$

Za $n \geq 2$ vrijedi

$$I_n = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx. \quad (1.1)$$

Sada imamo

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \frac{x}{(1+x^2)^n} dx, \quad v = \int \frac{x}{(1+x^2)^n} dx \end{array} \right\} = \dots$$

²Jedan oblik rekurzivne formule u kojoj smo integral izrazili pomoću istog izraza smo imali u primjeru 1.6 d).

Riješimo pomoćni integral postupkom kao u primjeru 1.3 d):

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{x}{(1+x^2)^n} dx = \left\{ \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-n+1}}{-n+1} \\ &= \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Dakle, parcijalna integracija daje

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx &= \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} \\ &= \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Uvrštavanje u formulu (1.1) konačno daje rekurzivnu formulu

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} - \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1} \\ &= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Uzastopnom primjenom ove formule lako nađemo integral I_n za bilo koji n . Na primjer, za $n = 3$ imamo

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} I_1 \right) \\ &= \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Provjerite ovo rješenje deriviranjem.

Zadatak 1.3 Nađite rekurzivne formule za integrale:

- a) $\int \cos^n x dx$,
- b) $\int \operatorname{ch}^n x dx$,
- c) $\int \frac{1}{\sin^n x} dx$.

1.4 Integriranje racionalnih funkcija

Racionalnu funkciju je uvijek moguće integrirati, odnosno integral takve funkcije je uvijek elementarna funkcija. Postupak integriranja je složen i sastoji se od četiri koraka: eliminacija zajedničkih nul-točaka brojnika i nazivnika, svođenje na pravu racionalnu funkciju, rastav na parcijalne razlomke i

integriranje dobivenih izraza pomoću neposrednog integriranja, metode supstitucije ili metode parcijalne integracije. Integriranje racionalnih funkcija je važno jer se i integrali racionalnih funkcija trigonometrijskih funkcija (poglavlje 1.5) kao i integrali nekih iracionalnih funkcija (poglavlje 1.5) odgovarajućim transformacijama svode na integrale racionalnih funkcija.

Neka je zadana racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

gdje su p i q polinomi s realnim koeficijentima.

Eliminacija zajedničkih nul-točaka

Ako p i q imaju zajedničku nul-točku x_0 , odnosno ako je

$$p(x) = (x - x_0)p_1(x), \quad q(x) = (x - x_0)q_1(x),$$

tada je

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{(x - x_0)p_1(x)}{(x - x_0)q_1(x)} dx = \int \frac{p_1(x)}{q_1(x)} dx.$$

Zadnja jednakost vrijedi jer se prema definiciji 1.1 integral ne mijenja ako se podintegralna funkcija promijeni u prebrojivo mnogo točaka.

Postupak možemo nastaviti sve dok ne dobijemo racionalnu funkciju u kojoj brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih nul-točaka. U nastavku izlaganja stoga pretpostavljamo da p i q nemaju zajedničkih nul-točaka.

Svođenje na pravu racionalnu funkciju

Racionalna funkcija je *prava racionalna funkcija* ako je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika. Ukoliko je stupanj brojnika veći ili jednak od stupnja nazivnika, možemo podijeliti polinome, pa imamo

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

pri čemu su r i s polinomi. Polinom r je *ostatak kod dijeljenja*, a stupanj od r je manji od stupnja od q . Naravno, $\int s(x) dx$ se rješava neposrednim integriranjem, pa možemo zaključiti slijedeće:

Integriranje racionalnih funkcija se svodi na integriranje pravih racionalnih funkcija oblika

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

pri čemu p i q nemaju zajedničkih nul-točaka i stupanj od p je manji od stupnja od q .

Primjer 1.7 Dijeljenje polinoma daje

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = x + \frac{2x}{x^2 - 1},$$

pa je

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx &= \int \left(x + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) dx = \int x dx + \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 1 = t, \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{dt}{t} = \frac{x^2}{2} + \ln |t| + C \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln |x^2 - 1| + C. \end{aligned}$$

Rastav na parcijalne razlomke

Nakon što smo integral zadane racionalne funkcije sveli na integral prave racionalne funkcije, tu funkciju treba rastaviti na parcijalne razlomke. Kao posljedica osnovnog teorema algebra [M1, § 4.6.8], polinom q stupnja n možemo rastaviti na faktore u obliku

$$q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots q_nx^n = q_n(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Ovdje su $x_1, \dots, x_n$ realne ili kompleksne nul-točke, kompleksne nul-točke se uvijek javljaju u kompleksno-konjugiranim parovima, a nul-točke mogu biti i višestruke. Stoga možemo pisati

$$q(x) = q_n(x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_k)^{r_k} (x^2 + a_1x + b_1)^{s_1} \cdots (x^2 + a_lx + b_l)^{s_l},$$

pri čemu su x_i međusobno različite realne nul-točke, kvadratni polinomi nemaju realnih nul-točaka, a nul-točke su im međusobno različite, $r_i, s_i \in \mathbb{N}$ i vrijedi

$$\sum_{i=1}^k r_i + 2 \sum_{i=1}^l s_i = n.$$

Nakon rastava nazivnika q na faktore, slijedi rastav na parcijalne razlomke. Taj rastav glasi

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_{r_1}}{(x - x_1)^{r_1}} + \cdots + \frac{B_1}{x - x_k} + \cdots + \frac{B_{r_k}}{(x - x_k)^{r_k}} + \\ & + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + a_1x + b_1} + \cdots + \frac{C_{s_1}x + D_{s_1}}{(x^2 + a_1x + b_1)^{s_1}} + \cdots \\ & + \frac{E_1x + F_1}{x^2 + a_lx + b_l} + \cdots + \frac{E_{s_l}x + D_{s_l}}{(x^2 + a_lx + b_l)^{s_l}}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Koeficijente $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i$ odredimo tako da jednakost pomnožimo s $q(x)$, izjednačimo koeficijente uz iste potencije, a zatim riješimo dobiveni sustav linearnih jednačbi [M1, §2.4]. Može se pokazati da dobiveni sustav uvijek ima jedinstveno rješenje i to upravo zbog svojstava funkcije $f = p/q$.

Integriranje rastava na parcijalne razlomke

Iz općeg oblika rastava na parcijalne razlomke, vidimo da se postupak integriranja racionalne funkcije svodi na rješavanje slijedećih tipova integrala:

1) Integral oblika

$$\int \frac{dx}{(x - a)^n} = \left\{ \begin{array}{l} x - a = t, \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^n} = \cdots$$

svodi se na tablični integral.

2) Integral oblika

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2 + ax + b)^n} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + a - a}{(x^2 + ax + b)^n} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + ax + b = t, \\ (2x + a) dx = dt \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} - \frac{a}{2} \int \frac{dx}{(x^2 + ax + b)^n} = \cdots \end{aligned}$$

svodi se na jedan tablični integral i na integral koji se dalje rješava postupkom opisanim u točki 3).

3) Slijedeći tip integrala prvo svedemo na puni kvadrat, zatim primijenimo odgovarajuću supstituciju, te dobiveni integral riješimo pomoću rekur-

zivne formule iz poglavlja 1.3.1:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + ax + b)^n} &= \int \frac{dx}{\left((x + \frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4}\right)^n} = \frac{1}{(b - \frac{a^2}{4})^n} \int \frac{dx}{\left(\frac{(x + \frac{a}{2})^2}{b - \frac{a^2}{4}} + 1\right)^n} \\ &= \left\{ \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} = t, \quad \frac{dx}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} = dt \right\} \\ &= \frac{1}{(b - \frac{a^2}{4})^{n-\frac{1}{2}}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \dots \end{aligned}$$

Važno je uočiti da je izraz $\sqrt{b - a^2/4}$ dobro definiran. Naime, polinom $x^2 + ax + b$ nema realnih nul-točaka, pa vrijedi $a^2 - 4b < 0$, odnosno izraz pod korijenom je veći od nule.

1.4.1 Primjer

Kao ilustraciju postupka integriranja racionalnih funkcija riješit ćemo jedan složeniji zadatak. Neka je

$$I = \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 6}{(x+1)(x^2 + 2x + 3)^2} dx.$$

Prvo provjerimo da li brojnik i nazivnik imaju zajedničkih nul-točaka. Nul-točke nazivnika su

$$x_1 = -1, \quad x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}.$$

Broj $x_4 = 1$ je očito jedna nul-točka brojnika. Iz

$$(x^3 + 2x^2 + 3x - 6) : (x - 1) = x^2 + 3x + 6$$

slijedi da su preostale dvije nul-točke brojnika jednake $x_{5,6} = (-3 \pm \sqrt{-15})/2$. Dakle, brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih nul-točaka. Nadalje, kako je stupanj brojnika jednak 3, a stupanj nazivnika jednak 5, radi se pravo racionalnoj funkciji. Stoga možemo pristupiti traženju rastava na parcijalne razlomke.

Po formuli (1.2), rastav na parcijalne razlomke glasi

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 6}{(x+1)(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 2x + 3} + \frac{Dx+E}{(x^2 + 2x + 3)^2}.$$

Množenje ove jednakost s nazivnikom daje

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = A(x^2 + 2x + 3)^2 + (Bx + C)(x + 1)(x^2 + 2x + 3) + (Dx + E)(x + 1).$$

Sređivanje desne strane po potencijama od x daje

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = x^4(A + B) + x^3(4A + 3B + C) + x^2(10A + 5B + 3C + D) + x(12A + 3B + 5 + D + E) + 9A + 3C + E.$$

Izjednačavanje koeficijenata uz potencije od x na lijevoj i desnoj strani daje nam sustav linearnih jednadžbi petog reda:

$$\begin{array}{rcccccccl} A & + & B & & & & & = & 0 \\ 4A & + & 3B & + & C & & & = & 1 \\ 10A & + & 5B & + & 3C & + & D & = & 2 \\ 12A & + & 3B & + & 5C & + & D & + & E = 3 \\ 9A & & & + & 3C & & + & E = & -6 \end{array}$$

Proširena matrica sustava glasi

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 5 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 12 & 3 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right]$$

Nakon Gaussove eliminacije [M1, §2.4] dobijemo rješenje sustava koje glasi

$$A = -2, \quad B = 2, \quad C = 3, \quad D = 3, \quad E = 3.$$

Napomenimo da je u ovom slučaju Gaussovu eliminaciju najbolje započeti odozdo poništavajući redom elemente iznad dijagonale.

Dakle, zadani integral jednak je

$$\begin{aligned} I &= -2 \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2x+3}{x^2+2x+3} dx + 3 \int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2} dx \\ &= -2I_1 + I_2 + 3I_3. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dalje imamo

$$I_1 = \int \frac{dx}{x+1} = \left\{ \begin{array}{l} x+1 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C_1 = \ln |x+1| + C_1.$$

Zatim,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{2x+3}{x^2+2x+3} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2+2x+3=t \\ (2x+2)dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} \\ &= \ln|t| + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{(x+1)^2}{2}+1} = \left\{ \begin{array}{l} (x+1)/\sqrt{2}=s \\ dx/\sqrt{2}=ds \end{array} \right\} = \ln|t| + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{ds}{s^2+1} \\ &= \ln|x^2+2x+3| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C_2. \end{aligned}$$

Uočimo da je $x^2+2x+3 > 0$ za svaki x , pa ne moramo pisati apsolutnu vrijednost.

Slično,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2+2x+3=t \\ (2x+2)dx=dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} + C_3 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+2x+3} + C_3. \end{aligned}$$

Konačno, uvrštavanje integrala I_1 , I_2 i I_3 u formulu (1.3) daje rješenje

$$I = -2 \ln|x+1| + \ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+2x+3} + C.$$

Zadatak 1.4 a) Provjerite prethodno rješenje deriviranjem.

b) Provjerite prethodno rješenje pomoću programa *The Integrator* koji se nalazi na adresi <http://www.integrals.com>.

c) Zadajte sami nekoliko integrala racionalnih funkcija, riješite ih, te rezultat provjerite deriviranjem i pomoću programa *The Integrator*.

1.5 Racionalne funkcije trigonometrijskih funkcija

Integrali ove klase funkcija su također uvijek elementarne funkcije. Ukratko, integral racionalne funkcije trigonometrijskih funkcija se odgovarajućom supstitucijom svede na integral racionalne funkcije koji se onda riješi postupkom opisanim u poglavlju 1.4.

Definicija 1.3 Neka su $f_1, \dots, f_n$ elementarne funkcije. *Racionalna funkcija od funkcija* $f_1, \dots, f_n$ je svaka funkcija f koju dobijemo konačnim brojem

zbiranja, oduzimanja, množenja i dijeljenja funkcija $f_1, \dots, f_n$. Za funkciju f koristimo oznake

$$f = \mathcal{R}(f_1, \dots, f_n) \quad \text{ili} \quad f(x) = \mathcal{R}(f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Integral oblika

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x) dx$$

svodi se supstitucijom na integral racionalne funkcije. Primijetimo da u prethodnom izrazu nema potrebe navoditi funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ jer su one već racionalne funkcije funkcija $\sin x$ i $\cos x$. Za svođenje na integral racionalne funkcije koristimo *univerzalnu trigonometrijsku supstituciju*, a u nekim posebnim slučajevima možemo koristiti i neke jednostavnije supstitucije.

Univerzalna trigonometrijska supstitucija

Univerzalna trigonometrijska supstitucija

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \tag{1.4}$$

vrijedi za $x/2 \in (-\pi/2, \pi/2)$ odnosno za $x \in (-\pi, \pi)$. Dakle,

$$x = 2 \operatorname{arctg} t$$

pa je

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Adicioni teorem [M1, §4.6.5] daje

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} = 2t \cos^2 \frac{x}{2},$$

a osnovni trigonometrijski identitet daje

$$\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right) = 1,$$

odnosno

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Dakle,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Opisana supstitucija vrijedi za $x \in (-\pi, \pi)$, a za ostala područja je potrebno izvršiti odgovarajuće prilagodbe formula. Potreba za takvim modifikacijama se često javlja kod određenog integrala, u kojem granice integracije određuju područje na kojem supstitucija mora vrijediti. Slična napomena vrijedi i za ostale trigonometrijske supstitucije.

Primjer 1.8 Vrijedi

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x} = \left\{ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{2t}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{1+t^2}{(3+t^2)t} dt \end{aligned}$$

Brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih nul-točaka, a stupanj brojnika je manji od stupnja nazivnika. Rastav na parcijalne razlomke glasi

$$\frac{1+t^2}{(3+t^2)t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{3+t^2}.$$

Množenje ove jednakosti s nazivnikom, izjednačavanje koeficijenata uz potencije od t i rješavanje tako dobivenog sustava linearnih jednadžbi daje

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3}, \quad C = 0.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} + \frac{2}{3} \int \frac{t dt}{3+t^2} = \left\{ \begin{array}{l} 3+t^2 = u \\ 2t dt = du \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \ln |t| + \frac{1}{3} \ln |u| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{3} \ln \left(3 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

Jednostavnije supstitucije

U nekim slučajevima integral racionalne funkcije trigonometrijskih funkcija može se računati pomoću jednostavnijih supstitucije koje vode na integral racionalne funkcije nižeg reda ili pak na jednostavniji integral.

Integral oblika

$$\int \mathcal{R}(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) dx$$

rješavamo pomoću supstitucije

$$t = \operatorname{tg} x.$$

Za $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ vrijedi

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{arctg} t & dx &= \frac{1}{1+t^2} dt, \\ \sin^2 x &= \frac{t^2}{1+t^2}, & \cos^2 x &= \frac{1}{1+t^2}, \\ \sin x \cos x &= \frac{t}{1+t^2}, & \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{t}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Također možemo koristiti i supstitucije

$$\begin{aligned} \int \mathcal{R}(\sin x) \cos x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \mathcal{R}(t) \, dt, \\ \int \mathcal{R}(\cos x) \sin x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \end{array} \right\} = - \int \mathcal{R}(t) \, dt. \end{aligned}$$

Primjer 1.9 Riješimo integral iz primjera 1.8 na drugi način. Vrijedi

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x} = \int \frac{\sin x}{(2 + \cos x) \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \end{array} \right\} \\ &= - \int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)} = - \int \frac{dt}{(2+t)(1-t)(1+t)}. \end{aligned}$$

Rastav na parcijalne razlomke daje

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{2+t} - \frac{1}{6} \int \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} \\ &= \frac{1}{3} \ln|2 + \cos x| + \frac{1}{6} \ln|1 - \cos x| - \frac{1}{2} \ln|1 + \cos x| + C. \end{aligned}$$

Napomena 1.3 Korištenjem različitih supstitucija kao u primjerima 1.8 i 1.9 možemo dobiti naizgled potpuno različita rješenja. Međutim, teorem 1.1 nam kaže da se ova rješenja razlikuju samo za konstantu.

Zadatak 1.5 a) Dokažite formule (1.5).

- b) Dokažite da se rješenja integrala u primjerima 1.8 i 1.9 razlikuju za konstantu. (*Uputa:* koristeći svojstva logaritama (L3), (L4) i (L5) [M1, §4.6.4] svedite izraze na jedan logaritam, a onda primijenite odgovarajuće veze između trigonometrijskih funkcija.)
- c) Izračunajte integral iz primjera 1.8 i 1.9 pomoću programa *The Integrator*.
- d) Nacrtajte sva tri rješenja pomoću programa NetPlot.
- e) Izračunajte integrale:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx, \\ & \int \frac{1}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)} dx, \\ & \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + \sin x} dx, \\ & \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx. \end{aligned}$$

1.6 Racionalne funkcije hiperbolnih funkcija

Integrali ove klase funkcija rješavaju se slično kao i integrali racionalnih funkcija trigonometrijskih funkcija iz prethodnog poglavlja. Integral racionalne funkcije hiperbolnih funkcija oblika

$$\int \mathcal{R}(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$$

rješavamo koristeći *univerzalnu hiperbolnu supstituciju*,

$$t = \operatorname{th} \frac{x}{2} \tag{1.6}$$

za koju vrijedi

$$x = 2 \operatorname{arth} t, \quad dx = \frac{2}{1 - t^2} dt, \quad t \in (-1, 1).$$

Osnovne veze između hiperbolnih funkcija [M1, §4.6.9] daju

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= 2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2} = 2 \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x}{2}} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = 2 t \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}, \\ 1 &= \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} \right) = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} \cdot (1 - t^2), \end{aligned}$$

pa imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x &= \frac{2t}{1-t^2}, \\ \operatorname{ch} x &= \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} \left(1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \\ \operatorname{th} x &= \frac{2t}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Kao i kod trigonometrijskih funkcija, i ovdje su u nekim slučajevima moguće jednostavnije supstitucije. Integral oblika

$$\int \mathcal{R}(\operatorname{sh}^2 x, \operatorname{ch}^2 x, \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x, \operatorname{cth} x) dx$$

rješavamo pomoću supstitucije

$$t = \operatorname{th} x,$$

pri čemu vrijedi

$$\begin{aligned}x &= \operatorname{arth} t & dx &= \frac{1}{1-t^2} dt, \quad t \in (-1, 1) \\ \operatorname{sh}^2 x &= \frac{t^2}{1-t^2}, & \operatorname{ch}^2 x &= \frac{1}{1-t^2}, \\ \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x &= \frac{t}{1-t^2}, & \operatorname{cth} x &= \frac{1}{t}.\end{aligned}$$

Također možemo koristiti i supstitucije

$$\begin{aligned}\int \mathcal{R}(\operatorname{sh} x) \operatorname{ch} x dx &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sh} x = t \\ \operatorname{ch} x dx = dt \end{array} \right\} = \int \mathcal{R}(t) dt, \\ \int \mathcal{R}(\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x dx &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch} x = t \\ \operatorname{sh} x dx = dt \end{array} \right\} = \int \mathcal{R}(t) dt.\end{aligned}$$

Zadatak 1.6 Izračunajte integrale

$$\begin{aligned}\int \frac{1 + \operatorname{sh} x}{(2 + \operatorname{ch} x)(3 + \operatorname{sh} x)} dx, \\ \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + 2 \operatorname{ch}^2 x + 3 \operatorname{th} x}.\end{aligned}$$

1.7 Integriranje nekih iracionalnih funkcija

Integral iracionalne funkcije općenito ne mora biti elementarna funkcija, odnosno kažemo da iracionalna funkcija općenito *nije elementarno integrabilna*. U nekim posebnim slučajevima integral iracionalne funkcije je moguće svesti na integral racionalne funkcije, te ga na taj način riješiti.

1.7.1 Racionalna supstitucija

Integral oblika

$$\int \mathcal{R}\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx, \quad m_i, n_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, k,$$

rješavamo *racionalnom supstitucijom*

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

gdje je n najmanji zajednički višekratnik od $n_1, \dots, n_k$.

Primjer 1.10 Vrijedi

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{8 - \sqrt{\frac{64x-1}{x}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{64x-1}{x}\right)^2}} dx \\ &= \left\{ \frac{64x-1}{x} = t^6 \Rightarrow 64x-1 = x t^6 \Rightarrow x = \frac{1}{64-t^6} \Rightarrow dx = \frac{6t^5}{(64-t^6)^2} dt \right\} \\ &= \int \frac{8-t^3}{t^4} \cdot \frac{6t^5}{(64-t^6)^2} dt = 6 \int \frac{t}{(8-t^3)(8+t^3)^2} dt. \end{aligned}$$

Zadani integral smo sveli na integral racionalne funkcije pa ga možemo riješiti prema pravilima iz poglavlja 1.4.

Zadatak 1.7 Izračunajte integrale

$$\begin{aligned} &\int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx, \\ &\int \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} dx. \end{aligned}$$

1.7.2 Trigonometrijske i Eulerove supstitucije

Funkciju

$$\varphi(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} : D \rightarrow R$$

ima smisla promatrati samo u sljedećim slučajevima (uvedimo oznaku $\Delta = b^2 - 4ac$):

(i) kada je $a > 0$ i $\Delta > 0$, tada je $D = (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$ pri čemu je

$$x_1 = \frac{-b - \Delta}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \Delta}{2a},$$

(ii) kada je $a < 0$ i $\Delta > 0$, tada je $D = [x_1, x_2]$ pri čemu su x_1 i x_2 zadani kao i u slučaju (i),

(iii) kada je $a > 0$ i $\Delta \leq 0$, tada je $D = \mathbb{R}$.

Integral oblika

$$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

se pomoću supstitucije

$$t = \frac{2ax + b}{\sqrt{|4ac - b^2|}}$$

svodi na jedan od tri jednostavnija integrala.³ Za rješavanje tih integrala koristimo ili *trigonometrijske* ili *Eulerove* supstitucije:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{R}(t, \sqrt{1-t^2}) dt &= \{t = \sin z\} & \text{ili} & & \{\sqrt{1-t^2} = z(1-t)\}, \\ \int \mathcal{R}(t, \sqrt{t^2-1}) dt &= \{t = \frac{1}{\sin z}\} & \text{ili} & & \{\sqrt{t^2-1} = t+z\}, \\ \int \mathcal{R}(t, \sqrt{1+t^2}) dt &= \{t = \operatorname{tg} z\} & \text{ili} & & \{\sqrt{1+t^2} = t+z\}. \end{aligned}$$

Primjer 1.11 Vrijedi

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 6x + 10}} = \int \frac{dx}{x + \sqrt{(x+3)^2 + 1}} = \left\{ \begin{array}{l} x+3=t \\ dx=dt \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{dt}{t-3 + \sqrt{1+t^2}}. \end{aligned}$$

³Radi se o svođenju izraza pod korijenom na puni kvadrat - vidi primjer.

Eulerova supstitucija daje

$$\begin{aligned}
 I &= \left\{ \sqrt{1+t^2} = t+z \Rightarrow 1+t^2 = t^2 + 2tz + z^2 \Rightarrow t = \frac{1-z^2}{2z} \Rightarrow dt = -\frac{1+z^2}{2z^2} dz \right\} \\
 &= \int \frac{-\frac{1+z^2}{2z^2} dz}{\frac{1-z^2}{2z} - 3 + \frac{1-z^2}{2z} + z} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1+z^2}{z(3-z)} dz.
 \end{aligned}$$

Dobiveni integral racionalne funkcije se sada riješi prema pravilima iz poglavlja 1.4.

Trigonometrijska supstitucija daje

$$\begin{aligned}
 I &= \left\{ t = \operatorname{tg} z \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 z} dz \Rightarrow \sqrt{t^2+1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 z}} = \frac{1}{\cos z} \quad \text{za } \cos z > 0 \right\} \\
 &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 z} dz}{\frac{\sin z}{\cos z} - 3 + \frac{1}{\cos z}} = \int \frac{dz}{\cos z (\sin z - 3 \cos z + 1)}.
 \end{aligned}$$

Ovaj integral se dalje pomoću univerzalne trigonometrijske supstitucije (1.4) svede na integral racionalne funkcije koji se riješi prema pravilima iz poglavlja 1.4.

Zadatak 1.8 a) Dovršite računanje integrala iz primjera 1.10 i 1.11. Rezultate provjerite pomoću programa *The Integrator*.

b) Izračunajte integrale:

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}, \\
 &\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}}, \\
 &\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.
 \end{aligned}$$

1.7.3 Metoda neodređenih koeficijenata

Vrijedi formula

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (1.7)$$

gdje su $p_n(x)$ i $q_{n-1}(x)$ polinomi stupnja n i $n - 1$, redom, a α je realna konstanta. Koeficijente polinoma q_{n-1} i konstantu α odredimo na slijedeći način:

- (i) deriviramo obje strane jednakosti (1.7),
- (ii) pomnožimo dobivenu jednakost s $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ (na taj način više nema izraza pod korijenom),
- (iii) izjednačimo koeficijente uz potencije od x i riješimo dobiveni sustav linearnih jednadžbi.

Nakon ovog postupka preostaje izračunati integral na desnoj strani formule (1.7). Taj integral se svođenjem na puni kvadrat i odgovarajućom supstitucijom svodi na tablični integral.

Integrali ovog tipa se također mogu rješavati trigonometrijskim i Eulerovim supstitucijama. Međutim, ako je red polinoma p_n velik, tada trigonometrijske i Eulerove supstitucije vode na složeni integral racionalne funkcije, pa je metoda neodređenih koeficijenata jednostavnija.

Primjer 1.12 Slijedeći integral prvo pomoću malog trika svedemo na oblik (1.7):

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \sqrt{4x^2 + 9} dx = \int \frac{x^2(4x^2 + 9)}{\sqrt{4x^2 + 9}} dx \\ &= (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{4x^2 + 9} + E \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}. \end{aligned}$$

Deriviranje daje

$$\begin{aligned} x^2 \sqrt{4x^2 + 9} &= (3Ax^2 + 2Bx + C)\sqrt{4x^2 + 9} \\ &\quad + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 9}} + E \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 9}}. \end{aligned}$$

Množenje ove jednakosti s $\sqrt{4x^2 + 9}$ daje

$$x^2(4x^2 + 9) = (3Ax^2 + 2Bx + C)(4x^2 + 9) + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)4x + E.$$

Izjednačavanje koeficijenata uz iste potencije od x na lijevoj i desnoj strani, rješavanje dobivenog sustava linearnih jednadžbi, te rješavanje preostalog integrala daje

$$I = \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{32}x\right)\sqrt{4x^2 + 9} - \frac{81}{32} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arsh}\left(\frac{2}{3}x\right) + C.$$

Izvedite za vježbu sve preskočene detalje.

Zadatak 1.9 Riješite integral

$$\int \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{x^2+x+1}}.$$

Uputa: integrali oblika

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{x^2+x+1}}$$

se supstitucijom $x - \alpha = 1/t$ svode na oblik (1.7).

1.7.4 Binomni integral

Binomni integral je integral oblika

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}.$$

Vidimo da se u binomnom integralu mogu pojaviti i drugi korijeni osim kvadratnog, ali je zato oblik podintegralne funkcije nešto jednostavniji. Slijedeći teorem daje nam nužne i dovoljne uvjete rješivosti binomnog integrala.

Teorem 1.8 *Binomni integral je elementarno rješiv ako i samo ako je jedan od brojeva*

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n} + p$$

cijeli broj.

Dokaz. Dokažimo dovoljnost. Vrijedi

$$\begin{aligned} \int x^m (x + bx^n)^p dx &= \left\{ \begin{array}{l} x^n = t, \quad x = t^{1/n}, \\ dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \int t^{\frac{m}{n}} (a + bt)^p t^{\frac{1}{n}-1} dt \\ &= \frac{1}{n} \int \left(\frac{a + bt}{t} \right)^p t^{\frac{m+1}{n} + p - 1} dt. \end{aligned}$$

Razlikujemo tri slučaja:

- (i) ako je $p \in \mathbb{Z}$, tada koristimo supstituciju $t = z^k$, gdje je k najmanji nazivnik nakon kraćenja od $(m+1)/n$,

- (ii) ako je $(m+1)/n$ cijeli broj, tada koristimo supstituciju $a+bt = z^k$, gdje je k nazivnik od p , a
- (iii) ako je $(m+1)/n+p$ cijeli broj, tada koristimo supstituciju $(a+bt)/t = z^k$, gdje je k nazivnik od p .

Svaka od tri navedene supstitucije vodi na integral racionalne funkcije koji se rješava pomoću postupaka iz poglavlja 1.4. S ovim smo dokazali dovoljnost.

Dokaz nužnosti, odnosno dokaz da binomni integral nije elementarno rješiv kada nisu ispunjeni slučajevi (i)–(iii) je složen pa ga izostavljamo. ■

Primjer 1.13 Kod rješavanja integrala

$$I = \int \sqrt[3]{3x - x^3} dx$$

treba prvo prepoznati da se radi o binomnom integralu. Zaista,

$$I = \int \sqrt[3]{x(3-x^2)} dx = \int x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}} dx,$$

pa se radi o binomnom integralu uz $m = 1/3$, $n = 2$ i $p = 1/3$. Vrijedi

$$p \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{m+1}{n} = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{m+1}{n} + p = 1 \in \mathbb{Z},$$

pa je integral elementarno rješiv po teoremu 1.8. Integral rješavamo postupkom danim u dokazu teorema 1.8:

$$\begin{aligned} I &= \left\{ x^2 = t, \quad x = \sqrt{t}, \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \right\} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{6}}(3-t)^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{3-t}{t} \right)^{\frac{1}{3}} dt \\ &= \left\{ \frac{3-t}{t} = z^3, \quad t = \frac{3}{1+z^3}, \quad dt = -\frac{9z^2}{(1+z^3)^2} dz \right\} \\ &= -\frac{9}{2} \int \frac{z^3}{(1+z^3)^2} dz. \end{aligned}$$

Za vježbu riješite integral do kraja.

Zadatak 1.10 Izračunajte integrale:

$$\begin{aligned} &\int x^{-11}(1+x^4)^{-1/2} dx, \\ &\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx. \end{aligned}$$

1.8 Integriranje reda funkcija

U [M1, §6.4.3] pokazali smo kako se, uz određene uvjete, konvergentan red funkcija može derivirati član po član. Slična je situacija i s integriranjem. Najvažnija primjena integriranja reda funkcija je računanje integrala funkcija koje nisu elementarno integrabilne. Druga primjena je razvijanje u red potencija onih funkcija kod kojih se to ne može direktno napraviti pomoću Taylorove formule [M1, §6.5].

U slijedećem teoremu koriste se pojmovi uniformne konvergencije reda funkcija (vidi [M1, §6.4]) i reda potencija (vidi [M1, §6.4.2]).

Teorem 1.9 *Neka red neprekidnih funkcija $\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira uniformno prema funkciji $s(x)$ na intervalu I , odnosno*

$$s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_n(x), \quad \forall x \in I.$$

Tada za svaki $x \in I$ vrijedi

$$\int s(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_n(x) dx.$$

Posebno, za red potencija vrijedi

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + C$$

na intervalu konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Pokažimo kako pomoću teorema 1.9 možemo izračunati razvoj u red potencija integrala koji nisu elementarno rješivi.

Primjer 1.14 a) Integral

$$I = \int e^{-x^2} dx$$

nije elementarno rješiv, odnosno rješenje nije elementarna funkcija i ne može se prikazati konačnim brojem zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i komponiranja elementarnih funkcija. Ovaj integral je od velike važnosti u teoriji vjerojatnosti i statistici jer funkcija vjerojatnosti *Gaussove* ili *normalne* razdiobe ima oblik funkcije $f(x) = e^{-x^2}$.

Prema [M1, §6.5] Maclaurinov razvoj funkcije e^x glasi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pri tome je konvergencija uniformna po [M1, teorem 6.16]. Zamijenimo li x s $-x^2$, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!},$$

pri čemu je konvergencija uniformna. Teorem 1.9 daje

$$I = \int e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C.$$

Dakle, našli smo razvoj traženog integrala u uniformno konvergentan red potencija. Pomoću ovog reda možemo izračunati vrijednost funkcije $I = I(x)$ u bilo kojoj točki x sa željenom točnošću. Dobiveni red nije Taylorov red, tako da ne vrijedi formula za ostatak. Međutim, kako je red alterniran, zaključujemo da pogreška prilikom aproksimacije konačnom parcijalnom sumom nije veća od prvog zanemarenog člana. Na primjer, vrijednost integrala I u točki $x = 0.1$ uz $C = 0$ izračunata s prva tri člana reda (za $n = 0, 1, 2$) je

$$I(0.1) = \frac{0.1}{1} - \frac{0.1^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0.1^5}{5} = 0.099667\dot{6}.$$

Četvrti član reda (za $n = 3$) jednak je

$$-\frac{1}{6} \cdot \frac{0.1^7}{7} = -2.3809 \cdot 10^{-9},$$

pa zaključujemo da pogreška nije veća od $2.3809 \cdot 10^{-9}$, odnosno

$$\begin{aligned} I(0.1) &\in [0.099667\dot{6} - 2.3809 \cdot 10^{-9}, 0.099667\dot{6}] \\ &= [0.099667664, 0.099667667], \end{aligned}$$

što je *relativna pogreška manja od tri stota dijela tisućitog dijela jednog promila*.

b) Integral

$$I = \int \frac{\sin x}{x} dx$$

također nije elementarno rješiv. Prema [M1, §6.5] MacLaurinov razvoj funkcije $\sin x$ glasi

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

pri čemu je konvergencija uniformna po [M1, teorem 6.16]. Za $x \neq 0$ vrijedi

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Primijetimo da je red na desnoj strani definiran za svaki $x \in \mathbb{R}$, dok zadana funkcija nije definirana u točki $x = 0$. No, kako se oni razlikuju samo u jednoj točki, po definiciji 1.1 oni imaju istu primitivnu funkciju, pa tako i isti integral. Sada možemo primijeniti teorem 1.9:

$$I = \int \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C.$$

Zadatak 1.11 a) Pomoću razvoja u red potencija izračunajte integral

$$\int \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

b) Izračunajte vrijednosti integrala iz primjera 1.14 a) u točkama $x = 0.2$ i $x = 1$ uz $C = 0$ koristeći prva tri člana reda i ocijenite pogrešku.

c) k -tu parcijalnu sumu reda I iz primjera 1.14 a) u točki x uz $C = 0$ možemo izračunati pomoću sljedećeg Matlab programa:

```
format long
k=3;
x=0.1;
I=0;
for n=1:k
    I=I+(-1)^(n-1)*x^(2*n-1)/((2*n-1)*prod(1:n-1));
end
I
pogreska=(-1)^k*x^(2*k+1)/((2*k+1)*prod(1:k))
relativna_pogreska=abs(pogreska/I)
```

Izračunajte aproksimacije vrijednosti integrala I u različitim točkama x s različitim parcijalnim sumama (za različite vrijednosti k), te odgovarajuće pogreške. Za računanje možete koristiti program Octave On-line. Naredba `format long` je potrebna da bi se prikazalo svih 16 znamenki koje program računa.

- d) Preradite prethodni program tako da računa k -tu parcijalnu sumu integrala I iz primjera 1.14 b), te izračunajte vrijednosti integrala i odgovarajuće pogreške u raznim točkama x za razne vrijednosti k .
- e) Funkciju e^{-x^2} možemo nacrtati na intervalu $[-4, 4]$ pomoću sljedećeg Matlab programa:

```
x=-4:0.01:4;
plot(x,exp(-x.^2))
```

Nacrtajte funkciju na različitim intervalima koristeći program Octave On-line.

Teorem 1.9 također možemo iskoristiti za računanje razvoja u red potencija onih funkcija kod kojih to ne možemo direktno napraviti.

Primjer 1.15 Funkciju $\arctg x$ ne možemo razviti u red potencija direktnom primjenom Taylorove formule [M1, §6.5]. Naime, sukcesivno deriviranje daje

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\arctg x)'' = \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x, \dots$$

pa derivacije postaju vrlo složene. Zato ćemo koristiti geometrijski red [M1, §6.4] za koji vrijedi

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Zamijenimo li x s $-x^2$, za $x \in (-1, 1)$ vrijedi

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = (\arctg x)'$$

Teorem 1.9 daje

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C.$$

No, zbog toga što se na lijevoj strani nalazi konkretna funkcija, konstanta C ne može biti proizvoljna. Iz uvjeta $\arctg 0 = 0$ slijedi $C = 0$. Dakle,

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in (-1, 1). \quad (1.8)$$

Ispitajmo konvergenciju reda na desnoj strani u rubovima intervala. U točki $x = -1$ red glasi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{2n+1} = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots$$

Ovaj red konvergira po Leibnitzovom kriteriju [M1, §6.2.4]. nadalje, zbog neprekidnosti lijeve i desne u jednakosti (1.8), zaključujemo da red konvergira prema $\arctg(-1) = -\pi/4$. Slično razmatranje za točku $x = -1$ daje

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Gornji red možemo koristiti za računanje broja π , međutim konvergencija je vrlo spora. Naime, red je alterniran, pa zaključujemo da pogreška prilikom aproksimacije konačnom parcijalnom sumom nije veća od prvog zanemarenog člana. (Slično smo već zaključili u primjeru 1.14 a.) Na primjer, kada zbrojimo prvih 1000 članova reda, pogreška je manja od $-1/(2001)$, što znači da smo izračunali tek prve tri decimale broja π .

Zadatak 1.12 k -tu parcijalnu sumu prethodnog reda I i odgovarajuću aproksimaciju broja π možemo izračunati pomoću sljedećeg Matlab programa:

```
format long
k=1000;
a=ones(k,1);
a(2:2:k)=-1;
for i=1:k; a(i)=a(i)/(2*i-1); end
p=4*sum(a)
pi
```

Izračunajte aproksimacije broja π za različite vrijednosti k , i usporedite s pravom vrijednošću. Koliko se točnih decimala dobije za $n = 10, 100, 1000$? Za računanje koristite program Octave On-line.

1.9 Slobodan pad uz otpor zraka

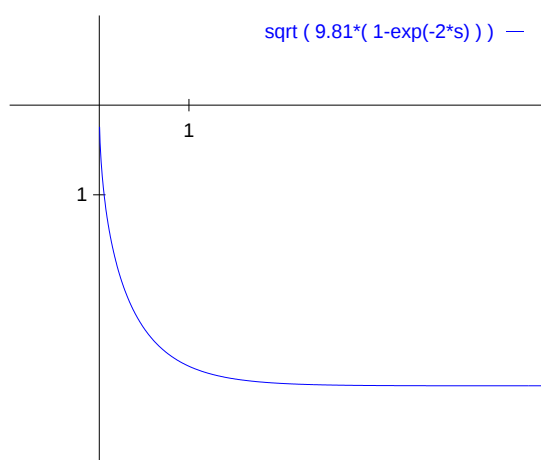
Korištenjem integralnog računa iz ove glave i diferencijalnog računa iz [M1, §5], možemo rješavati razne probleme u fizici i tehnici, ili općenito prirodi, što je i svrha integralnog i diferencijalnog računa. U ovom poglavlju iskoristit ćemo do sada naučeno za rješavanje problema slobodnog pada.

Pretpostavimo da je prilikom slobodnog pada otpor zraka proporcionalan kvadratu brzine. Tada prema drugom Newtonovom zakonu vrijedi

$$ma = mg - kv^2,$$

pri čemu je m masa tijela koje pada, a ubrzanje, g gravitacija, k koeficijent trenja i v brzina.

Izvest ćemo formulu za brzinu v u ovisnosti o prijeđenom putu s , $v(s)$ (vidi Sliku 1.2 za $m = k$).



Slika 1.2: Slobodan pad uz otpor zraka za $m = k$

Iz Newtonove formule slijedi

$$a = \frac{k}{m} \left(\frac{mg}{k} - v^2 \right). \quad (1.9)$$

Kako je ubrzanje derivacija brzine po vremenu, a brzina derivacija puta po vremenu, možemo pisati

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}.$$

Kombinirajući dvije prethodne formule uz oznaku $\alpha = mg/k$ imamo

$$\frac{v}{\alpha - v^2} dv = \frac{k}{m} ds.$$

Integriranje obaju strana daje

$$\int \frac{v}{\alpha - v^2} dv = \frac{k}{m} \int ds = \frac{k}{m} s + C.$$

Integral na lijevoj strani riješimo supstitucijom $\alpha - v^2 = u$, pa je

$$-\frac{1}{2} \ln |\alpha - v^2| = \frac{k}{m} s + C.$$

Iz formule (1.9) i činjenice da je ubrzanje pozitivno slijedi $\alpha - v^2 > 0$, odnosno $\ln |\alpha - v^2| = \ln(\alpha - v^2)$. Dalje, potrebno je odrediti konstantu C . Pretpostavili smo da gibanje kreće iz ishodišta koordinatnog sustava (Slika 1.2), odnosno $v(0) = 0$, pa uvrštavanje u prethodnu formulu daje

$$C = -\frac{1}{2} \ln \alpha.$$

Dakle,

$$\ln(\alpha - v^2) = -2\frac{k}{m}s + \ln \alpha.$$

Svojstvo logaritma (L4) iz [M1, §4.6.4] daje

$$\ln \frac{\alpha - v^2}{\alpha} = -2\frac{k}{m}s,$$

pa eksponenciranje daje

$$\frac{\alpha - v^2}{\alpha} = e^{-2\frac{k}{m}s}.$$

Rješavanje ove jednadžbe po v , koristeći pri tome definiciju od α i činjenicu da je $v \geq 0$, konačno daje

$$v(s) = \sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-2\frac{k}{m}s}\right)}, \quad s \geq 0.$$

Vidimo kako se brzina ne može beskonačno povećavati jer jer

$$v_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-2\frac{k}{m}s}\right)} = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Isto smo mogli zaključiti i direktno iz formule (1.9) jer za tu vrijednost brzine ubrzanje iščezava.

Pogledajmo još što se dogodi kada nema otpora zraka, odnosno za $k = 0$. Uvrštavanje daje neodređeni oblik, $v_{k=0}(s) = \sqrt{(1-1)/0}$. Svojstvo neprekidnih funkcija [M1, teorem 4.7 (ii)] (u ovom slučaju drugi korijen) i L'Hospitalovo pravilo [M1, §5.5.3] daju poznatu formulu

$$\begin{aligned} v_{k=0}(s) &= \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-2\frac{k}{m}s}\right)} = \sqrt{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-2\frac{k}{m}s}\right)} \\ &= \sqrt{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{mg}{1} \left(0 - e^{-2\frac{k}{m}s} \left(-2\frac{s}{m}\right)\right)} \\ &= \sqrt{2gs}. \end{aligned}$$

Integralni račun se također koristiti i kod izvođenja formule za put u ovisnosti o vremenu. Drugačijim pristupom, čiji izvod preskačemo, dobije se formula za brzinu kao funkciju vremena

$$v(t) = \alpha \operatorname{th}(\beta t), \quad t \geq 0,$$

gdje je $\alpha = \sqrt{mg/k}$ i $\beta = \sqrt{gk/m}$. Put kao funkcija vremena je integral brzine:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int \alpha \operatorname{th}(\beta t) dt = \alpha \int \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch}(\beta t) = u \\ \beta \operatorname{ch}(\beta t) = du \end{array} \right\} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int \frac{du}{u} = \frac{\alpha}{\beta} \ln |u| = \frac{\alpha}{\beta} \ln(\operatorname{ch}(\beta t)) + C. \end{aligned}$$

U zadnjoj jednakosti koristili smo činjenicu da je kosinus hiperbolni uvijek veći ili jednak jedan. Konstantu C odredimo iz početnog uvjeta $s(0) = 0$,

$$0 = \frac{\alpha}{\beta} \ln(\operatorname{ch} 0) + C = \frac{\alpha}{\beta} \ln 1 + C = C.$$

Dakle,

$$s(t) = \frac{\alpha}{\beta} \ln(\operatorname{ch}(\beta t)) = \frac{m}{k} \ln \left(\operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} t \right) \right), \quad t \geq 0.$$

2.

ODREĐENI INTEGRAL

2.1	Definicija i osnovna svojstva	44
2.2	Newton-Leibnitzova formula	48
2.3	Supstitucija i parcijalna integracija	52
2.4	Teoremi o određenom integralu	54
2.5	Nepravi integral	57
2.5.1	Kriteriji konvergencije	59
2.6	Primjene određenog integrala	62
2.6.1	Površina ravninskog lika	62
2.6.2	Duljina luka ravninske krivulje	70
2.6.3	Volumen rotacionog tijela	73
2.6.4	Oplošje rotacionog tijela	76
2.6.5	Sila i rad	78
2.6.6	Hidrostatski tlak i sila	82
2.6.7	Momenti i težište	84
2.7	Numeričko integriranje	88
2.7.1	Eliptički integrali	88
2.7.2	Trapezna formula	90
2.7.3	Simpsonova formula	93
2.7.4	Richardsonova ekstrapolacija	95
2.7.5	Programi	97

Za razliku od neodređenog integrala koji je skup funkcija (definicija 1.2, određeni integral je realan broj. Taj broj je dobiven iz podintegralne funkcije i intervala na kojem tu funkciju promatramo, a način na koji se računa, kao i njegove primjene, tema su ovog poglavlja. Premda su, dakle, neodređeni i određeni integral dva različita matematička objekta, među njima postoji jaka veza.

2.1 Definicija i osnovna svojstva

U ovom poglavlju definirat ćemo prvo rastav segmenta, gornju i donju integralnu sumu, gornji i donji integral, te konačno određeni integral. Potom ćemo dati osnovna svojstva određenog integrala i navesti dovoljan uvjet integrabilnosti.

Definicija 2.1 *Rastav ili dekompozicija* segmenta $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je svaki konačan skup točaka $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ takav da je

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b.$$

Skup svih dekompozicija segmenta $[a, b]$ označavamo s $\mathcal{D}$.

Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ omeđena funkcija. *Gornja integralna suma* je broj (slika 2.1)

$$g(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

gdje je

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Donja integralna suma je broj (slika 2.2)

$$d(f, D) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),$$

gdje je

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Gornji (Riemannov) integral je broj

$$I^* = \inf\{g(f, D) : D \in \mathcal{D}\},$$

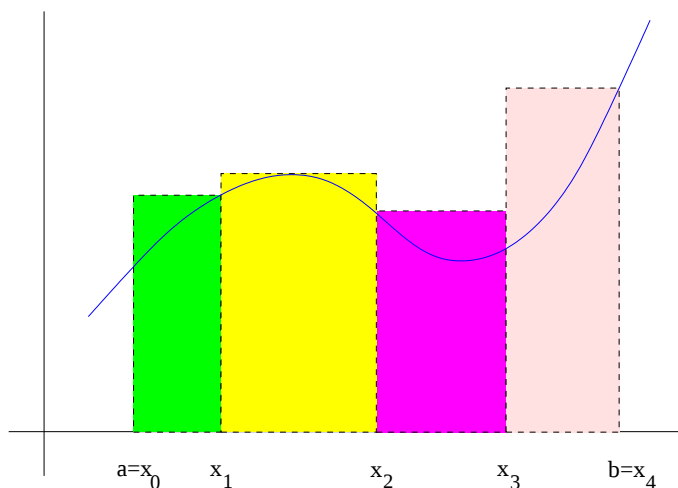
a *donji (Riemannov) integral* je broj

$$I_* = \sup\{d(f, D) : D \in \mathcal{D}\},$$

pri čemu I^* i I_* sigurno postoje zbog omeđenosti funkcije f .

Funkcija f je *(Riemann) integrabilna na segmentu* $[a, b]$ ako je $I^* = I_*$. *Riemannov integral* ili *određeni integral* funkcije f od a do b je broj

$$I = I_* = I^*.$$



Slika 2.1: Gornja suma

Određeni integral označavamo s

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Napomena 2.1 U literaturi se određeni integral često definira i pomoću *lijevih* i *desnih* integralnih suma,

$$l(f, D) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

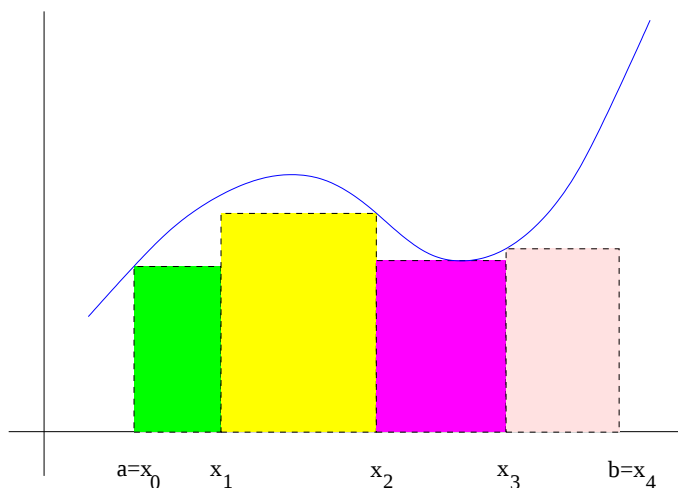
$$r(f, D) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Iz definicije 2.1 slijede osnovna svojstva i geometrijsko značenje određenog integrala:

O1. Za svaki rastav $D \in \mathbb{D}$ vrijedi

$$I \leq g(f, D), \quad I \geq d(f, D).$$

O2. Ako je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$, tada je integral I jednak površini između krivulje $y = f(x)$ i x -osi od a do b . Naime, na slikama 2.1 i 2.2 vidimo da usitnjavanjem rastava D gornje i donje sume sve bolje aproksimiraju tu površinu.



Slika 2.2: Donja suma

O3. Očito vrijedi

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

O4. Dijelovi površine koji se nalaze ispod x -osi pribrajaju se s negativnim predznakom. Naime, za dio funkcije koji se nalazi ispod x -osi su veličine M_i i m_i negativne. Iz ovog svojstva, na primjer, slijedi da je

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0.$$

O5. Za $a \leq b$ definiramo

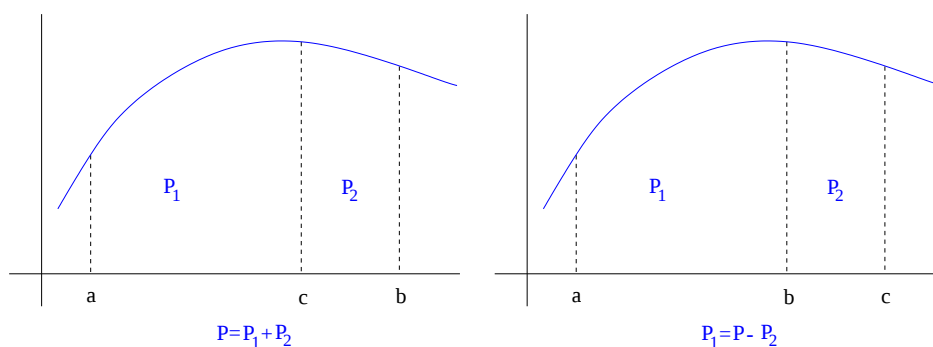
$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Smisao ove definicije je slijedeći: kada u $\int_a^b f(x) dx$ varijabla x ide od a do b , tada je prirast dx pozitivan, a kada x ide od b prema a , tada smatramo da je prirast dx negativan.

O6. Područje integracije možemo rastaviti na konačno dijelova. Na primjer, ukoliko svi navedeni integrali postoje, tada je

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Ako je $a \leq c \leq b$ tada je jednakost očita jer se radi o zbrajanju površina. No, zbog svojstva O5, jednakost vrijedi i kada je $c \leq a \leq b$ ili $a \leq b \leq c$ (slika 2.3).



Slika 2.3: Rastav integrala na djelove

O7. Funkcija f je također integrabilna na svakom pod-segmentu $[c, d] \subseteq [a, b]$. Naime, gornji i donji integrali, I^* i I_* , mogu biti konačni i jednaki samo ako su gornji i donji integrali $I_{[c,d]}^*$ i $I_{[c,d]}^*$ konačni i jednaki za svaki pod-segment $[c, d]$.

Slijedeći važan teorem dam daje dovoljan uvjet integrabilnosti funkcije f . Teorem navodimo bez dokaza.

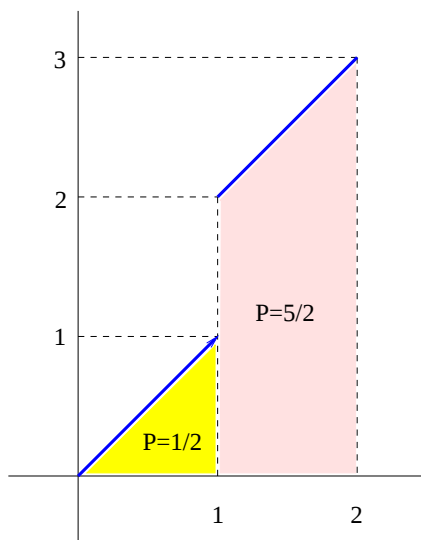
Teorem 2.1 *Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ omeđena i neprekidna na skupu $[a, b] \setminus A$, pri čemu je skup točaka $A \subset [a, b]$ najviše prebrojiv, tada je f integrabilna na $[a, b]$.*

Na primjer, kako vrijednost funkcije u jednoj točki ne utječe na površinu, za funkciju prikazanu na Slici 2.4 vrijedi

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3,$$

bez obzira na definiranost ili vrijednost funkcije u točki $x = 2$. Slično vrijedi i za prebrojivo mnogo točaka.

Slijedeći primjer pokazuje što se može dogoditi kada je skup A iz teorema 2.1 neprebrojiv.



Slika 2.4: Dovoljan uvjet integrabilnosti

Primjer 2.1 Promotrimo funkciju $f : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ definiranu s

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ovu funkciju smo već promatrali u [M1, §4.4.2]. Funkcija f je očito omeđena. Međutim, kako su skupovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ gusti jedan u drugom (vidi [M1, §1.7]), funkcija f ima prekid u svakoj točki segmenta $[0, 1]$, odnosno ima neprebrojivo mnogo prekida. Stoga za svaki rastav D za svaki i vrijedi $m_i = 0$ i $M_i = 1$, pa je

$$d(f, D) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0, \quad g(f, D) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1.$$

Dakle, $I_* = 0 \neq 1 = I^*$, pa funkcije f nije integrabilna.

2.2 Newton-Leibnitzova formula

U ovom poglavlju dokazat ćemo osnovni teorem integralnog računa koji daje vezu između neodređenog i određenog integrala.

Teorem 2.2 *Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna na $[a, b]$ i neka za nju postoji primitivna funkcija $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in (a, b)$. Tada vrijedi Newton-Leibnitzova formula:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Neka je D proizvoljni rastav segmenta $[a, b]$ kao u definiciji 2.1. Za svaki $i = 1, 2, \dots, n$ funkcija F je neprekidna na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ i derivabilna na intervalu (x_{i-1}, x_i) . Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti [M1, teorem 5.9] postoji točka $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ za koju vrijedi

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

S druge strane vrijedi

$$\inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

što povlači

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq F(x_i) - F(x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Zbrajajući ove nejednakosti dobivamo

$$d(f, D) \leq \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \leq g(f, D),$$

odnosno

$$d(f, D) \leq F(b) - F(a) \leq g(f, D).$$

Ove nejednakosti vrijede za proizvoljni rastav D segmenta $[a, b]$ iz čega slijedi

$$I_* \leq F(b) - F(a) \leq I^*.$$

Integrabilnost funkcije f povlači

$$I_* = I^* = \int_a^b f(x) dx$$

pa je konačno

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

i teorem j dokazan. ■

Iz teorema zaključujemo da se određeni integral može riješiti tako da se nađe neodređeni integral podintegralne funkcija, a onda uvrste granice. Newton-Leibnitzovu formulu još zapisujemo kao

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

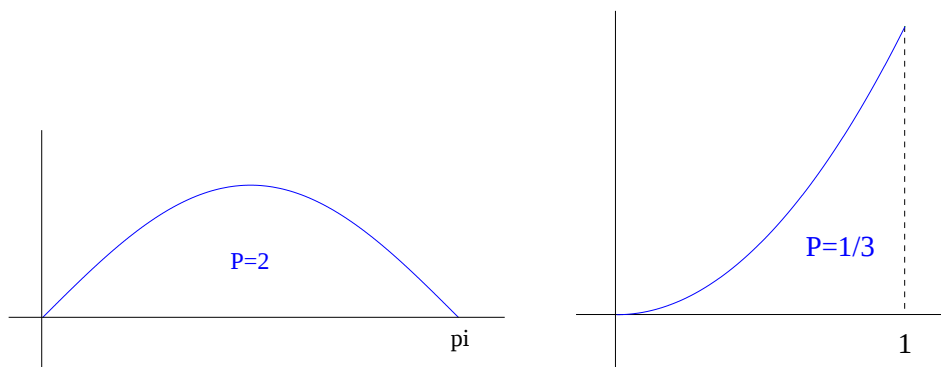
Primjer 2.2 Površina između funkcije $y = \sin x$ i x -osi od 0 do π jednaka je

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2.$$

Slično, površina između kvadratne parabole $y = x^2$ i x -osi od 0 do 1 jednaka je

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Površine su prikazane na Slici 2.5.



Slika 2.5: Primjena Newton-Leibnitzove formule

U teoremu 2.2 smo pokazali kako se određeni integral može izračunati pomoću primitivne funkcije. Slijedeći teorem daje obrnutu vezu, odnosno kazuje kako se primitivna funkcija može dobiti pomoću određenog integrala, to jest pomoću površine između podintegralne funkcije i x -osi. Također, sljedeći teorem daje i nešto jaču verziju teorema 2.2 bez uvjeta na derivabilnost funkcije F za svaki $x \in (a, b)$.

Teorem 2.3 *Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna na intervalu $[a, b]$ i neka je $A \subset [a, b]$ skup svih točaka prekida funkcije f . Tada za funkciju funkcija Φ definiranu s*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

vrijedi (vidi sliku 2.6):

$$(i) \quad \Phi(a) = 0, \quad \Phi(b) = \int_a^b f(x) dx,$$

(ii) funkcija Φ je neprekidna na intervalu $[a, b]$,

(iii) funkcija Φ je derivabilna na $[a, b] \setminus A$ i

$$\Phi'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b] \setminus A,$$

(iv) ako je skup A konačan ili prebojiv, tada je Φ primitivna funkcija funkcije f na intervalu $[a, b]$ te za bilo koju primitivnu funkciju F funkcije f na intervalu $[a, b]$ vrijedi Newton-Leibnitzova formula

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz.

(i) Očito.

(ii) Za proizvoljan x vrijedi

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

pa omeđenost funkcije f ,

$$|f(t)| \leq M, \quad \forall t \in [a, b]$$

povlači

$$|\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)| \leq M |\Delta x|,$$

odnosno

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Phi(x + \Delta x) = \Phi(x).$$

(iii) Za proizvoljan x vrijedi

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} - f(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} [f(t) - f(x)] dt,$$

pa slične ocjene kao u točki (ii) daju

$$\left| \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} - f(x) \right| \leq \sup_{t \in [x, x+\Delta x] \text{ ili } t \in [x+\Delta x, x]} |f(t) - f(x)|.$$

Ako je funkcija f neprekidna u točki x , odnosno, ako je $x \in [a, b] \setminus A$, onda izraz na desnoj strani teži k nuli kada $\Delta x \rightarrow 0$ pa je $\Phi'(x) = f(x)$.

(iv) Ako je skup A konačan ili prebrojiv, tada je Φ i primitivna funkcija funkcije f na intervalu $[a, b]$. Prema teoremu 1.2 za bilo koju primitivnu funkciju F funkcije f na intervalu $[a, b]$ vrijedi

$$F(x) = \Phi(x) + C, \quad \forall x \in [a, b]$$

pa iz točke (i) slijedi

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) + C - \Phi(a) - C = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

■

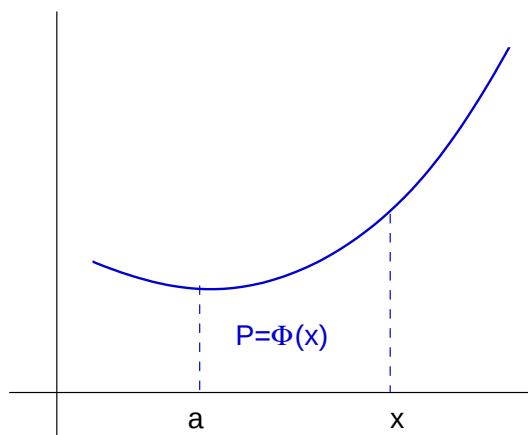
2.3 Supstitucija i parcijalna integracija

Svaki određeni integral možemo riješiti tako da prvo riješimo pripadni neodređeni integral, a potom uvrstimo granice prema Newton-Leibnitzovoj formuli. Promotrimo integral

$$I = \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}.$$

Prvo pomoću supstitucije riješimo neodređeni integral

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} - 1} &= \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\} = \int \frac{2t dt}{t - 1} = 2t + 2 \ln |t - 1| \\ &= 2\sqrt{x} + 2 \ln |\sqrt{x} - 1|. \end{aligned}$$



Slika 2.6: Primitivna funkcija kao određeni integral

Primijetimo da je supstitucija dobro definirana jer je $x \geq 0$. Također primijetimo da kod rješavanja neodređenog integrala ne treba pisati konstantu integracije C , jer nam ona ne treba u Newton-Leibnitzovoj formuli. Dakle,

$$I = 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x} - 1| \Big|_4^9 = 2(3 + \ln 2) - 2(2 + \ln 1) = 2 + 2\ln 2.$$

Ako prilikom zamjene varijabli ujedno izvršimo i odgovarajuću zamjenu granica, određeni integral rješavamo na slijedeći način:

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1} &= \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \quad \frac{x \Big|_4^9}{t \Big|_2^3} \right\} = \int_2^3 \frac{2t dt}{t - 1} \\ &= 2 \int_2^3 dt + 2 \int_2^3 \frac{dt}{t - 1} = 2t \Big|_2^3 + 2\ln|t - 1| \Big|_2^3 \\ &= 2(3 - 2) + 2(\ln 2 - \ln 1) = 2 + 2\ln 2. \end{aligned}$$

Kod zamjene granica trebamo uvijek paziti da ona bude dobro definirana. Tako u ovom primjeru supstitucija $x = t^2$ zapravo znači $t = \sqrt{x}$, pa smo prema tome i odabrali nove granice. Posebno oprezan treba biti kod zamjene granica u slučaju periodičkih (trigonometrijskih) funkcija.

Formula za parcijalnu integraciju također vrijedi u određenom integralu:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln x \, dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right\} = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx \\ &= 2 \ln 2 - 1 \ln 1 - x \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

2.4 Teoremi o određenom integralu

U ovom poglavlju dokazat ćemo još neka svojstva određenog integrala.

U [M1, §5.5.2] dokazali smo Cauchyjev i Lagrangeov teorem srednje vrijednosti za derivaciju. Slijedeći teorem je analogija tih teorema za određeni integral, a dokazuje se pomoću Cauchyjevog teorema.

Teorem 2.4 (Teorem srednje vrijednosti) *Ako su funkcije $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidne i $g(x) \neq 0$, tada postoji točka $c \in (a, b)$ takva da je*

$$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx}.$$

Posebno (uz $g(x) \equiv 1$) vrijedi

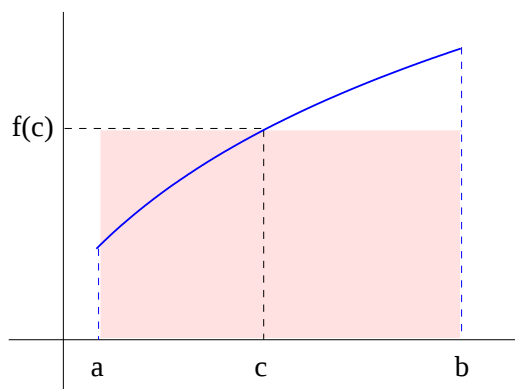
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Dokaz. Neka su F i G primitivne funkcije funkcija f i g na segmentu $[a, b]$, redom. Kako su f i g neprekidne, to su F i G derivabilne na (a, b) . Pored toga, $G'(x) = g(x) \neq 0$. Dakle, funkcije F i G ispunjavaju uvjete Cauchyjevog teorema, pa postoji točka $c \in (a, b)$ takva da je

$$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx}$$

i prva tvrdnja teorema je dokazana. Druga tvrdnja slijedi iz prve ako uzmemo $g(x) \equiv 1$. ■

Grafička interpretacija druge tvrdnje teorema je slijedeća: površina između funkcija $f(x)$ i x -osi od a do b jednaka je površini pravokutnika s bazom $b-a$ i visinom $f(c)$, s time što površina i visina mogu biti i negativne (slika 2.7). Vrijednost $f(c)$ je *srednja vrijednost* funkcije f na intervalu $[a, b]$.



Slika 2.7: Teorem srednje vrijednosti

Zadatak 2.1 Izračunajte srednju vrijednost funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$.

Teorem 2.5 Neka su funkcije $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilne na $[a, b]$. Tada vrijedi:

(i) *određeni integral je linearan:*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx,$$

(ii) *određeni integral je monoton, odnosno ako je $f(x) \leq g(x)$ za svaki $x \in [a, b]$, tada je*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx,$$

(iii) *određeni integral zadovoljava nejednakost trokuta:*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Dokaz.

- (i) Neka su F i G primitivne funkcije od f i g , redom. Kako je $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$, zaključujemo da je funkcija $\alpha F + \beta G$ primitivna funkcija funkcije $\alpha f + \beta g$. Newton-Leibnitzova formula daje

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx &= \alpha F(x) + \beta G(x) \Big|_a^b \\ &= \alpha F(b) + \beta G(b) - (\alpha F(a) + \beta G(a)) \\ &= \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) \\ &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

- (ii) Zbog $f(x) \leq g(x)$, za svaku dekompoziciju D segmenta $[a, b]$ odgovarajuće donje sume zadovoljavaju nejednakosti

$$d(f, D) \leq d(g, D) \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Dakle

$$\int_a^b g(x) dx \geq \sup_{D \in \mathbb{D}} d(f, D) = \int_a^b f(x) dx.$$

- (iii) Svojstvo apsolutne vrijednosti realnog broja iz [M1, §1.7.2] povlači

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Druga tvrdnja teorema povlači

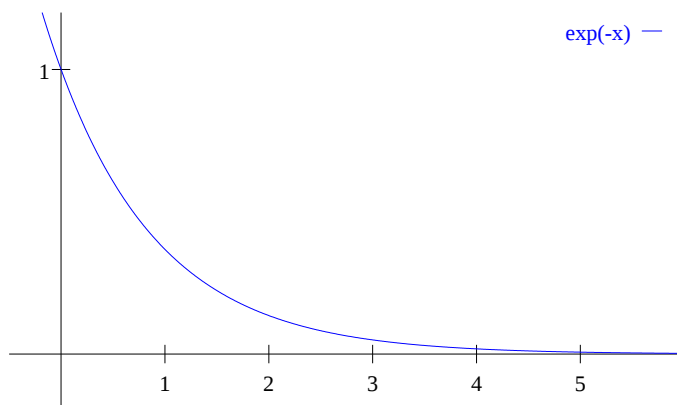
$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

pa isto svojstvo apsolutne vrijednosti (primijenjeno u obratnom smjeru) daje tvrdnju. ■

2.5 Nepravi integral

Nepravi integral je poopćenje određenog integrala kada područje integracije ima barem jednu beskonačnu granicu, ili kada funkcija unutar područja integracije nije omeđena (na primjer, ima vertikalnu asimptotu). Neprave integrale rješavamo pomoću limesa. Ako je nepravi integral konačan, kažemo da je *konvergentan* ili da *konvergira*, u protivnom je *divergentan* odnosno *divergira*.

Želimo, na primjer, odrediti površinu između krivulje $y = e^{-x}$ i x -osi od nula do beskonačno (slika 2.8).



Slika 2.8: Nepravi integral

Lako se možemo uvjeriti da je tražena površina konačna, unatoč tome što se područje proteže u beskonačno. Naime, tražena površina je manja od sume površina pravokutnika označenih na slici 2.9, a ta je pak jednaka sumi geometrijskog reda¹

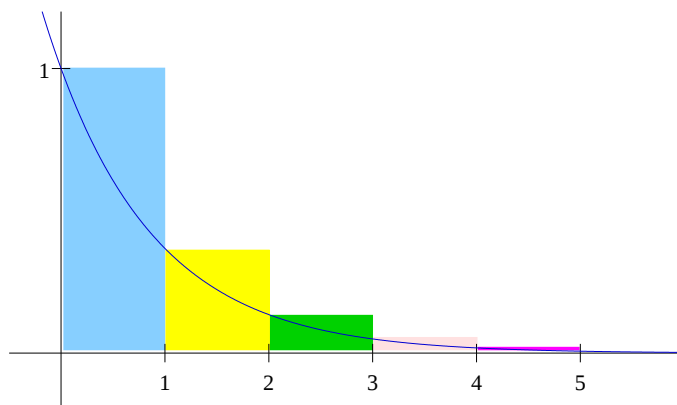
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} < \infty.$$

Površinu računamo pomoću nepravog integrala:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_0^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} -e^{-a} + e^0 = 1.$$

Slijedeći nepravi integral ponaša se kao red brojeva $\sum 1/n^p$ koji konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$ (vidi [M1, §6.2.2]).

¹Ovdje se radi o gornjoj integralnoj sumi za $x_i = i$, $i = 0, 1, \infty$ i $M_i = e^{-(n-1)}$.



Slika 2.9: Konvergentna gornja suma nepravog integrala

Primjer 2.3 Izračunajmo integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx.$$

Prelaskom na limes imamo

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a x^{-p} dx.$$

Slučajeve $p = 1$, $p < 1$ i $p > 1$ ćemo analizirati posebno. Za $p = 1$ vrijedi

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln |x| \Big|_1^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln a - \ln 1 = +\infty,$$

pa integral divergira. Za $p \neq 1$ vrijedi

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \Big|_1^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} a^{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Za $p < 1$ je $1-p > 0$, pa je $I = +\infty$, odnosno integral divergira. Za $p > 1$ je $1-p < 0$, pa je $I = 1/(p-1)$, odnosno integral konvergira.

Kao primjer nepravog integrala koji u rubu područja integracije ima vertikalnu asimptotu, uzet ćemo istu podintegralnu funkciju kao u prethodnom primjeru. Ponašanje integrala u odnosu vrijednost parametra p je obrnuto nego u prethodnom primjeru.

Primjer 2.4 Izračunajmo integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx.$$

Prelaskom na limes imamo

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-p} dx.$$

Slučajeve $p = 1$, $p < 1$ i $p > 1$ ćemo analizirati posebno. Za $p = 1$ vrijedi

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \ln 1 - \ln \varepsilon = -(-\infty) = \infty,$$

pa integral divergira. Za $p \neq 1$ vrijedi

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} \varepsilon^{1-p}.$$

Za $p < 1$ je $1-p > 0$, pa je $I = 1/(1-p)$, odnosno integral konvergira. Za $p > 1$ je $1-p < 0$, pa je $I = +\infty$, odnosno integral divergira.

U slučaju kada u nepravom integralu imamo i beskonačne granice i točke prekida, integral rastavljamo na više dijelova. Na primjer,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0_+ \\ \delta \rightarrow 0_+}} \int_{\varepsilon}^{1-\delta} \frac{1}{x \ln^2 x} dx + \lim_{\substack{\gamma \rightarrow 0_+ \\ a \rightarrow +\infty}} \int_{1+\gamma}^a \frac{1}{x \ln^2 x} dx. \end{aligned}$$

Zadatak 2.2 Riješite prethodni integral i pokažite da divergira u $+\infty$.

2.5.1 Kriteriji konvergencije

Slično kao kod redova brojeva [M1, §6.2.2 i §6.2.3], i kod nepravog integrala možemo zaključiti da li konvergira bez računanja samog integrala.

Poredbeni kriterij za nepravi integral glasi (usporedi [M1, teorem 6.10]): ako je $0 \leq f(x) \leq g(x)$ za svaki $x \in (a, b)$, pri čemu su a i b granice nepravog integrala, tada vrijedi slijedeće:

- (i) konvergencija integrala $\int_a^b g(x) dx$ povlači konvergenciju integrala $\int_a^b f(x) dx$;
- (ii) divergencija integrala $\int_a^b f(x) dx$ povlači divergenciju integrala $\int_a^b g(x) dx$.

Teorem o apsolutnoj konvergenciji za nepravi integral glasi (usporedi [M1, teorem 6.11]): konvergencija integrala $\int_a^b |f(x)| dx$ povlači konvergenciju integrala $\int_a^b f(x) dx$.

Primjer 2.5 Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

koji ima važnu primjenu u teoriji vjerojatnosti, nije elementarno rješiv. Međutim, koristeći poredbeni kriterij lako vidimo da taj integral konvergira. Kako je podintegralna funkcija parna, očito vrijedi (slika 2.10)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Iz slike 2.10, činjenica da za $0 \leq x \leq 1$ vrijedi $0 \leq e^{-x^2} \leq 1$, dok za $x > 1$ vrijedi $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$, i poredbenog kriterija, slijedi

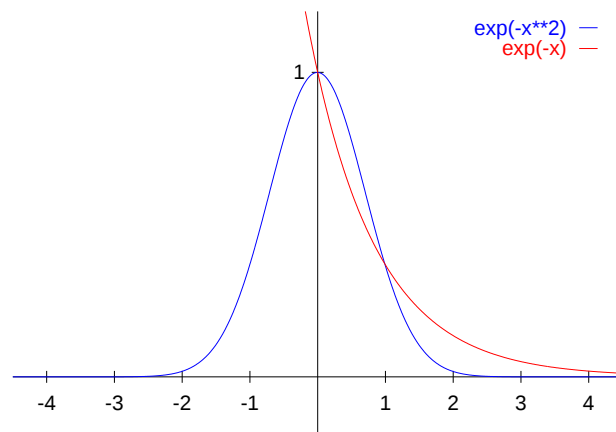
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq 1 + \int_1^{+\infty} e^{-x} dx < 2,$$

pa promatrani integral konvergira.

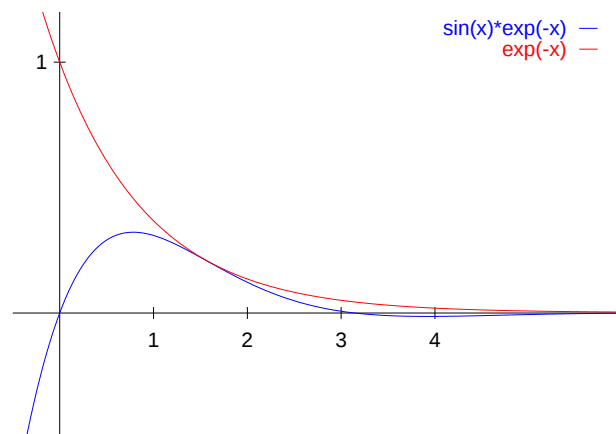
Kao ilustraciju apsolutne konvergencije promotrimo integral (vidi sliku 2.11)

$$\int_0^{+\infty} \sin x e^{-x} dx.$$

Kako za $x \geq 0$ vrijedi $|\sin x e^{-x}| \leq e^{-x}$, po poredbenom kriteriju zaključujemo da $\int_0^{+\infty} |\sin x e^{-x}| dx$ konvergira. No, tada i zadani integral konvergira po teoremu o apsolutnoj konvergenciji.



Slika 2.10: Poredbeni kriterij za odredjeni integral



Slika 2.11: Apsolutna konvergencija nepravog integrala

2.6 Primjene određenog integrala

Osnovne geometrijske primjene određenog integrala su:

- računanje površine ravninskih likova,
- računanje duljine luka ravninskih krivulja,
- računanje volumena (obujma) tijela koja nastaju rotacijom ravninskih krivulja oko zadane osi,
- računanje oplošja tijela koja nastaju rotacijom ravninskih krivulja oko zadane osi.

Navedeni problemi su u osnovi jednodimenzionalni, odnosno ovise samo o jednoj varijabli. Za svaku od ovih primjena izvest ćemo formule i dati primjere za slučajeve kada su funkcije zadane u Kartezijevim koordinatama, parametarski i u polarnim koordinatama, što ukupno daje 12 različitih primjena.

Obradit ćemo i neke primjene određenog integrala u fizici i to:

- računanje rada (integral sile po putu),
- računanje hidrostatskog tlaka i
- računanje momenata i težišta.

2.6.1 Površina ravninskog lika

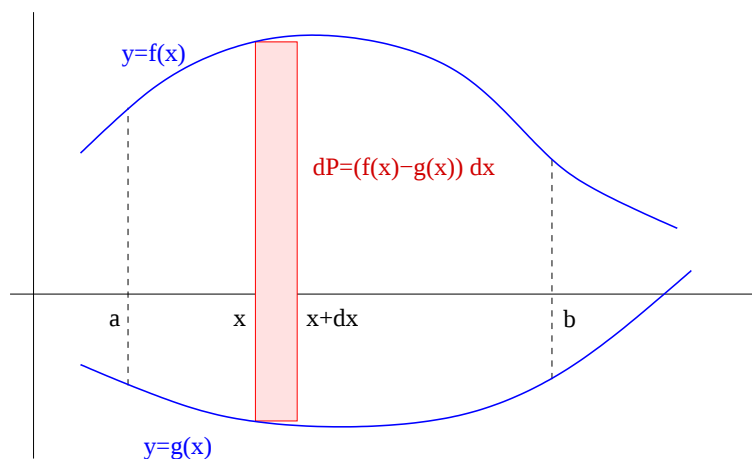
Površinu između krivulja $y = f(x)$ i $y = g(x)$ od točke a do točke b računamo kao beskonačnu (integralnu) sumu beskonačno malih *elemenata površine* (slika 2.12). Elementi površine su beskonačno mali pravokutnici s bazom dx i visinom $f(x) - g(x)$.

Površina se računa formulom

$$P = \int_{[a,b]} dP = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (2.1)$$

Primjer 2.6 Površina između krivulja $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$ dana je s (vidi sliku 2.13)

$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left. \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



Slika 2.12: Površina ravninskog lika i element površine

Kod računanja površina kao varijablu integracije možemo uzeti x ili y , ovisno o tome što je povoljnije.

Primjer 2.7 Izračunajmo površinu omeđenu krivuljama $y = x^2$ i $y = x - 2$ (slika 2.14). Da bi odredili granice integracije prvo moramo naći sjecišta krivulja. Izjednačavanje daje $y^2 = y + 2$, odnosno krivulje se sijeku u točkama $M = (1, -1)$ i $N = (4, 2)$.

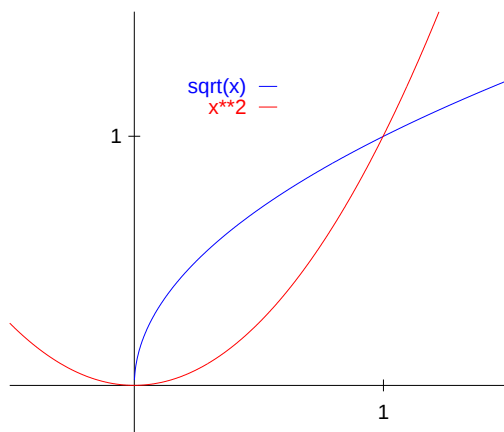
Ako za varijablu integracije odaberemo y , tada je $y \in [-1, 2]$, gornja funkcija dana je s $f(y) = y + 2$, a donja funkcija dana je s $g(y) = y^2$. Dakle,

$$P = \int_{-1}^2 ((y + 2) - y^2) dy = \left. \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

Ako za varijablu integracije odaberemo x , tada integral moramo rastaviti na dva dijela. U tom slučaju vrijedi

$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x})) dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx = \dots = \frac{9}{2}.$$

Pomoću određenog integrala možemo izvesti dobro poznate formule za površinu elipse i kružnice.



Slika 2.13: Površina ravninskog lika I

Primjer 2.8 Neka je zadana elipsa

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (2.2)$$

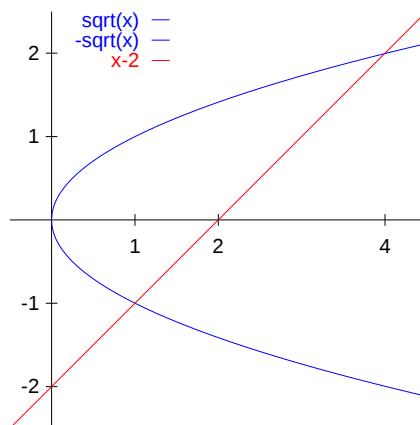
Zadana elipsa ima središte u točki $S = (x_0, y_0)$, a polu-osi su joj duge a i b (slika 2.15).

Očito je $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, a gornja i donja funkcija dane su s

$$f(x) = y_0 + b \sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}}, \quad g(x) = y_0 - b \sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}}.$$

Površina elipse dana je s

$$\begin{aligned} P &= \int_{x_0-a}^{x_0+a} \left[y_0 + b \sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}} - \left(y_0 - b \sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}} \right) \right] dx \\ &= \int_{x_0-a}^{x_0+a} 2b \sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx. \end{aligned}$$



Slika 2.14: Površina ravninskog lika II

Trigonometrijska supstitucija iz poglavlja 1.7 daje

$$P = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x - x_0}{a} = \sin t, \quad t = \arcsin \frac{x - x_0}{a}, \quad \frac{x}{t} \left| \begin{array}{c} x_0 - a \\ -\pi/2 \end{array} \right| \begin{array}{c} x_0 + a \\ \pi/2 \end{array} \right\} \\ dx = a \cos t \, dt, \end{array} \right.$$

$$= 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos t| \cos t \, dt.$$

Kako je na promatranom intervalu $\cos t \geq 0$, koristeći poznatu vezu između funkcija $\cos^2 t$ i $\cos 2t$ imamo

$$P = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \, dt = ab \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ = ab\pi.$$

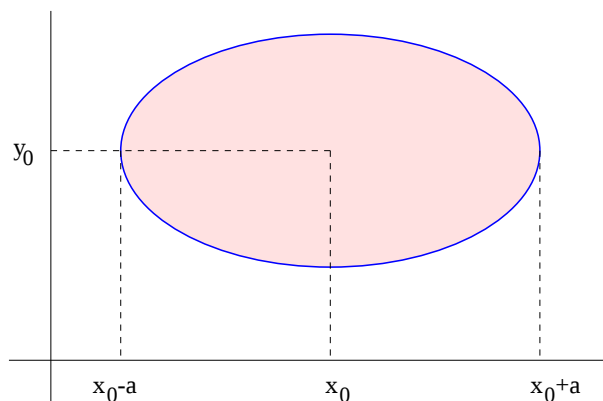
Za $a = b = r$ formula (2.2) prelazi u jednadžbu kružnice radijusa r s centrom u točki $S = (x_0, y_0)$,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

čija je površina jednaka $P = r^2\pi$.

Zadatak 2.3 a) Riješite Primjer 2.8 pomoću supstitucije $(x - x_0)/a = \cos t$.

b) Riješite Primjer 2.8 integrirajući po varijabli y .



Slika 2.15: Površina elipse

Parametarski zadana krivulja

Kod parametarski zadane krivulje

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

računamo površinu između te krivulje i pravca $x = c$, $c \in \mathbb{R}$. Pri tome treba voditi računa o tome je li $x = \varphi(t)$ rastuća ili padajuća funkcija i ovisno o tome postaviti integral, odnosno odabrati granice integriranja tako da je prirast $dx = \dot{\varphi} dt$ nenegativan.

Primjer 2.9 Izračunajmo površinu ispod jednog luka cikloide (slika 2.16),

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad a > 0, \quad t \in [0, 2\pi].$$

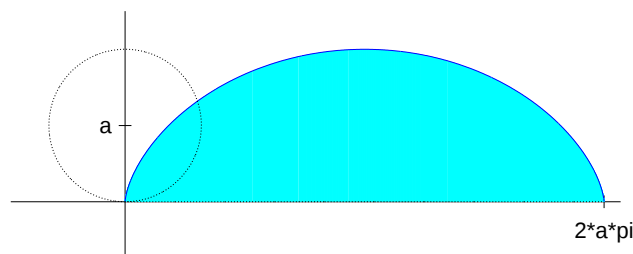
Tražena površina jednaka je

$$P = \int_0^{2\pi} [a(1 - \cos t) - 0] \cdot a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 3a^2\pi.$$

Formulu za površinu elipse iz Primjera 2.8 možemo još jednostavnije izvesti pomoću parametarski zadane funkcije.

Primjer 2.10 Elipsa iz Primjera 2.8 je parametarski zadana s

$$x = x_0 + a \cos t, \quad y = y_0 + b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$



Slika 2.16: Površina ispod jednog luka cikloide

Kada usporedimo ove formule s formulom (2.2) i slikom 2.15, vidimo da za t od 0 do π prirast dx pada. Međutim, da bi mogli ispravno primijeniti formulu (2.1) dx mora rasti. Problem ćemo riješiti tako što ćemo izračunati površinu donje polovice elipse, u kojem slučaju dx raste kada t ide od π do 2π . Dakle,

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_{\pi}^{2\pi} [y_0 - (y_0 + b \sin t)] \cdot a(-\sin t) dt = 2ab \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t dt \\ &= 2ab \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) dt = ab\pi. \end{aligned}$$

Krivulja zadana u polarnim koordinatama

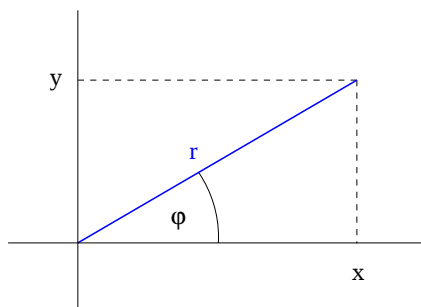
U polarnom koordinatnom sustavu točka $T = (x, y)$ zadaje se pomoću kuta φ kojeg polu-pravac koji izlazi iz ishodišta i prolazi točkom T zatvara s x -osi i udaljenošću r točke T od ishodišta (slika 2.17).

Transformacije iz polarnog u Kartezijev koordinatni sustav vrše se prema formulama

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Transformacije iz Kartezijevog u polarni koordinatni sustav vrše se prema formulama

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \arctg \frac{y}{x}, \end{aligned}$$



Slika 2.17: Polarni koordinatni sustav

pri čemu se kvadrant u kojem se nalazi kut φ odredi sa slike ili iz kombinacije predznaka od x i y . Vidimo da je polarni koordinatni sustav, kao i gornje formule, identične formulama za trigonometrijski oblik kompleksnog broja iz [M1, §1.8.1].

Traženje površine likova zadanih u polarnom koordinatnom sustavu prikazano je na Slici 2.18. U polarnom koordinatnom sustavu krivulju zadajemo formulom

$$r = f(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}.$$

Zbog prirode samog sustava obično tražimo površinu između krivulje $r = f(\varphi)$ i zraka $\varphi = \varphi_1$ i $\varphi = \varphi_2$. Shodno tome, element površine u polarnom koordinatnom sustavu je kružni isječak radijusa r s kutom $d\varphi$, odnosno

$$dP = \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

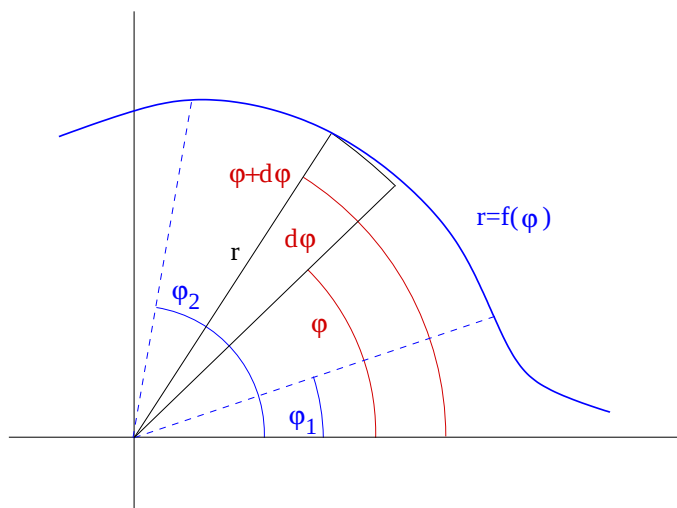
Kao i Kartezijevim koordinatama, površina je jednaka beskonačnoj (integralnoj) sumi beskonačno malih elemenata površine, odnosno

$$P = \int_{[\varphi_1, \varphi_2]} dP = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi) d\varphi.$$

U polarnom koordinatnom sustavu vrlo je jednostavno izvesti formulu za površinu kruga.

Primjer 2.11 Neka je zadana kružnica radijusa R s centrom u točki $T = (x_0, y_0)$,

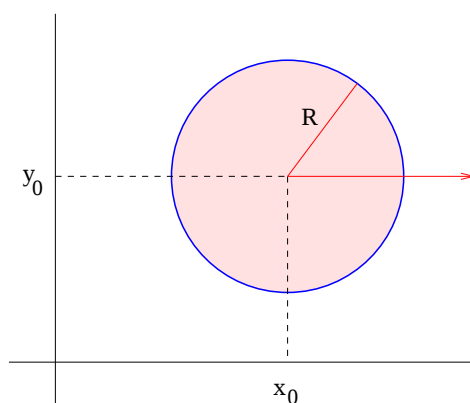
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$



Slika 2.18: Element površine u polarnim koordinatama

Ako ishodište polarnog koordinatnog sustava postavimo u središte kružnice (slika 2.19), tada kružnica ima jednadžbu $r = R$ (konstantna funkcija!), pa je

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 d\varphi = \frac{1}{2} R^2 \varphi \Big|_0^{2\pi} = R^2 \pi.$$



Slika 2.19: Površina kruga u polarnim koordinatama

Linearne funkcije u polarnim koordinatama su spirale.

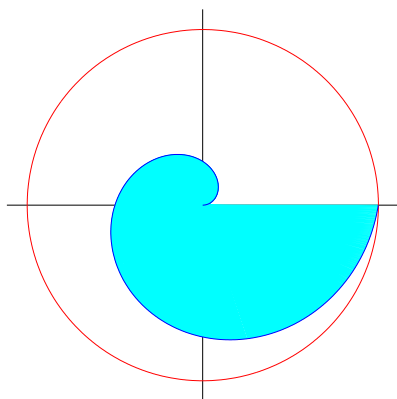
Primjer 2.12 Izračunajmo površinu određenu prvim zavojem Arhimedove spirale (slika 2.20),

$$r = a\varphi, \quad a > 0, \quad \varphi \geq 0.$$

Vrijedi

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} a^2 \pi^3.$$

Primijetimo da je tražena površina jednaka trećini površine kružnice radijusa $2a\pi$.



Slika 2.20: Arhimedova spirala $r = a\varphi$

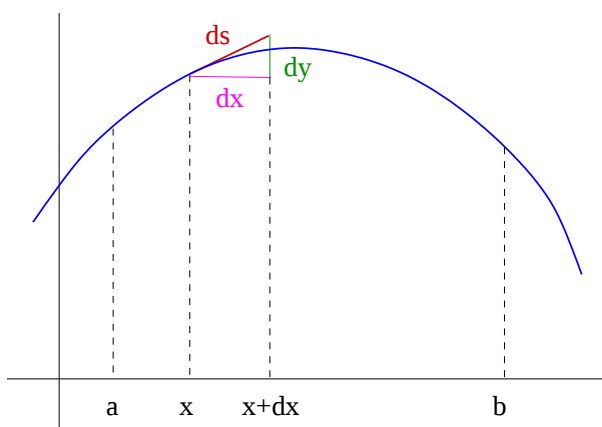
2.6.2 Duljina luka ravninske krivulje

Postupak računanja duljine luka ravninske krivulje još se naziva *rektifikacija krivulje*. Slično kao i kod računanja površine, duljinu luka krivulja $y = f(x)$ od točke $x = a$ do točke $x = b$ računamo kao beskonačnu (integralnu) sumu beskonačno malih *elemenata duljine* ds . Formula za element duljine slijedi iz Pitagorinog poučka i činjenice da se funkcija u okolini neke točke može aproksimirati njenom tangentom (slika 2.21),

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (2.4)$$

Ovdje po dogovoru uzimamo da je duljina luka pozitivna ako x raste, odnosno ako je dx pozitivan. Dakle, duljina luka krivulje $y = f(x)$ od točke $x = a$ do točke $x = b$ računa se formulom

$$S = \int_{[a,b]} ds = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$



Slika 2.21: Element duljina luka ravninske krivulje

Primjer 2.13 Izračunajmo duljinu luka kvadratne parabole $y = x^2$ od 0 do 1. Na Slici 2.5 vidimo da za traženu duljinu S vrijedi $\sqrt{2} < S < 2$. Koristeći, na primjer, metodu neodređenih koeficijenata iz poglavlja 1.7.3, imamo

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \ln |2x + \sqrt{1 + 4x^2}| \Big|_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) \approx 1.4789. \end{aligned}$$

Parametarski zadana krivulja

Kod parametarski zadane krivulje

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R},$$

element duljine je dan s

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

pa se duljina luka računa formulom

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Iz ove formule slijedi da je duljina luka pozitivna kada je dt nenegativan, odnosno kada t raste.

Primjer 2.14 a) Opseg kružnice radijusa r ,

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

jednak je

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(-\sin t))^2 + (r \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} r dt = r t \Big|_0^{2\pi} = 2r\pi.$$

b) Duljina jednog luka cikloide iz primjera 2.9 (slika 2.16) jednaka je

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + (a \sin t)^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt.$$

Koristeći poznatu vezu između trigonometrijskih funkcija, $1 - \cos t = 2 \sin^2(t/2)$, i činjenicu da je $\sin(t/2) \geq 0$ za $t \in [0, 2\pi]$, imamo

$$S = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Krivulja zadana u polarnim koordinatama

Krivulju zadanu u polarnim koordinatama,

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2],$$

prvo pomoću transformacija (2.3) prebacimo u parametarski oblik,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = r(\varphi) \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi = r(\varphi) \sin \varphi. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sada je

$$\dot{x} = r'(\varphi) \cos \varphi + r(\varphi)(-\sin \varphi), \quad \dot{y} = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= (r'(\varphi))^2 \cos^2 \varphi + r^2(\varphi) \sin^2 \varphi - 2r'(\varphi)r(\varphi) \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + (r'(\varphi))^2 \sin^2 \varphi + r^2(\varphi) \cos^2 \varphi + 2r'(\varphi)r(\varphi) \sin \varphi \cos \varphi \\ &= (r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi). \end{aligned}$$

Dakle, duljinu luka krivulje u polarnim koordinatama računamo formulom

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi.$$

Primjer 2.15 Duljina luka prvog zavoja Arhimedove spirale (vidi primjer 2.12 i sliku 2.20) jednaka je

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + (a\varphi)^2} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = \dots \\ &= a \left(\frac{1}{2} \varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2} \ln |\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}| \right) \Big|_0^{2\pi} \approx 21.256 a. \end{aligned}$$

2.6.3 Volumen rotacionog tijela

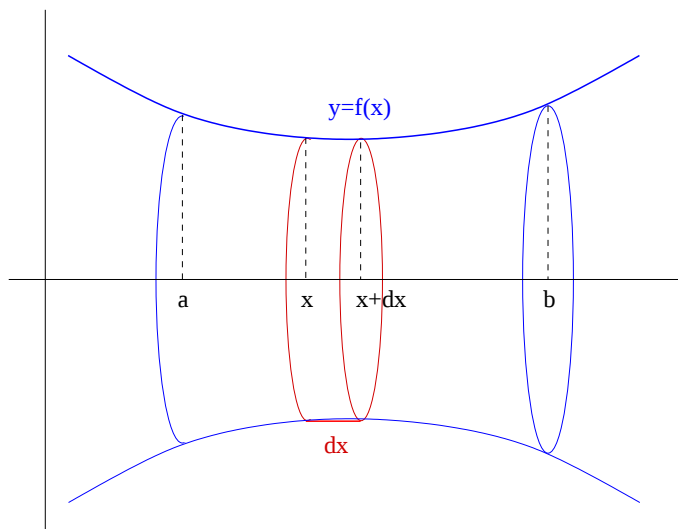
Rotaciona ploha je ploha koja nastaje rotacijom neke krivulje oko zadane osi. *Rotaciono tijelo* je tijelo omeđeno tom plohom i bazama (vidi sliku 2.22). Promotrimo slučaj kada rotaciono tijelo nastaje rotacijom krivulje $y = f(x)$ oko x -osi. U tom slučaju volumen (obujam) nastalog tijela od točke $x = a$ do točke $x = b$ računamo kao beskonačnu (integralnu) sumu beskonačno malih *elemenata volumena*. Element volumena dV je volumen cilindra visine dx i radijusa baze $r = f(x)$ (slika 2.22), odnosno

$$dV = \pi f^2(x) dx,$$

pa se volumen rotacionog tijela računa formulom

$$V = \int_{[a,b]} dV = \pi \int_a^b y^2 dx, \quad (2.6)$$

pri čemu je dx nenegativan.



Slika 2.22: Volumen rotacionog tijela i element volumena

Primjer 2.16 a) Kuglu radijusa r s centrom u ishodištu, možemo dobiti rotirajući polukružnicu $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ oko x -osi. Stoga je volumen kugle jednak

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

b) Izvedimo formulu za volumen stošca visine h i radijusa baze r . Takav stožac nastaje, na primjer, rotacijom pravca $y = \frac{r}{h}x$ oko x -osi za $x \in [0, h]$, pa je njegov volumen jednak dobro poznatoj formuli

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Za parametarski zadanu krivulju

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R},$$

uvršćavanje u formulu (2.6) daje

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t) \varphi'(t) dt = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \dot{x} dt. \quad (2.7)$$

Ova formula vrijedi ukoliko je $dx = \dot{x} dt$ nenegativan – u protivnom treba integral pomnožiti s -1 , odnosno zamijeniti granice integracije.

Primjer 2.17 Volumen tijela koje nastaje rotacijom jednog luka cikloide iz primjera 2.9 (slika 2.16) oko x -osi jednak je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t) dt \\ &= a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt \\ &= a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 + 3\cos^2 t) dt. \end{aligned}$$

Zadnja jednakost slijedi iz činjenice da je $\int_0^{2\pi} \cos^{2n-1} t dt = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle,

$$V = a^3 \pi \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t)\right) dt = a^3 \pi \left(\frac{5}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t\right) \Big|_0^{2\pi} = 5a^3 \pi^2.$$

Napomena 2.2 Kod računanja volumena rotacionih tijela, zadana krivulja može rotirati i oko y -osi, oko pomaknute osi (na primjer, $x = 1$), oko vertikalne asimptote (u kojem slučaju se dobije nepravilni integral), i slično. U tom slučaju se izvrši odgovarajuća zamjena varijabli, na primjer $t = x - 1$.

Zadatak 2.4 Izračunajte volumen kugle nastale rotacijom polukružnice $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ oko y -osi. *Uputa:* u formuli (2.7) treba zamijeniti uloge varijabli x i y .

Krivulju zadanu u polarnim koordinatama,

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2],$$

prvo prebacimo u parametarski oblik (2.5), pa uvrštavanje u formulu (2.7) daje

$$V = \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) \sin^2 \varphi [r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi] d\varphi.$$

Ova formula vrijedi ukoliko je $dx = [r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi] d\varphi$ nenegativan – u protivnom treba integral pomnožiti s -1 , odnosno zamijeniti granice integracije.

Primjer 2.18 Kugla radijusa R s centrom u ishodištu nastaje rotacijom krivulje $r = R$, $\varphi \in [0, \pi]$, oko x -osi. Volumen kugle jednak je

$$\begin{aligned} V &= -\pi \int_0^\pi R^2 \sin^2 \varphi (-R \sin \varphi) d\varphi = R^3 \pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi \\ &= \{ \cos \varphi = t \} = -R^3 \pi \int_1^{-1} (1 - t^2) dt = \frac{4}{3} R^3 \pi. \end{aligned}$$

2.6.4 Oplošje rotacionog tijela

Postupak računanja oplošja (površine plašta) rotacionog tijela još se naziva *komplanacija plohe*. Površinu plašta rotacionog tijela od točke $x = a$ do točke $x = b$ računamo kao beskonačnu (integralnu) sumu beskonačno malih *elemenata oplošja*. Element oplošja dO je površina plašta krnjeg stošca čiji je radijus jedne baze jednak $y = f(x)$, radijus druge baze jednak $y + dy = f(x) + f'(x) dx$, a duljina izvodnice jednaka $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (slika 2.23). Zapravo, u ovom slučaju duljinu luka krivulje u okolini točke x aproksimiramo elementom duljine luka ds kao što smo to učinili u poglavlju 2.6.2.

Površina plašta krnjeg stošca baznih radijusa r_1 i r_2 i izvodnice s jednaka je

$$P = s(r_1 + r_2) \pi.$$

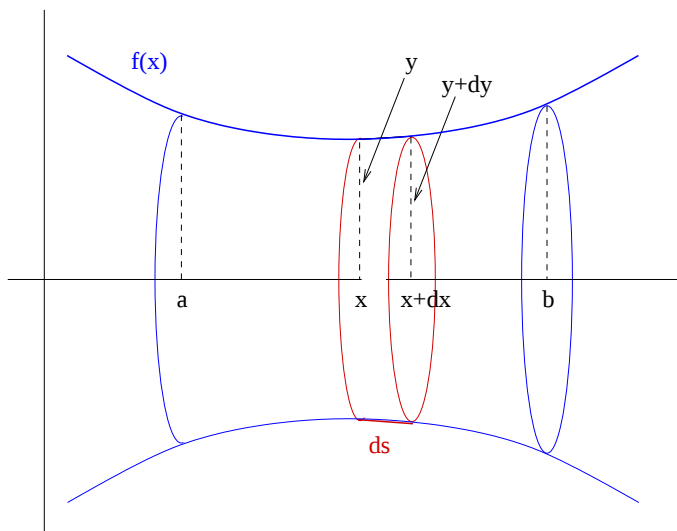
Dakle, u našem slučaju vrijedi

$$dO = ds(|y| + |y + dy|) \pi = 2|y| ds \pi \pm 2dy ds \pi.$$

U ovoj formuli smo uzeli apsolutne vrijednosti, jer se radi o radijusima koji ne mogu biti negativni. Kako je drugi pribrojnik, $2dy ds \pi$, infinitezimalno manji od prvog, možemo ga zanemariti, pa je konačno element oplošja dan s (formalan dokaz izostavljamo)

$$dO = 2|y| dS \pi.$$

U Kartezijevim koordinatama element duljine luka dS dan je izrazom (2.4)



Slika 2.23: Oplošje rotacionog tijela i element oplošja

pa se oplošje rotacionog tijela računa formulom

$$O = \int_{[a,b]} dO = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Za parametarski zadanu krivulju

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R},$$

imamo

$$O = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt, \quad (2.8)$$

a za krivulju zadanu u polarnim koordinatama,

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2],$$

imamo

$$O = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |r(\varphi) \sin \varphi| \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (2.9)$$

Zadatak 2.5 a) Izvedite formule (2.8) i (2.9).

b) Izvedite formulu za oplošje kugle radijusa r na sva tri načina. *Rješenje:*
 $O = 4r^2\pi.$

2.6.5 Sila i rad

Prema Newtonovom drugom zakonu gibanja ako se tijelo kreće po pravcu i ako je gibanje tijela dano funkcijom $s(t)$, tada je *sila* F koje djeluje na tijelo u smjeru kretanja jednaka umnošku mase tijela i njegove akceleracije:

$$F = m \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

U slučaju konstantnog ubrzanja, sila F je također konstantna i izvršeni *rad* definiramo kao umnožak sile F i prijeđenog puta d :

$$W = F d.$$

U slučaju kada sila nije konstantna, postupamo na sljedeći način: neka se tijelo giba uzduž x -osi od točke $x = a$ do točke $x = b$ i neka u točki x na tijelo djeluje sila $f(x)$. Neka je $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ rastav segmenta $[a, b]$ (vidi definiciju 2.1) takav da su svi podintervali jednake duljine, $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, $i = 1, \dots, n$. U podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ odaberimo točku ξ_i . Kako je za veliki n duljina intervala Δx mala, a funkcija f je neprekidna, možemo pretpostaviti da je f gotovo konstantna na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$. Stoga je rad koji se izvrši prilikom pomicanja tijela od točke $x = x_{i-1}$ do točke $x = x_i$ približno jednak

$$W_i \approx f(\xi_i) \Delta x$$

pa je cjelokupni rad približno jednak

$$W \approx \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x.$$

Intuitivno je jasno da ova aproksimacija postaje sve bolja što je n veći. Kako je izraz na desnoj strani jedan oblik integralne sume, *rad izvršen prilikom pomicanja tijela od točke $x = a$ do točke $x = b$* definiramo kao

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

U metričkom sustavu masa se mjeri u kilogramima (kg), pomak u metrima (m) vrijeme u sekundama (s) i sila u njutnima (newton, $N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$). Dakle, sila od 1 N koja djeluje na masu od 1 kg proizvodi ubrzanje od 1 m/s^2 . Sila se mjeri u *njutn-metrima* ili *džulima* (joule, $J = N \cdot \text{m}$).

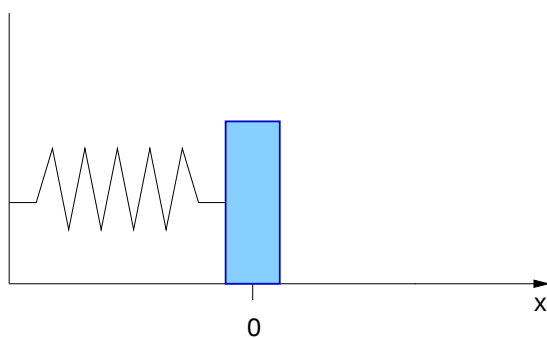
Primjer 2.19 Ako na tijelo koje se nalazi x metara od ishodišta djeluje sila od $x^2 + x$ njutna, rad koji se izvrši kada se tijelo pomakne od točke $x = 1$ m do točke $x = 4$ m jednak je

$$W = \int_1^4 (x^2 + x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 = 28.5 \text{ J.}$$

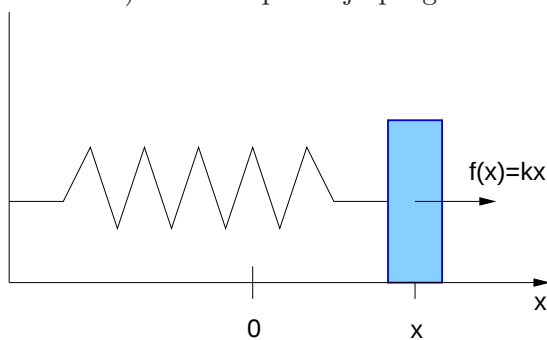
Primjer 2.20 Prema *Hookeovom zakonu*, sila potrebna za održavanje opruge rastegnutoj x jedinica udaljenosti od njene prirodne dužine proporcionalna je s x :

$$f(x) = kx,$$

pri čemu je k pozitivna konstanta (*konstanta opruge*). Hookeov zakon vrijedi ako rastezanje x nije preveliko (vidi sliku 2.24).



a) Prirodni položaj opruge



b) Rastegnuta opruga

Slika 2.24: Hookeov zakon

Neka je, na primjer, sila od 30 N potrebna da bi se držala opruga koje je od svoje prirodne duljine od 10 cm rastegnuta na duljinu od 15 cm. Izračunajmo rad potreban da bi se opruga dalje rastegla na duljinu od 18 cm. Prvo je potrebno odrediti konstantu opruge k : prema zadanim podacima

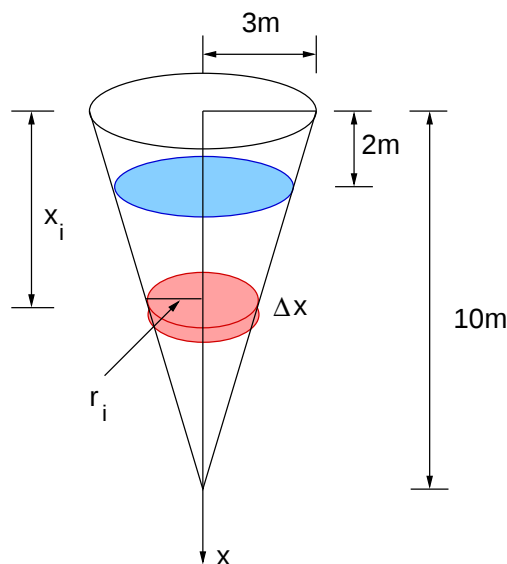
vrijedi

$$30 \text{ N} = 0.05 k, \quad k = \frac{30}{0.05} = 600 \text{ N/m}.$$

Dakle, $f(x) = 600x$ pa je izvršeni rad jednak

$$W = \int_{0.05}^{0.08} 600x \, dx = 600 \left. \frac{x^2}{2} \right|_{0.05}^{0.08} = 300(0.08^2 - 0.05^2) = 1.17 \text{ J}.$$

Primjer 2.21 Rezervar oblika invertiranog stošca visine $h = 10 \text{ m}$ i radijusa baze $r = 3 \text{ m}$ napunjen je vodom do visine 8 m (vidi sliku 2.25). Izračunajmo rad koji je potreban za pražnjenje rezervara i to tako da se voda ispumpa preko gornjeg ruba.



Slika 2.25: Rezervar s vodom

U ovom slučaju prvo treba postaviti integral. Uvedimo koordinatni sustav kao na slici 2.25. Voda se nalazi od dubine 2 m do dubine 10 m . Neka je $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ rastav intervala $[2, 10]$ takav da su svi podintervali jednake duljine, $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, $i = 1, \dots, n$. Na taj način smo i vodu u rezervaru podijelili na n dijelova pri čemu je i -ti dio približno jednak cilindru visine Δx i radijusa baze r_i . Iz sličnosti trokuta slijedi

$$\frac{r_i}{10 - x_i} = \frac{3}{10}, \quad r_i = \frac{3}{10}(10 - x_i).$$

Volumen i -tog dijela vode je stoga približno jednak

$$V_i \approx r_i^2 \Delta x \pi = \frac{9}{100}(10 - x_i)^2 \Delta x \pi,$$

pa je masa i -tog dijela vode približno jednaka (masa je umnožak gustoće i volumena, a gustoća vode je 1000 kg/m^3)

$$m_i \approx 90 (10 - x_i)^2 \Delta x \pi.$$

Sila potrebna za podizanje i -tog dijela vode mora nadići silu težu pa je

$$F_i = m_i g \approx 9.81 \cdot 90 (10 - x_i)^2 \Delta x \pi \approx 2774 (10 - x_i)^2 \Delta x.$$

Svaka čestica u i -tom dijelu vode mora prijeći put koji je približno jednak x_i . Stoga je rad potreban za ispumpavanje i -tog dijela vode približno jednak

$$W_i \approx F_i x_i \approx 2774 (10 - x_i)^2 x_i \Delta x.$$

Ukupni rad potreban za ispumpavanje čitavog rezervara dobit ćemo zbrajanjem doprinosa svih n dijelova i prelaskom na limes kada $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} W &\approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2774 (10 - x_i)^2 x_i \Delta x \\ &= 2774 \int_2^{10} (10 - x^2) x \, dx \\ &= 2774 \left(50 x^2 - 20 \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_2^{10} \\ &\approx 1.90 \times 10^6 \text{ J.} \end{aligned}$$

Zadatak 2.6 Neka je za rastezanje opruge od njene prirodne duljine koja iznosi 32 cm do duljine 40 cm potreban rad od 2 J.

- Koliki je rad potreban za rastezanje opruge od 35 cm do 42 cm?
- Na kolikoj rastegnutosti od prirodne duljine će oprugu držati sila od 20 N?

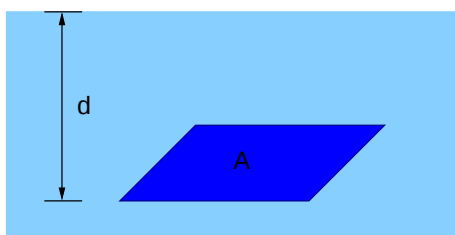
Zadatak 2.7 Kabel dužine 40 m i težine 60 kg visi s vrha nebodera. Koliki je rad potreban za povlačenje 10 m kabela na vrh nebodera?

Zadatak 2.8 Horizontalno položen cilindrični rezervar (cisterna) duljine 10 m i radijusa baze 1.5 m napunjen je do polovice benzinom gustoće 760 kg/m^3 .

- Koliki je rad potreban da bi se gorivo ispumpalo kroz otvor koji se nalazi na vrhu rezervara?
- Ako se pumpa pokvari nakon rada od 10^6 J , kolika je visina, kolika težina, a koliki volumen goriva koje je preostalo u rezervaru?

2.6.6 Hidrostatski tlak i sila

Poznato je da se prilikom ronjenja tlak vode povećava s dubinom zaronu i to stoga što se težina vode iznad ronioca povećava. Neka je, na primjer, tanka horizontalna ploča površine A zaronjena u tekućinu gustoće $\rho \text{ kg/m}^3$ na dubinu od d metara ispod površine tekućine (slika 2.26).



Slika 2.26: Zaronjena tanka ploča

Tekućina koja se nalazi direktno iznad ploče ima volumen $V = Ad$ pa je njena masa jednaka $m = \rho V = \rho Ad$. Sila kojom ta količina vode djeluje na ploču jednaka je

$$F = mg = \rho g Ad,$$

pri čemu je g ubrzanje sile teže. Tlak (*pritisak*) P definira se kao sila po jedinici površine:

$$P = \frac{F}{A} = \rho g d.$$

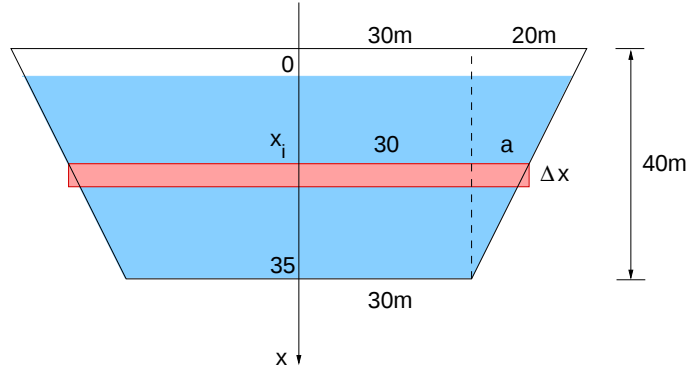
Jedinica za mjerenje tlaka je paskal odnosno njutn po metru kvadratnom (pascal, $\text{Pa} = \text{N/m}^2$). Kako je paskal jako mala jedinica, u praksi se često koriste kilopaskali (kPa). Na primjer, tlak na dnu bazena dubine dva metra jednak je

$$P = \rho g d = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ m} = 19620 \text{ Pa} = 19.62 \text{ kPa}.$$

Eksperimentalno je utvrđeno da je *na svakom mjestu u tekućini pritisak jednak u svim smjerovima*.

Za bolje razumijevanje hidrostatskog pritiska, izračunajmo pritisak vode na branu prikazanu na slici 2.27.

Brana ima oblik trapeza, visoka je 40 m, široka je na vrhu 100 m, a na dnu 60 m. Zrcalo vode se nalazi 5 m ispod vrha brane. Ako postavimo koordinatnu x -os tako da se ishodište nalazi na površini vode, dubina vode je 35 m. Neka je $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ rastav intervala $[0, 35]$ takav da su svi podintervali jednake duljine, $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, $i = 1, \dots, n$. Sada je i -ti podjeljak brane



Slika 2.27: Hidrostatski pritisak na branu

približno jednak pravokutniku visine Δx i širine ω_i . Iz sličnosti trokuta slijedi

$$\frac{a}{35 - x_i} = \frac{20}{40}, \quad a = \frac{35 - x_i}{2},$$

pa je

$$\omega_i = 2(30 + a) = 2\left(30 + \frac{35 - x_i}{2}\right) = 95 - x_i.$$

Površina i -tog podjeljka brane je

$$A_i = \omega_i \Delta x = (95 - x_i) \Delta x.$$

Kako je Δx mali, možemo pretpostaviti da je tlak na i -tom podjeljku brane gotovo konstantan i jednak

$$P_i = \rho g d = 1000 \cdot 9.81 \cdot x_i.$$

Hidrostatska sila koja djeluje na i -ti podjeljak brane jednaka je umnošku tlaka i površine:

$$F_i = P_i A_i = 1000 \cdot 9.81 \cdot x_i (95 - x_i) \Delta x.$$

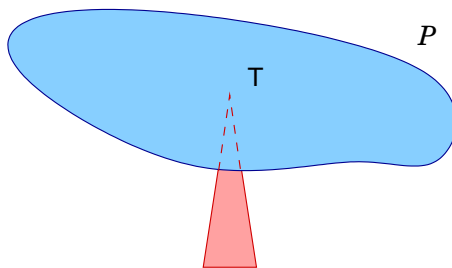
Zbrajanjem ovih sila i uzimanjem limesa kada $n \rightarrow \infty$ dobili smo ukupnu hidrostatsku silu koja djeluje na branu:

$$\begin{aligned} F &\approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 9810 x_i (95 - x_i) \Delta x \\ &= 9810 \int_0^{35} x(95 - x) dx \\ &= 9810 \left(95 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{35} \approx 4.31 \times 10^8 \text{ N}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.9 Bazen za plivanje dug je 15 m, a širok je 7 m, dok mu je dno ravna ploča dubine 1 m na plićem kraju i 2 m na dubljem kraju. Ako je bazen do vrha pun vode izračunajte hidrostatsku silu koja djeluje na: a) plići kraj bazena, b) dublji kraj bazena, c) jednu od bočnih stranica bazena i d) dno bazena.

2.6.7 Momenti i težište

Težište ravne ploče $\mathcal{P}$ zadanog oblika je točka T sa svojstvom da se ploča poduprta u toj točki nalazi u položaju ravnoteže (slika 2.28).



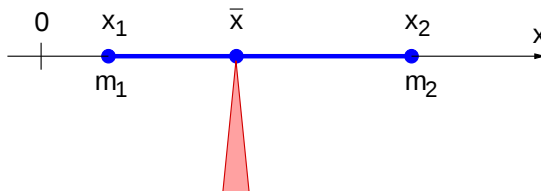
Slika 2.28: Težište ravne ploče

Izvod formule za težište započet ćemo poznatim Arhimedovim Zakonom poluge: poluga kojoj se na kraju x_1 nalazi masa m_1 , a na kraju x_2 nalazi masa m_2 te koje je poduprta u točki $\bar{x}$, će biti u ravnoteži ako je (slika 2.29)

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x}),$$

iz čega slijedi $m_1\bar{x} + m_2\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2$, odnosno

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$



Slika 2.29: Ravnoteža poluge

Broj m_ix_i je *moment* mase m_i u odnosu na ishodište. Slično, težište sustava od n čestica s masama $m_1, m_2, \dots, m_n$, koje se nalaze u točkama

$x_1, x_2, \dots, x_n$ na x -osi, nalazi se u točki

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M}{m},$$

pri čemu je $m = \sum m_i$ ukupna masa sustava, a $M = \sum m_i x_i$ *moment sustava* u odnosu na ishodište. Iz jednakosti $m\bar{x} = M$ zaključujemo sljedeće: ako bi se čestica mase m nalazila u točki $\bar{x}$ njen moment bi bio isti kao i moment zadanog sustava.

Poopćimo sada razmatranje na sustav od n čestica s masama $m_1, m_2, \dots, m_n$, koje se nalaze u točkama s koordinatama $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ u xy -ravnini. *Moment sustava oko y -osi* jednak je

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i,$$

moment sustava oko x -osi jednak je

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i,$$

a težište sustava je u točki $T = (\bar{x}, \bar{y})$, pri čemu je

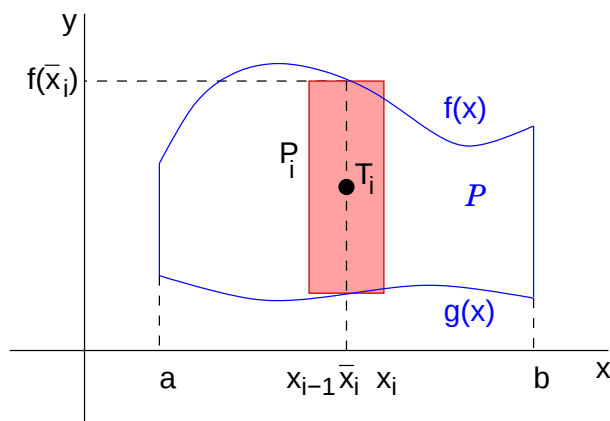
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

Zadatak 2.10 Izračunajte momente i težište sustava od tri čestice s masama 2, 3 i 5 koje se nalaze u točkama $A = (-2, 1)$, $B = (2, 0)$ i $C = (3, 2)$.

Promotrimo sada ravnu ploču $\mathcal{P}$ uniformne gustoće ρ omeđenu s x -osi, pravicima $x = a$ i $x = b$ i neprekidnim funkcijama $y = f(x)$ i $y = g(x)$, pri čemu je $g(x) \leq f(x)$ za $x \in [a, b]$ (vidi sliku 2.30).

Neka je $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ rastav intervala $[a, b]$ takav da su svi podintervali jednake duljine, $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, $i = 1, \dots, n$. U i -tom intervalu odaberimo središnju točku $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. Za dovoljno mali Δx dio ploče $\mathcal{P}$ od točke $x = x_{i-1}$ do točke $x = x_i$ možemo aproksimirati pravokutnikom P_i kao na slici 2.30. Zbog uniformne gustoće ploče, težište pravokutnika P_i se nalazi u točki

$$T_i = \left(\bar{x}_i, \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2} \right).$$

Slika 2.30: Ploča uniformne gustoće ρ

Masa pravokutnika P_i je

$$m_i = \rho [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \Delta x.$$

Moment pravokutnika P_i jednak je umnošku mase i udaljenosti težišta T_i od y -osi, odnosno

$$M_y(P_i) = \rho [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \Delta x \bar{x}_i.$$

Zbrajanjem ovih momenta i uzimanje limesa kada $n \rightarrow \infty$ daje ukupni moment ploče $\mathcal{P}$ oko y -osi:

$$M_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \bar{x}_i [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \Delta x = \rho \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx.$$

Slično, moment pravokutnika P_i oko x -osi jednak je

$$M_x(P_i) = \rho [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \Delta x \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2}$$

pa je ukupni moment ploče $\mathcal{P}$ oko x -osi jednak:

$$M_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \frac{1}{2} [f(\bar{x}_i)^2 - g(\bar{x}_i)^2] \Delta x = \rho \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx.$$

Ukupna masa ploče jednaka je umnošku gustoće i površine,

$$m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Težište ploče nalazi se u točki $T = (\bar{x}, \bar{y})$, pri čemu, kao i kod sustava od n čestica, vrijedi $\bar{x} = M_y/m$ i $\bar{y} = M_x/m$, odnosno

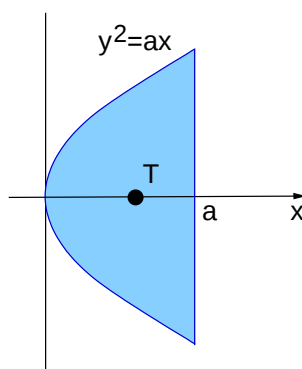
$$\bar{x} = \frac{\rho \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)] dx} = \frac{\int_a^b x [f(x) - g(x)] dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx},$$

$$\bar{y} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)] dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx}.$$

Napomena 2.3 Zbog uniformne gustoće ploče koordinate težišta ne ovise o gustoći. Ukoliko ravna ploča nema uniformnu gustoću, tada za računanje koordinata težišta koristimo dvostruke integrale, dok koordinate težišta tijela računamo pomoću trostrukog integrala (vidi poglavlje 4).

Primjer 2.22 Koordinate težišta ploče omeđene parabolom $y^2 = ax$ i pravcem $x = a$ su (vidi sliku 2.31):

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x [\sqrt{ax} - (-\sqrt{ax})] dx}{\int_0^a [\sqrt{ax} - (-\sqrt{ax})] dx} = \frac{3}{5} a, \quad \bar{y} = 0.$$



Slika 2.31: Koordinate težišta ploče

Zadatak 2.11 Nađite težište polukružne ploče radijusa r .

2.7 Numeričko integriranje

Pored rješavanja elementarno rješivih integrala koristeći pravila opisana u poglavljima 1 i 2, ostale načini računanja određenih integrala su

- numeričko integriranje,
- integriranje razvoja podintegralne funkcije u red potencija, i
- korištenje integrala ovisnih o parametru (vidi poglavlje 4.6).

Prve dvije metode se mogu koristiti za rješavanje svih određenih integrala, dakle, i onih koji su elementarno rješivi, ukoliko je rješenje jednostavnije i dovoljno točno. S druge strane, jednu od tih metoda moramo koristiti želimo li izračunati integral koji nije elementarno rješiv.

Integrali ovisni o parametru opisani su u poglavlju 4.6. Postupak integriranja reda funkcija već smo opisali u poglavlju 1.8. Kod rješavanja određenog integrala postupak je isti, samo što na kraju uvrstimo granice i nađemo sumu tako dobivenog reda, uz uvjet da se granice nalaze unutar područja konvergencije promatranog reda potencija.

U ovom poglavlju detaljnije ćemo opisati dvije osnovne metode numeričke integracije – trapeznu i Simpsonovu formulu. Obje formule se temelje na računanju jedne integralne sume uz odgovarajuće formule za procjenu greške. Kao ilustraciju pokazat ćemo primjenu tih metoda na rješavanje eliptičkih integrala. Također ćemo dati formulu za Richardsonovu ekstrapolaciju pomoću koje se određuje pogreška nastala numeričkim integriranjem. Na kraju ćemo dati Matlab programe za trapeznu i Simpsonovu formulu.

2.7.1 Eliptički integrali

Eliptički integrali su važna klasa integrala koji nisu elementarno rješivi, a na koji se svode mnoge tehničke primjene. Općenito, *eliptički integrali prvog tipa* su integrali oblika

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 x}} dx,$$

a *eliptički integrali drugog tipa* su integrali oblika

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \cos^2 x} dx,$$

pri čemu je $k^2 < 1$. Dokažimo jednakosti u gornjim formulama:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 x}} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(x+\pi/2)}} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = x + \pi/2, \\ dt = dx, \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & \pi/2 & 0 \end{array} \right\} \\ &= \int_{-\pi/2}^0 \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} dt, \end{aligned}$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi zbog parnosti podintegralne funkcije. U jednakost gornjih integrala se lako možete uvjeriti i grafički, odnosno tako što ćete podintegralne funkcije nacrtati pomoću programa NetPlot.

Promotrimo parametarski zadanu elipsu

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Opseg te elipse je prema poglavlju 2.6.2 jednak

$$S = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-2 \sin^2 t)^2 + \cos^2 t} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 3 \cos^2 t} dt = 8 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cos^2 t} dt.$$

Dakle, radi se o eliptičkom integralu drugog tipa. Tu vidimo i veliku razliku između elipse i kružnice – dok je podjednako lako izračunati površine, računanje opsega elipse je bitno složenije od računanja opsega kružnice.

Uvedimo oznaku

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cos^2 t} dt. \quad (2.10)$$

Eliptički integrali se zbog svoje važnosti nalaze u mnogim matematičkim tablicama. Tako iz tablice u poznatom Matematičkom priručniku Bronštejna i Semandjajeva možemo očitati vrijednost

$$I \approx 1.2111,$$

pa je opseg zadane elipse približno jednak $S \approx 9.6888$.

2.7.2 Trapezna formula

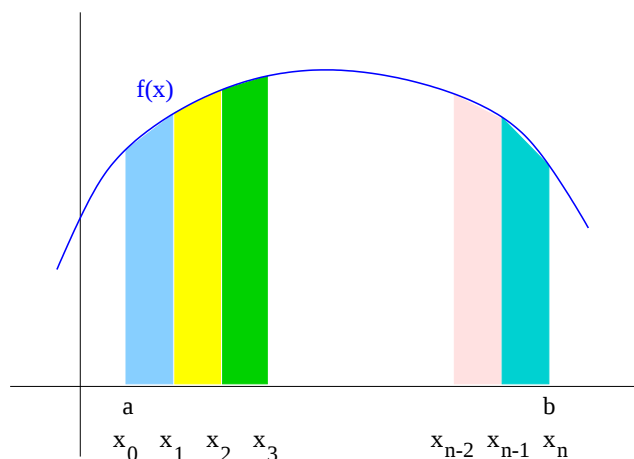
Kod trapezne formule odaberemo dekompoziciju D koja dijeli interval $[a, b]$ na n jednakih dijelova,

$$D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, b = x_n\},$$

pa je prirast jednak

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b - a}{n}.$$

Zadanu krivulju $y = f(x)$ aproksimiramo izlomljenom crtom koja nastaje spajanjem točaka (x_{i-1}, y_{i-1}) i (x_i, y_i) , a integral $\int_a^b f(x) dx$ aproksimiramo s tako dobivenom integralnom sumom J_n (vidi sliku 2.32).



Slika 2.32: Trapezna formula

Vidimo da je integralna suma zapravo suma površina dobivenih trapeza, pa odatle i ime trapezna formula. Poznata formula za površinu trapeza daje

$$\begin{aligned} J_n &= \sum_{i=1}^n \Delta x y_{i-1} + \Delta x \frac{y_i - y_{i-1}}{2} = \Delta x \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \\ &= \Delta x \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right), \end{aligned}$$

odnosno, trapezna formula glasi

$$J_n = \Delta x \left(\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2} \right). \quad (2.11)$$

Pogrešku trapezne formule daje slijedeći teorem.

Teorem 2.6 *Ako je druga derivacija $f''(x)$ neprekidna i omeđena na intervalu $[a, b]$, tada vrijedi*

$$\int_a^b f(x) dx = J_n + R,$$

pri čemu je J_n dan formulom (2.11), dok za ostatak R vrijedi ocjena

$$|R| \leq M \frac{b-a}{12} \Delta x^2, \quad M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Dokaz. Radi jednostavnijeg označavanja uvedimo oznaku $h \equiv \Delta x$. Pogreška trapezne formule na i -tom intervalu jednaka je

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{h}{2} (y_{i-1} + y_i).$$

Promotrimo $R_i = R_i(h)$ kao funkciju prirasta h :

$$R_i(h) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+h} f(x) dx - \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_{i-1} + h)].$$

Koristeći pravilo o deriviranju složene funkcije imamo

$$\begin{aligned} R'_i(h) &= f(x_{i-1} + h) - \frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_{i-1} + h)] - \frac{h}{2} f'(x_{i-1} + h) \\ &= \frac{1}{2} [f(x_{i-1} + h) - f(x_{i-1})] - \frac{h}{2} f'(x_{i-1} + h), \\ R''_i(h) &= \frac{1}{2} f'(x_{i-1} + h) - \frac{1}{2} f'(x_{i-1} + h) - \frac{h}{2} f''(x_{i-1} + h) \\ &= -\frac{h}{2} f''(x_{i-1} + h). \end{aligned}$$

Primijetimo da je $R_i(0) = 0$ i $R'_i(0) = 0$. Vrijedi

$$R'(h) - R'(0) = \int_0^h R''(t) dt,$$

odnosno

$$R'(h) = \int_0^h -\frac{1}{2} t f''(x_{i-1} + t) dt.$$

Teorem o srednjoj vrijednosti 2.4 primijenjen na funkcije $(-1/2)t f''(x_{i-1}+t)$ i t povlači

$$R'(h) = -\frac{1}{2} f''(\xi_i) \int_0^h t dt = -\frac{h^2}{4} f''(\xi_i),$$

za neki $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Sada imamo

$$R(h) - R(0) = \int_0^h R'(t) dt$$

pa je

$$R(h) = -\frac{1}{4} f''(\xi_i) \int_0^h t^2 dt = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i).$$

Dakle,

$$R_i = -\frac{(\Delta x)^3}{12} f''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

Konačno,

$$|R| \leq \sum_{i=1}^n |R_i| \leq \frac{(b-a)(\Delta x)^2}{12} \max_{\xi \in (a,b)} |f''(\xi)|$$

i teorem je dokazan. ■

Primjer 2.23 Izračunajmo integral (2.10) trapeznom formulom za $n = 4$. Vrijednosti x_i i y_i dane su su slijedećoj tablici:

i	x_i	y_i
0	0	0.5
1	$\pi/8$	0.59986
2	$\pi/4$	0.79057
3	$3\pi/8$	0.94348
4	$\pi/2$	1

Dakle,

$$J_4 = \frac{\pi}{8} \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2} \right) = 1.211051.$$

Traženje broja M u gornjoj formuli za ocjenu ostatka (pogreške) je složeno. Računanjem druge derivacije zadane funkcije može se pokazati da je $M \leq 1$ pa formula za ocjena pogreške iz teorema 2.6 povlači $|R| \leq 0.02$. No, umjesto toga pogrešku možemo jednostavnije ocijeniti Richardsonovom ekstrapolacijom (poglavlje 2.7.4).

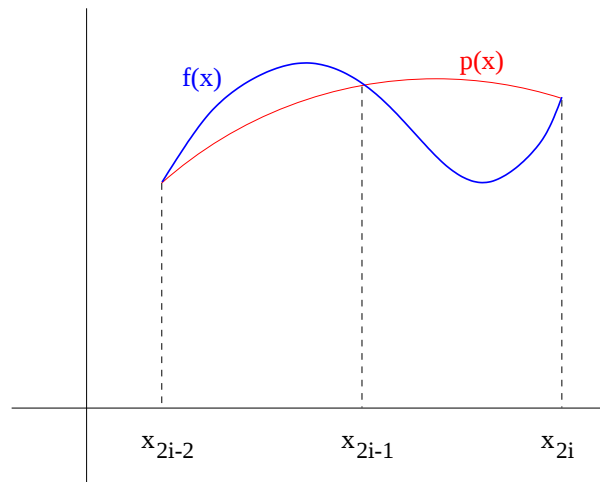
2.7.3 Simpsonova formula

Simpsonovu formulu dobijemo kada umjesto linearnih koristimo kvadratne aproksimacije zadane funkcije. Preciznije, zadani interval $[a, b]$ podijelimo na paran broj točaka $n = 2k$, uzmemo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n},$$

a zadanu funkciju $f(x)$ na intervalu $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, $i = 1, \dots, k$ aproksimiramo kvadratnom parabolom $p(x) = ax^2 + bx + c$ koja prolazi kroz tri susjedne točke (slika 2.33)

$$(x_{2i-2}, y_{2i-2}), \quad (x_{2i-1}, y_{2i-1}), \quad (x_{2i}, y_{2i}).$$



Slika 2.33: Simpsonova formula

Određeni integral parabole $p(x)$ na intervalu $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ jednak je

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (ax^2 + bx + c) dx = \frac{\Delta x}{3} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}). \quad (2.12)$$

Zaista, postavimo li pomoćni koordinatni sustav tako da mu je ishodište u točki x_{2i-1} , tada je

$$x_{2i-2} = -\Delta x, \quad x_{2i-1} = 0, \quad x_{2i} = \Delta x,$$

pa uvjeti da $p(x)$ prolazi zadanim točkama glase

$$\begin{aligned} y_{2i-2} &= a \Delta x^2 - b \Delta x + c, \\ y_{2i-1} &= c, \\ y_{2i} &= a \Delta x^2 + b \Delta x + c. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Integral (2.12) jednak je, dakle, integralu

$$\int_{-\Delta x}^{\Delta x} (ax^2 + bx + c) dx = a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \Big|_{-\Delta x}^{\Delta x} = \frac{\Delta x}{3} (2a \Delta x^2 + 6c).$$

No, formule (2.13) povlače

$$2a \Delta x^2 + 6c = y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}$$

pa je formula (2.12) dokazana.

Konačno, zbrajanjem integrala (2.12) za $i = 1, \dots, k$, nakon sređivanja dobijemo Simpsonovu formulu

$$J_n = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + y_n). \quad (2.14)$$

Pogrešku Simpsonove formule daje slijedeći teorem²: ako je četvrta derivacija $f^{IV}(x)$ neprekidna i omeđena na intervalu $[a, b]$, tada vrijedi

$$\int_a^b f(x) dx = J_n + R,$$

pri čemu za ostatak R vrijedi ocjena

$$|R| \leq M \frac{b-a}{180} \Delta x^4, \quad M = \max_{x \in [a, b]} |f^{IV}(x)|.$$

Primjer 2.24 Izračunajmo integral (2.10) Simpsonovom formulom za $n = 4$. Koristeći vrijednosti dane u tablici iz primjera 2.23 imamo

$$J_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{8} (y_0 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3) + y_4) \approx 1.211415.$$

Traženje broja M u gornjoj formuli za ocjenu pogreške je složeno, pa ćemo umjesto toga u slijedećem poglavlju pogrešku ocijeniti Richardsonovom ekstrapolacijom.

²Teorem navodimo bez dokaza. Dokaz je sličan dokazu teorema 2.6 s time što funkciju $R_i(h)$ treba derivirati tri puta nakon čega treba primijeniti teorem srednje vrijednosti i dva puta integrirati.

2.7.4 Richardsonova ekstrapolacija

Pojam *Richardsonova ekstrapolacija* označava klasu metoda kojima se pomoću približnog računa s manje koraka postiže veća točnost. Kod numeričkog računanja integrala, Richardsonova ekstrapolacija je izuzetno jednostavan način za ocjenu pogreške.

Najjednostavniji oblik metode se sastoji u slijedećem: ako smo numerički izračunali integral J_n i integral J_{2n} koristeći svostruko više točaka te ako se u pripadnoj ocjeni ostatka javlja član $(\Delta x)^m$, tada je pogreška kod računanja J_{2n} približno manja od broja

$$E = \frac{n^m}{(2n)^m - n^m} (J_{2n} - J_n).$$

Drugim riječima, ako je $E > 0$ tada je približno

$$\int_a^b f(x) dx \in [J_{2n}, J_{2n} + E],$$

a ako je $E \leq 0$, tada je približno

$$\int_a^b f(x) dx \in [J_{2n} + E, J_{2n}].$$

Kod dokazivanja ovih formula pretpostavljamo da postoji broj ω takav da je

$$I_n = I + R_n, \quad R_n = \omega(\Delta x)^m \quad (\text{R})$$

za svaki Δx . Ova pretpostavka nije uvijek točno ispunjena, no u velikom broju slučajeva možemo smatrati da ona vrijedi. Na primjer, kod trapezne formule je $M(b-a)/12$ (teorem 2.6) pa pretpostavka (R) znači da možemo uzeti (približno) isti ω za različite vrijednosti od Δx . Koristeći pretpostavku imamo

$$\begin{aligned} R_n &= I - I_n = \omega (\Delta x)^m = \omega \left(\frac{b-a}{n} \right)^m, \\ R_{2n} &= I - I_{2n} = \omega (\Delta x/2)^m = \omega \left(\frac{b-a}{2n} \right)^m. \end{aligned}$$

Dakle,

$$I_{2n} - I_n = \omega (b-a)^m \left(\frac{1}{n^m} - \frac{1}{(2n)^m} \right)$$

pa je

$$\omega = \frac{n^m(2n)^m}{(b-a)^m} \frac{I_{2n} - I_n}{(2n)^m - n^m},$$

što konačno daje

$$R_{2n} \approx E = \frac{n^m}{(2n)^m - n^m} (J_{2n} - J_n).$$

Primjer 2.25 a) Ocijenimo pogrešku u integralu J_4 iz primjera 2.23. Da bi primijenili Richardsonovu formulu, treba nam J_2 , pri čemu možemo koristiti istu tablicu. Trapezna formula (2.11) za $n = 2$ daje

$$J_2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{y_0}{2} + y_2 + \frac{y_4}{2} \right) \approx 1.209960,$$

pa je

$$E = \frac{2^2}{4^2 - 2^2} (J_4 - J_2) = \frac{1}{3} (1.211051 - 1.209960) \approx 0.000363666.$$

Dakle, za zadani integral (2.10) vrijedi

$$I \in [1.211051, 1.211051 + 0.000363666] = [1.211051, 1.211414].$$

b) Ocijenimo pogrešku u integralu J_4 iz primjera 2.24. Koristeći tablicu iz primjera 2.23, Simpsonova formula (2.14) za $n = 2$ daje

$$J_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} (y_0 + 4y_2 + y_4) \approx 1.220581,$$

pa je

$$E = \frac{2^4}{4^4 - 2^4} (J_4 - J_2) = \frac{1}{15} (1.211415 - 1.220581) = -0.000611066.$$

Dakle, za integral (2.10) vrijedi

$$I \in [1.211415 - 0.000611066, 1.211415] = [1.210803, 1.211415].$$

Zadatak 2.12 Izračunajte $\int_0^4 e^{-x^2} dx$ pomoću trapezne i Simpsonove formule za $n = 8$, a pogreške ocijenite Richardsonovom ekstrapolacijom.

2.7.5 Programi

Trapezna i Simpsonova formula, (2.11) i (2.14), mogu se vrlo jednostavno programirati u programskom jeziku Matlab.

Program za trapeznu formulu glasi

```
%%% TRAPEZNA FORMULA
format long e
%%% Interval [a,b] i broj točaka integracije n (paran)
a=0
b=pi/2
n=4
dX=(b-a)/n
%%% Vektor x
x=a:dX:b
%%% Podintegralna funkcija i vektor y
y=sqrt(1-0.75*cos(x).^2)
%%% Trapezna formula
J=dX*(y(1)/2+y(n+1)/2+sum(y(2:n)))
%%% Priprema za Richardsonovu ekstrapolaciju
n1=n/2
y1=y(1:2:n+1)
%%% Integral s n/2 tocaka integracije
J1=2*dX*(y1(1)/2+y1(n1+1)/2+sum(y1(2:n1)))
%%% Richardsonova ocjena
E=n1^2/(n^2-n1^2)*(J-J1)
%%% Graf podintegralne funkcije
plot(x,y)
```

Program za Simpsonovu formulu glasi

```
%%% SIMPSONOVA FORMULA
format long e
%%% Interval [a,b] i broj tocaka integracije k (djeljiv s 4)
a=0
b=pi/2
n=4
dX=(b-a)/n
%%% Vektor x
x=a:dX:b
%%% Podintegralna funkcija i vektor y
```

```

y=sqrt(1-0.75*cos(x).^2)
%%% Simpsonova formula
J=(dX/3)*(y(1)+y(n+1)+2*sum(y(3:2:n-1))+4*sum(y(2:2:n)))
%%% Priprema za Richardsonovu ekstrapolaciju
n1=n/2
y1=y(1:2:n+1)
%%% Integral s n/2 tocaka integracije
J1=(2*dX/3)*(y1(1)+y1(n1+1)+2*sum(y1(3:2:n1-1))+4*sum(y1(2:2:n1)))
%%% Richardsonova ocjena
E=n1^4/(n^4-n1^4)*(J-J1)
%%% Graf podintegralne funkcije
plot(x,y)

```

Zadatak 2.13 a) Izvedite ove programe pomoću programa *Octave On-line*³.
za razne vrijednosti od n . Za koje (najmanje) vrijednosti od n je pogreška E jednaka nuli?

b) Modificirajte programe tako da računaju $\int_0^{100} e^{-x^2} dx$. Izvedite programe za $n = 100, 200, 400, 800$. Koliko dobiveni rezultati odstupaju od $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$?

³<http://lavica.fesb.hr/octave/octave-on-line.php>.

3.

FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI

3.1	Definicija	99
3.2	Limes	106
3.3	Neprekidnost	109
3.4	Plohe drugog reda	111
3.4.1	Eliptički paraboloid	112
3.4.2	Hiperbolički paraboloid	114
3.4.3	Hiperboloid	116
3.4.4	Stožac	116
3.4.5	Cilindri	118
3.4.6	Neke zanimljive plohe	119
3.4.7	Presjek ploha	119
3.5	Parcijalne derivacije	122
3.6	Totalni diferencijal	126
3.7	Tangencijalna ravnina	129
3.8	Parcijalne derivacije kompozicije funkcija	134
3.9	Totalni diferencijal višeg reda	135
3.9.1	Taylorova formula	136
3.10	Ekstremi funkcija više varijabla	139
3.11	Implicitno zadane funkcije	148
3.12	Problem vezanog ekstrema	159

3.1 Definicija

Definicija 3.1 Skup $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n -terostruki Kartezijev produkt skupa realnih brojeva sa samim sobom), odnosno

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R} \ i = 1, \dots, n\}$$

zovemo n -dimenzionalni Euklidski prostor, a uređene n -torke $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ su točke tog prostora. Preslikavanje $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ koje svakoj točki iz područja definicije D pridružuje realan broj zovemo realna funkcija od n realnih varijabla. Koristimo oznaku $T \rightarrow f(T), T \in D$ ili

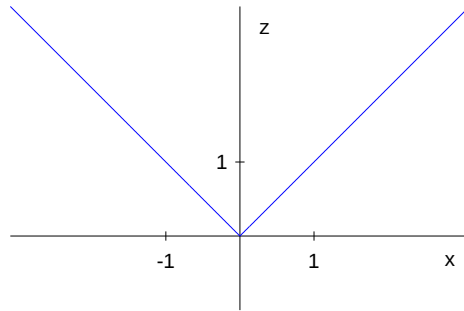
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$$

Za razliku od realne funkcije jedne realne varijable (slučaj $n = 1$) kad god imamo funkciju od n varijabla sa $n > 1$ govorimo o funkciji više varijabla. Takve funkcije možemo kao i u jednodimenzionalnom slučaju zadavati eksplicitnim analitičkim izrazom, tablicom (u slučaju diskretnog područja definicije), grafički (u slučaju $n = 2$), parametarskim jednadžbama i implicitnim analitičkim izrazom.

Primjer 3.1 Na primjer, eksplicitnom formulom $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ definirana je jedna realna funkcija dviju varijabla čije prirodno područje definicije je

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 0\} \equiv \mathbb{R}^2.$$

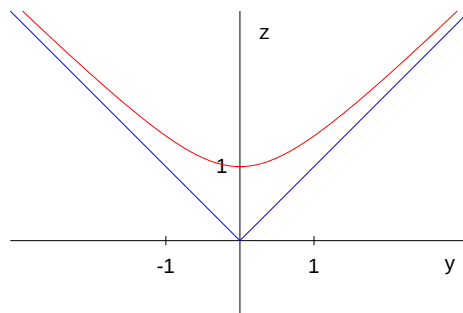
Da bi 'vidjeli' grafički tu funkciju koristimo projekcije na koordinatne ravnine. Sustavom $y = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ određena je jednadžba $z = \sqrt{x^2} = |x|$ projekcije na xz -ravninu (vidi sliku 3.1).



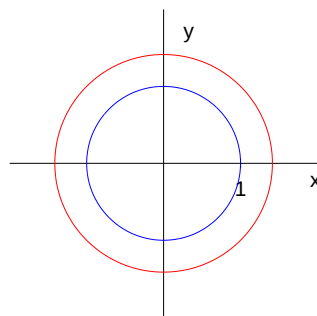
Slika 3.1: Projekcija funkcije $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ na xz -ravninu uz $y = 0$

Slično, sustavom $x = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ određena je jednadžba $z = \sqrt{y^2} = |y|$ projekcije na yz -ravninu, a dok za $x = 1$ jednadžba projekcije glasi $z = \sqrt{1 + y^2}$ (vidi sliku 3.2).

Napokon, za zadani $z_0 > 0$ sustavom $z = z_0, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ određena je jednadžba $x^2 + y^2 = z_0^2$ što pokazuje da je presjek grafa zadane funkcije sa ravninom $z = z_0$ jedna kružnica polumjera z_0 (vidi sliku 3.3)

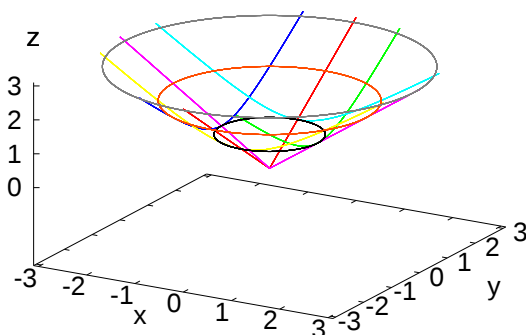


Slika 3.2: Projekcije funkcije $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ na yz -ravninu za $x = 0$ i $x = 1$



Slika 3.3: Projekcije funkcije $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ na xy -ravninu za $z = 1$ i $z = 2$

Nacrtamo li sustavno prethodne projekcije, dobit ćemo sliku 3.4¹. Zaključujemo da je graf funkcije kružni stožac kojemu je ishodište $(0, 0, 0)$ vrh, a Oz -os os simetrije.



Slika 3.4: Kružni stožac $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Općenito

$$z - z_0 = \sqrt{a^2(x - x_0)^2 + b^2(y - y_0)^2}$$

je *eliptički stožac* s vrhom u točki (x_0, y_0, z_0) , a presjek tog stošca s ravninom $z = c$ ($c > z_0$) je elipsa

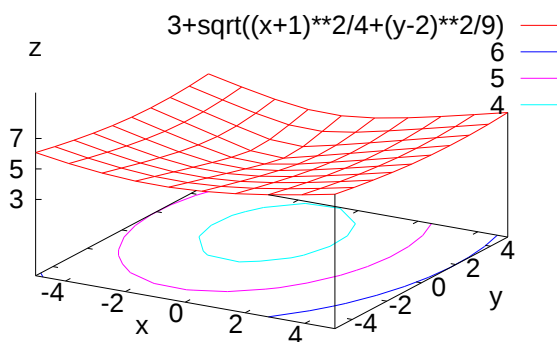
$$\frac{(x - x_0)^2}{\left(\frac{c - z_0}{a}\right)^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\left(\frac{c - z_0}{b}\right)^2} = 1$$

Na primjer, na slici 3.5 prikazan je eliptički stožac

$$z - 3 = \sqrt{\frac{1}{4}(x + 1)^2 + \frac{1}{9}(y - 2)^2}.$$

Napomena 3.1 Jednadžbama $f(x_1, \dots, x_n) = c$, gdje je c konstanta, određene su takozvane *nivo plohe* koje služe za lakše predočavanje grafa funkcije. U slučaju $n = 2$ nivo plohe još zovemo *nivo krivulje* i crtamo ih u istoj ravnini.

¹Projekcije crtamo kao parametarski zadane krivulje u prostoru, odnosno crtamo krivulje $(x, y, z) = (0, u, |u|)$, $(x, y, z) = (1, u, \sqrt{1 + u^2})$, $(x, y, z) = (-1, u, \sqrt{1 + u^2})$, $(x, y, z) = (u, 0, |u|)$, $(x, y, z) = (u, 1, \sqrt{1 + u^2})$, $(x, y, z) = (u, -1, \sqrt{1 + u^2})$, $(x, y, z) = (\cos u, \sin u, 1)$, $(x, y, z) = (2 \cos u, 2 \sin u, 2)$ i $(x, y, z) = (3 \cos u, 3 \sin u, 3)$.



Slika 3.5: Eliptički stožac

Na slici 3.3 vidimo nekoliko nivo krivulja funkcije $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Na slici 3.5 nacrtane su nivo krivulje u xy -ravnini. Još su zanimljivije, na primjer, *izohipse* (krivulje na zemljopisnim kartama koje povezuju točke iste nadmorske visine ili morske dubine) ili *izobare* (krivulje na meteorološkim kartama koje povezuju točke jednakog atmosferskog pritiska). Primjer izobara na slici 3.6 preuzet je sa web stranica Državnog hidrometeorološkog zavoda.

Primjer 3.2 a) Funkcija $z = \ln(x + y - 2)$ definirana je na području $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ određenom nejednakošću $x + y - 2 > 0$ (vidi sliku 3.7).

b) Formulom $u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$ zadana je jedna funkcija triju varijabla definirana na području $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ koje je određeno nejednakostima $-1 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 2 \leq 1$ odnosno

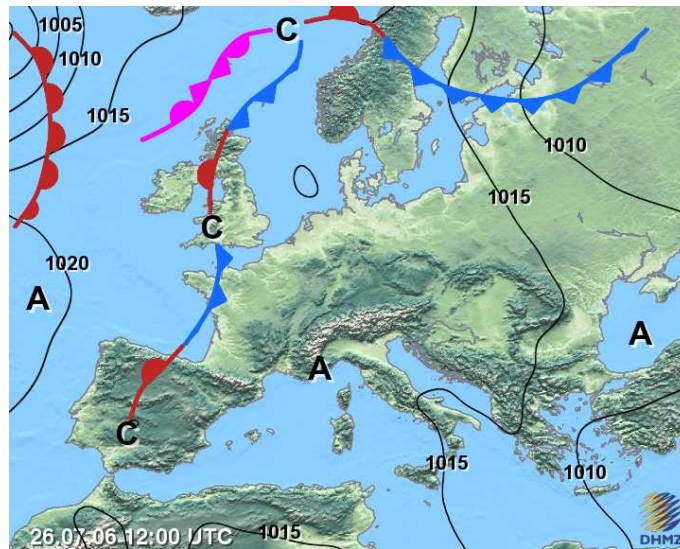
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$$

Nivo plohe su plaševi kugli (vidi sliku 3.8). Nivo plohe su nacrtane koristeći parametarski prikaz funkcije tri varijable.

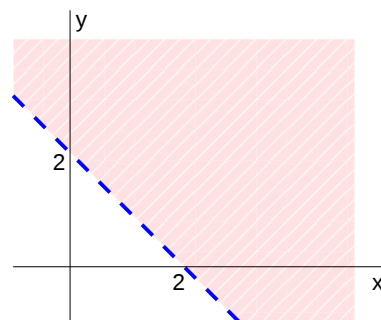
c) Funkcija triju varijabla $u = -\frac{x^2 + y^2}{z}$ definirana je za

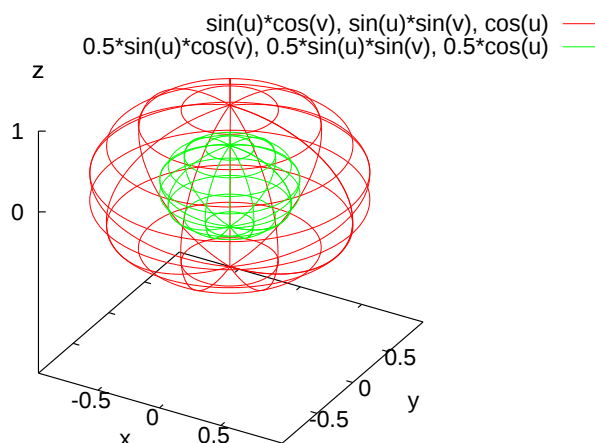
$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Nivo plohe su kružni paraboloidi (bez tjemeni). Na primjer za $u = 1$ dobijamo $z = -(x^2 + y^2)$. Presjek sa ravninom $x = 0$ je parabola $z = -y^2$,



Slika 3.6: Izobare vremenske prognoze

Slika 3.7: Područje definicije funkcije $z = \ln(x + y - 2)$



Slika 3.8: Nivo-plohe funkcije $u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$ za $u = 0.5$ i $u = 1$

presjek sa ravninom $y = 0$ je parabola $z = -x^2$, a presjek sa ravninom $z = -1$ je kružnica $x^2 + y^2 = 1$. Nivo ploha $u = 1$ prikazana je na slici 3.9. Općenito, $z - z_0 = a^2(x - x_0)^2 + b^2(y - y_0)^2$ je prema gore okrenut eliptički paraboloid s vrhom u točki (x_0, y_0, z_0) , a $z - z_0 = -a^2(x - x_0)^2 - b^2(y - y_0)^2$ je prema dolje okrenut eliptički paraboloid s vrhom u točki (x_0, y_0, z_0) .

Zadatak 3.1 Nacrtajte slike 3.4, 3.8 i 3.9 pomoću programa NetPlot².

Definicija 3.2 Funkcija f je *omeđena* ako postoji $M > 0$ takav da je

$$|f(T)| \leq M, \quad \forall T \in \mathcal{D}.$$

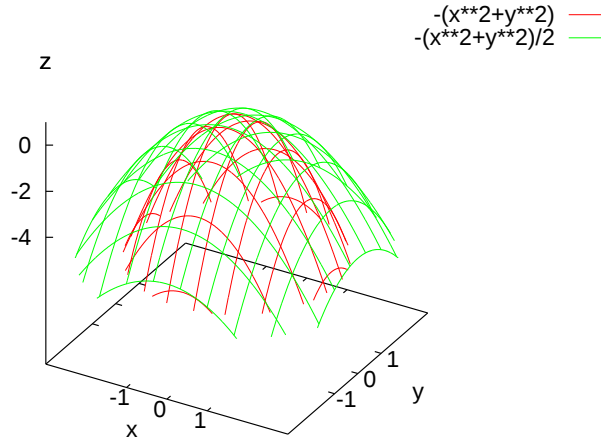
Definicija 3.3 Neka je zadana funkcija $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Ako svim varijablama osim jedne, recimo x_i , pridružimo konkretne vrijednosti

$$x_1 = x_1^0, \dots, x_{i-1} = x_{i-1}^0, x_{i+1} = x_{i+1}^0, \dots, x_n = x_n^0,$$

onda možemo definirati funkciju jedne varijable $f_i : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_i \subseteq \mathbb{R}$ formulom

$$f_i(x) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0).$$

²<http://lavica.fesb.hr/netplot>



Slika 3.9: Nivo plohe funkcije $u = -\frac{x^2+y^2}{z}$ za $u = 1$ i $u = 2$

Kažemo da je funkcija f *rastuća* (*strogo rastuća*, *padajuća*, *strogo padajuća*) s obzirom na varijablu x_i za $x_1 = x_1^0, \dots, x_{i-1} = x_{i-1}^0, x_{i+1} = x_{i+1}^0, \dots, x_n = x_n^0$ ako je funkcija f_i takva.

Primjer 3.3 Neka je $z = f(x, y) = 2x^3 - y^2$ i neka je zadana točka $T = (1, 2)$. Tada je funkcija $f_1(x) = f(x, 2) = 2x^3 - 4$ strogo rastuća, dok je funkcija $f_2(y) = f(1, y) = 2 - y^2$ strogo rastuća za $y \leq 0$ i strogo padajuća za $y > 0$.

3.2 Limes

U ovom poglavlju definirat ćemo limes funkcije više varijabli i dati osnovna svojstva limesa.

Definicija 3.4 Neka su $T_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $T_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dvije točke iz $\mathbb{R}^n$. Njihovu *udaljenost* definiramo kao

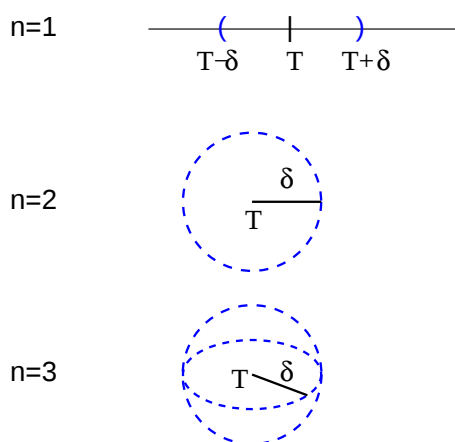
$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Skup

$$K(T, \delta) = \{S \in \mathbb{R}^n \mid d(T, S) < \delta\}$$

nazivamo *otvorena kugla* radijusa δ oko točke T ili δ -okolina točke T .

Napomena 3.2 Gornja formula za udaljenost je direktno poopćenje formula za udaljenost u $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$). Za $n = 1$ $K(T, \delta)$ je otvoreni interval oko točke T , za $n = 2$ to je krug oko točke T (bez oboda) radijusa δ , a za $n = 3$ to je kugla oko točke T (bez plašta) radijusa δ (vidi sliku 3.10)



Slika 3.10: Otvorene kugle za $n = 1, 2, 3$

Definicija 3.5 Neka su zadane funkcija $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ i točka $T_0 \in \mathcal{D}$ takva da svaku δ -okolinu od T_0 vrijedi

$$K(T_0, \delta) \cap \mathcal{D} \setminus \{T_0\} \neq \emptyset.$$

Kažemo da je $a \in \mathbb{R}$ *granična vrijednost* ili *limes* funkcije f u točki T_0 ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\} \Rightarrow |f(T) - a| < \varepsilon.$$

Pišemo

$$\lim_{T \rightarrow T_0} f(T) = a.$$

Primjer 3.4 Pokažimo da je

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Zbog $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$ imamo (vidi sliku 3.23)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^2 y}{2xy} \right| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x}{2} \right| = 0.$$

Određivanje limesa funkcije više varijabla teže je nego određivanje limesa funkcije jedne varijable jer se točka T može približavati točki T_0 po neprebrojivo mnogo različitih putova a limes po svim tim putovima mora biti isti.

Teorem 3.1 *Slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

$$(i) \quad \lim_{T \rightarrow T_0} f(T) = a,$$

(ii) *za svaki niz točaka $(T_k \in \mathcal{D} \setminus \{T_0\}, k \in \mathbb{N})$, koji konvergira prema točki T_0 , pripadajući niz funkcijskih vrijednosti $(f(T_k), k \in \mathbb{N})$ konvergira prema broju a .*

Gornji teorem nepogodan je za primjenu u slučaju kada moramo pokazati da neki limes postoji (potrebno je provjeriti beskonačno mnogo različitih nizova). Češće ga koristimo u slučaju kad želimo pokazati da neki limes ne postoji (dovoljno je pronaći jedan ili dva niza koji upućuju na nepostojanje limesa).

Primjer 3.5 Pokažimo da funkcija

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

nema limes u točki $(0, 0)$. Uzmemo li nizove točaka $((1/n, 1/n), n \in \mathbb{N})$ i $((1/n, 0), n \in \mathbb{N})$ vidimo da oba konvergiraju k $(0, 0)$, ali za pripadajuće nizove funkcijskih vrijednosti imamo

$$f(1/n, 1/n) = \frac{(1/n)^2 - (1/n)^2}{(1/n)^2 + (1/n)^2} \rightarrow 0,$$

$$f(1/n, 0) = \frac{(1/n)^2 - 0}{(1/n)^2 + 0} \rightarrow 1.$$

Koristeći teorem 3.1 zaključujemo da $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ne postoji (vidi sliku 3.24).

Citirajmo ovdje i teorem o uzastopnim limesima za funkciju dviju varijabla:

Teorem 3.2 *Neka je*

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y).$$

Ako postoje uzastopni limesi

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) \quad i \quad L_2 = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right)$$

onda je $L_1 = L = L_2$.

Jasno je da obratna tvrdnja od ove u gornjem teoremu ne vrijedi tj. postojanje i jednakost uzastopnih limesa L_1 i L_2 u točki (x_0, y_0) znači samo postojanje granične vrijednosti za dva od beskonačno mnogo putova približavanja točki (x_0, y_0) , što ne osigurava postojanje limesa L . Međutim, postojanje uzastopnih limesa L_1 i L_2 koji su različiti tj. $L_1 \neq L_2$ sigurno povlači nepostojanje limesa L .

Primjer 3.6 a) Za funkciju iz primjera 3.4 vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

b) Za funkciju iz primjera 3.5 vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1, \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1. \end{aligned}$$

3.3 Neprekidnost

Definicija neprekidnost funkcije više varijabli jednaka je definiciji neprekidnosti funkcije jedne varijable (M1, ...)

Definicija 3.6 Funkcija f je *neprekidna* u točki $T_0 \in \mathcal{D}$ ako je

$$\lim_{T \rightarrow T_0} f(T) = f(T_0).$$

Ako je f neprekidna u svakoj točki $T \in A \subseteq \mathcal{D}$ kažemo da je f *neprekidna na skupu* A , a ako je $A = \mathcal{D}$ kažemo da je f *neprekidna funkcija*.

Neka je

$$T = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad T_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Veličina

$$\Delta x_i = x_i - x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

je *prirast varijable* x_i u točki T_0 . Veličina

$$\Delta u = u - u_0, \quad u = f(T), \quad u_0 = f(T_0),$$

je *prirast funkcije* f u točki T_0 . Iz definicije 3.6 slijedi da je f neprekidna u točki T_0 ako i samo ako je $\lim_{T \rightarrow T_0} [f(T) - f(T_0)] = 0$ ili ekvivalentno

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_n \rightarrow 0} \Delta u = 0,$$

odnosno, ako i samo ako prirast funkcije f u točki T_0 teži k nuli čim prirasti svih varijabli x_i istovremeno teže k nuli.

Svojstva neprekidnih funkcija više varijabli su slična svojstvima neprekidnih funkcija jedne varijable. Navedimo neka od tih svojstava:

- (i) Neka je funkcija f neprekidna i neka je $f(T_0) > 0$ (< 0) u nekoj točki $T_0 \in \mathcal{D}$. Tada postoji okolina točke T_0 za koju vrijedi

$$T \in K(T_0, \delta) \Rightarrow f(T) > 0 \text{ } (< 0).$$

- (ii) Neka je funkcija f neprekidna i neka je $A \subseteq \mathcal{D}$ zatvoren i omeđen podskup domene $\mathcal{D}$. Tada funkcija f na skupu A dostiže svoju najmanju i svoju najveću vrijednost u nekim točkama. Drugim riječima, postoje točke $T_1, T_2 \in A$ takve da je

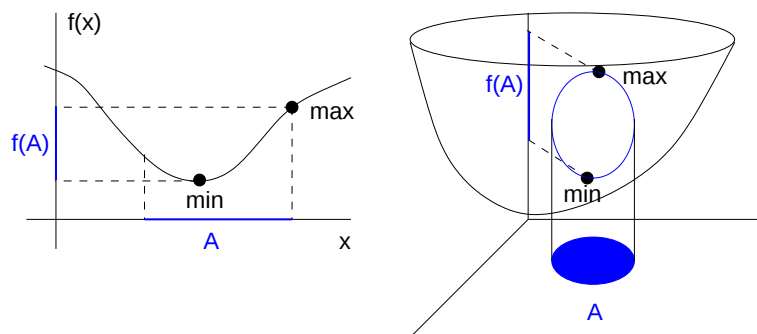
$$T \in A \Rightarrow f(T_1) \leq f(T) \leq f(T_2),$$

odnosno

$$f(T_1) = \min_{T \in A} f(T), \quad f(T_2) = \max_{T \in A} f(T)$$

(vidi sliku 3.11).

- (iii) Ako su funkcije $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, neprekidne, tada su zbroj $f + g$, razlika $f - g$, produkt fg i kvocijent f/g (uz uvjet $g \neq 0$) također neprekidne funkcije.



Slika 3.11: Neprekidna funkcija na zatvorenom skupu

3.4 Plohe drugog reda

Ploha drugog reda je skup svih točaka trodimenzionalnog prostora koje zadovoljavaju jednadžbu drugog stupnja (ili reda):

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0,$$

pri čemu je barem jedan od koeficijenata³ A, B, C, D, E i F različit od nule, odnosno, u formuli postoji barem jedan netrivialni nelinearni član. Na primjer, jednadžba *sfere* (*kugline plohe*) radijusa r s centrom u točki (x_0, y_0, z_0) dana je s:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

S ovom formulom su zapravo zadane dvije funkcije dvije varijable:

$$\begin{aligned} z &= f_1(x, y) = z_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} \quad \text{i} \\ z &= f_2(x, y) = z_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

Nivo-plohe sfere (presjeci s ravninama paralelnim s xy -ravninom) i presjeci s ravninama paralelnim s xz - i yz -ravninama su kružnice.⁴

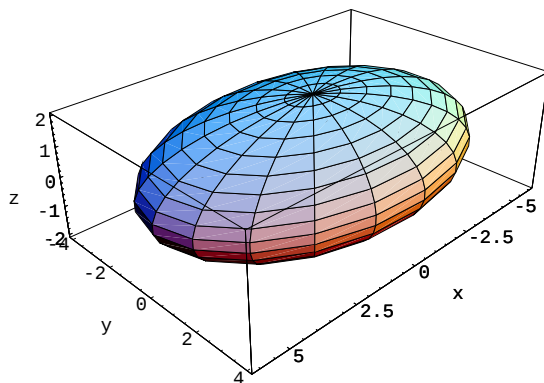
Nadalje,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

je jednadžba *elipsoida* čije su glavne osi paralne s koordinatnim osima x, y i z , a duljine poluosi su a, b i c redom (slika 3.12).

³Svi koeficijenti su realni brojevi.

⁴U rubovima je nivo-ploha ili pak presjek s ravninom koja je paralelna s xz - ili yz -ravninom jednaka točki koju možemo interpretirati kao degeneriranu kružnicu s radijusom 0.

Slika 3.12: Elipsoid $x^2/36 + y^2/16 + z^2/4 = 1$

Nivo-plohe elipsoida kao i presjeci s ravninama paralelnim s xz - i yz -ravninama su elipse.

Zadatak 3.2 Za elipsoid iz slike 3.12 nacrtajte nivo-plohu za $z = -1$ i presjek s ravninama $x = 4$ i $x = 7$.

Elipsoid na slici možemo definirati i parametarski kao skup točaka:

$$E = \{(x, y, z) : x = 6 \cos t \cos u, y = 4 \sin t \cos u, z = 2 \sin u, \\ t \in \{0, 2\pi\}, u \in \{-\pi/2, \pi/2\}\}.$$

Elipsoid na slici 3.12 nacrtan je upravo koristeći parametarski prikaz.

3.4.1 Eliptički paraboloid

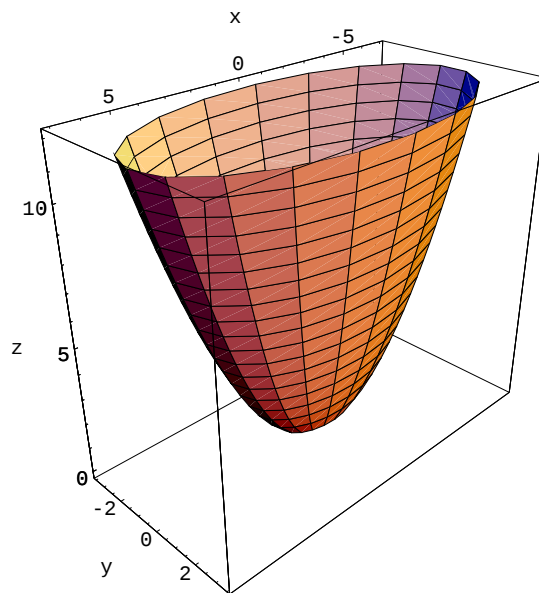
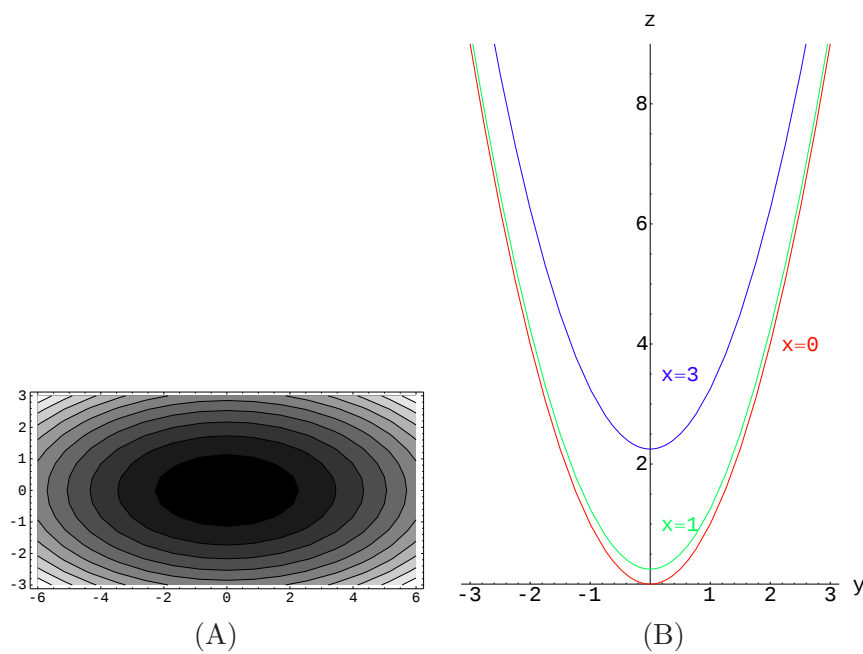
Opća formula *eliptičkog paraboloida* je (vidi sliku 3.13):

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Nivo plohe eliptičkog paraboloida su elipse, a presjeci s ravninama koje su paralelne s xz -ravninom i yz ravninom su parabole (vidi sliku 3.14).

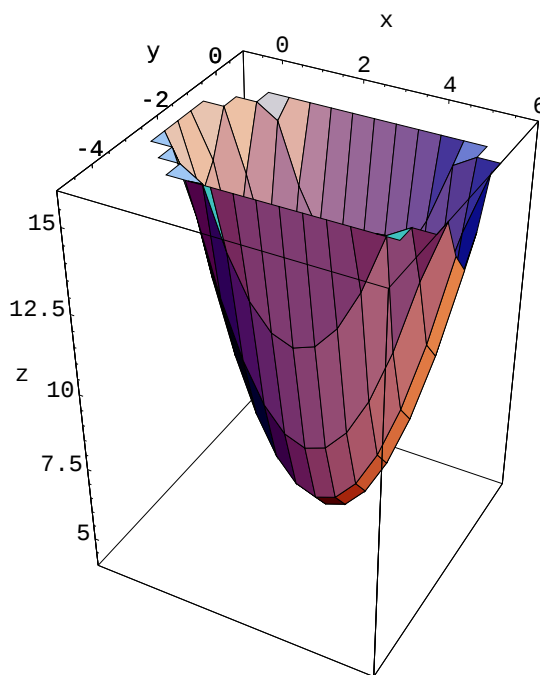
Paraboloid na slici možemo prikazati i parametarski kao skup

$$P = \{(x, y, z) : x = 2\sqrt{u} \cos t, y = \sqrt{u} \sin t, z = u, t \in \{0, 2\pi\}, u \geq 0\}.$$

Slika 3.13: Paraboloid $z = x^2/4 + y^2$ Slika 3.14: (A) Nivo plohe i (B) presjeci paralelni s yz -ravninom za paraboloid $z = x^2/4 + y^2$.

Eliptički paraboloid s vrhom u točki (x_0, y_0, z_0) zadan je s formulom (slika 3.15):

$$z - z_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}.$$



Slika 3.15: Pomaknuti paraboloid $z - 5 = (x - 3)^2 + 4(y + 2)^2$

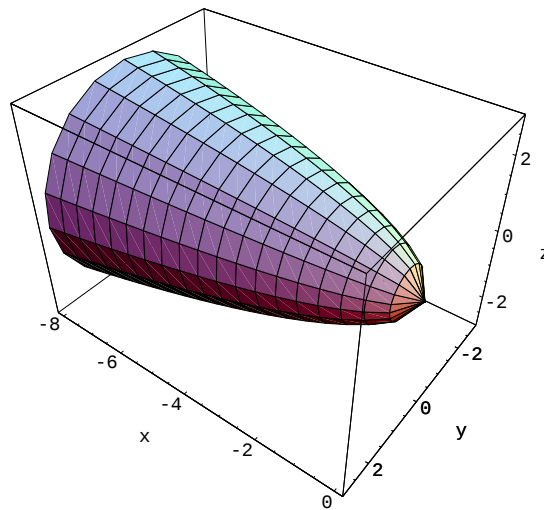
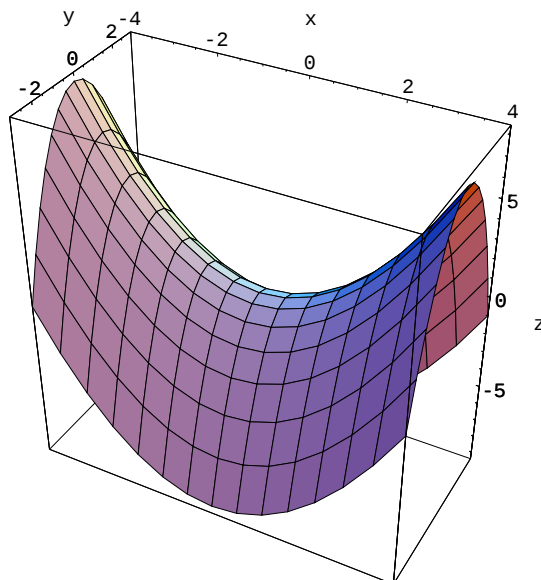
Zamjenom varijabli dobijemo eliptički paraboloid uzduž neke druge osi, a pomoću predznaka nezavisne varijable određujemo na koju stranu je paraboloid otvoren (slika 3.16).

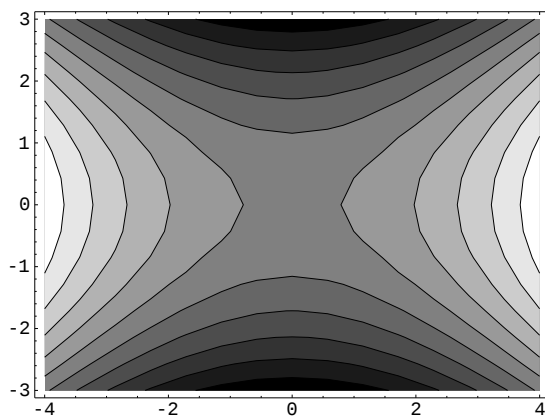
3.4.2 Hiperbolički paraboloid

Opća formula *hiperboličkog paraboloida* je (vidi sliku 3.17):

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Hiperbolički paraboloid ima oblik sedla. Nivo plohe su hiperbole (slika 3.18), a presjeci s ravninama koje su paralelne s xz -ravninom i yz ravninom su parabole.

Slika 3.16: Polegnuti paraboloid $-x = y^2 + z^2$ Slika 3.17: Hiperbolički paraboloid $z = x^2 - y^2$

Slika 3.18: Nivo plohe za $z = x^2 - y^2$.

Zadatak 3.3 Nacrtajte nivo-plohe za $z = 0, 2, 3$ i presjeke s yz -ravninom za $x = 4$ za $z - 2 = x^2 - (y - 2)^2/4$.

3.4.3 Hiperboloid

Jednokrilni hiperboloid zadan je s formulom (slika 3.19):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dvokrilni hiperboloid zadan je s formulom (slika 3.19):

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

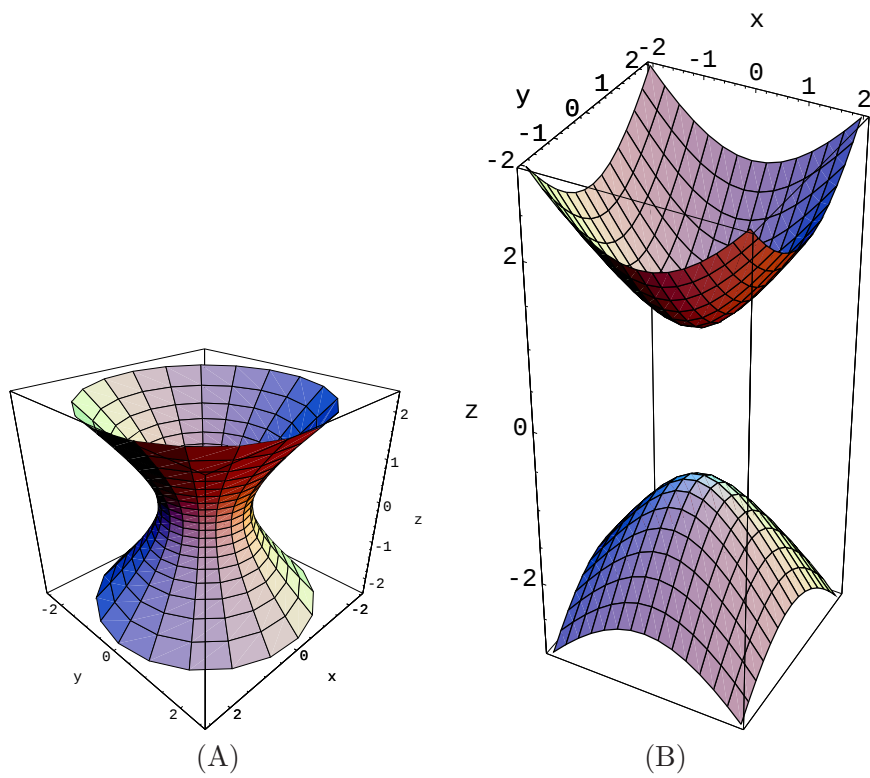
Nivo-plohe hiperboloida su elipse, a presjeci s ravninama koje su paralelne s z -osi su hiperbole. Kao i kod ostalih ploha, pomoću transformacije $x \rightarrow x - x_0$ pomičemo središte hiperboloida, a cikličkom zamjenom varijabli nastaju hiperboloidi koji se protežu u smjeru ostalih koordinatnih osi.

Zadatak 3.4 Prikažite hiperboloide sa slike 3.19 u parametarskom obliku. Uputa: treba koristiti hiperbolne funkcije $\sinh$ i $\cosh$.

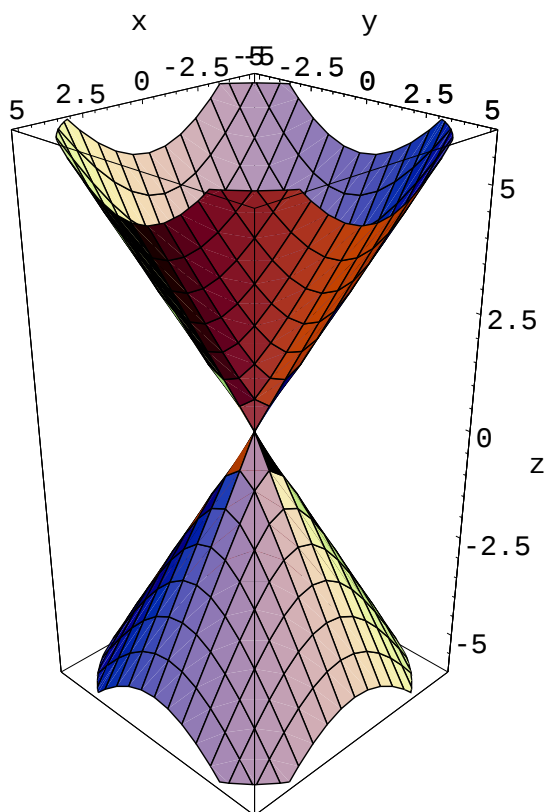
3.4.4 Stožac

Stožac ili *konus* je zadan s formulom (vidi sliku 3.20):

$$(z - z_0)^2 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}.$$



Slika 3.19: (A) Jednokrilni i (B) dvokrilni hiperboloid za $a = b = c = 1$.

Slika 3.20: Stožac $z^2 = x^2 + y^2$

S ovim izrazom su zapravo zadane dvije funkcije od dvije varijable:

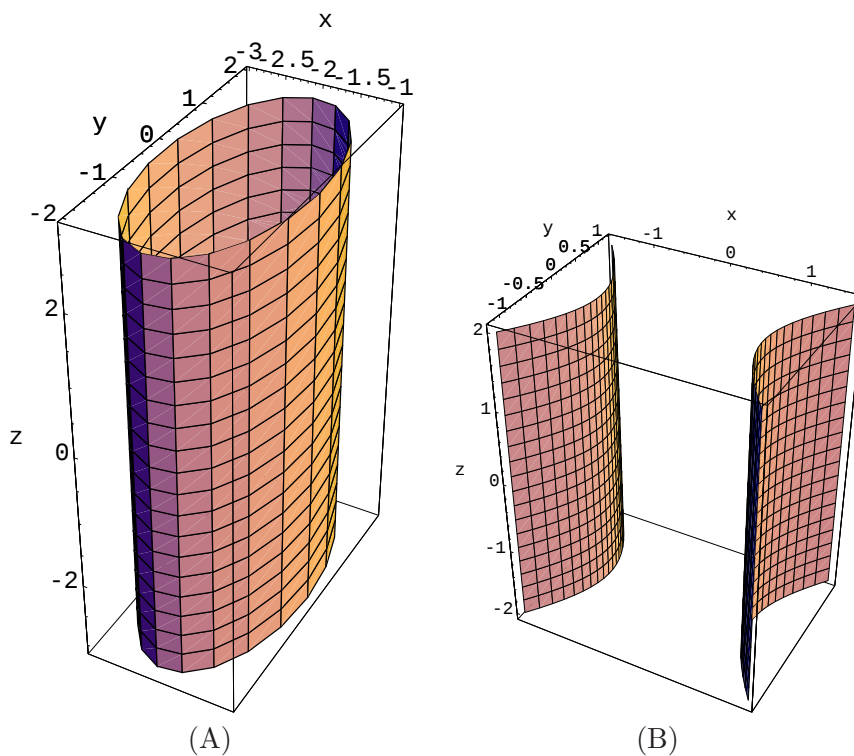
$$z = z_0 + \sqrt{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}} \quad \text{i} \quad z = z_0 - \sqrt{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}}.$$

3.4.5 Cilindri

Cilindrična ploha ili *cilindar* nastaje kada jednadžbu krivulje u ravnini interpretiramo u trodimenzionalnom prostoru. Tako su, na primjer,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ z &= y^2, \end{aligned}$$

jednadžbe *eliptičkog*, *hiperboličkog* i *paraboličkog* cilindra redom (vidi slike 3.21 i 3.22).



Slika 3.21: (A) $(x + 2)^2 + y^2/4 = 1$ i (B) $x^2 - y^2 = 1$.

3.4.6 Neke zanimljive plohe

Slijede grafovi i nivo-plohe nekih zanimljivih funkcija dvije varijable:

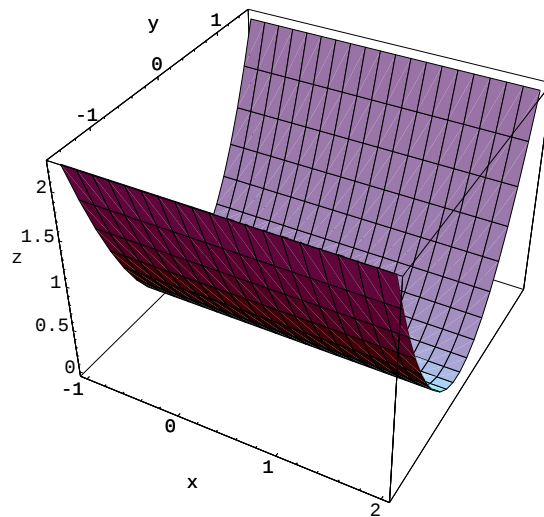
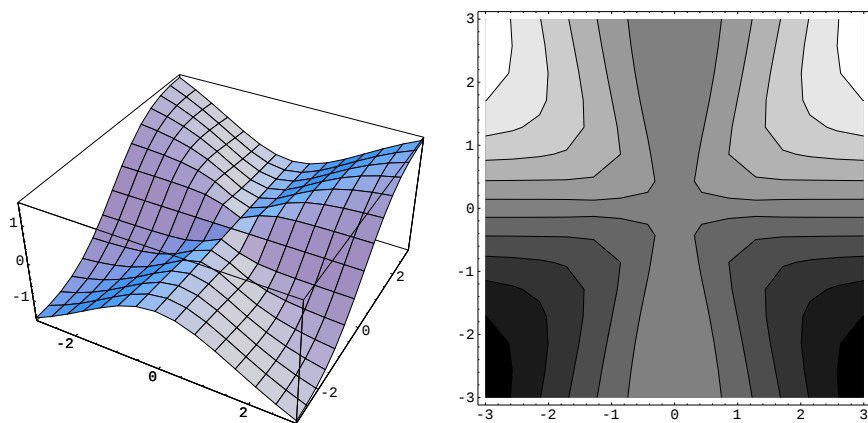
3.4.7 Presjek ploha

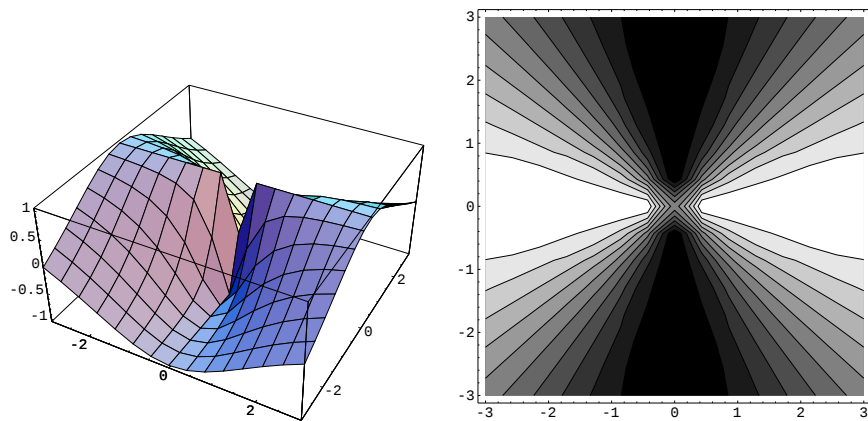
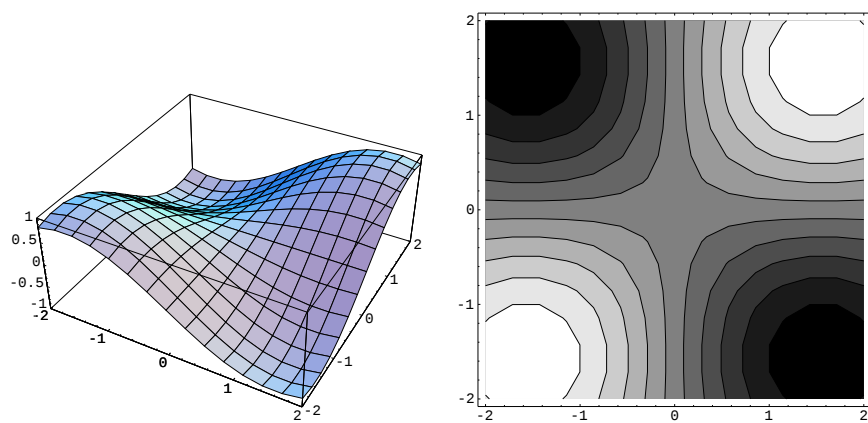
Kod rješavanja dvostrukih integrala važno je znati predočiti presjek raznih ploha. Neka je skup D zadan s

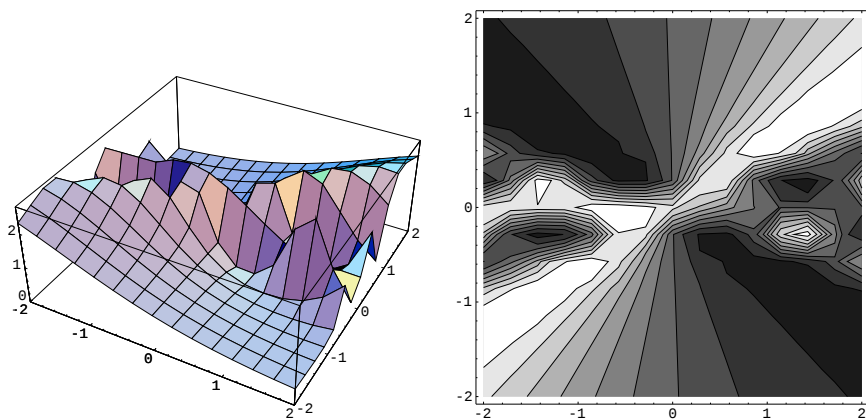
$$D = \{(x, y) : (x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/4, y \leq 0\},$$

a ploha K sa (gornja polukugla) s

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

Slika 3.22: Parabolički cilindar $z = y^2$ Slika 3.23: $(x^2 y) / (x^2 + y^2)$

Slika 3.24: $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ Slika 3.25: $\sin x \sin y$

Slika 3.26: $\exp(\sin(x/y))$

Tada dvostruki integral

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1/4-(x-1/2)^2}}^0 \sqrt{1-x^2-y^2} dx$$

daje volumen tijela s bazom D od xy ravnine do plašta kugle, odnosno tijela koje je odozdo omeđeno xy -ravinom, sa strane s plaštom stošca čije su stranice x -os i polukružnica $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1$ za $y \leq 0$, i odozgo s plaštom kugle (vidi sliku 3.27). Ovaj integral se rješava prelaskom na polarne koordinate:

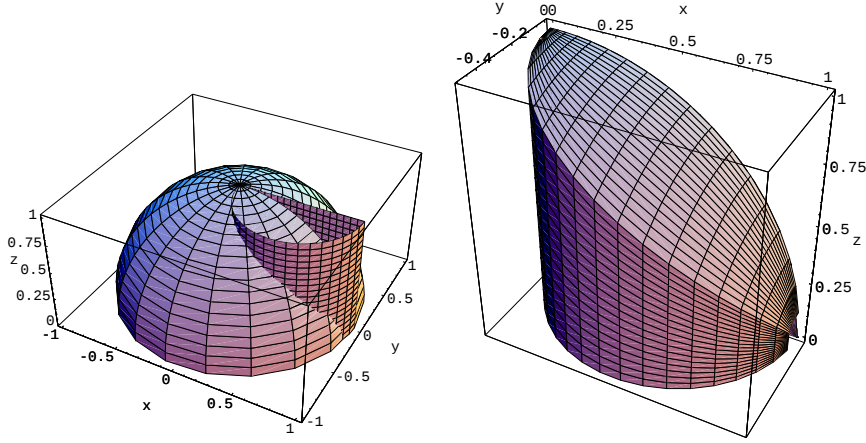
$$D = \left\{ (r, \varphi) : \varphi \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi \right], r \in [0, \cos \varphi] \right\},$$

$$I = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \int_0^{\cos \varphi} \sqrt{1-r^2} r dr d\varphi.$$

Zadatak 3.5 Nacrtajte sve slike iz poglavlja 3.4 pomoću programa NetPlot.

3.5 Parcijalne derivacije

Definicija 3.7 *Parcijalna derivacija* funkcije $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, po varijabli x_i u točki $T_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ je derivacija funkcije jedne varijable



Slika 3.27: Presjek ploha.

$f_i : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_i \subseteq \mathbb{R}$ definirane sa

$$f_i(x) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0), \quad x \in \mathcal{D}_i, \quad (3.1)$$

u točki x_i^0 . Dakle,

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial x_i} = f'_i(x_i^0) = \lim_{x \rightarrow x_i^0} \frac{f_i(x) - f_i(x_i^0)}{x - x_i^0}.$$

Za parcijalne derivacije još koristimo i sljedeće oznake:

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial x_i} \equiv f'_{x_i}(T_0) \equiv f_{x_i}(T_0).$$

Ako za funkciju f u točki T_0 postoje parcijalne derivacije $f'_{x_i}(T_0)$ po svim varijablama x_i onda kažemo da je funkcija f *derivabilna* u točki T_0 . Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki $T \in \mathcal{D}$ onda kažemo da je f *derivabilna funkcija*.

Definicija 3.8 Neka je $A \subseteq \mathcal{D}$ skup svih točaka $T \in \mathcal{D}$ u kojima postoji parcijalna derivacija $f'_{x_i}(T)$ po varijabli x_i . Funkciju $f'_{x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}$ zovemo parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x_i . To je opet jedna funkcija od n varijabli koja može imati svoje parcijalne derivacije. Parcijalnu derivaciju po varijabli x_j funkcije f'_{x_i} zovemo parcijalna derivacija drugog reda funkcije f po varijablama x_i, x_j i označavamo sa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \equiv f''_{x_i x_j} \equiv f_{x_i x_j}.$$

Analogno definiramo parcijalnu derivaciju trećeg reda funkcije f po varijablama x_i, x_j, x_k ,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \equiv f'''_{x_i x_j x_k} \equiv f_{x_i x_j x_k}.$$

Indukcijom definiramo parcijalnu derivaciju m -tog reda funkcije f po varijablama $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$,

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}} \equiv f^{(m)}_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}} \equiv f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}},$$

gdje je $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ i $m \in \mathbb{N}$.

Primjer 3.7 Funkcija $f(x, y) = \sin(x + y^2)$ dobro je definirana na $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ te ima parcijalne derivacije svakog reda. Postupak deriviranja je jednostavan: kad računamo $f'_x(x, y)$ varijablu y u izrazu za $f(x, y)$ tretiramo kao konstantu, a kad računamo $f'_y(x, y)$ onda varijablu x u izrazu za $f(x, y)$ tretiramo kao konstantu. Dakle

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{\partial [\sin(x + y^2)]}{\partial x} = \cos(x + y^2), \\ f'_y(x, y) &= \frac{\partial [\sin(x + y^2)]}{\partial y} = 2y \cos(x + y^2). \end{aligned}$$

Slično postupamo kod računanja parcijalnih derivacija višeg reda. Na primjer, parcijalne derivacije drugog reda su

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= \frac{\partial [f'_x(x, y)]}{\partial x} = \frac{\partial [\cos(x + y^2)]}{\partial x} = -\sin(x + y^2), \\ f''_{xy}(x, y) &= \frac{\partial [f'_x(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial [\cos(x + y^2)]}{\partial y} = -2y \sin(x + y^2), \\ f''_{yx}(x, y) &= \frac{\partial [f'_y(x, y)]}{\partial x} = \frac{\partial [2y \cos(x + y^2)]}{\partial x} = -2y \sin(x + y^2), \\ f''_{yy}(x, y) &= \frac{\partial [f'_y(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial [2y \cos(x + y^2)]}{\partial y} = 2 \cos(x + y^2) - 4y^2 \sin(x + y^2). \end{aligned}$$

U gornjem primjeru vidimo da su funkcije f''_{xy} i f''_{yx} jednake. To nije slučajnost već pravilo. Naime vrijedi slijedeći važan teorem kojega navodimo bez dokaza:

Teorem 3.3 (Schwartz) *Pretpostavimo da funkcija $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, u nekoj okolini $K(T_0, \delta)$ točke $T_0 \in \mathcal{D}$ ima neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo $(r - 1)$ -vog reda i da u toj okolini od T_0 postoje sve parcijalne*

derivacije r -tog reda. Ako su parcijalne derivacije r -tog reda od f neprekidne u točki T_0 onda njihove vrijednosti u toj točki ne zavise od redoslijeda deriviranja po pojedinim varijablama.

Primjer 3.8 Za funkciju dviju varijabla formalno možemo promatrati ukupno $2^3 = 8$ parcijalnih derivacija trećeg reda. To su redom

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x}, & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}, & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}, & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}, & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}, & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y}. \end{array}$$

Međutim, koristeći teorem 3.3 stvarno promatramo samo 4 parcijalne derivacije trećeg reda (uz razumljivu pretpostavku o njihovoj neprekidnosti). Prvu od funkcija u gornjem nizu označavamo kraće s

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},$$

druga, treća i četvrta su jednake i označavamo ih kraće sa

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y},$$

peta, šesta i sedma u nizu su jednake i označavamo ih s

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2},$$

a osmu označavamo kraće sa

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Općenitije, za bilo koji $r \in \mathbb{N}$ formalno postoji 2^r parcijalnih derivacija r -tog reda, ali ih različitih ima stvarno samo $(r + 1)$ i označavamo ih s

$$\frac{\partial^r f}{\partial x^i \partial y^{r-i}}, \quad i = 0, 1, \dots, r.$$

Zadatak 3.6 a) Izračunaj sve parcijalne derivacije trećeg reda za funkciju triju varijabla $u = \ln(x^2 + y + z)$. Koliko ih ima stvarno različitih?

b) Koliko ima stvarno različitih parcijalnih derivacija r -tog reda funkcije od m varijabla?

Za razliku od funkcije jedne varijable koja je neprekidna u svakoj točki u kojoj je derivabilna, derivabilnost funkcije više varijabla u nekoj točki ne povlači nužno neprekidnost funkcije u toj točki.

Primjer 3.9 Funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{za } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{za } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

je definirana na $D = \mathbb{R}^2$ i ima prekid u točki $(0, 0)$. Naime, nizovi točaka $\{(1/n, c/n), n \in \mathbb{N}\}$ za različite vrijednosti od c svi konvergiraju k nuli, a pripadajući nizovi funkcijskih vrijednost imaju različite limese za različite vrijednosti od c jer

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{c}{n}\right) = \frac{c}{1 + c^2} \rightarrow \frac{c}{1 + c^2}.$$

S druge strane u točki $(x, y) \neq (0, 0)$ imamo

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{y(x^2 + y^2) - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f'_y(x, y) &= \frac{x(x^2 + y^2) - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

a u točki $(0, 0)$ je

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0, \\ f'_y(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0. \end{aligned}$$

Dakle f je derivabilna u točki $(0, 0)$, ali nije neprekidna u toj točki.

3.6 Totalni diferencijal

Neka je zadana funkcija f i točke

$$T_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathcal{D}, \quad T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}.$$

Uvedimo oznake

$$u = f(T), \quad u_0 = f(T_0), \quad \Delta u = u - u_0.$$

Prirast $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ još nazivamo i *diferencijalom nezavisne varijable* x_i i označavamo s dx_i .

Parcijalni diferencijal funkcije f u točki T_0 s obzirom na varijablu x_i definiramo kao diferencijal funkcije jedne varijable f_i definirane relacijom (3.1):

$$d_{x_i}f(T_0) \equiv d_{x_i}(u_0) = df_i(x_i^0) = f'_i(x_i^0)dx_i = f'_{x_i}(T_0)dx_i = \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_i}dx_i.$$

Definicija 3.9 Neka je funkcija f derivabilna u točki T_0 i neka je

$$\rho = d(T_0, T) = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}.$$

Ako je

$$\Delta u = f'_{x_1}(T_0)\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_n}(T_0)\Delta x_n + \rho\alpha(\rho)$$

gdje je $\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha(\rho) = 0,$$

tada je funkcija f *diferencijabilna* u točki T_0 , a izraz

$$df(T_0) = f'_{x_1}(T_0)dx_1 + \cdots + f'_{x_n}(T_0)dx_n$$

je *totalni diferencijal* (ili kraće *diferencijal*) funkcije f u točki T_0 . Ako je f diferencijabilna u svakoj točki $T \in \mathcal{D}$ tada je f *diferencijabilna funkcija*.

Napomena 3.3 (1) Iz definicije 3.9 vidimo da za malene vrijednosti prirasta Δx_i , $i = 1, \dots, n$, prirast Δu možemo aproksimirati diferencijalom $df(T_0)$,

(2) Iz same definicije diferencijabilnosti slijedi da je diferencijabilnost jače svojstvo od derivabilnosti: ako je funkcija f diferencijabilna onda je f i derivabilna, dok obratno ne mora vrijediti.

(3) Funkcija f može biti derivabilna u točki T_0 a da u toj točki nije neprekidna (vidi primjer 3.9), dočim funkcija f koja je diferencijabilna u točki T_0 nužno mora biti neprekidna u toj točki. Naime, $T \rightarrow T_0$ onda i samo onda kad $\Delta x_i \rightarrow 0$ za sve $i = 1, \dots, n$, odnosno, onda i samo onda kad $\rho = d(T_0, T) \rightarrow 0$. Zato imamo

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow T_0} \Delta u &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0, i=1, \dots, m} \Delta u \\ &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0, i=1, \dots, m} [f'_{x_1}(T_0)\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_m}(T_0)\Delta x_m] + \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho\alpha(\rho) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Međutim,

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \Delta u = 0$$

je ekvivalentno s

$$\lim_{T \rightarrow T_0} f(T) = f(T_0),$$

odnosno, s neprekidnošću funkcije f u točki T_0 .

Primjer 3.10 Funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{za } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{za } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

je neprekidna na $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ (vidi primjer 3.4 i sliku 3.23). Također,

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0,$$

što znači da je f derivabilna u točki $(0, 0)$. Međutim f nije diferencijabilna u točki $(0, 0)$. Naime, vrijedi

$$\Delta x = x - 0 = x, \quad \Delta y = y - 0 = y,$$

odnosno,

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \rightarrow 0, y \rightarrow 0.$$

Zato je

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha(\rho) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0, 0) - [f'_x(0, 0)dx + f'_y(0, 0)dy]}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\rho} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Za nizove točaka $((1/n, c/n), n \in \mathbb{N})$ koji konvergiraju u $(0, 0)$ za sve $c \in \mathbb{R}$ imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{c}{n}}{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{c^2}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{(1 + c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{c}{(1 + c^2)^{\frac{3}{2}}},$$

što je zavisno od c pa zaključujemo da $\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha(\rho)$ ne postoji i zato f nije diferencijabilna u točki $(0, 0)$.

Razlog radi kojeg funkcija f iz prethodnog primjera nije diferencijabilna u točki $(0,0)$, premda je u toj točki i neprekidna i derivabilna, je taj što parcijalne derivacije f'_x i f'_y nisu neprekidne u točki $(0,0)$. To potvrđuje i slijedeći teorem kojega dajemo bez dokaza:

Teorem 3.4 *Ako postoji okolina $K(T, \delta)$ točke T takva da je f derivabilna na $K(T, \delta)$, te ako su sve parcijalne derivacije f'_{x_i} , $i = 1, \dots, n$ neprekidne u točki T , onda je funkcija f diferencijabilna u točki T .*

Iz svega dosad rečenog vidimo da postoji bitna razlika između funkcija jedne varijable i funkcija više varijabla. Naime, za funkciju jedne varijable vrijedi

- (i) f je derivabilna u točki $x \iff f$ je diferencijabilna u točki x ,
- (ii) f je derivabilna (diferencijabilna) u točki $x \Rightarrow f$ je neprekidna u točki x ,

dočim za funkciju f od $n > 1$ varijabla vrijede slijedeće implikacije:

- (i) f je diferencijabilna u točki $T \Rightarrow f$ je derivabilna u točki T ,
- (ii) f je neprekidno derivabilna u točki $T \Rightarrow f$ je diferencijabilna u točki T ,
- (iii) f je diferencijabilna u točki $T \Rightarrow f$ je neprekidna u točki T .

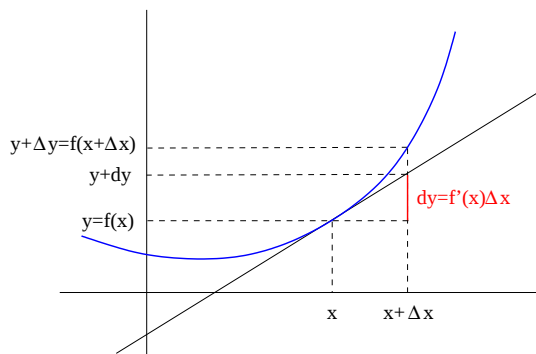
3.7 Tangencijalna ravnina

Ako je funkcija jedne varijable $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna (dakle diferencijabilna) u točki x_0 , onda je pravac t zadan jednačom

$$t \dots y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad y_0 = f(x_0)$$

tangenta krivulje $y = f(x)$ u točki (x_0, y_0) . Diferencijal $df(x_0) = f'(x_0)dx$ možemo interpretirati kao prirast te tangente u promatranoj točki koji odgovara prirastu $dx \equiv \Delta x$ nezavisne varijable (vidi sliku 3.28).

Slično možemo postupiti kad imamo funkciju dviju varijabla. Neka je $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$. Ako je f diferencijabilna u točki (x_0, y_0) , onda postoje



Slika 3.28: Diferencijal funkcije jedne varijable

parcijalne derivacije $f'_x(x_0, y_0)$ i $f'_y(x_0, y_0)$, te možemo definirati dva pravca t_x i t_y u prostoru koji prolaze točkom (x_0, y_0, z_0) , gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} t_x \quad \dots \quad \frac{x - x_0}{1} &= \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{f'_x(x_0, y_0)}, \\ t_y \quad \dots \quad \frac{x - x_0}{0} &= \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{f'_y(x_0, y_0)}. \end{aligned}$$

Kad gledamo dvodimenzionalno, pravac t_x možemo interpretirati kao tangentu na krivulju $z = f(x, y_0)$ u točki s koordinatama (x_0, z_0) (sve se nalazi u ravnini $y - y_0 = 0$ kao što se vidi na Slici 3.29). Slično, pravac t_y možemo interpretirati kao tangentu na krivulju $z = f(x_0, y)$ u točki s koordinatama (y_0, z_0) (sve se nalazi u ravnini $x - x_0 = 0$).

Pravci t_x i t_y imaju vektore smjerova

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_x &= \mathbf{i} + f'_x(x_0, y_0) \mathbf{k}, \\ \mathbf{s}_y &= \mathbf{j} + f'_y(x_0, y_0) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

te određuju točno jednu ravninu R_t koja prolazi točkom (x_0, y_0, z_0) i ima vektor normale

$$\mathbf{n} = \mathbf{s}_x \times \mathbf{s}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -f'_x(x_0, y_0) \mathbf{i} - f'_y(x_0, y_0) \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Prema tome, jednačba ravnine R_t glasi

$$R_t \quad \dots \quad z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad z_0 = f(x_0, y_0).$$

Ravnina R_t je *tangencijalna ravnina* na plohu $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0, z_0) .

Diferencijal

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

možemo interpretirati kao prirast varijable z u tangencijalnoj ravnini odgovara prirastima dx i dy nezavisnih varijabli.

Primjer 3.11 Za paraboloid $z = -2(x-1)^2 - y^2$, koji je diferencijabilan u svakoj točki, u točki $(x_0, y_0) = (3/2, -1/2)$ imamo $z_0 = -3/4$,

$$\begin{aligned} t_x \cdots \frac{x - 3/2}{1} &= \frac{y + 1/2}{0} = \frac{z + 3/4}{-2}, \\ t_y \cdots \frac{x - 3/2}{0} &= \frac{y + 1/2}{1} = \frac{z + 3/4}{1}. \end{aligned}$$

Dakle, u zadanoj točki normala je jednaka

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 1\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

a jednačba tangencijalne ravnine glasi (vidi sliku 3.29)

$$R_t \cdots z = -\frac{3}{4} - 2\left(x - \frac{3}{2}\right) + 1\left(y + \frac{1}{2}\right).$$

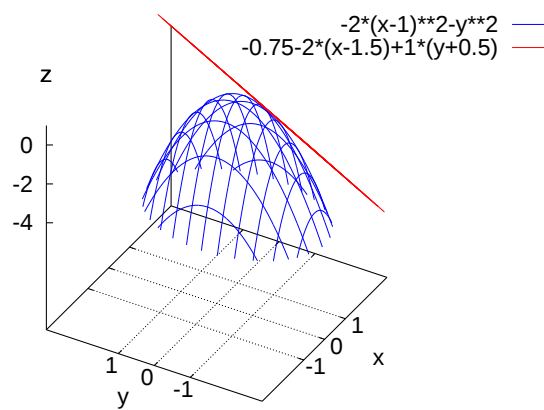
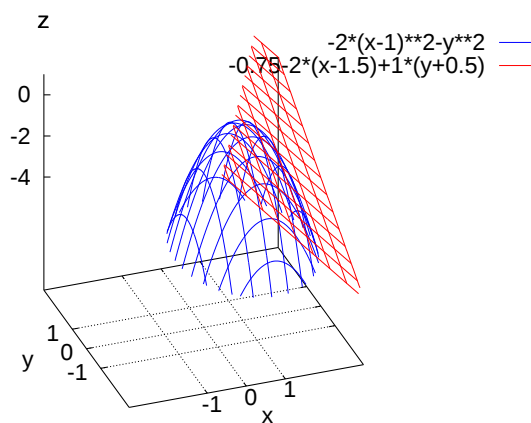
Napomena 3.4 Iz prethodnog izlaganja je jasno da ravninu R_t možemo definirati čim je funkcija f derivabilna u točki (x_0, y_0) . Međutim, ravninu R_t ima smisla zvati tangencijalnom ravinom plohe $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0, z_0) samo onda kad je f diferencijabilna u točki (x_0, y_0) jer tada svaki pravac u ravnini R_t kroz točku (x_0, y_0, z_0) , a ne samo pravce t_x i t_y , možemo promatrati kao tangentu na plohu $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0, z_0) . Naime, bilo koji pravac u ravnini R_t kroz točku (x_0, y_0, z_0) različit od t_x može se dobiti kao presjek ravnine R_t i ravnine paralelne sa Oz osi $y - y_0 = c(x - x_0)$, gdje je $c \in \mathbb{R}$ dana konstanta. Taj pravac ima jednačbu

$$t_c \cdots \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{c} = \frac{z - z_0}{f'_x(x_0, y_0) + cf'_y(x_0, y_0)}.$$

S druge strane, presjek plohe $z = f(x, y)$ i ravnine $y - y_0 = c(x - x_0)$ možemo promatrati kao graf funkcije jedne varijable

$$x \mapsto z = g_c(x) = f(x, y_0 + c(x - x_0))$$

(sve se dakako nalazi u ravnini $y - y_0 = c(x - x_0)$). Nije teško vidjeti da je zbog diferencijabilnosti funkcije f u točki (x_0, y_0) funkcija g_c derivabilna u točki x_0 s derivacijom $g'_c(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + cf'_y(x_0, y_0)$, te da je tangenta na krivulju $z = g_c(x)$ u x_0 upravo pravac t_c . U ovom smislu onda pravac t_c promatramo i kao tangentu na plohu $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0, z_0) .



Slika 3.29: Tangencijalna ravnina paraboloida $z = -2(x - 1)^2 - y^2$ u točki $(2, 1, -3)$

Primjer 3.12 Za funkciju f iz primjera 3.10 u točki $(0, 0)$ pravci t_x , t_y i ravnina R_t imaju jednadžbe

$$\begin{aligned} t_x &\dots \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}, \\ t_y &\dots \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}, \\ R_t &\dots z = 0, \end{aligned}$$

ali nijedan drugi pravac u ravnini $z = 0$, osim pravaca t_x i t_y , nije tangenta plohe $z = f(x, y)$ u točki $(0, 0)$ (vidi Sliku 3.23). Naime, za dani $c \in \mathbb{R}$ pravac t_c u ravnini R_t ima jednadžbu

$$t_c \dots \frac{x}{1} = \frac{y}{c} = \frac{z}{0},$$

a za funkciju g_c dobijamo

$$g_c(x) = \begin{cases} \frac{cx}{1+c^2}, & \text{za } x \neq 0, \\ 0, & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

i očito je za $c \neq 0$

$$g'_c(0) = \frac{c}{1+c^2} \neq f'_x(0, 0) + cf'_y(0, 0) = 0.$$

Zadatak 3.7 a) Odredi jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $z = f(x, y)$ u točki $(0, 0)$ ako je f funkcija iz primjera 3.7.

b) Ispitaj neprekidnost, derivabilnost i diferencijabilnost funkcije

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{za } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{za } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

u točki $(0, 0)$.

c) Odredi jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1+xy}$$

u točki $(0, 0)$.

3.8 Parcijalne derivacije kompozicije funkcija

Prisjetimo se formule za derivaciju kompozicije funkcija jedne varijable

$$[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x).$$

Kad imamo funkcije više varijabla tada za računanje parcijalnih derivacija složene funkcije (kompozicije funkcija) vrijedi analogno pravilo, dakako uz nešto kompliciraniji zapis.

Teorem 3.5 *Neka su zadane funkcije*

$$\begin{aligned}\varphi_1, \dots, \varphi_k : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathcal{D} &\subseteq \mathbb{R}^n, \\ f : X &\rightarrow \mathbb{R}, & X &\subseteq \mathbb{R}^k,\end{aligned}$$

pri čemu je

$$\varphi_1[D] \times \dots \times \varphi_k[D] \subseteq X.$$

Tada možemo definirati kompoziciju $F = f \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ formulom

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(x_1, \dots, x_n)), \quad (x_1, \dots, x_n) \in D.$$

Ako su funkcije $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ i f diferencijabilne, onda je i funkcija F također diferencijabilna, a njene parcijalne derivacije su dane formulom

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial f}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdje je $u_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, k$.

Primjer 3.13 *Neka su zadane diferencijabilne funkcije*

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{D} &\rightarrow [a, b], \quad \psi : \mathcal{D} \rightarrow [c, d], \quad \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3, \\ f : [a, b] \times [c, d] &\rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

i neka je

$$F(x, y, z) = f(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)), \quad (x, y, z) \in D.$$

Uvedemo li oznake $u = \varphi(x, y, z)$ i $v = \psi(x, y, z)$ onda prema prethodnom teoremu imamo

$$\begin{aligned}F'_x &= f'_u \cdot \varphi'_x + f'_v \cdot \psi'_x, \\ F'_y &= f'_u \cdot \varphi'_y + f'_v \cdot \psi'_y, \\ F'_z &= f'_u \cdot \varphi'_z + f'_v \cdot \psi'_z.\end{aligned}$$

Napomena 3.5 Ako je funkcija F zadana kao u teoremu 3.5, onda je njen diferencijal jednak

$$\begin{aligned}
 dF(x_1, \dots, x_m) &= \sum_{i=1}^m F'_{x_i}(x_1, \dots, x_m) dx_i \\
 &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^k f'_{u_j}(u_1, \dots, u_k) \cdot (\varphi_j)'_{x_i}(x_1, \dots, x_m) \right) dx_i \\
 &= \sum_{j=1}^k f'_{u_j}(u_1, \dots, u_k) \cdot \left(\sum_{i=1}^m (\varphi_j)'_{x_i}(x_1, \dots, x_m) dx_i \right) \\
 &= \sum_{j=1}^k f'_{u_j}(u_1, \dots, u_k) du_j \\
 &= df(u_1, \dots, u_k).
 \end{aligned}$$

Zadatak 3.8 Neka su, uz oznake kao u primjeru 3.13, zadane funkcije $f(u, v) = u^2v$, $\varphi(x, y, z) = xyz$ i $\psi(x, y, z) = x + \cos \frac{y}{z}$.

- Izračunajte F'_x direktno i pomoću formula iz primjera 3.13.
- Provjerite za ovu funkciju formule iz napomene 3.5.

3.9 Totalni diferencijal višeg reda

Definicija 3.10 Neka funkcija f ima u nekoj okolini $K(T\delta) \subseteq D$ sve parcijalne derivacije do uključivo $(r-1)$ -vog reda. Ako su sve parcijalne derivacije $(r-1)$ -vog reda funkcije f diferencijabilne u točki T , onda *totalni diferencijal* r -tog reda funkcije f u točki T definiramo kao

$$d^r f(T) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_r=1}^n \frac{\partial^r f(T)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_r}} dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_r}.$$

Primjer 3.14 Neka je f funkcija dviju varijabla. Pod pretpostavkom da f u nekoj okolini točke (x, y) ima neprekidne sve parcijalne derivacije r -tog reda, uvažavajući Schwarzov teorem, za $r = 2$ imamo

$$\begin{aligned}
 d^2 f(x, y) &= f''_{xx}(x, y) dx dx + f''_{xy}(x, y) dx dy \\
 &\quad + f''_{yx}(x, y) dy dx + f''_{yy}(x, y) dy dy \\
 &= f''_{xx}(x, y) (dx)^2 + 2f''_{xy}(x, y) dx dy + f''_{yy}(x, y) (dy)^2,
 \end{aligned}$$

a za $r = 3$ imamo

$$\begin{aligned}
 d^3 f(x, y) &= f'''_{xxx}(x, y) dx dx dx + f'''_{xxy}(x, y) dx dx dy \\
 &\quad + f'''_{xyx}(x, y) dx dy dx + f'''_{xyy}(x, y) dx dy dy \\
 &\quad + f'''_{yxx}(x, y) dy dx dx + f'''_{yxy}(x, y) dy dx dy \\
 &\quad + f'''_{yyx}(x, y) dy dy dx + f'''_{yyy}(x, y) dy dy dy \\
 &= f'''_{xxx}(x, y) (dx)^3 + 3 f'''_{xxy}(x, y) (dx)^2 dy \\
 &\quad + 3 f'''_{xyy}(x, y) dx (dy)^2 + f'''_{yyy}(x, y) (dy)^3.
 \end{aligned}$$

Nije teško dokazati (na primjer indukcijom) da za bilo koji r vrijedi

$$d^r f(x, y) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \frac{\partial^r f(x, y)}{\partial x^{r-i} \partial y^i} (dx)^{r-i} (dy)^i.$$

Zbog očigledne analogije sa binomnom formulom gornji izraz često skraćeno zapisujemo kao

$$d^r f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^r f(x, y).$$

Zadatak 3.9 a) Odredi $d^2 f(0, 0)$ ako je f funkcija iz primjera 3.7.

b) Koristeći formulu iz primjera 3.14 odredi $d^r f(0, 0)$ za funkciju

$$f(x, y) = e^{x-2y}.$$

3.9.1 Taylorova formula

Promatrimo funkciju $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, i točke

$$T_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \quad T = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

iz $\mathcal{D}$. Činjenicu da je f diferencijabilna u točki T_0 možemo reinterpretirati na slijedeći način: za svaku točku $T \in K(T_0, \delta) \subseteq \mathcal{D}$ vrijedi

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(T_0)(x_i - x_i^0) + R_1(T),$$

pri čemu ostatak $R_1(T)$ ima svojstvo da teži k nuli kad T teži k T_0 i to brže nego T teži k T_0 , odnosno

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \frac{R_1(T)}{\rho} = 0, \quad \rho = d(T, T_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2}.$$

Praktična korist od gornje interpretacije je slijedeći zaključak: ako je točka T blizu točki T_0 tj. ako je ρ malen onda je veličina $R_1(T)$ zanemarivo malena pa se vrijednost funkcije f u točki T može računati korištenjem približne jednakosti

$$f(T) \approx f(T_0) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(T_0)(x_i - x_i^0).$$

Desnu stranu u gornjoj približnoj jednakosti je jednostavno računati ako su poznate vrijednosti $f(T_0)$ i $f'_{x_i}(T_0)$, $i = 1, \dots, n$. Ako želimo imati približnu jednakost sa većim stupnjem točnosti onda u račun moramo ubaciti i vrijednosti parcijalnih derivacija viših redova funkcije f u točki T_0 .

Koristeći Taylorovu formulu za realne funkcije jedne varijable te formulu za deriviranje kompozicije funkcija više varijabla lako se dobije Taylorova formula za funkcije više varijabla. Taj rezultat ovdje iskazujemo bez dokaza:

Teorem 3.6 *Ako funkcija f ima u nekoj okolini $K(T_0, \delta) \subseteq D$ neprekidne parcijalne derivacije do uključivo $(m+1)$ -vog reda, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, onda za svaku točku $T \in K(T_0, \delta)$ vrijedi Taylorova formula*

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{r=1}^m \frac{1}{r!} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^r f(T_0) + R_m(T).$$

Ovdje je

$$R_m(T) = \frac{(1-\theta)^{m+1-p}}{m! \cdot p} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{m+1} f(T_\theta)$$

za neki unaprijed zadani $p \in \mathbb{N}$, a $0 < \theta < 1$ zavisi od točke T i određuje točku

$$T_\theta = (x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), \dots, x_n^0 + \theta(x_n - x_n^0))$$

koja se nalazi između točaka T_0 i T .

Napomena 3.6 1) Izraz kojim je dan ostatak $R_n(T)$ u iskazu teorema 3.6 je takozvani Schlömlichov oblik ostatka. Za $p = 1$ dobivamo Cauchyjev oblik ostatka, a za $p = m + 1$ dobivamo Lagrangeov oblik ostatka koji je najjednostavniji i najčešće korišten. Također nije teško pokazati da vrijedi

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \frac{R_m(T)}{\rho^m} = 0, \quad \rho = d(T, T_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2},$$

što se u literaturi (naročito u numeričkoj analizi) simbolički zapisuje kao

$$R_m(T) = O(\rho^m)$$

(ovakav zapis zovemo Peannov oblik ostatka). Posebno za $m = 0$ tvrdnja u teoremu 3.6 svodi se praktično na uvodnu interpretaciju diferencijabilnosti funkcije f u točki T_0 .

2) Ako su uvjeti teorema 3.6 ispunjeni za svako $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i ako je

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_m(T) = 0, \quad \forall T \in K(T_0, \delta),$$

onda graničnim prijelazom iz Taylorove formule dobivamo razvoj funkcije u *Taylorov red* oko točke T_0 koji glasi

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^r f(T_0).$$

U slučaju kad je $T_0 = (0, \dots, 0)$ Taylorova formula (red) zove se Maclaurinova formula (red).

Primjer 3.15 U ovom jednostavnom primjeru izračunat ćemo razvoj funkcije $f(x, y) = e^{x+y}$ u Taylorov red u okolini točke $T_0 = (1, -1)$. Zadana funkcija ima u svakoj točki ravnine $\mathbb{R}^2$ parcijalne derivacije proizvoljno visokog reda. Sve te derivacije su jednake polaznoj funkciji pa su ujedno i neprekidne. Dakle,

$$\begin{aligned} d^k f(1, -1) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(1, -1) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k f(1, -1)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} dx^{k-i} dy^i \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} 1 dx^{k-i} dy^i = (dx + dy)^k \\ &= [(x-1) + (y+1)]^k = (x+y)^k. \end{aligned}$$

Ukoliko pokažemo da $R_k(x, y) \rightarrow 0$ u svakoj točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tada razvoj u Taylorov red zadane funkcije glasi

$$e^{x+y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}. \quad (3.2)$$

Zaista, za Lagrangeov oblik ostatka imamo

$$|R_k(x, y)| \leq \frac{1}{(k+1)!} |x+y|^{k+1},$$

pa je $\lim_{k \rightarrow \infty} |R_k(x, y)| = 0$ (vidi Matematiku 1) i formula (3.2) vrijedi za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

U ovom slučaju smo red (3.2) mogli dobiti i direktno iz Maclaurinovog razvoja funkcije jedne varijable $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ koji konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$ pomoću formalne zamjene $x \rightarrow x+y$.

3.10 Ekstremi funkcija više varijabla

Definicija 3.11 Funkcija f ima u točki T_0 *lokalni minimum (maksimum)* ako postoji okolina $K(T_0, \delta) \subseteq D$ takva da za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ vrijedi

$$f(T) > f(T_0) \quad (f(T) < f(T_0)).$$

Točke lokalnih minimuma i točke lokalnih maksimuma funkcije f zajedničkim imenom zovemo točkama *lokalnih ekstrema* funkcije f . Kao i kod funkcija jedne varijable, ukoliko je funkcija f više varijabla neprekidna te barem dvaput derivabilna u nekoj okolini promatrane točke T_0 , možemo dati nužne i dovoljne uvjete da bi f imala lokalni ekstrem u T_0 izražene pomoću vrijednosti parcijalnih derivacija od f u promatranoj točki. Ti su uvjeti analogni onima za funkcije jedne varijable, ali dakako nešto složenije izraženi.

Teorem 3.7 (Nužan uvjet ekstrema) *Neka funkcija f ima lokalni ekstrem u točki T_0 . Ako postoji parcijalna derivacija od f po varijabli x_i u točki T_0 , onda je nužno*

$$f'_{x_i}(T_0) = 0.$$

Dokaz. Ako funkcija f ima lokalni ekstrem u točki T_0 , onda za fiksirani i i funkcija jedne varijable $f_i : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s

$$f_i(x) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0), \quad x \in \mathcal{D}_i,$$

gdje je $\mathcal{D}_i = \{x \in \mathbb{R} \mid (x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) \in D\}$, ima u točki x_i^0 lokalni ekstrem. Ako za neki indeks i postoji parcijalna derivacija od f po varijabli x_i u točki T_0 onda je u stvari

$$f'_{x_i}(T_0) = f'_i(x_i^0).$$

Kako nužan uvjet ekstrema za funkcije jedne varijable povlači $f'_i(x_i^0) = 0$, zaključujemo da mora biti $f'_{x_i}(T_0) = 0$. ■

Napomena 3.7 Neka je funkcija f kao u iskazu teorema 3.7. Ako je f diferencijabilna u točki T_0 onda se nužan uvjet da bi f imala lokalni ekstrem u točki T_0 ,

$$f'_{x_i}(T_0) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

može ekvivalentno iskazati korištenjem diferencijala kao

$$df(T_0) = 0.$$

Kao što ćemo vidjeti, ovaj uvjet je nužan ali ne i dovoljan. Inače, ako je funkcija f diferencijabilna u točki T_0 i pri tom je $df(T_0) = 0$ onda kažemo da je T_0 *stacionarna točka* funkcije f . U slučaju funkcije dviju varijabla ($n = 2$) stacionarnu točku (x_0, y_0) funkcije f geometrijski možemo interpretirati kao točku u kojoj je tangencijalna ravnina na plohu $z = f(x, y)$ paralelna sa xOy koordinatnom ravninom. Naime, jednadžba tangencijalne ravnine (vidi poglavlje 3.7) u stacionarnoj točki (x_0, y_0) glasi

$$z = z_0, \quad z_0 = f(x_0, y_0).$$

Primjer 3.16 a) Točka $(-1, 2)$ je stacionarna točka funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

jer je ta funkcija beskonačno puta diferencijabilna s parcijalnim derivacijama prvog reda

$$f'_x(x, y) = 2x + 2, \quad f'_y(x, y) = 2y - 4$$

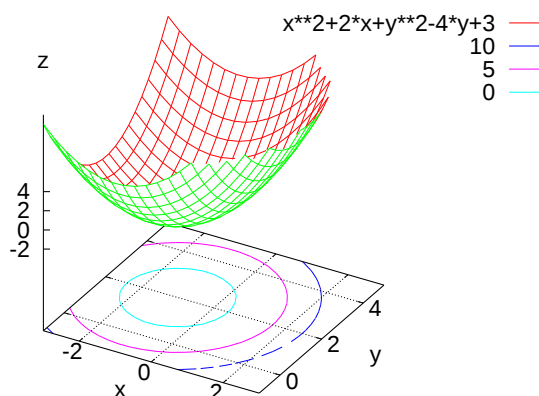
i očito je $f'_x(-1, 2) = 0$ i $f'_y(-1, 2) = 0$. Nadalje točka $(-1, 2)$ je i točka lokalnog minimuma (u stvari točka globalnog minimuma na $\mathbb{R}^2$) za ovu funkciju jer je

$$f(x, y) = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 2 > -2 = f(-1, 2), \quad \forall (x, y) \neq (-1, 2).$$

Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$ u točki $(-1, 2)$ glasi $z = -2$ (vidi sliku 3.30).

b) Funkcija

$$f(x, y) = xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$



Slika 3.30: Lokalni minimum

je beskonačno puta diferencijabilna, a parcijalne derivacije prvog reda su joj

$$f'_x(x, y) = y, \quad f'_y(x, y) = x.$$

Očito je $f'_x(0, 0) = 0$ i $f'_y(0, 0) = 0$, pa je točka $(0, 0)$ stacionarna točka za ovu funkciju. Međutim točka $(0, 0)$ nije točka lokalnog ekstrema funkcije f . Naime, u svakoj okolini točke $(0, 0)$ postoje točke oblika (t, t) , $t \neq 0$, u kojima je

$$f(t, t) = t^2 > 0 = f(0, 0),$$

ali isto tako i točke oblika $(t, -t)$, $t \neq 0$ u kojima je

$$f(t, -t) = -t^2 < 0 = f(0, 0).$$

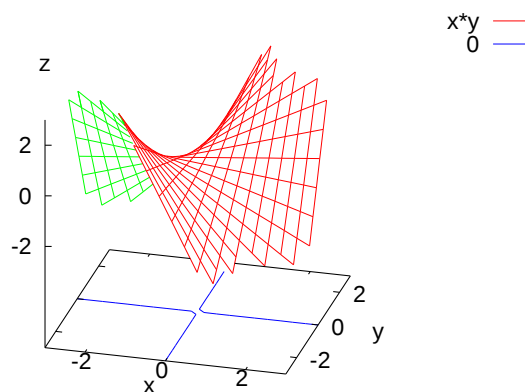
Stoga zaključujemo da $(0, 0)$ nije ni točka lokalnog maksimuma ni točka lokalnog minimuma. Točku $(0, 0)$ zovemo *sedlastom točkom* plohe $z = xy$. Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu $z = xy$ u točki $(0, 0)$ glasi $z = 0$ (vidi sliku 3.31).

c) Funkcija

$$f(x, y) = 1 - x^2 - 2x - |y - 2|, \quad (x, y) \in D = \mathbb{R}^2$$

ima u točki $(-1, 2)$ lokalni maksimum (u stvari globalni maksimum na D) jer je

$$f(x, y) = 2 - (x + 1)^2 - |y - 2| < 2 = f(-1, 2), \quad \forall (x, y) \neq (-1, 2).$$

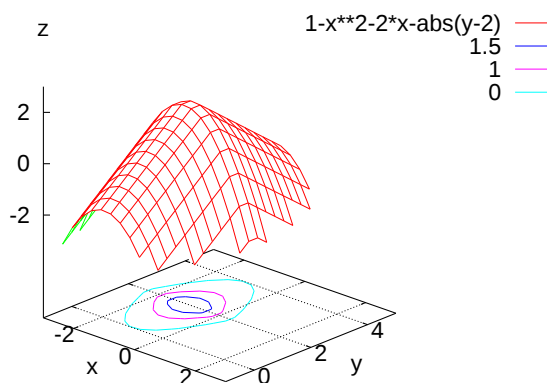


Slika 3.31: Sedlasta točka

Međutim točku $(-1, 2)$ ne možemo nazvati stacionarnom točkom od f u smislu napomene 3.7 jer f nije diferencijabilna u toj točki. Naime, lako se vidi da je $f'_x(-1, 2) = 0$ ali i da $f'_y(-1, 2)$ ne postoji. Prema tome, tangencijalna ravnina na plovu $z = 1 - x^2 - 2x - |y - 2|$ u točki $(-1, 2)$ ne postoji (vidi sliku 3.32).

Kako smo vidjeli u gornjem primjeru stacionarnost neke točke nije dovoljan uvjet da bi ta točka bila točka lokalnog ekstrema. Da bi mogli dati primjenjive dovoljne uvjete moramo, kao i u slučaju funkcija jedne varijable, koristiti derivacije viših redova. Iz definicije 3.11 je vidljivo da je T_0 točka lokalnog ekstrema funkcije f ako i samo ako je razlika $f(T) - f(T_0)$ stalnog predznaka u nekoj okolini $K(T_0, \delta)$ točke T_0 . Za ocjenu predznaka te razlike najprikladnije je upotrijebiti Taylorovu formulu danu u teoremu 3.6 i to sa $n = 1$ (što znači korištenje parcijalnih derivacija od f do uključivo drugog reda) koja se dodatno pojednostavnjuje uvažavanjem nužnog uvjeta $df(T_0) = 0$.

Dakle, uz pretpostavku da je f funkcija od n varijabla koja u nekoj okolini $K(T_0, \delta) \subseteq D$ stacionarne točke $T_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ ima neprekidne parcijalne derivacije do uključivo drugog reda, primjenom Taylorove formule s Lagrangeovim oblikom ostatka $R_1(T)$ dobivamo da za svaku točku $T =$



Slika 3.32: Lokalni maksimum u nestacionarnoj točki

$(x_1, \dots, x_n) \in K(T_0, \delta)$ vrijedi

$$f(T) - f(T_0) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 f(T_0).$$

U daljnjoj analizi ključno je uočiti da se, zbog pretpostavljene neprekidnosti svih parcijalnih derivacija drugog reda funkcije f , ostatak

$$R_1(T) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 f(T_0)$$

i veličina

$$\tilde{R}_1(T) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 f(T_0)$$

vrlo malo razlikuju čim je točka T dovoljno blizu točki T_0 , odnosno, čim je $d(T_0, T)$ dovoljno maleno. Posljedica toga su slijedeća četiri zaključka:

- Ako je $\tilde{R}_1(T) > 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ onda f u točki T_0 ima lokalni minimum.
- Ako je $\tilde{R}_1(T) < 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ onda f u točki T_0 ima lokalni maksimum.

- c) Ako $\tilde{R}_1(T)$ mijenja predznak na $K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, odnosno ako je $\tilde{R}_1(T) > 0$ u nekim točkama $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ i $\tilde{R}_1(T) < 0$ u nekim točkama $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$, onda f u točki T_0 nema lokalni ekstrem (kažemo da je T_0 sedlasta točka od f).
- d) Ako je $\tilde{R}_1(T) \geq 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ i ako postoji točka $T \neq T_0$ u kojoj je $\tilde{R}_1(T) = 0$, ili ako je $\tilde{R}_1(T) \leq 0$ za sve $T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$ i postoji točka $T \neq T_0$ u kojoj je $\tilde{R}_1(T) = 0$, onda ne možemo bez daljnje analize odgovoriti da li je točka T_0 točka lokalnog ekstrema funkcije f ili nije.

Interesantno je da nastupanje bilo kojeg od gore navedenih četiriju slučajeva zavisi isključivo o vrijednostima parcijalnih derivacija drugog reda funkcije f u promatranoj točki T_0 . Naime vrijedi slijedeći teorem:

Teorem 3.8 (Dovoljni uvjeti ekstrema) *Neka funkcija f u nekoj okolini $K(T_0, \delta) \subseteq D$ stacionarne točke T_0 ima neprekidne parcijalne derivacije do uključivo drugog reda. Uvedimo oznake*

$$A_{ij} = f''_{x_i x_j}(T_0), \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

i definirajmo veličine Δ_r , $r = 1, 2, \dots, n$ formulama

$$\Delta_1 = A_{11}, \quad \Delta_r = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{vmatrix}, \quad r = 2, \dots, n.$$

Tada vrijedi:

- a) *ako je $\Delta_r > 0$ za sve indekse r , onda f u točki T_0 ima lokalni minimum;*
- b) *ako je $\Delta_r < 0$ za sve neparne indekse r i $\Delta_r > 0$ za sve parne indekse r , onda f u točki T_0 ima lokalni maksimum;*
- c) *ako je $\Delta_r < 0$ za barem jedan paran indeks r ili ako postoje dva neparna indeksa r i r' takva da je $\Delta_r > 0$ i $\Delta_{r'} < 0$, onda f u točki T_0 nema lokalni ekstrem;*
- d) *ako je $\Delta_r \geq 0$ za sve indekse r i $\Delta_r = 0$ za barem jedan indeks r ili ako je $\Delta_r \leq 0$ za sve indekse r i $\Delta_r = 0$ za barem jedan indeks r , onda f može ali i ne mora imati lokalni ekstrem u točki T_0 .*

Napomena 3.8 a) Treba uočiti da za brojeve A_{ij} iz iskaza teorema 3.8 vrijedi $A_{ji} = A_{ij}$ (Schwarzov teorem), odnosno da je matrica $A = (A_{ij})$ simetrična. Dokaz samog teorema osniva se na nužnim i dovoljnim uvjetima uz koje je kvadratna forma definirana simetričnom matricom A pozitivno ili negativno definitna (semidefinitna) ili indefinitna te ga izostavljamo.

b) U posebnom slučaju za funkciju dviju varijabla koja u nekoj okolini $K(T_0, \delta) \subseteq D$ stacionarne točke $T_0 = (x_0, y_0)$ ima neprekidne parcijalne derivacije do uključivo drugog reda imamo:

$$A_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad A_{12} = A_{21} = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad A_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

i

$$\Delta_1 = A_{11}, \quad \Delta_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}^2.$$

Tvrđnje teorema 3.8 svode se na slijedeća četiri slučaja:

- (1) ako je $\Delta_1 > 0$ i $\Delta_2 > 0$, onda funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni minimum,
- (2) ako je $\Delta_1 < 0$ i $\Delta_2 > 0$, onda funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni maksimum,
- (3) ako je $\Delta_2 < 0$, onda f u točki (x_0, y_0) nema lokalni ekstrem,
- (4) ako je $\Delta_2 = 0$ onda f u točki (x_0, y_0) može ali i ne mora imati lokalni ekstrem.

Primjer 3.17 a) Za funkciju iz primjera 3.16 a)

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

jedina stacionarna točka je $(-1, 2)$. Parcijalne derivacije drugog reda od f su konstantne funkcije,

$$f''_{xx}(x, y) = 2, \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 0, \quad f''_{yy}(x, y) = 2,$$

pa u točki $(-1, 2)$ imamo

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Po teoremu 3.8 a) zaključujemo da funkcija f u točki $(-1, 2)$ ima lokalni minimum.

b) Za funkciju iz primjera 3.16 b)

$$f(x, y) = xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

jedina stacionarna točka je $(0, 0)$. Parcijalne derivacije drugog reda od f su konstantne funkcije

$$f''_{xx}(x, y) = 0, \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 1, \quad f''_{yy}(x, y) = 0,$$

pa u točki $(0, 0)$ imamo

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Po teoremu 3.8 c) zaključujemo da funkcija f u točki $(0, 0)$ nema lokalni ekstrem.

c) Funkcija iz primjera 3.16 c)

$$f(x, y) = 1 - x^2 - 2x - |y - 2|, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ima u točki $(-1, 2)$ lokalni maksimum, ali taj zaključak ne možemo dobiti primjenom teorema 3.8 jer f ne udovoljava pretpostavkama tog teorema (nema neprekidne sve parcijalne derivacije drugog reda).

d) Funkcija triju varijabla

$$f(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

je beskonačno puta diferencijabilna, a parcijalne derivacije prvog reda su joj

$$f'_x(x, y, z) = -4x, \quad f'_y(x, y, z) = -2y, \quad f'_z(x, y, z) = -6z.$$

Očito je $(0, 0, 0)$ jedina stacionarna točka funkcije f . Parcijalne derivacije drugog reda funkcije f su konstantne (po Schwarzovom teoremu dovoljno ih i gledati samo šest)

$$f''_{xx} = -4, \quad f''_{xy} = f''_{xz} = 0, \quad f''_{yy} = -2, \quad f''_{yz} = 0, \quad f''_{zz} = -6,$$

pa u točki $(0, 0, 0)$ imamo

$$\Delta_1 = -4 < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -48 < 0.$$

Po teoremu 3.8 b) zaključujemo da funkcija f ima u točki $(0, 0, 0)$ lokalni maksimum.

e) Slično kao u prethodnom primjeru, funkcija triju varijabla

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

je beskonačno puta diferencijabilna, a parcijalne derivacije prvog reda su joj

$$f_x(x, y, z) = 4x, \quad f'_y(x, y, z) = 2y, \quad f'_z(x, y, z) = -6z.$$

Opet je $(0, 0, 0)$ jedina stacionarna točka od f , a parcijalne derivacije drugog reda su sada

$$f''_{xx} = 4, \quad f''_{xy} = f''_{xz} = 0, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{yz} = 0, \quad f''_{zz} = -6.$$

U točki $(0, 0, 0)$ imamo

$$\Delta_1 = 4 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -48 < 0,$$

pa po teoremu 3.8 c) zaključujemo da funkcija f u točki $(0, 0, 0)$ nema lokalni ekstrem.

f) Da bi ilustrirali zaključak d) iz teorema 3.8 pogledajmo slijedeće dvije funkcije triju varijabla

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^4, \\ g(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^3, \end{aligned} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Točka $(0, 0, 0)$ je točka lokalnog minimuma funkcije f jer je očito

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 > 0 = f(0, 0, 0), \quad \forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Nadalje točka $(0, 0, 0)$ nije točka lokalnog ekstrema funkcije g što odmah slijedi iz slijedećih dviju nejednakosti

$$\begin{aligned} g(0, 0, t) &= t^3 > 0 = g(0, 0, 0), \\ g(0, 0, -t) &= -t^3 < 0 = g(0, 0, 0), \end{aligned} \quad \forall t > 0.$$

S druge strane točka $(0, 0, 0)$ je jedina stacionarna točka i od f i od g , što se lako provjeri, Jednostavnim računom parcijalnih derivacija drugog reda u točki $(0, 0, 0)$ za obje funkcije dobivamo

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno radi se o slučaju d) iz teorema 3.8

3.11 Implicitno zadane funkcije

U Matematici 1 smo već govorili o tome kako jednadžbu oblika

$$F(x, y) = 0,$$

gdje je $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, neka funkcija dviju varijabla, možemo interpretirati i kao jednadžbu kojom je implicitno zadana neka funkcija jedne varijable

$$y = f(x), \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

Jednadžbi $F(x, y) = 0$ prirodno pridružujemo skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ definiran s

$$S = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid F(x, y) = 0\}$$

i u pravilu ga poistovjećujemo sa samom jednadžbom kojoj je pridružen.

Definicija 3.12 Za funkciju jedne varijable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ (obično je I interval ili unija intervala u $\mathbb{R}$), za koju vrijedi

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in I$$

kažemo da je *implicitno zadana* jednadžbom $F(x, y) = 0$. Ovo iskazujemo i ekvivalentnim zahtjevom da je graf Γ_f funkcije f sadržan u skupu S , odnosno

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\} \subseteq S.$$

Ova definicija zahtijeva dva komentara koja dajemo u slijedeće dvije napomene, zajedno s jednostavnim primjerima

Napomena 3.9 Ako je funkciju $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $I \subseteq \mathbb{R}$ implicitno zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$ onda je prema Definiciji 3.12 i svaka restrikcija $f : I' \rightarrow \mathbb{R}$, $I' \subseteq I$ od f implicitno zadana istom tom jednadžbom. Dakle,

$F(x, y) = 0$ u pravilu promatramo kao jednadžbu kojom je implicitno zadana ne jedna već više funkcija jedne varijable, a dijelovi od S su grafovi tih funkcija. Naravno, od interesa je slučaj kada postoji točno jedna osnovna funkcija f koja je implicitno zadana tom jednadžbom i čiji se graf podudara sa čitavim skupom S , $\Gamma_f = S$. Takvu funkciju f dakako nije uvijek moguće naći.

Primjer 3.18 a) Ako je funkcija f zadana eksplicitno formulom

$$y = f(x), \quad x \in I \subseteq \mathbb{R},$$

onda je možemo shvatiti i kao funkciju koja je implicitno zadana jednadžbom

$$F(x, y) \equiv y - f(x) = 0,$$

pri čemu je domena od F skup $D = I \times \mathbb{R}$, a skup S je upravo graf Γ_f zadane funkcije f .

b) Kako je dobro poznato, jednadžbu

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

obično zovemo implicitnom jednadžbom kružnice sa središtem u ishodištu $(0, 0)$ i polumjerom 1. Jasno je da je možemo shvatiti i kao jednadžbu oblika $F(x, y) = 0$ kojom je implicitno zadana neka funkcija jedne varijable x . U ovom slučaju je $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ definirana na $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$, a pridruženi skup S sastoji se od točaka (x, y) ravnine koje su od ishodišta $(0, 0)$ udaljene za 1. Kad tu jednadžbu razriješimo po varijabli y kao nepoznanici dobivamo

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2},$$

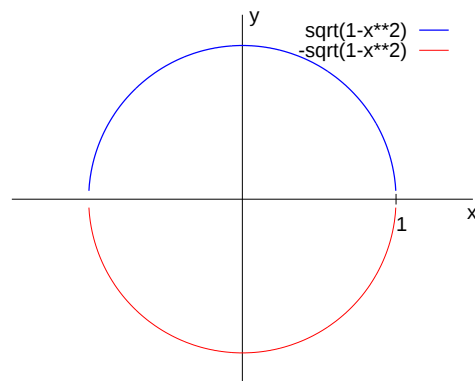
odnosno y nije jednoznačno određen. Zaključujemo da ne postoji jedna osnovna funkcija f čiji se graf podudara sa S . U stvari, jednadžbu $x^2 + y^2 - 1 = 0$ obično interpretiramo kao jednadžbu kojom su implicitno zadane slijedeće dvije osnovne funkcije (vidi Sliku 3.33)

$$f^-(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad f^+(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in I = [-1, 1].$$

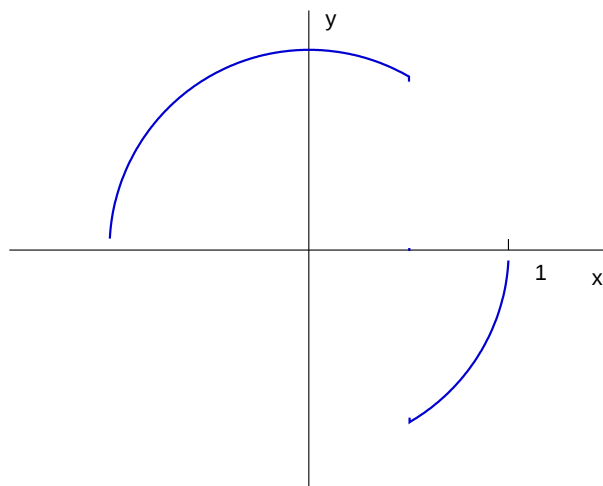
Jasno je da je na primjer i funkcija (vidi Sliku 3.34)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{za } x \in [-1, 0.5) \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{za } x \in [0.5, 1] \end{cases}$$

također implicitno zadana jednadžbom $x^2 + y^2 - 1 = 0$.



Slika 3.33: Implicitno zadana kružnica



Slika 3.34: Implicitno zadana funkcija izvedena iz kružnice

Napomena 3.10 Prema definiciji 3.12, jednadžbu $F(x, y) = 0$ interpretiramo kao implicitnu vezu između varijabla x i y , pri čemu varijablu x tretiramo kao nezavisnu, a varijablu y kao zavisnu. Naravno da je ponekad zgodno zamijeniti takve uloge varijabla x i y .

Primjer 3.19 a) Jednadžbu

$$x + 2 = 0$$

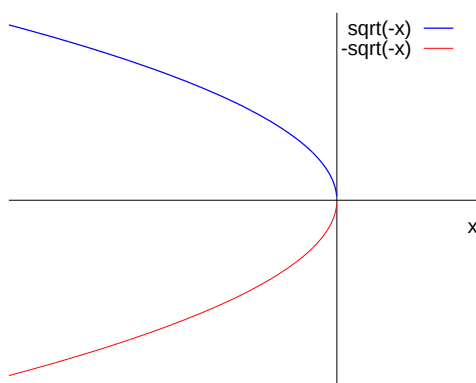
često interpretiramo kao jednadžbu pravca u ravnini koji prolazi točkom $(-2, 0)$ na osi Ox i paralelan je sa osi Oy . Jasno je da u toj jednadžbi varijablu y ne možemo tretirati kao zavisnu jer se ona u njoj ne pojavljuje. Međutim tu jednadžbu možemo interpretirati kao jednadžbu oblika $F(x, y) = 0$ sa $F(x, y) = x + 2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, u kojoj varijablu y tretiramo kao nezavisnu. Stoga je tom jednadžbom implicitno zadana konstantna funkcija $x = f(y) = -2$, $y \in I = \mathbb{R}$.

b) Jednadžbu

$$x + y^2 = 0$$

obično nazivamo implicitnom jednadžbom parabole. Tu je $F(x, y) = x + y^2$ definirana na $D = \mathbb{R}^2$. Ako u toj jednadžbi varijablu x interpretiramo kao nezavisnu onda su njom implicitno zadane dvije osnovne funkcije čiji grafovi su dijelovi skupa S pridruženog jednadžbi (vidi Sliku 3.35). To su funkcije

$$y = f^-(x) = -\sqrt{-x}, \quad y = f^+(x) = \sqrt{-x}, \quad x \in I = (-\infty, 0].$$



Slika 3.35: Implicitno zadana parabola

S druge strane zgodnije je varijablu y interpretirati kao nezavisnu jer se onda $x + y^2 = 0$ može interpretirati kao jednadžba kojom je implicitno zadana jedna osnovne funkcija

$$x = f(y) = -y^2, \quad y \in I = \mathbb{R},$$

čiji graf se podudara sa skupom S pridruženim toj jednadžbi.

Definiciju 3.12 na prirodan način poopćavamo na slučaj implicitne veze $(n+1)$ -ne varijable ($n \geq 1$):

Definicija 3.13 Neka je $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija od $(n+1)$ -ne varijable definirana na $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ i neka je skup $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definiran kao

$$S = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in X \mid F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0\}.$$

Za bilo koju funkciju $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ od n varijabla koja je definirana na $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ i za koju vrijedi

$$F(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) = 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$$

kažemo da je implicitno zadana jednadžbom

$$F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Ovo iskazujemo i ekvivalentnim zahtjevom da je graf Γ_f funkcije f sadržan u skupu S :

$$\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}\} \subseteq S.$$

Napomena 3.11 Primjedbe slične onima u napomeni 3.9 mogu se dati i uz Definiciju 3.13. Dakle, jednadžbu

$$F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0$$

uvijek promatramo kao jednadžbu kojom može biti implicitno zadano više funkcija od n varijabla pri čemu varijablu x_{n+1} tretiramo kao zavisnu a $x_1, \dots, x_n$ kao nezavisne varijable. Jasno je da i ovdje po potrebi možemo zamijeniti uloge varijabla tj. bilo koju od varijabla, recimo varijablu x_i , tretirati kao zavisnu a preostale varijable $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}$ kao nezavisne. Također, u slučaju veze triju varijabla ($n = 2$) umjesto x_1, x_2 i x_3 koristimo uobičajene oznake x, y i z .

Primjer 3.20 a) Jednadžbom

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

implicitno su zadana dva kružna stošca, oba s vrhom u ishodištu $(0, 0, 0)$, jednom je os simetrije negativna Oz poluos, a drugomu pozitivna Oz poluos (vidi sliku 3.20).

Naime, ovdje je $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ definirana na $X = \mathbb{R}^3$, pa ako varijablu z tretiramo kao zavisnu onda su gornjom jednadžbom implicitno zadane dvije osnovne funkcije dviju nezavisnih varijabla x i y :

$$z = f^-(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = f^+(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

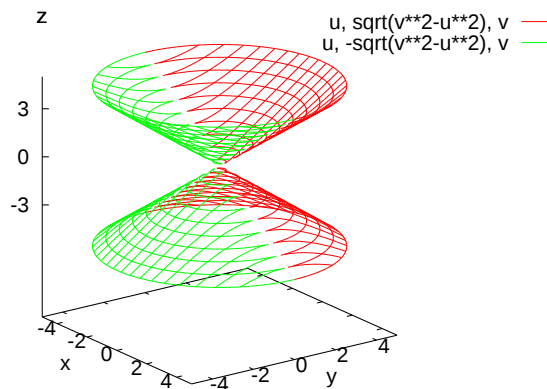
Ako bi na primjer u gornjoj jednadžbi varijablu y tretirali kao zavisnu onda su tom jednadžbom implicitno zadane slijedeće dvije osnovne funkcije dviju nezavisnih varijabla x i z

$$y = f^-(x, z) = -\sqrt{z^2 - x^2}, \quad (x, z) \in D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leq |x|\}$$

i

$$y = f^+(x, z) = \sqrt{z^2 - x^2}, \quad (x, z) \in D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leq |x|\}.$$

Kako izgledaju grafovi ovih funkcija možemo vidjeti na slici 3.36.



Slika 3.36: Implicitno zadan stožac

b) U jednadžbi

$$x + y^2 + 2y + z^2 = 0$$

je $F(x, y, z) = x + y^2 + 2y + z^2$ definirana na $X = \mathbb{R}^3$. Najjednostavnije je varijablu x tretirati kao zavisnu jer je u tom slučaju ovom jednadžbom implicitno zadana točno jedna osnovna funkcija dviju nezavisnih varijabla y i z

$$x = f(y, z) = -y^2 - 2y - z^2, \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2.$$

U stvari se ova jednadžba može ekvivalentno zapisati kao

$$x - 1 = -(y + 1)^2 - z^2$$

iz čega se vidi da je to jednadžba kružnog paraboloida s vrhom u točki $(1, -1, 0)$ okrenutog u smjeru negativne Ox poluosi (parboloid je sličan onome na slici 3.16 uz pomaknuti vrh).

Kako smo u prethodnom izlaganju vidjeli, jednadžbu oblika

$$F(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = 0$$

interpretiramo kao implicitnu vezu između $(n + 1)$ -ne varijable kojom jedna od varijabla, na primjer x_{n+1} , može biti zadana kao funkcija preostalih n varijabla. Međutim nismo rekli ništa o tome koji su dovoljni uvjeti da bi takva eksplicitna veza

$$x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$$

postojala. Također nismo rekli ništa o svojstvima funkcije f implicitno zadane gornjom jednadžbom. Odgovore na ta pitanja daje slijedeći teorem:

Teorem 3.9 *Neka je $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija od $(n + 1)$ -ne varijable definirana na otvorenom skupu $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ koja ima neprekidne parcijalne derivacije F'_{x_i} na X po svim varijablama x_i , $i = 1, \dots, n + 1$ (dakle, F je diferencijabilna u svim točkama iz X). Dalje, neka je $T_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0) \in X$ točka iz X za koju vrijedi*

$$F(x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0) = 0, \quad F'_{x_{n+1}}(x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0) \neq 0.$$

Tada vrijedi:

- (i) *Postoji okolina $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ točke $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ i samo jedna funkcija $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijedi*

$$x_{n+1}^0 = f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

i

$$F(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) = 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}.$$

(ii) Funkcija f ima neprekidne parcijalne derivacije f'_{x_i} na $\mathcal{D}$ po svim varijablama x_i , $i = 1, \dots, n$, te u svakoj točki $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$ vrijede formule

$$f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})}{F'_{x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})}, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdje je

$$x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n).$$

Napomena 3.12 a) Kad imamo implicitnu vezu dviju varijabla

$$F(x, y) = 0$$

definiranu pomoću funkcije $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ koja na $X \subseteq \mathbb{R}^2$ ima neprekidne parcijalne derivacije F'_x i F'_y , teorem 3.9 kaže da će za svaku točku $(x_0, y_0) \in X$ u kojoj vrijedi

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

postojati okolina $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ od x_0 i samo jedna funkcija $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ koja je implicitno zadana sa $F(x, y) = 0$ i koja je neprekidno derivabilna na D . Derivacija $f'(x)$ u bilo kojoj točki $x \in D$ je određena s

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad F(x, y) = 0.$$

b) U slučaju implicitne veze triju varijabla

$$F(x, y, z) = 0$$

definirane pomoću funkcije $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ koja na $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ima neprekidne parcijalne derivacije F'_x , F'_y i F'_z , teorem 3.9 kaže da će za svaku točku $(x_0, y_0, z_0) \in X$ u kojoj je

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

postojati okolina $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ točke (x_0, y_0) i samo jedna funkcija $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ koja je implicitno zadana sa $F(x, y, z) = 0$ i koja ima neprekidne parcijalne derivacije f'_x i f'_y na $\mathcal{D}$. Vrijednosti parcijalnih derivacija $f'_x(x, y)$ i $f'_y(x, y)$ u bilo kojoj točki $(x, y) \in \mathcal{D}$ su određene s

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \\ f'_y(x, y) &= -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \\ F(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Primjer 3.21 a) U primjeru 3.19 b) smo vidjeli da su jednadžbom

$$x + y^2 = 0$$

implicitno zadane dvije osnovne funkcije nezavisne varijable x

$$y = f^-(x) = -\sqrt{-x}, \quad y = f^+(x) = \sqrt{-x}, \quad x \in I = (-\infty, 0].$$

Ovdje je $F(x, y) = x + y^2$ definirana i neprekidno derivabilna na $X = \mathbb{R}^2$ te su joj parcijalne derivacije dane formulama

$$F'_x(x, y) = 1, \quad F'_y(x, y) = 2y.$$

U točki $(-4, -2)$ imamo

$$F(-4, -2) = 0, \quad F'_x(-4, -2) = 1, \quad F'_y(-4, -2) = -4.$$

Dakle pretpostavke teorema 3.9 su ispunjene i zato mora postojati okolina $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ od -4 i samo jedna derivabilna funkcija $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ implicitno zadana jednadžbom $x + y^2 = 0$. Očito, to je funkcija f^- . Međutim, tu funkciju ne možemo gledati na čitavom $I = (-\infty, 0]$ već samo na podskupu $D = (-\infty, 0)$, jer u točki 0 nije derivabilna. Dakle

$$f(x) = -\sqrt{-x}, \quad x \in D = (-\infty, 0),$$

Da bi izračunali na primjer $f'(-4)$ ne treba nam eksplicitni izraz za $f'(x)$ već imamo

$$f'(-4) = -\frac{F'_x(-4, -2)}{F'_y(-4, -2)} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

U ovom slučaju gornji račun možemo provjeriti koristeći eksplicitni izraz

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}, \quad x \in \mathcal{D} = (-\infty, 0),$$

Jasno je da općenito takvu provjeru nećemo moći napraviti jer nećemo imati funkciju f eksplicitno zadanu već ćemo samo znati da postoji!. Uočimo još da i točka $(0, 0)$ zadovoljava $F(0, 0) = 0$, ali teorem 3.9 u toj točki nije primjenjiv jer je $F'_y(0, 0) = 0$.

b) Promotrimo jednadžbu

$$xyz - e^{-xyz} = 0$$

kao implicitnu vezu triju varijabla. Zbog očite simetrije svejedno je koju varijablu tretiramo kao zavisnu pa uzmimo da je to varijabla z . Imamo

$$F(x, y, z) = xyz - e^{-xyz}, \quad (x, y, z) \in X = \mathbb{R}^3$$

i u svim točkama $(x, y, z) \in X$ vrijedi

$$F'_x(x, y, z) = (1 + e^{-xyz}) yz,$$

$$F'_y(x, y, z) = (1 + e^{-xyz}) xz,$$

$$F'_z(x, y, z) = (1 + e^{-xyz}) xy.$$

Kako je

$$1 + e^{-xyz} > 1, \quad \forall (x, y, z) \in X,$$

imamo

$$F'_z(x, y, z) = (1 + e^{-xyz}) xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0.$$

Prema tome, teorem 3.9 možemo primijeniti u svakoj točki $(x, y, z) \in X$ u kojoj je zadovoljena početna jednadžba i za koju je $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Dakle, za svaku takvu točku postojat će okolina $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i samo jedna funkcija f nezavisnih varijabla x i y koja je implicitno zadana početnom jednadžbom i neprekidno derivabilna na $\mathcal{D}$. Za parcijalne derivacije funkcije f vrijedit će

$$f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{z}{x},$$

$$f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{z}{y}.$$

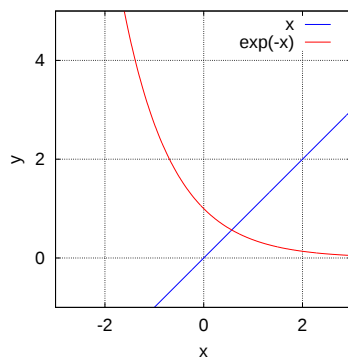
Naravno, za konkretno zadane vrijednosti $x \neq 0$ i $y \neq 0$ pripadajuća vrijednost varijable z je jednoznačno određena početnom jednadžbom i ne možemo je egzaktno izraziti pomoću elementarnih funkcija varijabla x i y . Međutim i u ovom primjeru možemo gornje formule za parcijalne derivacije provjerit neposrednim deriviranjem slično kao u prethodnom primjeru. Naime, uvođenjem pomoćne varijable $t = xyz$ početnu jednadžbu možemo napisati kao

$$t = e^{-t}, \quad t = xyz.$$

Krivulja $y = e^{-x}$ i pravac $y = x$ sijeku se točno u jednoj točki s apscisom $c \in (0, 1)$ kako se vidi na Slici 3.37.

Stoga jednadžba $t = e^{-t}$ ima točno jedno rješenje $t = c$. Veličinu c ne možemo egzaktno izraziti koristeći elementarne funkcije jedne varijable već samo možemo upotrijebiti neku od elementarnih numeričkih metoda (na primjer metodu bisekcije) da bi dobili po volji točnu približnu vrijednost za c (vrijedi $c \approx 0.56$). Zaključujemo da je početna jednadžba ekvivalentna sa jednadžbom

$$xyz = c$$

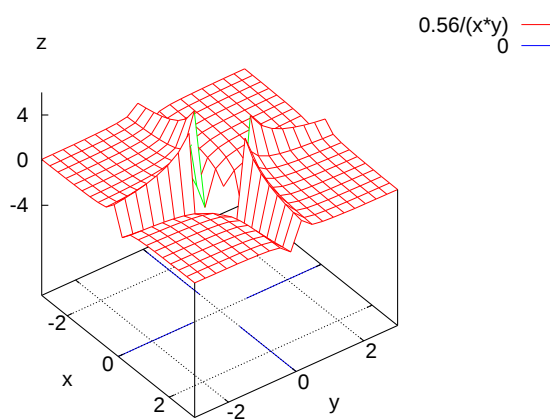
Slika 3.37: Sjecište krivulja $y = x$ i $y = e^{-x}$

iz koje dobivamo eksplicitno varijablu z kao funkciju varijabla x i y (vidi sliku 3.38),

$$z = f(x, y) = \frac{c}{xy}, \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

Sada neposrednim deriviranjem dobijamo

$$f'_x(x, y) = -\frac{c}{x^2y} = -\frac{z}{x}, \quad f'_y(x, y) = -\frac{c}{xy^2} = -\frac{z}{y}.$$

Slika 3.38: Implicitno zadana funkcija $xyz = e^{-xyz}$

3.12 Problem vezanog ekstrema

Pretpostavimo da su zadane dvije funkcije dviju varijabla $f, \varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definirane na skupu $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Funkciji φ pridružimo implicitnu jednadžbu

$$\varphi(x, y) = 0$$

i pripadajući skup $S \subseteq \mathcal{D}$ definiran tom jednadžbom

$$S = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid \varphi(x, y) = 0\}$$

Definicija 3.14 Ako za točku $T_0 = (x_0, y_0) \in S$ postoji okolina $K(T_0, \delta) \subseteq \mathcal{D}$ tako da je

$$f(x, y) > f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in S \cap K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$$

onda kažemo da funkcija f u točki T_0 ima *vezani (uvjetni) lokalni minimum* uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$. Ako je

$$f(x, y) < f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in S \cap K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\}$$

onda kažemo da funkcija f u točki T_0 ima *vezani (uvjetni) lokalni maksimum* uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$. Zajedničkim imenom točke vezanih lokalnih minimuma ili maksimuma zovemo točkama *vezanih (uvjetnih) lokalnih ekstrema*.

Problem određivanja točaka u kojima funkcija $z = f(x, y)$ ima vezane lokalne ekstreme uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$ kraće zapisujemo

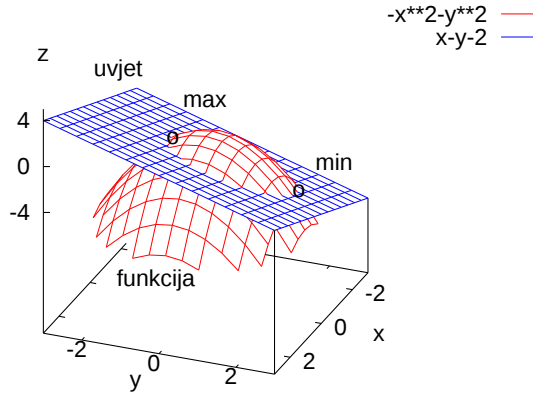
$$\begin{cases} z = f(x, y) \rightarrow \min, \max \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Taj problem možemo geometrijski interpretirati na slijedeći način: među točkama (x, y, z) plohe zadane eksplicitno sa $z = f(x, y)$ čije prve dvije koordinate određuju točku iz skupa S tražimo one u kojima je vrijednost treće koordinate z lokalno najmanja (najveća) (vidi Sliku 3.39).

Ukoliko su funkcije f i φ kojima je zadan problem vezanog ekstrema dovoljno lijepe (na primjer neprekidno derivabilne) mogu se dati nužni i dovoljni uvjeti da bi točka (x_0, y_0) bila rješenje tog problema.

Promatramo dakle gore opisani problem vezanog ekstrema i pretpostavljamo da funkcije f i φ imaju neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo drugog reda. Neka je točka $(x_0, y_0) \in S$ takva da je

$$\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$



Slika 3.39: Problem vezanog ekstrema

Koristeći tvrdnju (i) iz teorema 3.9 zaključujemo da mora postojati otvoreni interval $I \subseteq \mathbb{R}$ sa $x_0 \in I$ i točno jedna funkcija $y = g(x)$, $x \in I$ implicitno zadana jednačinom $\varphi(x, y) = 0$. Zbog toga funkciju $z = f(x, y)$, $(x, y) \in S$ možemo lokalno u nekoj okolini promatrane točke (x_0, y_0) interpretirati kao funkciju samo jedne varijable x ,

$$z = \tilde{f}(x) = f(x, g(x)), \quad x \in I$$

Očigledno vrijedi slijedeća tvrdnja: *Funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani minimum (maksimum) ako i samo ako funkcija $\tilde{f}$ u točki x_0 ima lokalni minimum (maksimum).*

Prema tvrdnji (ii) teorema 3.9 znamo da je funkcija g neprekidno derivabilna na I i derivacija joj zadovoljava

$$g'(x) = -\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)}. \quad (\text{A1})$$

U stvari zbog pretpostavke da φ ima neprekidne i parcijalne derivacije drugog reda, zaključujemo da g na I ima neprekidnu i drugu derivaciju. Iz formule (A1) koristeći formulu za derivaciju kompozicije funkcija više varijabla dobivamo da je $g''(x)$ jednako

$$-\frac{[\varphi''_{xx}(x, y) + \varphi''_{xy}(x, y)g'(x)]\varphi'_y(x, y) - \varphi'_x(x, y)[\varphi''_{yx}(x, y) + \varphi''_{yy}(x, y)g'(x)]}{\varphi'_y(x, y)^2},$$

što se sređivanjem i još jednom upotrebom formule (A1) može zapisati kao

$$g''(x) = -\frac{1}{\varphi'_y(x, y)} [\varphi''_{xx}(x, y) + 2\varphi''_{xy}(x, y)g'(x) + \varphi''_{yy}(x, y)g'(x)^2]. \quad (\text{A2})$$

Nadalje zbog pretpostavke da funkcija f ima neprekidne parcijalne derivacije drugog reda zaključujemo da i funkcija $\tilde{f}$ ima na I neprekidnu prvu i drugu derivaciju. Koristeći opet formulu za deriviranje kompozicije funkcija više varijabla, dobivamo da za sve $x \in I$ vrijedi

$$\tilde{f}'(x) = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)g'(x). \quad (\text{B1})$$

Iz ove formule još jednim deriviranjem dobivamo da je $\tilde{f}''(x)$ jednako

$$f''_{xx}(x, y) + f''_{xy}(x, y)g'(x) + [f''_{yx}(x, y) + f''_{yy}(x, y)g'(x)]g'(x) + f'_y(x, y)g''(x),$$

što se nakon sređivanja i uvrštavanja izraza za $g''(x)$ danog formulom (A2) može zapisati kao

$$\begin{aligned} \tilde{f}''(x) = & f''_{xx}(x, y) + 2f''_{xy}(x, y)g'(x) + f''_{yy}(x, y)g'(x)^2 \\ & - \frac{f'_y(x, y)}{\varphi'_y(x, y)} [\varphi''_{xx}(x, y) + 2\varphi''_{xy}(x, y)g'(x) + \varphi''_{yy}(x, y)g'(x)^2] \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

Sad možemo na jednostavan način dobiti nužne i dovoljne uvjete lokalnih vezanih ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$.

Teorem 3.10 (Nužan i dovoljan uvjet vezanog ekstrema) *Neka funkcije $f, \varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, imaju na $\mathcal{D}$ neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo drugog reda.*

- (i) *Ako funkcija f u točki $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ u kojoj je $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ ima lokalni vezani ekstrem uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$, onda mora postojati realan broj λ_0 takav da za trojku (x_0, y_0, λ_0) vrijedi*

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (\text{C})$$

- (ii) *Ako su točka $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ i realan broj λ_0 takvi da trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (C) i ako je*

$$\tilde{f}''(x_0) \neq 0,$$

pri čemu je $\tilde{f}''(x)$ definirano formulom (B2), onda funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani ekstrem uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$ i to minimum ako je $\tilde{f}''(x_0) > 0$, odnosno maksimum ako je $\tilde{f}''(x_0) < 0$.

Dokaz. Treća jednakost u (C) je očito nužna po Definiciji 3.14. Zbog pretpostavke da je $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ vrijede sva prethodna razmatranja pa je pretpostavka da f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani ekstrem uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$ ekvivalentna pretpostavci da funkcija $\tilde{f}$ jedne varijable x ima običan lokalni ekstrem u točki x_0 . Zato je nužno da bude $\tilde{f}'(x_0) = 0$, što zbog (B1) daje jednakost

$$f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)g'(x_0) = 0.$$

Ovu jednakost, uvažavajući formulu (A1), možemo zapisati u obliku

$$f'_x(x_0, y_0) + \left(-\frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} \right) \varphi'_x(x_0, y_0) = 0.$$

Ovo je upravo prva jednakost u (C) ako definiramo realan broj λ_0 s jednakošću

$$\lambda_0 = -\frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)},$$

koja je očito ekvivalentna drugoj jednakosti u (C). Time je prvi dio teorema dokazan.

Istinitost drugog dijela teorema slijedi neposredno primjenom dovoljnih uvjeta za običan ekstrem funkcije $\tilde{f}$ jedne varijable x i uvažavanjem razmatranja koja su prethodila teoremu. ■

Napomena 3.13 Jasno je da zbog ravnopravnosti varijabla x i y sve što smo do sada rekli o problemu vezanog ekstrema vrijedi i ako zamijenimo uloge varijabla. To znači da smo umjesto od pretpostavke da je $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ u promatranoj točki mogli krenuti od pretpostavke da je $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$. Zbog simetrije po x i y nužan uvjet (C) lokalnog vezanog ekstrema ostao bi isti, dok bi se dovoljan uvjet iskazao pomoću vrijednosti $\tilde{f}''(y_0)$. Pri tome bi $\tilde{f}''(y)$ bilo definirano desnom stranom od (B2) u kojoj je $g'(x)$ zamijenjeno sa $g'(y) = -\varphi'_y(x, y)/\varphi'_x(x, y)$, a faktor $-f'_y(x, y)/\varphi'_y(x, y)$ zamijenjen faktorom $-f'_x(x, y)/\varphi'_x(x, y)$.

Problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = f(x, y) \rightarrow \min, \max \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

ponekad rješavamo uvođenjem *Lagrangeove funkcije* (Lagrangeijana) $L(x, y, \lambda)$ triju nezavisnih varijabla x, y i λ :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Parametar λ zove se *Lagrangeov multiplikator*. Očito je da se nužan uvjet (C) lokalnog vezanog ekstrema funkcije $f(x, y)$ uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$ u točki (x_0, y_0) podudara s nužnim uvjetom običnog ekstrema Lagrangeove funkcije $L(x, y, \lambda)$ u točki (x_0, y_0, λ_0) . Što se tiče dovoljnih uvjeta, nije teško neposrednim računom provjeriti da se vrijednost $\tilde{f}''(x_0)$ može izraziti kao

$$\tilde{f}''(x_0) = -\frac{1}{\varphi'_y(x_0, y_0)^2} \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Naravno, s izmjenjenim ulogama varijabla x i y imali bi

$$\tilde{f}''(y_0) = -\frac{1}{\varphi'_x(x_0, y_0)^2} \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

To nas navodi na slijedeću jednostavniju formulaciju dovoljnih uvjeta: neka trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (C) i neka je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Ako je $\Delta < 0$ onda funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani minimum, a ako je $\Delta > 0$ onda f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani maksimum.

Ako trojka (x_0, y_0, λ_0) zadovoljava uvjet (C), možemo promatrati i samo vrijednost

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Interesantno je da vrijedi slijedeće: ako je $\delta > 0$ i $L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, onda je sigurno $\Delta < 0$ pa funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani minimum, a ako je $\delta > 0$ i $L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, onda je sigurno $\Delta > 0$ pa f u točki (x_0, y_0) ima lokalni vezani maksimum. Međutim, ako je $\delta \leq 0$ ne možemo ništa zaključiti već moramo izračunati Δ .

Nalaženje vezanog ekstrema ilustrirat ćemo s tri primjera.

Primjer 3.22 Neka je zadan problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = xy \rightarrow \min, \max \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Pridružena Lagrangeova funkcija je

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2),$$

pa je nužan uvjet ekstrema

$$\begin{aligned}L'_x &= y + 2\lambda x = 0, \\L'_y &= x + 2\lambda y = 0, \\L'_\lambda &= x^2 + y^2 - 2 = 0.\end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe dobivamo

$$\lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y},$$

odakle slijedi

$$y^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm x.$$

Uvrštavanje u treću jednadžbu daje

$$x^2 + (\pm x)^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Zaključujemo da postoje četiri točke koje zadovoljavaju nužan uvjet:

$$\begin{aligned}T_1 &= (-1, 1), & \lambda_1 &= \frac{1}{2}, \\T_2 &= (1, -1), & \lambda_2 &= \frac{1}{2}, \\T_3 &= (-1, -1), & \lambda_3 &= -\frac{1}{2}, \\T_4 &= (1, 1), & \lambda_4 &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

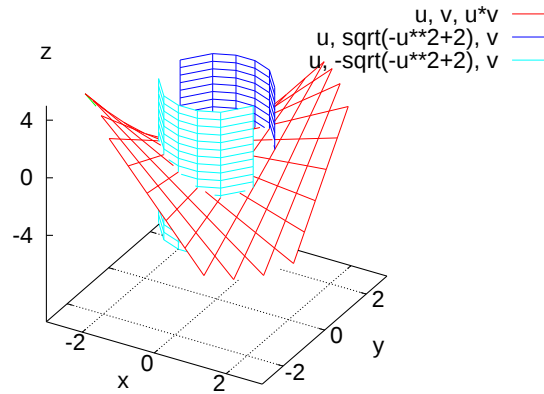
Kako je

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 1,$$

uvrštavanjem odgovarajuće vrijednosti od λ za sve četiri točke dobivamo $\delta = 0$ pa ne možemo donijeti zaključak već moramo računati

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

Uvrštavanjem odgovarajućih vrijednosti od x , y i λ za pojedine točke dobivamo: u točkama T_1 i T_2 je $\Delta = -16 < 0$, a u točkama T_3 i T_4 je $\Delta = 16 > 0$, Zaključujemo da funkcija $z = xy$ ima u točkama T_1 i T_2 lokalni vezani minimum uz dani uvjet $x^2 + y^2 - 2 = 0$, a u točkama T_3 i T_4 lokalni vezani maksimum (vidi Sliku 3.40).



Slika 3.40: Vezani ekstremi

Primjer 3.23 Za problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \rightarrow \min, \max \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

imamo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2).$$

Nužan uvjet ekstrema glasi

$$\begin{aligned} L'_x &= 2x + \lambda = 0, \\ L'_y &= 2y + \lambda = 0, \\ L'_\lambda &= x + y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe dobivamo

$$\lambda = -2x = -2y \quad \Rightarrow \quad y = x,$$

pa uvrštavanjem u treću jednadžbu dobijamo

$$x + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

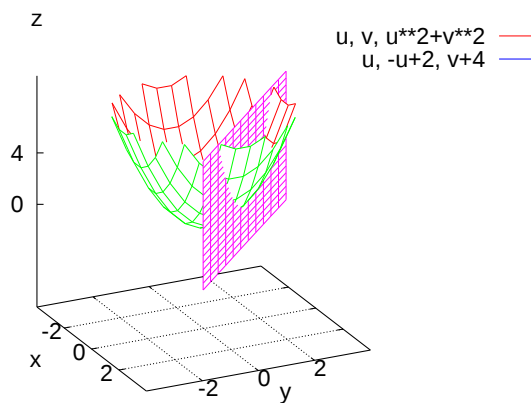
Zaključujemo da postoji samo jedna točka koja zadovoljava nužan uvjet:

$$T_0 = (1, 1), \quad \lambda_0 = -2.$$

Kako je

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

vidimo da u točki T_0 vrijedi $L''_{xx}(1, 1, -2) = 2 > 0$ i $\delta = 4 > 0$. Dakle ne moramo računati vrijednost Δ već smijemo zaključiti da funkcija $z = x^2 + y^2$ u točki T_0 ima lokalni vezani minimum uz dani uvjet $x + y - 2 = 0$ (vidi sliku 3.41).



Slika 3.41: Lokalni vezani minimum

Primjer 3.24 Problemu vezanog ekstrema

$$\begin{cases} z = xy \rightarrow \min, \max \\ y - x = 0 \end{cases}$$

pridružena je Lagrangeova funkcija

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y - x),$$

pa je nužan uvjet ekstrema

$$\begin{aligned} L'_x &= y - \lambda = 0, \\ L'_y &= x + \lambda = 0, \\ L'_\lambda &= y - x = 0. \end{aligned}$$

Očigledno je da su gornje jednađžbe zadovoljene u samo jednoj točki

$$T_0 = (0, 0), \quad \lambda_0 = 0.$$

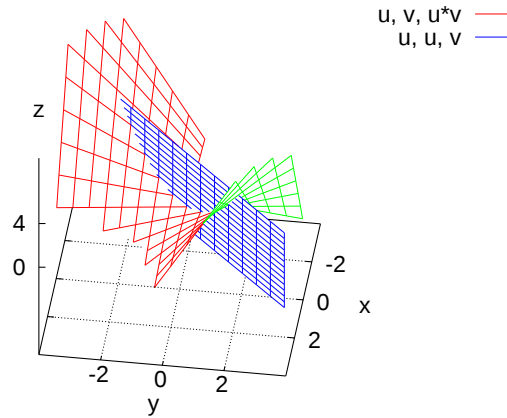
Također imamo

$$\delta = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

što znači da u točki T_0 vrijedi $\delta = -1 < 0$. Dakle ne možemo donijeti zaključak već moramo računati vrijednost Δ . Za sve točke imamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

pa je $\Delta = -2 < 0$ i u točki T_0 . Zaključujemo da funkcija $z = xy$ ima u točki T_0 lokalni vezani minimum uz dani uvjet $y - x = 0$ (vidi sliku 3.42).



Slika 3.42: Lokalni vezani minimum

4.

VIŠESTRUKI INTEGRALI

4.1	Definicija i osnovna svojstva	169
4.2	Dvostruki integral	173
4.2.1	Volumen i površina	176
4.2.2	Polarne koordinate	177
4.2.3	Nepravi integral	180
4.3	Trostruki integral	183
4.3.1	Cilindrične i sferne koordinate	184
4.4	Zamjena varijabli	188
4.5	Momenti i težišta	190
4.6	Integrali ovisni o parametru	195
4.7	Varijacioni račun	200
4.7.1	Nužni i dovoljni uvjeti ekstrema	203
4.7.2	Primjeri	206
4.7.3	Uvjetni ekstrem	213
4.7.4	Eulerova metoda konačnih razlika	218

4.1 Definicija i osnovna svojstva

Višestruki integral (ili *n-terostruki integral* je integral funkcije n varijabli koja je definirana na *zatvorenom n -dimenzionalnom kvadru*

$$K = [a_1, b_1] \times [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n, \quad [a_i, b_i] \in \mathbb{R},$$

a definira se slično određenom integralu funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Definicija 4.1 Neka je $D_i = \{x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}\}$, pri čemu je

$$a_i = x_0^{(i)} \leq x_1^{(i)} \leq x_2^{(i)} \leq \dots \leq x_{n-1}^{(i)} \leq x_n^{(i)} = b_i,$$

jedan rastav segmenta $[a_i, b_i]$ prema definiciji 2.1. Neka $\mathcal{D}_i$ označava skup svih rastava segmenta $[a_i, b_i]$. Kartezijev produkt

$$D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n, \quad D_i \in \mathcal{D}_i,$$

zove se *rastav (dekompozicija) kvadra* K . Skup svih rastava kvadra K označit ćemo s $\mathcal{D}$.

Neka je $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ omeđena funkcija, to jest, neka postoje $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$m \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M, \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K.$$

Tada svakom rastavu $D \in \mathcal{D}$ možemo pridružiti *gornju integralnu suma*

$$g(f, D) = \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} M_{i_1, i_2, \dots, i_n} (x_{i_1}^{(1)} - x_{i_1-1}^{(1)}) (x_{i_2}^{(2)} - x_{i_2-1}^{(2)}) \dots (x_{i_n}^{(n)} - x_{i_n-1}^{(n)}),$$

gdje je

$$M_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \sup\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \in [x_{i_k-1}^{(k)}, x_{i_k}^{(k)}]\},$$

i *donju integralnu suma*

$$d(f, D) = \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} m_{i_1, i_2, \dots, i_n} (x_{i_1}^{(1)} - x_{i_1-1}^{(1)}) (x_{i_2}^{(2)} - x_{i_2-1}^{(2)}) \dots (x_{i_n}^{(n)} - x_{i_n-1}^{(n)}),$$

gdje je

$$m_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \inf\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \in [x_{i_k-1}^{(k)}, x_{i_k}^{(k)}]\}.$$

Ako je

$$\inf\{g(f, D) : D \in \mathcal{D}\} = \sup\{d(f, D) : D \in \mathcal{D}\} = I,$$

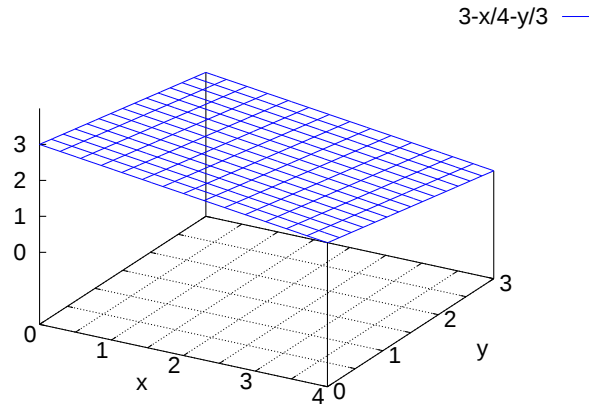
broj I je *određeni (višestruki, n -terostruki) integral funkcije f na kvadru K* .

Kažemo da je funkcija f *integrabilna* na kvadru K i pišemo

$$I = \int_K f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Definiciju ćemo ilustrirati sljedećim jednostavnim primjerom.

Primjer 4.1 Izračunajmo dvostruki integral funkcije $f(x, y) : [0, 4] \times [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definiranu formulom $f(x, y) = 3 - x/4 - y/3$. Radi se zapravo o dijelu ravnine $z = 3 - x/4 - y/3$ koji se nalazi iznad kvadra (pravokutnika) $K = [0, 4] \times [0, 3]$. Vrhovi tog dijela ravnine su točke $(0, 0, 3)$, $(4, 0, 1)$, $(0, 3, 2)$ i $(4, 3, 0)$. Funkcija je prikazana na slici 4.1 na kojoj se vidi i jedan rastav kvadra K . Kvadar (pravokutnik) je u ovom slučaju rastavljen na 48 dijelova: segment $[0, 4]$ je rastavljen na osam, a segment $[0, 3]$ na šest dijelova.



Slika 4.1: Primjer višestrukog integrala

Zadana funkcija na svakom dijelu $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ očito postiže maksimum u prednjem lijevom uglu, a minimum u stražnjem desnom uglu,

$$M_{i,j} = \max_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]} f(x, y) = f(x_{i-1}, y_{j-1}) = 3 - \frac{x_{i-1}}{4} - \frac{y_{j-1}}{3},$$

$$m_{i,j} = \min_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]} f(x, y) = f(x_i, y_j) = 3 - \frac{x_i}{4} - \frac{y_j}{3}.$$

Uz oznake $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ i $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, donja suma je jednaka

$$\begin{aligned} d(f, D) &= \sum_i \sum_j f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_i \sum_j \left(3 - \frac{x_i}{4} - \frac{y_j}{3} \right) \Delta x_i \Delta y_j \\ &= 3 \sum_i \sum_j \Delta x_i \Delta y_j - \frac{1}{4} \sum_j \Delta y_j \sum_i x_i \Delta x_i - \frac{1}{3} \sum_i \Delta x_i \sum_j y_j \Delta y_j \\ &= 3 \cdot 12 - \frac{3}{4} \sum_i x_i \Delta x_i - \frac{4}{3} \sum_j y_j \Delta y_j. \end{aligned}$$

Prelaskom na limes kada $\Delta x_i \rightarrow 0$ i $\Delta y_j \rightarrow 0$ i korištenjem definicije određenog integrala iz poglavlja 2.1 imamo

$$\sup d(f, D) = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0}} d(f, D) = 36 - \frac{3}{4} \int_0^4 x \, dx - \frac{4}{3} \int_0^3 y \, dy = 24.$$

Slično se pokaže da je

$$\inf g(f, D) = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0}} g(f, D) = 24$$

pa je zadana funkcija integrabilna na kvadru K i vrijedi

$$\iint_K \left(3 - \frac{x}{4} - \frac{y}{3} \right) dx \, dy = 24.$$

Ukoliko područje integracije nije kvadar, višestruki integral definiramo na sljedeći način.

Definicija 4.2 Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđena funkcija i neka je D sadržano u nekom kvadru K (D ne mora biti kvadar). Funkciju $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo kao proširenje funkcije f :

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n), & (x_1, \dots, x_n) \in D, \\ 0, & (x_1, \dots, x_n) \in K \setminus D. \end{cases}$$

Ako je funkcija g integrabilna na kvadru K , integral funkcije f na skupu D definiramo kao

$$\int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_K g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Skup D je *područje integracije*.

Iz prethodnih definicija slijede osnovna svojstva višestrukog integrala. Za funkcije f i g koje su integrabilne na području D vrijedi:

V1. *linearnost*, odnosno

$$\int_D (\alpha f + \beta g) dx_1 \cdots dx_n = \alpha \int_D f dx_1 \cdots dx_n + \beta \int_D g dx_1 \cdots dx_n,$$

gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, i

V2. integriranje po dijelovima područja integracije, odnosno

$$\int_D f dx_1 \cdots dx_n = \int_{D_1} f dx_1 \cdots dx_n + \int_{D_2} f dx_1 \cdots dx_n,$$

gdje je $D = D_1 \cup D_2$ i $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

4.2 Dvostruki integral

Dvostruki integral računamo uzastopnim računanjem dva jednostruka integrala pomoću Newton-Leibnitzove formule (vidi poglavlje 2.2). Opisat ćemo postupak integriranja u slučajevima kada je područje integracije:

- pravokutno,
- omeđeno dvjema neprekidnim funkcijama, i
- zadano u polarnim koordinatama.

Teorem 4.1 *Neka je $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija definirana na pravokutniku $K = [a, b] \times [c, d]$.¹ Tada je*

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Dokaz teorema se temelji na svojstvu da kod dvostrukih suma možemo zamijeniti poredak zbrajanja, odnosno

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}.$$

Detalje dokaza izostavljamo.

Primjer 4.2 Izračunajmo

$$I = \iint_K x y^2 dx dy$$

¹Funkcija f je također omeđena na zatvorenom skupu $[a, b] \times [c, d]$ po svojstvu (ii) iz poglavlja 3.3.

pri čemu je $K = [a, b] \times [c, d]$. Prema teoremu 4.1 vrijedi

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \left(\int_c^d x y^2 dy \right) dx = \int_a^b \left[x \frac{y^3}{3} \Big|_c^d \right] dx = \int_a^b x \left(\frac{d^3}{3} - \frac{c^3}{3} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} (d^3 - c^3) \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{6} (d^3 - c^3) (b^2 - a^2). \end{aligned}$$

Isti rezultat dobit ćemo i pomoću integrala

$$I = \int_c^d \left(\int_a^b x y^2 dx \right) dy.$$

Napomena 4.1 Iz primjera 4.2 vidimo da se prvo integrira po jednoj, a zatim po drugoj varijabli, pri čemu rezultat ne ovisi o redoslijedu integriranja. Slično vrijedi i kada područje integracije nije pravokutnik, kao i kod viših dimenzija.

Napomena 4.2 Integral iz primjera 4.2 je *integral sa separiranim varijablama*, odnosno može se rastaviti na produkt dva jednostruka integrala, što općenito nije slučaj:

$$\int_a^b \left(\int_c^d x y^2 dy \right) dx = \int_a^b x dx \cdot \int_c^d y^2 dy.$$

Ako je područje integracije D zadano dvama neprekidnim funkcijama,

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

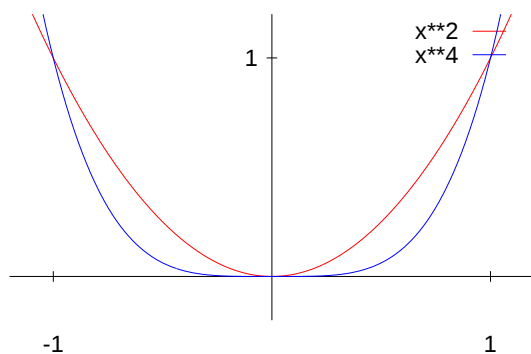
tada je

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Primjer 4.3 Izračunajmo integral

$$I = \iint_D (x + y^2) dx dy,$$

pri čemu je D područje omeđeno funkcijama $y = x^2$ i $y = x^4$. Za određivanje granica integracije potrebno je skicirati područje D , što je napravljeno na slici 4.2.



Slika 4.2: Područje integracije dvostrukog integrala

Vidimo da je

$$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, x^4 \leq y \leq x^2\}$$

pa je

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \left(\int_{x^4}^{x^2} (x + y^2) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left[xy + \frac{y^3}{3} \right]_x^{x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(x^3 + \frac{x^6}{6} - x^5 - \frac{x^{12}}{3} \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{21} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^{13}}{39} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{91}. \end{aligned}$$

No, prema napomeni 4.1 i svojstvu V2, integral možemo riješiti i integrirajući prvo po varijabli x . Područje D rastavljamo na uniju dva disjunktna područja D_1 i D_2 , gdje je

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt[4]{y} \leq x \leq -\sqrt{y}\}, \\ D_2 &= \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq \sqrt[4]{y}\}, \end{aligned}$$

pa je

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt[4]{y}}^{-\sqrt{y}} (x + y^2) dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} (x + y^2) dx \right) dy = \dots = \frac{4}{91}.$$

4.2.1 Volumen i površina

Dvostruki integral koristimo za računanje volumena (obujma) i površine. Neka je podintegralna funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, neprekidna (tada je i omeđena) i nenegativna, i neka je područje D omeđeno s po dijelovima glatkom jednostavnom zatvorenim krivuljom². Tada je vrijednost pripadnog dvostrukog integrala jednaka volumenu tijela Ω koje je omeđeno bazom D u xy -ravnini i plohom $z = f(x, y)$,

$$V(\Omega) = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D z dP.$$

Izraz $dP = dx dy$ označava *element površine*, odnosno površinu pravokutnika sa stranicama dx i dy .

Ako je $z = f(x, y) = 1$, tada dvostruki integral daje površinu područja D (volumen tijela s bazom D visine 1 jednak je površini baze):

$$P(D) = V(\Omega) = \iint_D dP.$$

Primjer 4.4 Izračunajmo obujam tijela omeđenog ravninama

$$z = 0, \quad y = x, \quad y = 3x, \quad y = 2 - x, \quad y = 4 - x,$$

i plohom $z = x^2 + y^2$. Zadana ploha je kružni paraboloid s vrhom u ishodištu (vidi poglavlje 3.4.1). Područje integracije D određeno je s četiri zadnje ravnine i prikazano je na slici 4.3.

Rastavljajući područje integracije na dva dijela imamo

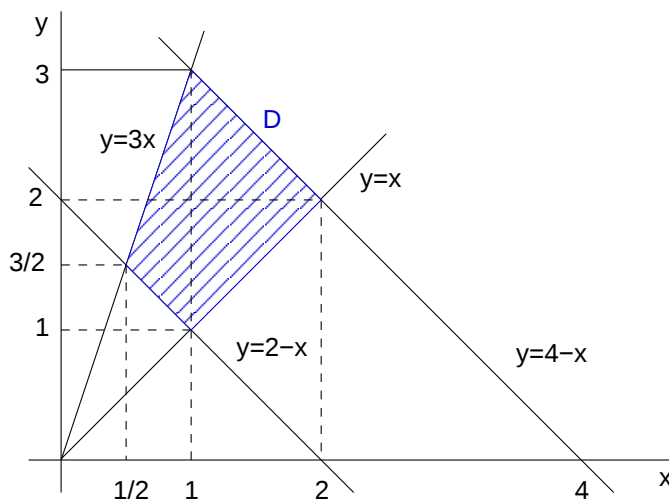
$$V = \int_{1/2}^1 \int_{2-x}^{3x} (x^2 + y^2) dy dx + \int_1^2 \int_x^{4-x} (x^2 + y^2) dy dx.$$

Alternativno, rastavljajući područje integracije na tri dijela i integrirajući prvo po varijabli x imamo

$$V = \int_1^{3/2} \int_{2-y}^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_{3/2}^2 \int_{y/3}^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_2^3 \int_{y/3}^{4-y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Riješite primjer do kraja na oba načina.

²Krivulja je glatka, što znači da se sastoji od konačno glatkih dijelova; krivulja je jednostavna, što znači da ne presijeca samu sebe; i krivulja je zatvorena, što znači da počinje i završava u istoj točki.



Slika 4.3: Područje integracije za računanje volumena

Nadalje, volumen tijela Ω omeđenog plohami $z = f(x, y)$ i $z = g(x, y)$, pri čemu je

$$f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in D,$$

a $D \subset \mathbb{R}^2$ je područje omeđeno po dijelovima glatkom jednostavnom zatvorenom krivuljom, se računa po formuli

$$V(\Omega) = \iint_D (f(x, y) - g(x, y)) dx dy. \quad (4.1)$$

Ovo je prirodno poopćenje formule za računanje površine ravninskih likova pomoću jednostrukog integrala iz poglavlja 2.6.1.

4.2.2 Polarne koordinate

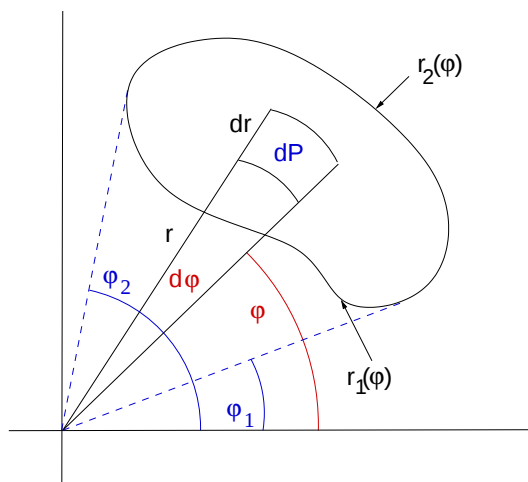
Neka je područje $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zadano u polarnom koordinatnom sustavu kao

$$D = \{(r, \varphi) : \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\},$$

gdje su $r_1, r_2 : [\varphi_1, \varphi_2] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Tada koristimo supstituciju (usporedi s poglavljem 2.6.1)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (4.2)$$

Element površine prikazan je na slici 4.4.



Slika 4.4: Element površine u polarnim koordinatama II

Formula za površinu kružnog isječka daje

$$\begin{aligned} dP &= \frac{1}{2} (r + dr)^2 d\varphi - \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} (r^2 + (dr)^2 + 2r dr - r^2) d\varphi \\ &= r dr d\varphi - \frac{1}{2} (dr)^2 d\varphi \\ &\approx r dr d\varphi, \end{aligned}$$

pri čemu izraz $\frac{1}{2} (dr)^2 d\varphi$ možemo zanemariti jer teži k nuli brže od izraza $r dr d\varphi$. Prema tome, vrijedi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

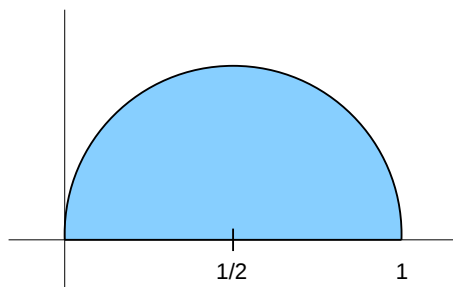
Uočimo da se u polarnim koordinatama uvijek integrira prvo po r pa onda po φ . Opće pravilo zamjene varijabli u višestrukome integralu dano je u poglavlju 4.4.

Primjer 4.5 Izračunajmo integral

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy,$$

gdje je D polukrug u prvom kvadrantu omeđen kružnicom $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$ i osi x (slika 4.5). Radi se o volumenu tijela što ga iz polukugle

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ izreže cilindar s bazom D (usporedi sa sličnim tijelom iz poglavlja 3.4.7).



Slika 4.5: Polukrug u prvom kvadrantu

Da bi mogli područje D opisati u polarnim koordinatama, potrebno je naći odgovarajuću jednadžbu zadane kružnice. Uvrštavanje supstitucije (4.2) u jednadžbu kružnice daje

$$\left(r \cos \varphi - \frac{1}{2}\right)^2 + (r \sin \varphi)^2 = \frac{1}{4},$$

odnosno

$$r^2 \cos^2 \varphi - r \cos \varphi + \frac{1}{4} + r^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{4}.$$

Vrijedi $r(r - \cos \varphi) = 0$ pa jednadžba zadane kružnice u polarnim koordinatama glasi

$$r = \cos \varphi.$$

Dakle, područje D (polukružnica) opisano je s

$$D = \{(r, \varphi) : \varphi \in [0, \pi/2], r \in [0, \cos \varphi]\}$$

pa je

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \varphi} \sqrt{1-r^2} r dr d\varphi = \left\{ \begin{array}{l} 1-r^2 = t \\ -2r dr = dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} r & 0 & \cos \varphi \\ \hline t & 1 & \sin^2 \varphi \end{array} \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_1^{\sin^2 \varphi} \sqrt{t} dt d\varphi = -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} t^{3/2} \Big|_1^{\sin^2 \varphi} d\varphi = \{\sin \varphi > 0\} \\
 &= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin^3 \varphi - 1) d\varphi = \frac{1}{3} \varphi \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi \\
 &= \{\cos \varphi = u\} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \int_1^0 (1 - u^2) du = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}.
 \end{aligned}$$

4.2.3 Nepravi integral

Nepravi integrali funkcija više varijabli definiraju se pomoću limesa, slično kao i nepravi integral funkcije jedne varijable (vidi poglavlje 2.5). Pri tome nastupaju razni fenomeni i problemi slični fenomenima kod proučavanja limesa funkcija više varijabli (vidi poglavlje 3.2), koje nećemo detaljno izučavati. Navest ćemo samo sljedeći zanimljiv primjer.

Izračunajmo

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Geometrijski se radi o površini između krivulje $y = e^{-x^2}$ i x -osi (vidi sliku 4.6). Ovaj integral se koristi u teoriji vjerojatnosti. Naime, zadana podintegralna funkcija je vrlo slična funkciji

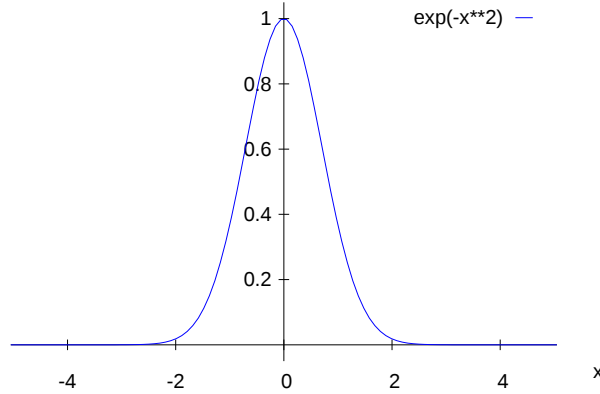
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

što je takozvana *funkcija gustoće vjerojatnosti normalne razdiobe* (ili *Gaussove razdiobe*) s očekivanjem μ i standardnom devijacijom σ ³.

Parnost podintegralne funkcije i prelazak na limes daju

$$I = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-x^2} dx \equiv 2 \lim_{r \rightarrow \infty} I_r.$$

³Više informacija o ovim pojmovima možete naći na adresi http://www.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution.

Slika 4.6: Funkcija $y = e^{-x^2}$

Ako $\lim I_r$ postoji, tada je

$$\left(\lim_{r \rightarrow \infty} I_r \right)^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} I_r^2,$$

pa je

$$I = 2 \sqrt{\lim_{r \rightarrow \infty} I_r^2}.$$

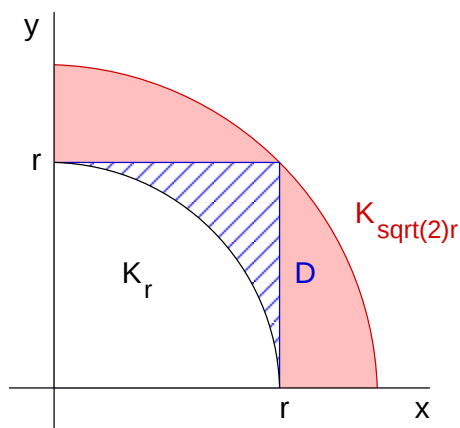
Vrijedi

$$\begin{aligned} I_r^2 &= I_r \cdot I_r = \int_0^r e^{-x^2} dx \cdot \int_0^r e^{-y^2} dy = \int_0^r \int_0^r e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &\equiv \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Područje integracije D je, dakle, kvadrat s stranicom r u prvom kvadrantu. Neka je K_r četvrtina kruga u prvom kvadrantu upisana kvadratu D i neka je $K_{\sqrt{2}r}$ četvrtina kruga u prvom kvadrantu opisana kvadratu D (vidi sliku 4.7).

Kako je $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ i $K_r \subset D \subset K_{\sqrt{2}r}$, vrijedi

$$\iint_{K_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq I_r \leq \iint_{K_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \quad (4.3)$$



Slika 4.7: Kvadrat s upisanom i opisanom četvrtinom kruga

U polarnim koordinatama vrijedi

$$\iint_{K_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^r e^{-t^2} t dt d\varphi.$$

Uz supstituciju $t^2 = u$ vrijedi

$$\int e^{-t^2} t dt = \frac{1}{2} \int e^{-u} du = -\frac{1}{2} \int e^{-u} - \frac{1}{2} e^{-t^2}$$

pa je

$$\iint_{K_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) \Big|_0^r = \frac{\pi}{4} \left(-e^{-r^2} + 1 \right).$$

Dakle,

$$\iint_{K_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

kada $t \rightarrow \infty$. Slično vrijedi

$$\iint_{K_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4} \left(-e^{-2r^2} + 1 \right) \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

kada $t \rightarrow \infty$. Relacija (4.3) i Teorem o ukliještenoj funkciji [M1, teorem 4.4] povlače

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_r^2 = \frac{\pi}{4}$$

pa je konačno

$$I = \sqrt{\pi}.$$

4.3 Trostruki integral

Trostruki integral neprekidne funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, računamo slično kao i dvostruki integral. Ako je područje integracije kvadar,

$$D = [a, b] \times [c, d] \times [e, g],$$

tada je

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^g f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx,$$

pri čemu je $dV = dx dy dz$ *element volumena*. Kao i u slučaju dvostrukog integrala, mogući su i drugi redoslijedi integriranja.

Ako je područje D određeno relacijama

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b, \\ h_1(x) &\leq y \leq h_2(x), \\ g_1(x, y) &\leq z \leq g_2(x, y), \end{aligned}$$

tada je

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx.$$

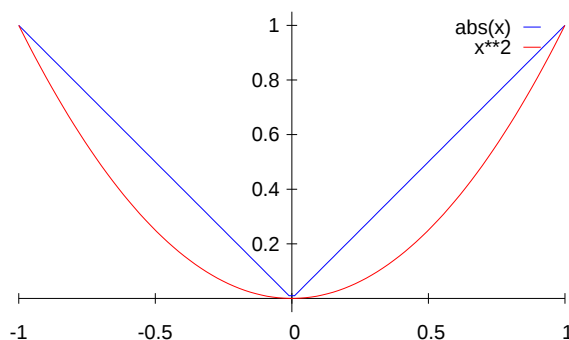
Tipične primjene trostrukog integrala su sljedeće:

- ako je $f(x, y, z)$ gustoća tijela koje zaprema područje D u točki $T = (x, y, z)$, tada je trostruki integral $\iiint_D f(x, y, z) dV$ jednak masi tog tijela;
- ako je $f(x, y, z) = 1$, tada trostruki integral daje volumen područja D^4 ,

$$V(D) = \iiint_D dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} dz dy dx.$$

Primjer 4.6 Odredimo volumen tijela omeđenog plohami $z = x^2 + y^2$ i $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Rad se o volumenu područja između paraboloida i stošca čiji je presjek s ravninom $y = 0$ prikazan na slici 4.8.

⁴Integriranje ove formule po varijabli z daje formulu 4.1.

Slika 4.8: Projekcija presjeka paraboloida i stošca na xz -ravninu

Za postavljanje integrala trebamo opisati područje D . Nađimo presjek zadanih ploha: izjednačavanje $z = z$ daje jednadžbu

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

koja ima rješenja $x = y = 0$ i $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ odnosno $x^2 + y^2 = 1$. Dakle, prvo rješenje je ishodište gdje se dvije zadane plohe očito sijeku, a iz drugog rješenja vidimo da se plohe još sijeku u jediničnoj središnjoj kružnici za $z = 1$. Stoga je zadani volumen jednak

$$V = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \, dy \, dx.$$

Primjer ćemo riješiti do kraja u slijedećem poglavlju koristeći cilindrične koordinate.

4.3.1 Cilindrične i sferne koordinate

Cilindrični koordinatni sustav odnosno *cilindrične koordinate* zadane su transformacijama:

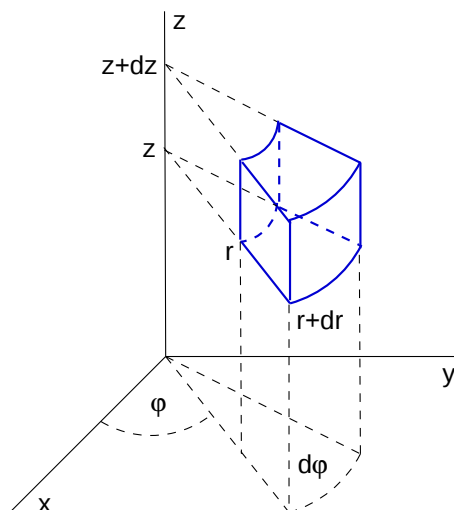
$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

pri čemu je $r \geq 0$ i $\varphi \in [0, 2\pi]$ ili $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Dakle, element volumena jednak je umnošku površine baze i visine, s time što se površina baze računa u polarnim koordinatama (vidi sliku 4.9)

$$dV = r \, dr \, d\varphi \, dz$$

pa je

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dV = \iiint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r \, dr \, d\varphi \, dz.$$



Slika 4.9: Element volumena u cilindričnim koordinatama

Primjer 4.7 Volumen iz primjera 4.6 je lako izračunati prelaskom na cilindrične koordinate. Vrijedi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^r dz \, r \, dr \, d\varphi = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 (z \Big|_{r^2}^r) r \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 (r^2 - r^3) \, dr = \frac{1}{6} \pi. \end{aligned}$$

Sferne koordinate ili *prostorne polarne koordinate* zadane su transforma-

cijama

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta,$$

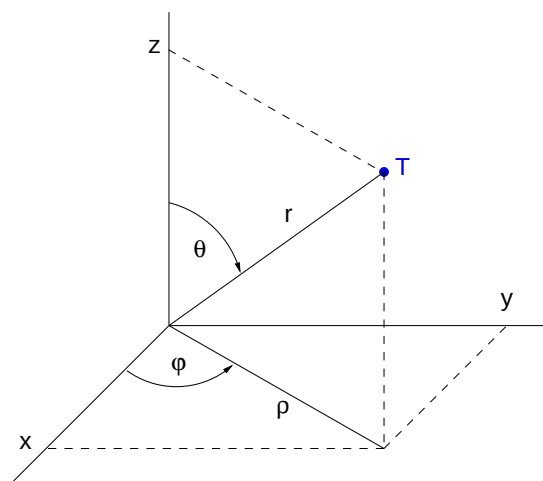
pri čemu je $r \geq 0$, a obično se odabire $\theta \in [0, \pi]$ i $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Uz oznaku $\rho = r \sin \theta$ možemo pisati

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta.$$

Sferne koordinate prikazane su na slici 4.10.



Slika 4.10: Sferne koordinate

Zadatak 4.1 Prethodne formule služe za prebacivanje iz sfernih u Kartezijeve koordinate, $(r, \theta, \varphi) \rightarrow (x, y, z)$. Izvedite formule za prebacivanje iz Kartezijevih u sferne koordinate, $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$.

Primjer 4.8 Primjer jedne verzije sfernog koordinatnog sustava koji je često u upotrebi su zemljopisne karte. Udaljenost r se prikazuje kao nadmorska visina, kut φ je zemljopisna dužina koja se mjeri istočno i zapadno od Greenwicha, što odgovara odabiru $\varphi \in [-\pi, \pi]$, a kut θ je zemljopisna širina koja se mjeri sjeverno i južno od ekvatora, što odgovara odabiru $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Odabir $\theta \in [0, \pi]$ je matematički povoljniji (vidi kasnije), jer je tada $\sin \theta \geq 0$.

Za računanje trostrukog integrala u sfernom koordinatnom sustavu potrebno je izračunati element volumena dV . Iz slike 4.11 vidimo da je

$$dV \approx a b dr,$$

pri čemu je

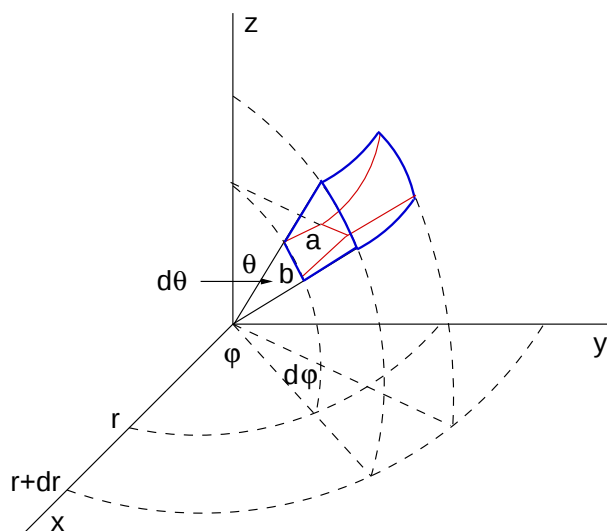
$$a = r \sin \theta d\varphi, \quad b = r d\theta.$$

Dakle,

$$dV \approx r^2 \sin \theta d\theta dr d\varphi.$$

Točan izraz za dV sadrži još i druge članove, no oni teže k nuli brže nego glavni izraz pa ih izostavljamo⁵. Dakle, u sfernim koordinatama vrijedi

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iiint_D f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta dr d\varphi.$$



Slika 4.11: Element volumena u sfernim koordinatama

⁵Usporedi sa izvodom elementa površine dP u polarnim koordinatama iz poglavlja 4.2.2.

Primjer 4.9 Volumen kugle K radijusa R jednak je

$$\begin{aligned} V &= \iiint_K 1 \cdot dV = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \cdot \int_0^R r^2 \, dr = \varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \\ &= \frac{4}{3} R^3 \pi. \end{aligned}$$

4.4 Zamjena varijabli

U prethodnom poglavlju izveli smo dvije zamjene varijabli: iz Kartezijevih u cilindrične i iz Kartezijevih u sferne koordinate. No, problem zamjene varijabli u višestrukim integralima je općeniti problem koji ima općenito rješenje. Za trostruki integral ($n = 3$) postupak je dan sljedećim teoremom kojeg navodimo bez dokaza.

Teorem 4.2 *Neka je zadan integral*

$$I = \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad D \subseteq \mathbb{R}^3,$$

i neka je funkcija f neprekidna i integrabilna na skupu D . neka je $D' \subseteq \mathbb{R}^3$ i neka su $\alpha, \beta, \gamma : D' \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije za koje je preslikavanje $p : D' \rightarrow D$ definirano s

$$p(u, v, w) = (\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w))$$

bijekcija. Ako je Jakobijan (Jacobijeva matrica)

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial \alpha}{\partial w} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial \beta}{\partial w} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} & \frac{\partial \gamma}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall (u, v, w) \in D',$$

tada je

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{D'} f(\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w)) |J| \, du \, dv \, dw.$$

U prethodnom teoremu varijable x, y i z mogu biti varijable u bilo kojem koordinatnom sustavu (ne nužno Kartezijevom). Zamjena varijabli se na analogan način definira i za ostale dimenzije ($n = 2, n = 4, n = 5, \dots$).

Primjer 4.10 Kod prelaza iz Kartezijevog u sferni koordinatni sustav možemo uzeti

$$\begin{aligned} u = r, & \quad \alpha(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi, \\ v = \theta, & \quad \beta(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi, \\ w = \varphi, & \quad \gamma(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta. \end{aligned}$$

Nadalje, ako je $D = \mathbb{R}^3$ tada je $D' = [0, \infty] \times [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Iz definicije sfernih koordinata slijedi da je preslikavanje

$$p : D' \rightarrow D, \quad p(r, \theta, \varphi) = (x, y, z),$$

bijekcija. Funkcije α, β i γ su diferencijabilne, a Jakobijan glasi

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial r} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} & \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \beta}{\partial r} & \frac{\partial \beta}{\partial \theta} & \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial r} & \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} & \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

Konačno, zbog $\theta \in [0, \pi]$ je $\sin \theta \geq 0$ pa je

$$|J| = |r^2 \sin \theta| = r^2 \sin \theta.$$

Zadatak 4.2 Izvedite Jakobijan za cilindrične koordinate.

Primjer 4.11 Za $n = 2$ teorem 4.2 vrijedi tako što jednostavno zanemarimo treću varijablu pa Jakobijan postaje determinanta drugog reda. Na primjer, za prelaz iz Kartezijevih u polarne koordinate vrijedi

$$\begin{aligned} x = r \cos \varphi &\equiv \alpha(r, \varphi), \\ y = r \sin \varphi &\equiv \beta(r, \varphi). \end{aligned}$$

Stoga je

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial r} & \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \beta}{\partial r} & \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

pa je, zbog $r \geq 0$, i $|J| = r$.

4.5 Momenti i težišta

U ovom poglavlju poopćit ćemo razmatranja iz poglavlja 2.6.7 na dvodimenzionalni i trodimenzionalni slučaj.

Promotrimo ravnu ploču $\mathcal{P}$ gustoće $\rho(x, y)$ koja zauzima područje $D \subset \mathbb{R}^2$. Ploču ćemo podijeliti na male pravokutnike P_{ij} površine $\Delta P = \Delta x \Delta y$. Označimo li središte pravokutnika P_{ij} s $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$, masa m_{ij} dotičnog pravokutnika je približno jednaka

$$m_{ij} \approx \rho(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta P,$$

dok su momenti oko osi x -osi i y -osi približno jednaki

$$\begin{aligned} [M_x]_{ij} &\approx m_{ij} \bar{y}_{ij} = [\rho(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta P] \bar{y}_{ij}, \\ [M_y]_{ij} &\approx m_{ij} \bar{x}_{ij} = [\rho(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta P] \bar{x}_{ij}. \end{aligned}$$

Sumirajući po svim i i j i prelaskom na limes kada $\Delta P \rightarrow 0$, slijedi

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \sum_{i,j} m_{ij} = \iint_D \rho(x, y) dP, \\ M_x &= \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \sum_{i,j} [M_x]_{ij} = \iint_D y \rho(x, y) dP, \\ M_y &= \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \sum_{i,j} [M_y]_{ij} = \iint_D x \rho(x, y) dP, \end{aligned}$$

pri čemu su m , M_x i M_y redom masa ploče $\mathcal{P}$, moment ploče $\mathcal{P}$ oko x -osi i moment ploče $\mathcal{P}$ oko y -osi.

Koordinate težišta ploče $\mathcal{P}$ su, kao i u poglavlju 2.6.7, jednake

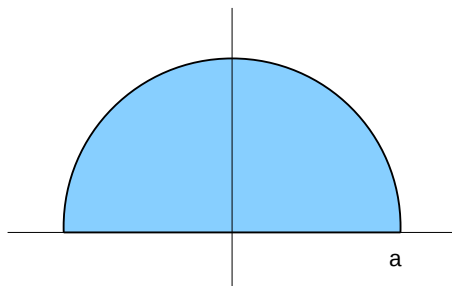
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

Primjer 4.12 Odredimo težište polukružne ploče čija je gustoća jednaka udaljenosti od središta kruga: ako središte kruga smjestimo u ishodište, tada jednadžba kruga glasi $x^2 + y^2 = a^2$ (vidi sliku 4.12) pa je gustoća ploče u točki (x, y) dana formulom

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Prelaskom na polarne koordinate imamo

$$m = \iint_D \rho(x, y) dP = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dP = \int_0^\pi \int_0^a r \cdot r dr d\varphi = \frac{1}{3} \pi a^3$$



Slika 4.12: Polukružna ploča

Nadalje, kako su i ploča i funkcija gustoće simetrične s obzirom na y -os, težište se nalazi na y -osi, odnosno vrijedi $\bar{x} = 0$, dok je

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dP = \frac{3}{\pi a^3} \int_0^\pi \int_0^a r \sin \varphi \cdot r \cdot r dr d\varphi = \frac{3a}{2\pi}.$$

Dakle, težište se nalazi u točki $T = (0, 3a/(2\pi))$.

Zadatak 4.3 Nađite težište trokutaste ploče s vrhovima $(0, 0)$, $(2, 0)$ i $(0, 1)$ i funkcijom gustoće $\rho(x, y) = 1 + 2x + y$.

Moment inercije ili *moment drugog reda* čestice mase m oko x -osi definiramo kao $m d^2$, pri čemu je d udaljenost čestice od osi. Kao i u prethodnom izlaganju ploču podijelimo na male pravokutnike, zbrojimo momente inercije oko x -osi svih pravokutnika te pređemo na limes kada površine pravokutnika teže u nulu. na taj način smo dobili *moment inercije ploče P oko x -osi*:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dP.$$

Slično dobijemo i izraz za moment *moment inercije ploče P oko x -osi*:

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dP.$$

Moment inercije ploče P oko ishodišta definiramo kao

$$I_o = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dP.$$

Primijetimo da je $I_o = I_x + I_y$.

Primjer 4.13 Nađimo momente inercije homogenog diska gustoće ρ , radijusa a s centrom u ishodištu. Rub područja integracije D je kružnica $x^2 + y^2 = a^2$. U polarnim koordinatama vrijedi

$$I_o = \iint_D (x^2 + y^2) \rho \, dP = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{2} \pi \rho a^4.$$

Zbog simetrije problema je $I_x = I_y$ iz čega slijedi

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_o = \frac{1}{4} \pi \rho a^4.$$

Uočimo da je masa diska jednaka

$$m = \rho \pi a^2$$

pa stoga možemo pisati

$$I_o = \frac{1}{2} m a^2.$$

Dakle, ako povećamo radijus ili masu diska, povećat će se i moment inercije. Što je moment inercije veći, to je teže pokretanje i zaustavljanje rotacije diska oko osovine.

Promotrimo sada trodimenzionalni slučaj tijela Ω gustoće $\rho(x, y, z)$ zauzima područje $D \subset \mathbb{R}^3$. Sličnim razmatranjem kao i do sada, masa tijela Ω jednaka je

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z) \, dV,$$

pri čemu je dV element volumena (vidi poglavlje 4.3). Momenti oko koordinatnih ravnina su redom

$$M_{yz} = \iiint_D x \rho(x, y, z) \, dV,$$

$$M_{xz} = \iiint_D y \rho(x, y, z) \, dV,$$

$$M_{xy} = \iiint_D z \rho(x, y, z) \, dV.$$

Težište se nalazi u točki $T = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, gdje je

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

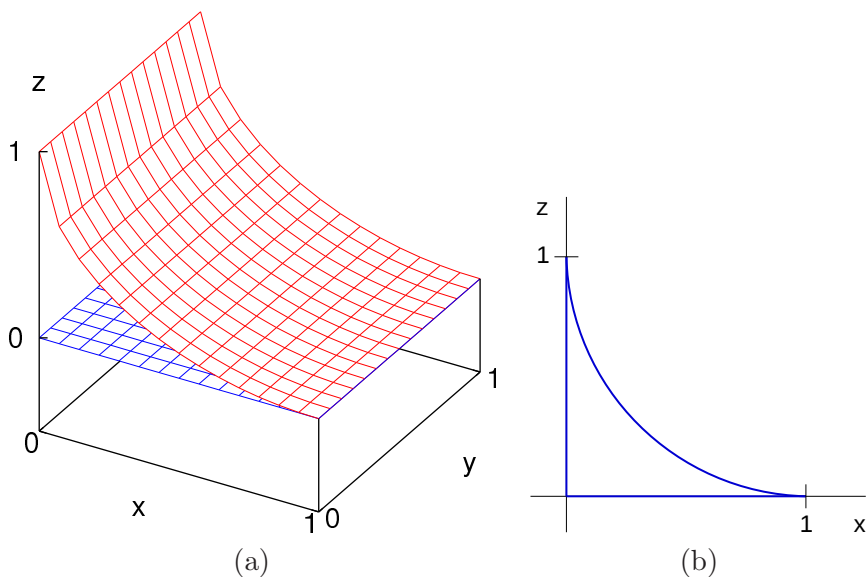
Momenti inercije oko koordinatnih osiju su

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV.$$

Primjer 4.14 Nađimo težište tijela homogene gustoće ρ koje je omeđeno plohom $z = 1 - \sqrt{1 - (x - 1)^2}$ i ravninama $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ i $z = 0$. Tijelo, koje ima oblik idealne naprave za blokadu kotača, i njegova projekcija na xz -ravninu prikazani su na slikama 4.13(a) i 4.13(b), redom.



Slika 4.13: Blokada kotača i projekcija na xz -ravninu

Tijelo zaprema područje

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{1 - (x - 1)^2}\}.$$

Masa tijela jednaka je

$$\begin{aligned} m &= \iiint_D \rho dV = \rho \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} dz dy dx = \rho y \Big|_0^1 \int_0^1 z \Big|_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} dx \\ &= \rho \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - (x-1)^2}) dx = \rho \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \approx 0.215 \rho. \end{aligned}$$

Prethodni integral se može riješiti supstitucijom $x-1 = \sin t$, no do rješenja možemo doći i jednostavnije: u ovom slučaju tijelo ima homogenu gustoću pa je masa jednaka umnošku gustoće i volumena. Volumen V je jednak umnošku površine baze, koja je prikazana na slici 4.13(b), i visine koja je jednaka 1. Površina baze P jednaka je razlici površine jediničnog kvadrata i četvrtine površine jediničnog kruga. Dakle $V = P \cdot 1 = 1 - \pi/4$.

Vrijedi

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \iiint_D \rho y dV = \rho \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 \int_0^1 z \Big|_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

pa je $\bar{y} = M_{xz}/m = 1/2$. To je i logično jer tijelo ima homogenu gustoću, a simetrično je s obzirom na pravac $y = 1/2$. Nadalje,

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_D \rho z dV = \rho y \Big|_0^1 \int_0^1 \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - (x-1)^2})^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} x-1 = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ t & \frac{3}{2}\pi & 2\pi \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \rho \frac{10 - 3\pi}{12} \end{aligned}$$

pa je

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{10 - 3\pi}{3(4 - \pi)} \approx 0.223.$$

Zbog simetrije zaključujemo da mora vrijediti $\bar{x} = \bar{z}$ pa⁶ se težište tijela nalazi u točki

$$T = \left(\frac{10 - 3\pi}{3(4 - \pi)}, \frac{1}{2}, \frac{10 - 3\pi}{3(4 - \pi)} \right).$$

⁶Uvjerite se u ovu tvrdnju tako što ćete izračunati moment M_{yz} .

Zadatak 4.4 Nađite težište tijela homogene gustoće koje je omeđeno paraboličkim cilindrom $y^2 = x$ i ravninama $x = 1$, $z = 0$ i $z = x$.

4.6 Integrali ovisni o parametru

U ovom poglavlju opisat ćemo postupke deriviranja i integriranja integrala ovisnih o parametru, kao i primjene tih postupaka na rješavanje nekih određenih integrala. Također ćemo obraditi gama i beta funkcije.

Promotrimo integral

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$$

u kojem integrand $f(x, \alpha)$ ovisi o parametru α , pri čemu i granice integracije također mogu biti funkcije od α . Kada se α mijenja, vrijednost određenog integrala se također mijenja pa je zadani integral funkcija od α . Kao i kod svih funkcije jedne varijable (vidi [M1, §5], računanje derivacija je od izuzetne važnosti.

Teorem 4.3 *Neka su funkcija $f(x, \alpha)$ i njena parcijalna derivacija $f'_\alpha(x, \alpha)$ neprekidne za skup*

$$A = \{(x, \alpha) : a \leq x \leq b, c \leq \alpha \leq d\}.$$

Tada za svaki $\alpha \in (c, d)$ vrijedi Leibnitzova formula

$$I'(\alpha) = \left[\int_a^b f(x, \alpha) dx \right]'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx.$$

Dokaz. Prema definiciji derivacije [M1, (5.1)] je

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{I(x, \alpha + \Delta\alpha) - I(x, \alpha)}{\Delta\alpha} \\ &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\alpha} \left[\int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx - \int_a^b f(x, \alpha) dx \right] \\ &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} dx. \end{aligned}$$

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti [M1, teorem 5.9 i dalje]

$$I'(\alpha) \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha + \vartheta \Delta\alpha) dx$$

za neki $0 < \vartheta < 1$ pa prelazak na limes daje tvrdnju teorema. ■

U slučaju kada su i granice integracije funkcije parametra, imamo sljedeći rezultat:

Teorem 4.4 *Neka su, uz uvjete teorema 4.3, funkcije $\varphi(\alpha)$ i $\psi(\alpha)$ neprekidne i derivabilne na intervalu (c, d) i neka je $a \leq \varphi(\alpha) \leq \psi(\alpha) \leq b$ za svaki $\alpha \in (c, d)$. Neka je*

$$I(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha) dx.$$

Tada za svaki $\alpha \in (c, d)$ vrijedi

$$I'(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha) dx + f(\psi(\alpha), \alpha) \frac{d\psi}{d\alpha} - f(\varphi(\alpha), \alpha) \frac{d\varphi}{d\alpha}.$$

Dokaz. Interpretiramo li zadani integral kao

$$I(\alpha) \equiv I(\alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha)),$$

pravilo za deriviranje kompozicije funkcija (teorem 3.5) daje

$$I'(\alpha) = \frac{dI}{d\alpha} = \frac{\partial I}{\partial \alpha} + \frac{\partial I}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{\partial I}{\partial \psi} \frac{d\psi}{d\alpha}.$$

Prema teoremu 4.3 je

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha) dx.$$

Neka je $F(x, \alpha)$ primitivna funkcija funkcije $f(x, \alpha)$ za neki α , odnosno $F'_x(x, \alpha) = f(x, \alpha)$. Tada je

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \psi} &= \frac{\partial}{\partial \psi} \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \frac{\partial}{\partial \psi} \left[F(x, \alpha) \Big|_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \psi} [F(\psi(\alpha), \alpha) - F(\varphi(\alpha), \alpha)] = f(\psi(\alpha), \alpha). \end{aligned}$$

Slično se pokaže da je

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi} = -f(\varphi(\alpha), \alpha)$$

pa tvrdnja teorema slijedi iz četiri prethodne relacije. ■

Prethodni teoremi koriste se za rješavanje nekih diferencijalnih jednačbi, računanje Fourierovih koeficijenata i nalaženje nekih određenih integrala.

Primjer 4.15 Izračunajmo integral

$$I = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}.$$

Funkcije $f(x, m) = x^m$ i $f'_m(x, m) = x^m \ln x$ su neprekidne za $0 < x < 1$ i $m > 0$ pa teorem 4.3 daje

$$\frac{d}{dm} \int_0^1 x^m dx = \int_0^1 x^m \ln x dx = -\frac{1}{(m+1)^2}.$$

Nakon još jednog deriviranja imamo

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^2 dx = \frac{2!}{(m+1)^3}$$

iz čega zaključujemo da n deriviranja po varijabli m daje

$$I = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Primjer 4.16 Izračunajmo integral

$$I(k, \lambda) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin \lambda x}{x} dx.$$

Koristeći teorem 4.3 i tehniku integriranja iz primjera 1.6 d) imamo

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos \lambda x \, dx = \left[\frac{e^{-kx}}{k^2 + \lambda^2} (\lambda \sin \lambda x - k \cos \lambda x) \right] \Big|_0^{\infty} = \frac{k}{k^2 + \lambda^2}.$$

Dakle, vrijedi

$$I(k, \lambda) = \int \frac{k}{k^2 + \lambda^2} d\lambda = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{k} + C.$$

Iz $0 = I(0, 0) = \operatorname{arctg} 0 + C = C$ slijedi $C = 0$ pa je

$$I(k, \lambda) = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{k}.$$

Ovaj rezultat ujedno daje i vrijednost *Dirichletovog integrala*:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \lim_{k \rightarrow 0+} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{k} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{za } \lambda < 0, \\ 0 & \text{za } \lambda = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{za } \lambda > 0. \end{cases}$$

Zadatak 4.5 Izračunajte sljedeće integrale:

a) $I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-\alpha x}}{x} dx$ (rješenje: $I(\alpha) = \ln \alpha$),

b) $I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + \alpha)^{n+1}} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha > 0,$

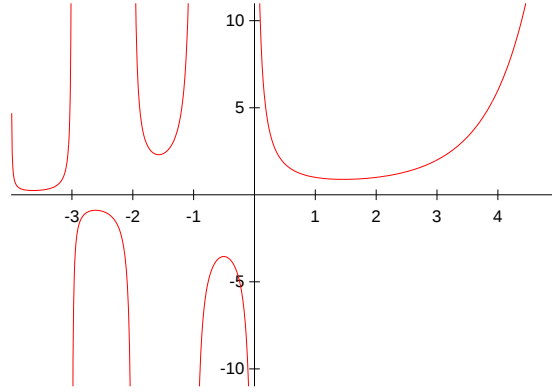
(rješenje: $I(\alpha) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2\alpha^n \sqrt{\alpha}}$),

c) $I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}} dx, \quad (\text{rješenje: } I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\alpha}),$

d) $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1 + \alpha x)}{1 + x^2} dx, \quad (\text{rješenje: } I(\alpha) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \alpha \cdot \ln(1 + \alpha^2)).$

Primjer 4.17 *Gama funkcija* ili *Eulerov integral druge vrste* je integral (slika 4.14)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$



Slika 4.14: Gama funkcija

Za $\alpha = 1$ vrijedi (vidi poglavlje 2.5):

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Za $\alpha > 1$ parcijalna integracija daje

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = -x^{\alpha-1} e^{-x} \Big|_0^{\infty} + (\alpha-1) \int_0^{\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} dx$$

iz čega slijedi

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1) \Gamma(\alpha-1).$$

Stoga za $\alpha = n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\Gamma(n) = (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot \Gamma(1) = (n-1)!$$

Beta funkcija ili *Eulerov integral prve vrste* je integral

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Beta funkcija je simetrična s obzirom na svoje parametre, odnosno vrijedi $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$. Bez dokaza navodimo dvije veze između gama funkcije i

beta funkcije:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) = B(\alpha, 1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Tako je, na primjer,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = B\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right) = \pi$$

pa je $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Gama funkcija i beta funkcija se javljaju u brojnim aplikacijama i po važnosti su odmah iza elementarnih funkcija.

4.7 Varijacioni račun

U ovom poglavlju objasniti ćemo osnove *varijacionog računa* (ili *računa varijacija*), metode koja služi za modeliranje i rješavanje važnih matematičkih, fizikalnih i inženjerskih problema.

Problemi varijacionog računa svode se na diferencijalne jednadžbe. Za bolje razumijevanje izlaganja u ovom poglavlju potrebno je poznavati neke tehnike za rješavanje diferencijalnih jednadžbi iz glave 5, no gradivo je izloženo na način da je ta potreba svedena na minimum.

Izrazom

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

gdje je $y = y(x)$ neka neprekidno derivabilna funkcija i $a, b \in \mathbb{R}$, definirana je funkcija I funkcije $y(x)$ koja svakoj neprekidno derivabilnoj funkciji pridružuje vrijednost integrala I . Funkcija (integral) I se zove *funkcional*.

Primjer 4.18 Promotrimo funkcional

$$I(y) = \int_0^1 (y + x y') dx.$$

Za $y = x$ je

$$I = \int_0^1 (x + x \cdot 1) dx = 2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = 1,$$

za $y = 2x^2$ je

$$I = \int_0^1 (2x^2 + x \cdot 4x) dx = 6 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = 2,$$

a za $y = e^x$ je (vidi primjer 1.6a)

$$I = \int_0^1 (e^x + x e^x) dx = (e^x + x e^x - e^x) \Big|_0^1 = e.$$

Zadatak je naći neprekidno derivabilnu funkciju y za koju funkcional $I(y)$ dostiže ekstremnu vrijednost (ako takva funkcija postoji). Moguće je zahtijevati da funkcija y zadovoljava i jedan ili oba rubna uvjeta:

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Primjer 4.19 *Problem najkraćeg puta* glasi: naći najkraći put između točaka $A = (x_0, y_0)$ i $B = (x_1, y_1)$ (vidi sliku 4.15). Prema poglavlju 2.6.2 duljina puta od točke A do točke B je

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

pa je rješenje zadatka krivulja $y = y(x)$ koja minimizira funkcional

$$I(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

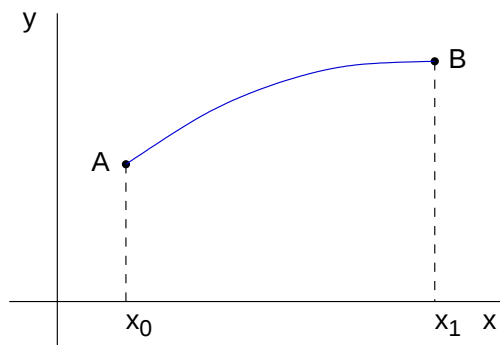
a vrijednost funkcionala za tu krivulju daje duljinu najkraćeg puta.

Primjer 4.20 *Problem najkraćeg vremena* glasi: odredite krivulju po kojoj će teška materijalna točka ispuštena iz ishodišta klizajući se bez trenja najbrže stići u točku $A = (a, b)$ (vidi sliku 4.16). Takva krivulja zove se *brahistohrona*.⁷

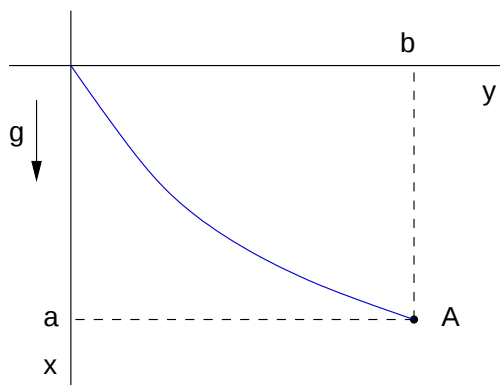
Neka su $(x(t), y(t))$ koordinate materijalne točke u trenutku t . Neka je s prijeđeni put, v brzina i m masa materijalne točke. Konstantnu gravitacije označit ćemo s g . Prema zakonu o očuvanju energije vrijedi

$$\frac{1}{2} m v^2 - m g x = 0,$$

⁷Na grčkom jeziku *brahistos* znači najkraći, a *hronos* znači vrijeme. Problem je 1696. godine postavio Johann Bernoulli, a riješio ga je iste godine Isaac Newton



Slika 4.15: Problem najkraćeg puta



Slika 4.16: Problem brahistohrone

odnosno,

$$v = \sqrt{2gx}.$$

S druge strane je $v = ds/dt$ pa nakon uvrštavanja i sređivanja imamo

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gx}}.$$

Prema poglavlju 2.6.2 element duljine luka jednak je $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$ pa je

$$dt = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}} dx.$$

Integral daje ukupno vrijeme spuštanja:

$$t = t(y) = \frac{1}{\sqrt{2gx}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}} dx.$$

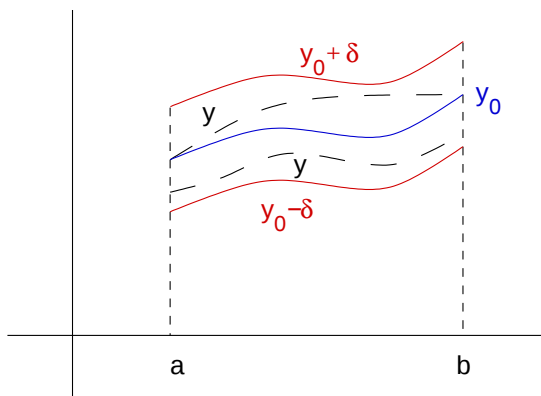
Dakle, brahistrona je krivulja koja minimizira funkcional t .

4.7.1 Nužni i dovoljni uvjeti ekstrema

Pretpostavimo da je krivulja $y_0 = y_0(x)$ ekstrem funkcionala $I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$, pri čemu je $F(x, y, y')$ neprekidna dva puta derivabilna funkcija svojih argumenata. Neka je krivulja $y = y(x)$ blizu krivulji y_0 , odnosno, neka za $\rho > 0$ vrijedi

$$y_0(x) - \rho \leq y(x) \leq y_0(x) + \rho, \quad x \in [a, b].$$

Razlika $\delta y = y - y_0$ zove se *varijacija* funkcije y_0 (vidi sliku 4.17).



Slika 4.17: Funkcija y_0 i njene varijacije

Dakle, vrijedi $y = y_0 + \delta y$. No, ovu jednakost možemo zapisati i kao

$$y = y_0 + \varepsilon \eta,$$

gdje je $\eta = \eta(x)$ neka derivabilna funkcija, a $\varepsilon > 0$ dovoljno mali broj. Sada vrijedi

$$y' = y'_0 + \varepsilon \eta'$$

pa je

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx = \int_a^b F(x, y_0 + \varepsilon \eta, y'_0 + \varepsilon \eta') dx.$$

Ako fiksiramo η , tada funkcional I postaje funkcije varijable ε , odnosno

$$I = I(\varepsilon) = \int_a^b F(x, y_0 + \varepsilon \eta, y'_0 + \varepsilon \eta') dx$$

pa nužni uvjet ekstrema glasi

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = 0.$$

Funkcija y_0 rješenje problema pa mora biti i $\varepsilon = 0$. Dakle,

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Prema pravilu za deriviranje pod znakom integrala (teorem 4.3) i pravilu za deriviranje složenih funkcija (teorem 3.5) vrijedi

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0 + \varepsilon \eta, y'_0 + \varepsilon \eta') \eta + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0 + \varepsilon \eta, y'_0 + \varepsilon \eta') \eta' \right] dx.$$

Za $\varepsilon = 0$ je $y = y_0$ i $y' = y'_0$ pa parcijalne derivacije po y i y' postaju parcijalne derivacije po y_0 i y'_0 . Stoga je

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y_0}(x, y_0, y'_0) \eta + \frac{\partial F}{\partial y'_0}(x, y_0, y'_0) \eta' \right] dx = 0.$$

Parcijalna integracija drugog člana uz

$$u = \frac{\partial F}{\partial y'_0}, \quad du = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_0} \right) dx, \quad dv = \eta' dx, \quad v = \eta$$

daje

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y_0} \eta dx + \eta \left. \frac{\partial F}{\partial y'_0} \right|_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_0} \right) dx = 0,$$

odnosno

$$\eta \left. \frac{\partial F}{\partial y'_0} \right|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y_0} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_0} \right) \right] \eta dx = 0. \quad (4.4)$$

Razlikujemo dva slučaja.

Slučaj 1. Ako funkcija y_0 zadovoljava rubne uvjete $y_0(a) = A$ i $y_0(b) = B$, tada u obzir dolaze samo one funkcije y koje također zadovoljavaju iste rubne uvjete, odnosno za koje je $y(a) = A$ i $y(b) = B$. No, tada je očito $\eta(a) = \eta(b) = 0$ pa je prvi član u relaciji (4.4) jednak nuli te nužan uvjet ekstrema glasi

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y_0} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_0} \right) \right] \eta dx = 0. \quad (4.5)$$

Sada nam je potreban sljedeći teorem:

Teorem 4.5 Ako za neprekidnu funkciju $\varphi(x)$ vrijedi

$$\int_a^b \varphi(x) \eta(x) dx = 0$$

za svaku neprekidno derivabilnu funkciju η za koju je $\eta(a) = \eta(b) = 0$, tada je funkcija φ identično jednaka nuli, odnosno $\varphi(x) = 0$ za svaki $x \in [a, b]$.

Dokaz. Teorem ćemo dokazati pomoću kontradikcije. Pretpostavimo da postoji točka $\bar{x} \in (a, b)$ za koju je $\varphi(\bar{x}) \neq 0$, recimo $\varphi(\bar{x}) > 0$. Tada je radi neprekidnosti $\varphi(x) > 0$ i na nekoj okolini točke $\bar{x}$, recimo

$$\varphi(x) > 0, \quad \bar{x} - \xi \leq x \leq \bar{x} + \xi,$$

za neki $\xi > 0$. Definirajmo funkciju η na sljedeći način:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, \bar{x} - \xi], \\ (x - \bar{x} + \xi)^2(x - \bar{x} - \xi)^2, & x \in (\bar{x} - \xi, \bar{x} + \xi), \\ 0, & x \in [\bar{x} + \xi, b]. \end{cases}$$

Funkcija η zadovoljava pretpostavku teorema (provjerite). S druge strane, vrijedi

$$\int_a^b \varphi(x) \eta(x) dx = \int_{\bar{x}-\xi}^{\bar{x}+\xi} \varphi(x) \eta(x) dx > 0,$$

što je suprotno pretpostavki teorema i teorem je dokazan. ■

Direktnom primjenom teorema 4.5 na relaciju (4.5), uz ispuštanje indeksa 0 radi jednostavnosti, dobili smo *Eulerovu jednadžbu*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (4.6)$$

Dakle, ako je funkcija y ekstrem polaznog funkcionala, ona je nužno i rješenje Eulerove jednadžbe.

Slučaj 2. Ako funkcija y_0 ne zadovoljava nikakve rubne uvjete, postupamo na sljedeći način: relacija (4.4) vrijedi za proizvoljnu funkciju η pa i za takve za koje je $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Stoga zaključujemo da i u ovom slučaju rješenje y mora zadovoljiti Eulerovu jednadžbu. Međutim, sada i prvi član u relaciji (4.4) mora biti jednak nuli za svaku funkciju η pa rješenje y mora zadovoljavati *uvjete transversalnosti* (poprečnosti)

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) = 0.$$

Naravno, moguća je kombinacija prethodnih slučajeva: ako je rubni uvjet zadan samo u jednom kraju, tada u drugom kraju mora biti zadovoljen uvjet transverzalnosti.

Dovoljne uvjete ekstrema (Lagrangeove uvjete) navodimo bez dokaza. Neka funkcija y zadovoljava nužne uvjete ekstrema funkcionala I . Tada vrijedi:

- (i) ako je $F''_{y'y'} \geq 0$, tada funkcija y daje minimum funkcionala I , a
- (ii) ako je $F''_{y'y'} \leq 0$, tada funkcija y daje maksimum funkcionala I .

4.7.2 Primjeri

Sljedeći primjeri ilustriraju primjene varijacionog računa i korištenje nužnih i dovoljnih uvjeta ekstrema iz prethodnog poglavlja.

Primjer 4.21 Riješimo problem najkraćeg puta iz primjera 4.19:

$$I(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Očito se radi o prvom slučaju iz poglavlja 4.7.1 pa rješenje y mora zadovoljavati Eulerovu jednadžbu

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Iz $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ slijedi

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

pa zaključujemo da je

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

za neku konstantu C . Nakon kvadriranja, sređivanja i ponovnog korjenovanja imamo

$$y' = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}}.$$

Uz oznake $a = C/\sqrt{1 - C^2}$ i $y' = dy/dx$, dobili smo diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama (vidi poglavlje 5.2)

$$dy = a dx.$$

Rješenje jednadžbe je

$$y = a x + b,$$

pri čemu su a i b konstante. Dakle, rješenje problema najkraćeg puta je pravac, kao što smo i očekivali. Konstante a i b možemo odrediti iz rubnih uvjeta:

$$y(x_0) = a x_0 + b = y_0, \quad y(x_1) = a x_1 + b = y_1.$$

Oduzimanje prve jednadžbe od druge daje

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

pa uvrštavanje u prvu jednadžbu daje

$$b = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0.$$

Dobili smo poznatu formulu za jednadžbu pravca kroz dvije točke (vidi [M1, primjer 3.11]).

Provjerimo na kraju dovoljne uvjete ekstrema: kako je

$$F''_{y'y'} = \frac{1}{(1 + y'^2) \sqrt{1 + y'^2}} > 0,$$

zaključujemo da se zaista radi o minimumu.

Primjer 4.22 Nađimo brahistohronu iz primjera 4.20:

$$I(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x}} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b.$$

Opet se radi o prvom slučaju iz poglavlja 4.7.1. Kao i u prethodnom primjeru vrijedi $\partial F / \partial y = 0$ pa se Eulerova jednadžba svodi na

$$\frac{y'}{\sqrt{x(1 + y'^2)}} = C$$

za neku konstantu C . Nakon kvadriranja, sređivanja i ponovnog korjenovanja imamo

$$y' = C \sqrt{\frac{x}{1 - C^2 x}}.$$

Uz oznaku $y' = dy/dx$ dobili smo diferencijalnu jednadžbu sa separiranim

$$dy = C \sqrt{\frac{x}{1 - C^2 x}} dx.$$

Integriranje daje

$$y = C \int \sqrt{\frac{x}{1 - C^2 x}} dx = C \int \frac{x}{\sqrt{x - C^2 x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{C^2} (1 - \cos t), \\ dx = \frac{1}{C^2} \sin t dt \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2C^2} (t - \sin t) + C_1.$$

Konstantu integracije C_1 odredit ćemo iz rubnog uvjeta $y(0) = 0$: iz $x = 0$ slijedi $\cos t = 1$ pa je $t = 0$. Dakle,

$$0 = \frac{1}{2C^2} (0 - \sin 0) + C_1$$

pa je $C_1 = 0$. Uz oznaku $a = \frac{1}{2C^2}$ imamo

$$x(t) = a(1 - \cos t), \quad y(t) = a(t - \sin t), \quad (4.7)$$

odnosno rješenje je cikloida (vidi [M1, primjer 4.3])⁸ Provjerimo još dovoljne uvjete ekstrema: kako je

$$F''_{y'y'} = \frac{1}{(1 + y'^2) \sqrt{x(1 + y'^2)}} > 0,$$

zaključujemo da se zaista radi o minimumu.

Parametar a iz jednadžbi (4.7) se odredi iz uvjeta da cikloida prolazi točkom A . Parametar se općenito ne može odrediti egzaktno, već je potrebno koristiti neku od numeričkih metoda. Ako je, na primjer, $A = (1, 2)$, uvrštavanje u (4.7) daje sustav jednadžbi

$$1 = a(1 - \cos t), \quad 2 = a(t - \sin t).$$

Izjednačavanje parametra a daje jednadžbu

$$2 \cos t - \sin t + t - 2 = 0.$$

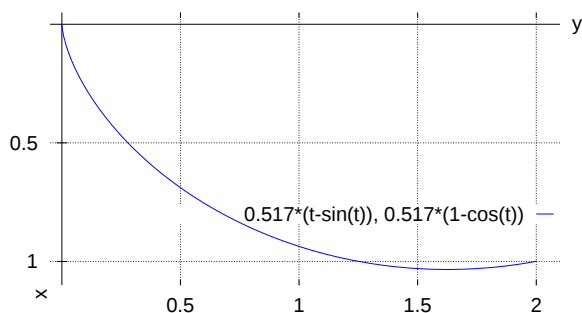
Nul-točku ove funkcije možemo približno izračunati metodom bisekcije⁹. Vrijedi $t \approx 3.508$ pa je

$$a = \frac{1}{1 - \cos t} \approx \frac{1}{1 - \cos(3.508)} = 0.517.$$

Funkcija je prikazana na slici 4.18.

⁸Prethodni integral smo riješili koristeći nestandardnu supstituciju iz koje se odmah vidi da rješenje ima oblik cikloide. Integral se može riješiti i pomoću standardne racionalne supstitucije $x/(1 - C^2 x) = t^2$ (vidi poglavlje 1.7.1).

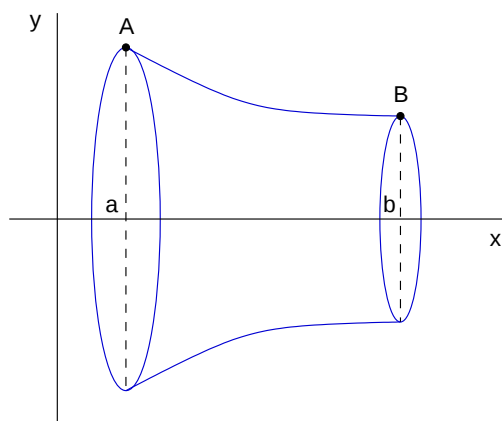
⁹Vidi, na primjer, Java program <http://lavica.fesb.hr/mat1/java/Bisekcija.html>.



Slika 4.18: Cikloida kao rješenje problema najkraćeg vremena

U prethodna dva primjera problem se, zbog $\partial F / \partial y = 0$, sveo na rješavanje jednostavne diferencijalne jednačbe prvog reda sa separiranim varijablama (vidi poglavlje 5.2). Općenito se dobije diferencijalna jednačba drugog reda (vidi poglavlje 5.9).

Primjer 4.23 Riješimo *problem najmanjeg oplošja*: od svih krivulja koje prolaze točkama $A = (a, c)$ i $B = (b, d)$ nađimo onu koja rotacijom oko x -osi opisuje tijelo najmanjeg oplošja (slika 4.19).



Slika 4.19: Cikloida kao rješenje problema najkraćeg vremena

Prema poglavlju 2.6.4, oplošje rotacionog tijela računa se formulom

$$O = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

pri čemu je $y > 0$. Dakle, potrebno je minimizirati funkcional

$$I(y) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad y(a) = c, \quad y(b) = d.$$

Eulerova jednačba glasi

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \\ &= \sqrt{1 + y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{y y''}{(1 + y'^2) \sqrt{1 + y'^2}}. \end{aligned}$$

Množenjem jednačbe s $(1 + y'^2) \sqrt{1 + y'^2}$ dobili smo diferencijalnu jednačbu drugog reda:

$$y y'' - y'^2 - 1 = 0.$$

Jednačbu ćemo riješiti koristeći supstituciju $y' = p$. Kako je

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dx} p = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$

gornja diferencijalna jednačba prelazi u jednačbu sa separiranim varijablama

$$y p \frac{dp}{dy} - p^2 - 1 = 0,$$

odnosno

$$\frac{p}{p^2 + 1} dp = \frac{1}{y} dy.$$

Integriranje daje

$$\frac{1}{2} \ln(p^2 + 1) + \ln a = \ln y$$

za neku konstantu a . Oдавde slijedi

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1},$$

odnosno

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}}.$$

Integriranje daje (vidi poglavlje 1.1.1)

$$x = a \operatorname{arch} \frac{y}{a} + b$$

za neku konstantu b pa je konačno

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x - b}{a}.$$

Dakle, rješenje je lančanica (vidi poglavlje [M1, poglavlje 4.6.9]). Provjera dovoljnih uvjeta ekstrema daje

$$F''_{y'y'} = y \frac{1}{(1 + y'^2) \sqrt{1 + y'^2}} > 0,$$

pa se zaista radi o minimumu. Konstante a i b se određuju iz početnih uvjeta i ne mogu se odrediti analitički. Međutim, program za određivanje početnih uvjeta može se jednostavno programirati u programskom jeziku Matlab.

Za rubne uvjete $A = (0, 3)$ i $B = (3, 2)$ program koji računa konstante a i b potom crta rješenje glasi:

```
function y=f(x)
    y(1)=x(1)*cosh(x(2)/x(1))-3;
    y(2)=x(1)*cosh((3-x(2))/x(1))-2;
end
[x, info] = fsolve('f', [1.5; 1.5])
u=0:0.1:3;
v=x(1)*cosh((u-x(2))/x(1));
plot(u,v)
```

Izvedite prethodni program pomoću programa *Octave On-line*¹⁰.

Zadatak 4.6 Nađite ekstreme sljedećih funkcionala:

$$\text{a) } I(y) = \int_0^4 \sqrt{y(1+y'^2)} dx, \quad y(0) = \frac{5}{4}, \quad y(4) = \frac{13}{4}.$$

Rješenje: Funkcional dostiže minimum za $y = \frac{(5x-6)^2}{80} + \frac{4}{5}$.

$$\text{b) } I(y) = \int_0^{\pi/4} (y^2 - y'^2 + 6y \sin 2x) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = 1.$$

Rješenje: Funkcional dostiže maksimum za $y = \sin 2x$.

¹⁰<http://lavica.fesb.hr/octave/octave-on-line.php>.

Sljedeći primjer ilustrira utjecaj rubnih uvjeta i korištenje uvjeta transverzalnosti.

Primjer 4.24 Riješimo funkcional

$$I(x) = \int_0^1 (x'^2 + 1) dt,$$

pri čemu je $x = x(t)$ uz rubne uvjete $x(0) = 1$ i $x(1) = 2$: Eulerova jednadžba glasi

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) = 0 - \frac{d}{dt} 2x' = -2x''$$

pa je $x(t) = at + b$ za neke konstante a i b . Rubni uvjeti daju $a = b = 1$ a rješenje glasi

$$x(t) = t + 1.$$

Provjera dovoljnog uvjeta daje

$$F''_{x'x'} = 2 > 0$$

pa se radi o minimumu. Najmanja vrijednost zadanog funkcionala je

$$I_{\min} = \int_0^1 (1 + 1) dt = 2.$$

Ako je, pak, zadan samo jedan rubni uvjet, $x(0) = 1$, tada u drugom kraju mora vrijediti uvjet transverzalnosti

$$\frac{\partial F}{\partial x'} F(1, x(1), x'(1)) = 0.$$

Eulerova jednadžba ponovo daje

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) = -2x''$$

iz čega slijedi da je $x'(t) = a$ za neku konstantu a . Uvjet transverzalnosti povlači

$$2x'(1) = 0$$

pa je $a = 0$, odnosno $x'(t) = 0$. Dakle, $x(t) = b$ za neku konstantu b , a zbog rubnog uvjeta $x(0) = 1$ je $b = 1$. Konačno rješenje je stoga jednako

$$x(t) = 1.$$

Provjera dovoljnog uvjeta daje

$$F''_{x'x'} = 2 > 0$$

pa se i u ovom slučaju radi o minimumu. Najmanja vrijednost funkcionala je sada

$$I_{\min} = \int_0^1 (0 + 1) dt = 1.$$

Uspoređujući s prvim slučajem možemo zaključiti da *manje rubnih uvjeta daje "bolje" ekstreme*.

Napomena 4.3 Kada je funkcional funkcija od više funkcija,

$$I(x_1, \dots, x_n) = \int_a^b F(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) dt,$$

gdje je $x = 1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$, nužni uvjeti ekstrema glase

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

uz zadane rubne uvjete

$$x_i(a) = A_i, \quad x_i(b) = B_i, \quad A_i, B_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n,$$

ili uvjete transversalnosti

$$\frac{\partial F}{\partial x'_i} = 0$$

tamo gdje nisu zadani rubni uvjeti. Dakle, traženje ekstrema funkcionala više funkcija svodi se na rješavanje sustava od n diferencijalnih jednadžbi i $2n$ dodatnih uvjeta.

4.7.3 Uvjetni ekstrem

Postupak traženje vezanih (ili uvjetnih) ekstrema funkcionala je vrlo sličan postupku kod uvjetnih ekstrema funkcija više varijabli, odnosno koristi se metoda Lagrangeovih multiplikatora (vidi poglavlje 3.12).

Zadatak je naći funkcije $x_1(t), \dots, x_n(t)$ koje su ekstremi funkcionala

$$I(x_1, \dots, x_n) = \int_a^b F(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) dt,$$

a istovremeno zadovoljavaju rubne uvjete

$$x_i(a) = A_i, \quad x_i(b) = B_i, \quad A_i, B_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n,$$

i ograničenja (uvjete) koja mogu biti algebarske jednadžbe

$$h_k(t, x_1, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad m < n,$$

diferencijalne jednadžbe

$$h_k(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad m < n,$$

ili takozvana izoperimetrička ograničenja

$$\int_a^b h_k(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) dt = 0, \quad L_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Zadatak se rješava na sljedeći način: prvo se formira pomoćni funkcional

$$I^* = \int_a^b F^* dt \equiv \int_a^b \left[F(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) + \sum \lambda_k(t) h_k \right] dt$$

pri čemu su Lagrangeovi multiplikatori λ_k funkcije od t , a potom se rješenje polaznog problema dobije iz sustava od n Eulerovih jednadžbi

$$\frac{\partial F^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial x'_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

rubnih uvjeta i zadanih ograničenja.

Primjer 4.25 Nađimo ekstrem funkcionala

$$I(y, z) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'z'}{x}} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad y = z + 1.$$

Pomoćni funkcional glasi

$$I^* = \int_0^a \left[\sqrt{\frac{1 + y'z'}{x}} + \lambda(x) (y - z - 1) \right] dx.$$

Iz uvjeta $y = z + 1$ vidimo da su zadana sva četiri rubna uvjeta:

$$y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad z(0) = -1, \quad z(a) = b - 1.$$

Rješenje dobijemo iz Eulerovih jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y'} &= \lambda(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{2\sqrt{x(1+y'z')}} \right) = 0, \\ \frac{\partial F^*}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial z'} &= -\lambda(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{2\sqrt{x(1+y'z')}} \right) = 0,\end{aligned}$$

rubnih uvjeta i ograničenja $y = z + 1$. Zbrajanjem Eulerovih jednadžbi imamo

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y' + z'}{2\sqrt{x(1+y'z')}} \right) = 0.$$

Zadano ograničenje povlači $y' = z'$ pa prethodna jednadžba prelazi u

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} \right) = 0.$$

Dakle, y je cikloida (vidi primjer 4.22), dok je $z = y - 1$.

Primjer 4.26 Nađimo ekstrem funkcionala

$$I(x) = \int_0^1 (x'')^2 dt, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x'(1) = 0.$$

U podintegralnoj funkciji se javlja druga derivacija funkcije $x(t)$, što je potrebno eliminirati. Uvedimo nove funkcije

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = x'_1(t).$$

Zadani problem prelazi u ekvivalentni problem

$$I(x_1, x_2) = \int_0^1 (x'_2)^2 dt, \quad x_1(0) = 1, \quad x_1(1) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad x_2(1) = 0,$$

uz ograničenje $x_2 - x'_1 = 0$. Pomoćni funkcional glasi

$$I^* = \int_0^1 [(x'_2)^2 + \lambda(t)(x_2 - x'_1)] dt.$$

Eulerove jednadžbe glase

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^*}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial x'_1} &= 0 - \frac{d}{dt}(-\lambda(t)) = 0, \\ \frac{\partial F^*}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial x'_2} &= \lambda(t) - \frac{d}{dt}(x'_2(t)) = 0.\end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe slijedi $\lambda'(t) = 0$, a iz druge $\lambda(t) = x''_2(t)$. Deriviranje zadnje jednadžbe daje

$$\lambda'(t) = x'''_2(t) = 0$$

pa je

$$x_2(t) = a t^2 + b t + c,$$

za neke konstante a , b i c . Ograničenje $x'_1 = x_2$ povlači

$$x_1(t) = a \frac{t^3}{3} + b \frac{t^2}{2} + c t + d$$

za neku konstantu d . Rubni uvjeti daju

$$x_1(0) = 1 = d, \quad x_2(0) = 1 = c.$$

Nadalje, vrijedi

$$x_1(1) = 0 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1, \quad x_2(1) = 0 = a + b + 1,$$

pa je $a = 3$ i $b = -4$. Dakle, rješenje je dano s

$$x_1(t) = t^3 - 2t^2 + t + 1, \quad x_2(t) = 3t^2 - 4t + 1,$$

pa je tražena vrijednost zadanog funkcionala jednaka

$$I = \int_0^1 (6t - 4)^2 dt = 4.$$

Primjer 4.27 Nađimo ekstrem funkcionala

$$I(y, z) = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4x z' - 4z) dx,$$

uz rubne uvjete

$$y(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad z(1) = 1,$$

i uz izoperimetričko ograničenje

$$\int_0^1 (y'^2 - x y' - z'^2) dx = 2.$$

Pomoćni funkcional glasi

$$I^* = \int_0^1 [y'^2 + z'^2 - 4x z' - 4z + \lambda (y'^2 - x y' - z'^2)] dx.$$

Eulerove jednadžbe glase

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y'} &= 0 - \frac{d}{dx} (2y' + 2y'\lambda - \lambda x) = 0, \\ \frac{\partial F^*}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial z'} &= -4 - \frac{d}{dx} (2z' - 4x - 2\lambda z') = 0. \end{aligned}$$

Integriranje prve Eulerove jednadžbe daje

$$2y' + 2y'\lambda - \lambda x = a,$$

odnosno

$$y' = \frac{\lambda x + a}{2 + 2\lambda}$$

pa ponovno integriranje daje

$$y = \frac{\lambda \frac{x^2}{2} + a x}{2 + 2\lambda} + b$$

za neke konstante a i b . Rubni uvjet $y(0) = 0$ povlači $b = 0$, a rubni uvjet $y(1) = 1$ povlači $a = 2 + \frac{3}{2}\lambda$ pa je

$$y(x) = \frac{\lambda x^2 + (3\lambda + 4)x}{4 + 4\lambda}.$$

Integriranje druge Eulerove jednadžbe daje

$$2z' - 4x - 2\lambda z' = -4x + c,$$

odnosno

$$z' = \frac{c}{2 - 2\lambda}$$

pa ponovno integriranje daje

$$z = \frac{c}{2 - 2\lambda} x + d$$

za konstante c i d . Rubni uvjet $z(0) = 0$ povlači $d = 0$, a rubni uvjet $z(1) = 1$ povlači $c = 2 - 2\lambda$ pa je

$$z(x) = x.$$

Konačno, uvrštavanjem izraza za y , y' , z i z' u zadano izoperimetričko ograničenje, dobijemo da je $\lambda = -11/10$ (dovršite ovaj račun za vježbu!).

4.7.4 Eulerova metoda konačnih razlika

U ovom poglavlju opsat ćemo Eulerovu metodu konačnih razlika za numeričko rješavanje problema. Metoda se temelji na ideji da kod traženja ekstrema funkcionala

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

ne promatramo sve dozvoljene derivabilne funkcije koje zadovoljavaju rubne uvjete, već samo poligonalne linije koje imaju vrhove u točkama

$$(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

koje su definirane na sljedeći način: uz $\Delta x = (b - a)/n$ je

$$x_i = a + i \Delta x, \quad y_i = y(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Na ovaj način zadani funkcional $I(y)$ postaje funkcija varijabli $y_1, \dots, y_{n-1}$ koju označavamo s $\Phi(y_1, \dots, y_{n-1})$, a zadani problem se svodi na traženje ekstrema funkcije od $n - 1$ varijabli, odnosno na rješavanje sustava jednadžbi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Primjer 4.28 Nađimo ekstrem funkcionala

$$I(y) = \int_0^1 (y'^2 + 2y) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

metodom konačnih razlika. Odaberimo $n = 5$. Tada je $\Delta x = (1 - 0)/5 = 0.2$ i

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) = 0, & y_1 &= y(0.2), & y_2 &= y(0.4), \\ y_3 &= y(0.6), & y_4 &= y(0.8), & y_5 &= y(1) = 0. \end{aligned}$$

Integral aproksimiramo pomoću lijeve integralne sume (vidi napomenu 2.1)

$$I(y) \approx [F(x_0, y_0, y'_0) + \cdots + F(x_{n-1}, y_{n-1}, y'_{n-1})] dx$$

pri čemu se derivacije aproksimiraju konačnim razlikama

$$y'_i = y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x},$$

odnosno

$$\begin{aligned} y'_0 &= \frac{y_1 - 0}{0.2}, & y'_1 &= \frac{y_2 - y_1}{0.2}, & y'_2 &= \frac{y_3 - y_2}{0.2}, \\ y'_3 &= \frac{y_4 - y_3}{0.2}, & y'_4 &= \frac{0 - y_4}{0.2}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} I(y) \approx \Phi(y_1, \dots, y_{n-1}) &= \left[\left(\frac{y_1}{0.2} \right)^2 + 2 \cdot 0 + \left(\frac{y_2 - y_1}{0.2} \right)^2 + 2 y_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{y_3 - y_2}{0.2} \right)^2 + 2 y_2 + \left(\frac{y_4 - y_3}{0.2} \right)^2 + 2 y_3 + \left(\frac{-y_4}{0.2} \right)^2 + 2 y_4 \right]. \end{aligned}$$

Nužni uvjeti ekstrema funkcije $\Phi(y_1, \dots, y_{n-1})$ glase

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} &= \left(\frac{2 y_1}{0.04} + \frac{2 (y_2 - y_1)(-1)}{0.04} + 2 \right) \cdot 0.2 = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} &= \left(\frac{2 (y_2 - y_1)}{0.04} + \frac{2 (y_3 - y_2)(-1)}{0.04} + 2 \right) \cdot 0.2 = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} &= \left(\frac{2 (y_3 - y_2)}{0.04} + \frac{2 (y_4 - y_3)(-1)}{0.04} + 2 \right) \cdot 0.2 = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_4} &= \left(\frac{2 (y_4 - y_3)}{0.04} + \frac{2 y_4}{0.04} 2 \right) \cdot 0.2 = 0. \end{aligned}$$

Nakon sređivanja vidimo da se radi o sustavu linearnih jednadžbi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (vidi [M1, glava 2]), gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.04 \\ -0.04 \\ -0.04 \\ -0.04 \end{bmatrix}.$$

Rješenje sustava je

$$y_1 = -0.08, \quad y_2 = -0.12, \quad y_3 = -0.12, \quad y_4 = -0.08.$$

Primijetimo da se izračunate vrijednosti poklapaju s točnim vrijednostima egzaktong rješenja $y = (x^2 - x)/2$ (izračunajte egzaktno rješenje za vježbu!).

Rješenje se može jednostavno programirati u programskom jeziku Matlab. Program koji postavi matricu A i vektor $\mathbf{b}$ te potom riješi sustav i nacrtava numeričko i egzaktno rješenje glasi:

```
n=4;
dx=1/(n+1);
% Matrica A i vektor b
for i=1:n, A(i,i)=2; end
for i=1:n-1, A(i+1,i)=-1; A(i,i+1)=-1; end
b=-dx**2*ones(n,1);
% Rjesenje sustava
y=A\b
% Crtanje rjesenja i tocnog rjesenja
x=0:dx:1;
y=[0; y; 0]
xx=0:0.01:1;
yy=(xx.^2-xx)/2;
plot(x,y,'r',xx,yy,'b')
```

Izvedite prethodni program pomoću programa *Octave On-line*¹¹, pri čemu možete varirati broj točaka n .

Napomena 4.4 Općenito se korištenjem metode konačnih razlika dobije sustav nelinearnih jednadžbi. Intuitivno je jasno da aproksimacija rješenja postaje sve bolja kada se povećava broj intervala n . Ova metoda je začetak poznate metode konačnih elemenata.

¹¹<http://lavica.fesb.hr/octave/octave-on-line.php>.

5.

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

5.1	Populacijska i logistička jednađba	224
5.2	Jednađbe sa separiranim varijablama	231
5.3	Polje smjerova	234
5.4	Eulerova metoda	235
5.5	Ortogonalne i izogonalne trajektorije	238
5.6	Singularna rješenja i ovojnice	242
5.7	Egzaktne jednađbe i integrirajući faktori	245
5.8	Linearne diferencijalne jednađbe prvog reda	249
5.9	Linearne diferencijalne jednađbe drugog reda	251
5.9.1	Homogene jednađbe	253
5.9.2	Nehomogene jednađbe	256
5.9.3	Jednađbe s konstantnim koeficijentima	259
5.9.4	Slobodna, gušena i prisilna titranja	265
5.10	Linearne diferencijalne jednađbe višeg reda	273
5.11	Sustavi diferencijalnih jednađbi	278

Definicija 5.1 *Diferencijalna jednađba* je jednađba oblika

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (\text{DJ})$$

Rješenje diferencijalne jednađbe je svaka funkcija $y = f(x)$ koja zadovoljava jednađbu DJ na nekom skupu $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$. *Red* diferencijalne jednađbe je red najviše derivacije koja se javlja u jednađbi.

Najjednostavnije diferencijalne jednačbe već smo rješavali: rješenje jednačbe

$$y' = f(x)$$

je primitivna funkcija funkcije $f(x)$ pa vrijedi

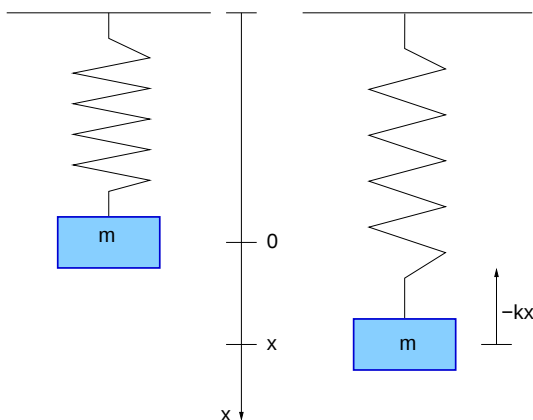
$$\frac{dy}{dx} = f(x) \implies dy = f(x) dx \implies y = \int f(x) dx + C$$

Ako želimo odrediti konstantu integracije C , treba biti zadan još jedan uvjet (vrijednost funkcije $y(x_0)$ ili vrijednost derivacije $y'(x_0)$ u nekoj točki $x_0 \in \mathcal{D}$).

Općenito, postupak rješavanja svake diferencijalne jednačbe u sebi sadrži višekratno integriranje. Pri tome se u rješenju jednačbe n -tog reda javlja n konstanti za čije je određivanje potrebno znati n uvjeta koje u odabranim točkama trebaju zadovoljavati funkcija y i/ili njene derivacije. Obično su uvjeti zadani u rubnim točkama područja u kojem promatramo diferencijalnu jednačbu.

Diferencijalne jednačbe su jedan od najvažnijih dijelova matematike uopće. Kako je derivacija mjera promjene, diferencijalnim jednačbama se najjednostavnije izražavaju i modeliraju mnogi prirodni zakoni.

Primjer 5.1 Promotrimo problem titranja mase obješene na oprugu (slika 5.1), pri čemu je $x(t)$ položaj mase u trenutku t .



Slika 5.1: Titranje mase obješene na oprugu

Prema Hookeovom zakonu sila potrebna za održavanje opruge rastegnutoj x jedinica udaljenosti od njene prirodne dužine proporcionalna je s x , $F(x) = -kx$. Stoga je sila s kojom se opruga vraća u položaj ravnoteže jednaka $-kx$. S druge strane, prema Newtonovom drugom zakonu gibanja, sila

je jednaka umnošku mase i ubrzanja. Izjednačavanje sila daje diferencijalnu jednadžbu

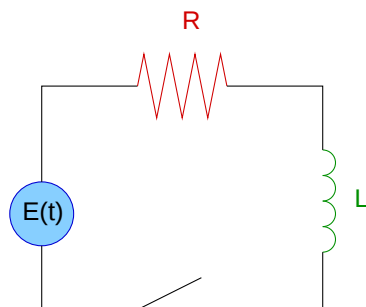
$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t).$$

Oдавде slijedi

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} x(t),$$

odnosno, druga derivacije od x je proporcionalna x , ali ima obrnuti predznak. Znamo da funkcije sinus i kosinus imaju upravo to svojstvo. Kasnije ćemo pokazati da se sva rješenja ove jednadžbe mogu napisati kao određen kombinacije sinusa i kosinusa. Kako se radi o diferencijalnoj jednadžbi drugog reda, za određivanje konstanti potrebna su dva uvjeta. U ovom slučaju prirodni uvjeti su položaj i brzina u trenutku $t = 0$, odnosno potrebno je zadati vrijednosti $x(0)$ i $x'(0)$.

Primjer 5.2 Promotrimo strujni krug koji se sastoji od elektromotorne sile koja u trenutku t proizvodi napon od $E(t)$ volta (V) i struju od $I(t)$ ampera (A). U krugu se također nalazi otpor od R oma (Ohm) i zavojnica s induktivitetom L henrija (H) (slika 5.2).



Slika 5.2: Strujni krug

Prema Ohmovom zakonu pad napona na otporu jednak je RI . Pad napona na zavojnici jednak je $L(dI/dt)$. Prema Kirchoffovom zakonu zbroj padova napona jednak je naponu kojeg daje naponski izvor. Dakle,

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

što je diferencijalna jednadžba prvog reda koja modelira struju I u trenutku t . Riješimo zadanu jednadžbu uz (prirodan) uvjet da je struja u trenutku uključivanja naponskog izvora $t = 0$ jednaka nuli, $I(0) = 0$. Uz oznake $\alpha = R/L$ i $\beta = 1/L$ vrijedi

$$\frac{dI}{\beta E(t) - \alpha I} = dt.$$

Integriranje obaju strana daje

$$-\alpha \ln |\beta E(t) - \alpha I| = t + C,$$

odnosno

$$|\beta E(t) - \alpha I| = e^{-\alpha(t+C)} = e^{-\alpha C} e^{-\alpha t},$$

pa možemo pisati

$$\beta E(t) - \alpha I = A e^{-\alpha t},$$

pri čemu smo predznak izraza $\beta E(t) - \alpha I$ uključili u konstantu A . Dakle,

$$I(t) = \frac{\beta}{\alpha} E(t) - \frac{A}{\alpha} e^{-\alpha t}.$$

Odredimo konstantu A : iz početnog uvjeta slijedi

$$0 = I(0) = \frac{\beta}{\alpha} E(0) - \frac{A}{\alpha}$$

pa je $A = \beta E(0)$. Konačno,

$$I(t) = \frac{1}{R} E(t) - \frac{1}{R} E(0) e^{-(R/L)t}.$$

Ako je na primjer, $L = 4 \text{ H}$, $R = 12 \text{ Ohm}$ i $E(t) = 60 \text{ V}$, tada je

$$I(t) = 5 - 5 e^{-3t}.$$

Funkcija je prikazana na slici 5.3. Stacionarno stanje strujnog kruga je (horizontalna asimptota)

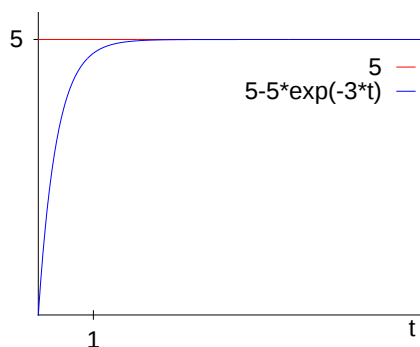
$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 5 \text{ A}.$$

5.1 Populacijska i logistička jednadžba

Neka $P(t)$ označava broj jedinki neke populacije u trenutku t . Najjednostavniji model rasta populacije je sljedeći: *stopa rasta populacije proporcionalna je veličini populacije*, odnosno, promjena u populaciji bit će veća što je u populaciji više jedinki. Ovo je razumna pretpostavka za populacije bakterija ili životinja u idealnim uvjetima (neograničeni resursi, odgovarajuća prehrana, nepostojanje bolesti, nepostojanje prirodnih neprijatelja).

Kako je promjena populacije dana s $dP(t)/dt$, matematička formulacija rasta populacije glasi

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$



Slika 5.3: Struja u strujnom krugu

Ova diferencijalna jednadžba rješava se slično kao i jednadžba iz primjera 5.2:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{P} &= k dt, \\ \ln |P| &= kt + C, \\ |P| &= e^{kt} e^C, \\ P &= A e^{kt}.\end{aligned}$$

Konstantu A možemo odrediti ako znamo inicijalnu (početnu) populaciju $P(0) = P_0$. Tada je $P_0 = P(0) = A e^0 = A$ pa je rast populacije dan funkcijom

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

Ukoliko umjesto inicijalne populacije u trenutku $t = 0$ znamo populaciju u nekom trenutku t_0 , $P(t_0) = P_0$, tada je $P_0 = A e^{kt_0}$, odnosno $A = P_0 e^{-kt_0}$ pa je rast populacije dan funkcijom

$$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}.$$

Konačno, uočimo sljedeće: ako je $k > 0$ tada populacija raste, a ako je $k < 0$ populacija se smanjuje.

Primjer 5.3 Tablica 5.1 prikazuje stanovništvo svijeta od 1750. godine¹.

Uzmemo li za početnu godinu $t_0 = 1750$, imamo

$$P(t) = 791 e^{k(t-1750)}.$$

¹Podaci su preuzeti s Wikipedije na adresi http://en.wikipedia.org/wiki/World_population.

godina	1750	1800	1850	1900	1950	1955	1960	1965
stanovništvo	791	978	1262	1650	2518	2755	3021	3334

godina	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
stanovništvo	3692	4068	4434	4830	5263	5674	6070	6453

Tablica 5.1: Stanovništvo svijeta od 1750. godine u milijunima stanovnika

Odredimo parametar k koristeći zadnju godinu u tablici:

$$P(2005) = 6453 = 791 e^{k(2005-1750)}.$$

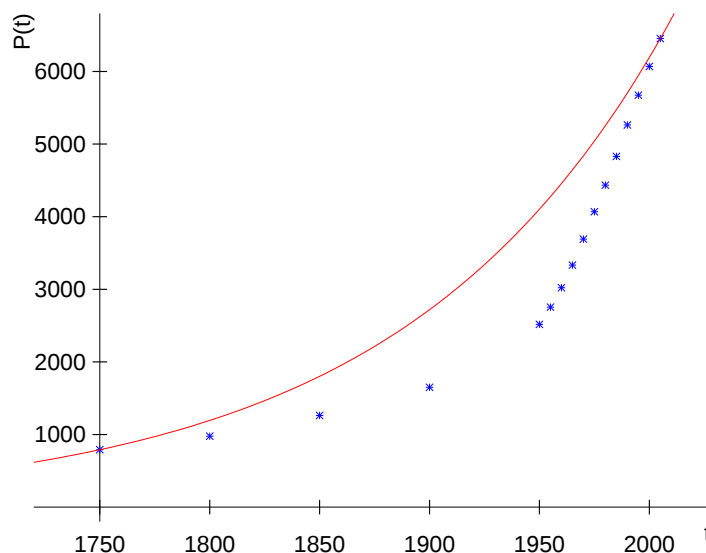
Dakle,

$$k = \frac{\ln 6453 - \ln 791}{255} \approx 0.0082314$$

pa je

$$P(t) = 791 e^{0.0082314 (t-1750)}.$$

Funkcija $P(t)$ i podaci iz tablice 5.1 prikazani su na slici 5.4.



Slika 5.4: Rast svjetskog stanovništva od 1750. do 2005. godine

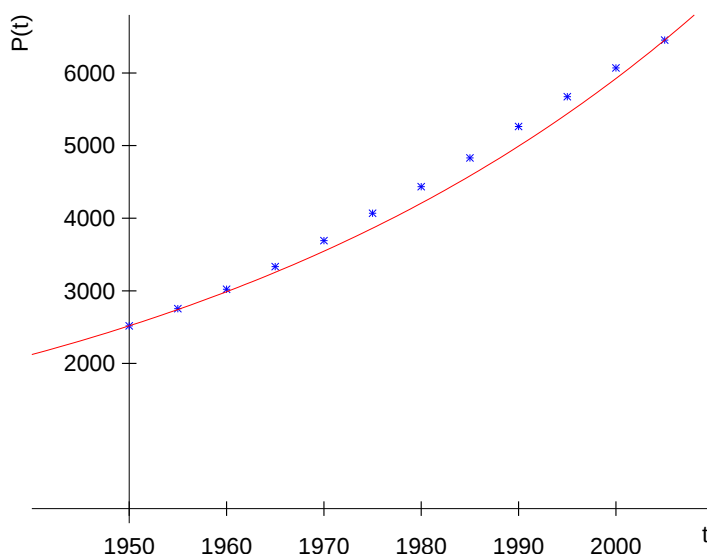
Funkcija $P(t)$ prolazi, doduše, točkama $(1750, 791)$ i $(2005, 6453)$, ali ne opisuje dobro stvarni rast stanovništva. Razlog tome je jasan – jednostavni model kojeg smo izabrali očito ne uključuje sve parametre koji utječu na rast

populacije. Međutim, ako se ograničimo samo na razdoblje od godine 1950. do danas, tada je

$$P(t) = 2518 e^{k(t-1950)}, \quad k = \frac{\ln 6453 - \ln 2518}{55} \approx 0.017111.$$

Na slici 5.5 vidimo da je sada preklapanje funkcije i stvarnih podataka puno bolje. Stopa rasta stanovništva je u tom razdoblju približno jednaka 1.7%, što je 2005. godine iznosilo 110 milijuna stanovnika godišnje. Iskoristimo li gornju formulu za predviđanje, 2050. godine će na svijetu biti 14 milijardi stanovnika:

$$P(2050) = 2518 e^{0.017111 (2050-1950)} \approx 13937.$$



Slika 5.5: Rast svjetskog stanovništva od 1950. do 2005. godine

Primjer 5.4 Radioaktivni raspad također možemo modelirati populacijskom jednadžbom. Neka laboratorij ima $m = 10$ g radija-226 ($^{226}_{88}\text{Ra}$) čije je vrijeme poluraspada 1602 godine². Izračunajmo koliko će radija biti na raspolaganju nakon sto godina i kada će laboratorij imati 7 g radija-226 ?

Prvo je, kao i u prethodnom primjeru potrebno utvrditi koeficijent k , koji će u ovom slučaju biti negativan jer se radi o "opadanju populacije". Vrijeme poluraspada je vrijeme potrebno da se količina radio-aktivne tvari

²Vidi <http://www.wikipedia.org/wiki/Radium>.

svede na polovicu. Dakle, imamo redom

$$\begin{aligned} m(1602) &= 5 = 10 e^{k \cdot 1602}, \\ \ln \frac{1}{2} &= k \cdot 1602, \\ k &= -\frac{\ln 2}{1602}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$m(100) = 10 e^{-(\ln 2 / 1602) \cdot 100} \approx 9.5766$$

pa će laboratorij nakon sto godina imati $m = 9.5766$ g radija-226. Iz

$$7 = 10 e^{-(\ln 2 / 1602) t}$$

slijedi

$$\ln \frac{7}{10} = \frac{\ln 2}{1602} t,$$

odnosno

$$t = -\frac{1602}{\ln 2} \frac{7}{10} \approx 824.35$$

pa će laboratorij imati 7 g radija-226 nakon 824 godine.

Primjer 5.5 Kamatni račun s neprekidnim ukamaćivanjem također zadovoljava populacijsku jednadžbu: ako glavnica G_0 oročimo s godišnjom kamatom k (na primjer, za kamatu od 6% je $k = 0.06$) i ako se kamata pripisuje n puta godišnje, tada nakon t godina glavnica iznosi

$$G(t) = G_0 \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nt}.$$

Naime, u n -tom dijelu godine kamata je k/n , ali se zato glavnica uvećava n puta godišnje. Formula za neprekidno ukamaćivanje slijedi prelaskom na limes:

$$\begin{aligned} G(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} G_0 \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nt} \\ &= G_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{n/k} \right]^{kt} \\ &= G_0 \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right]^{kt} \end{aligned}$$

pa je [M1,§6.1.3]

$$G(t) = G_0 e^{kt}.$$

Na primjer, uz početni iznos od 1000 kuna i godišnju kamatu od 6% nakon tri godine glavnica uz jednogodišnje, polugodišnje, kvartalno, mjesečno, dnevno i neprekidno ukamaćivanje iznosi redom

$$G(3) = 1000 (1.06)^3 = 1191.016$$

$$G(3) = 1000 (1.03)^6 = 1194.052$$

$$G(3) = 1000 (1.015)^{12} = 1195.618$$

$$G(3) = 1000 (1.005)^{36} = 1196.681$$

$$G(3) = 1000 \left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365 \cdot 3} = 1197.199$$

$$G(3) = 1000 e^{0.06 \cdot 3} = 1197.217$$

Prirodni sustavi najčešće zbog svojih ograničenja ne mogu prihvatiti neograničenu populaciju. Stoga je čest sljedeći slučaj: populacija P u početku raste eksponencijalno sa stopom rasta k , ali se taj rast smanjuje kako se populacija približava maksimalnom (nosivom) kapacitetu sustava K . Matematički takvo ponašanje možemo modelirati *logističkom jednadžbom*:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

Mehanizam jednadžbe je sljedeći: kada ja populacija P mala u odnosu na kapacitet K , tada je izraz u zagradi približno jednak jedan, i populacija se ponaša prema populacijskoj jednadžbi. Kada se pak populacija približi maksimalnom kapacitetu, tada izraz u zagradi teži k nula što koči rast populacije. Riješimo jednadžbu: vrijedi redom

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} dP &= \int k dt \\ \int \frac{K}{P(K - P)} dP &= kt + C \\ \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}\right) dP &= kt + C \\ \ln |P| - \ln |K - P| &= kt + C \\ \ln \left|\frac{K - P}{P}\right| &= -kt - C \\ \left|\frac{K - P}{P}\right| &= e^{-kt} e^{-C} \\ \frac{K}{P} - 1 &= A e^{-kt} \end{aligned}$$

pa je

$$P(t) = \frac{K}{1 + A e^{-kt}}.$$

Konstantu A možemo odrediti ako je zadana početna populacija $P(0) = P_0$: iz $P(0) = P_0 = K/(1 + A)$ slijedi

$$A = \frac{K - P_0}{P_0}.$$

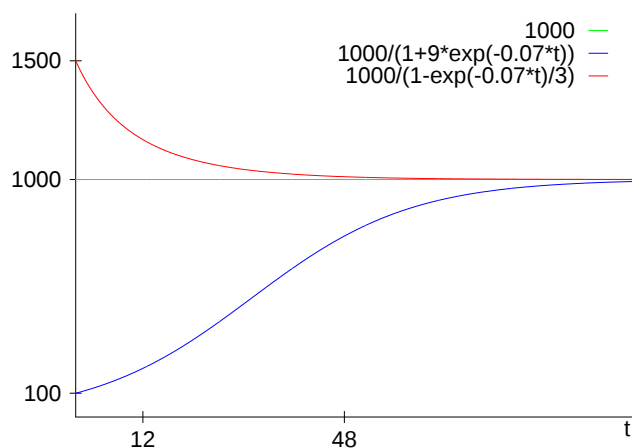
Primjer 5.6 Kultura bakterija ima stopu rasta $k = 0.07$ na sat, a maksimalni kapacitet podloge je 1000 bakterija. Ako je na početku imamo 100 bakterija tada je $A = (1000 - 100)/100 = 9$ pa je

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9 e^{-0.07t}}.$$

Tako ćemo, na primjer, nakon 12 sati imati $P(12) = 205$, a nakon 48 sati $P(48) = 762$ bakterije. Ako, pak, na početku imamo 1500 bakterija, tada je $A = -1/3$ i

$$P(t) = \frac{1000}{1 - \frac{1}{3} e^{-0.07t}}$$

pa ćemo nakon 12 sati imati $P(12) = 1168$, a nakon 48 sati $P(48) = 1012$ bakterija. Obje funkcije prikazane su na slici 5.6.



Slika 5.6: Rješenja logističke jednadžbe

Zadatak 5.1 Vijest se širi gradićem koji ima 1234 stanovnika tako da je brzina širenja vijesti proporcionalna umnošku broja stanovnika koji su vijest

čuli i broja stanovnika koji vijest nisu čuli. U osam sati ujutro vijest je čulo 100 stanovnika, a do podne vijest je čulo pola grada. U koliko sati će 1000 stanovnika čuti vijest?

5.2 Jednadžbe sa separiranim varijablama

Diferencijalna jednadžba prvog reda je *separabilna* (kažemo i da se radi o *jednadžbi sa separiranim varijablama*) ako je možemo zapisati u obliku.

$$f(x) dx = g(y) dy.$$

Tada je

$$\int g(y) dy = \int g(y(x)) \frac{dy}{dx} dx = \int g(y(x)) \frac{f(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx.$$

U literaturi se često navodi i oblik:

$$P(x) dx + Q(y) dy = 0.$$

Sve jednadžbe prvog reda koje smo rješavali u prethodnim poglavljima su separabilne. Navedimo još nekoliko primjera.

Primjer 5.7 Za jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2y + \sin y}$$

vrijedi

$$(2y + \sin y) dy = x^2 dx$$

pa je implicitno rješenje jednadžbe dano s

$$y^2 - \cos y = \frac{x^3}{3} + C.$$

Ako je još zadan i početni uvjet $y(1) = \pi$, tada je

$$C = \pi^2 + \frac{2}{3}.$$

Primjer 5.8 *Newtonov zakon hlađenja* kaže da je promjena temperature objekta proporcionalna razlici temperature objekta T i temperature okoline

(ambijenta) T_{amb} . Ovaj zakon je dobra aproksimacija procesa hlađenja u standardnim uvjetima. Matematička formulacija glasi

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{amb}}), \quad k > 0,$$

gdje je k koeficijent hlađenja (koji ovisi, na primjer, o izolacijskim svojstvima posude). Rješenja problema hlađenja je:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T - T_{\text{amb}}} &= -k dt, \\ \ln |T - T_{\text{amb}}| &= -kt + C, \\ |T - T_{\text{amb}}| &= e^{-kt} e^C, \\ T - T_{\text{amb}} &= A e^{-kt}. \end{aligned}$$

Ako je zadana početna temperatura $T(0) = T_0$, tada je $T_0 = T(0) = T_{\text{amb}} + A$ pa je konačno

$$T(t) = e^{-kt}(T_0 - T_{\text{amb}}) + T_{\text{amb}}.$$

Zadatak 5.2 a) U jednu veliku šalicu kave temperature 90°C ulijemo mlijeko sobne temperature od 22°C odmah, a u drugu nakon 5 minuta. Koja će kava biti toplija nakon 8 minuta? Što se događa ako ulijemo mlijeko iz frižidera temperature 4°C ? *Napomena:* ako je količina kave k i temperatura kave T_k te ako je količina mlijeka m i temperatura mlijeka T_m , tada je temperatura smjese T_s jednaka

$$T_s = \frac{k T_k + m T_m}{k + m}.$$

b) U hotelskoj sobi temperature 20°C policija je u ponoć otkrila tijelo žrtve. Temperatura tijela bila je 26°C . Dva sata kasnije, temperatura tijela bila je 24°C . Kada se otprilike dogodio zločin?

Funkcija $f(x, y)$ je *homogena* stupnja homogenosti k ako je

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y).$$

Diferencijalna jednadžba oblika

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

je *homogena* ako su P i Q homogene funkcije istog stupnja. Zamjenom varijabli $z = y/x$ homogena jednadžba prelazi u jednadžbu sa separiranim varijablama.

Primjer 5.9 Riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Kako je

$$\frac{(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2(x^2 - y^2)} = \frac{xy}{x^2 - y^2},$$

zadana jednadžba je homogena. Uvrštavanje

$$y = zx, \quad y' = z'x + z$$

uz $x \neq 0$ daje

$$z'x + z = \frac{x^2 z}{x^2 - x^2 z^2} = \frac{z}{1 - z^2}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \frac{1 - z^2}{z^3} dz &= \frac{1}{x} dx, \\ -\frac{1}{2z^2} - \ln z &= \ln x + \ln C, \end{aligned}$$

gdje smo radi jednostavnosti pretpostavili da je $x, z, C > 0$. Sada je

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2z^2} &= \ln(zx C), \\ zx C &= e^{-1/(2z^2)}, \\ \frac{y}{x} C &= e^{-x^2/(2y^2)}, \end{aligned}$$

i, konačno,

$$y = \frac{1}{C} e^{-x^2/(2y^2)}.$$

Zadatak 5.3 Riješite diferencijalne jednadžbe:

a) $\left(y' - \frac{y}{x}\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$ uz $y(1) = 1$,

b) $(3x - 7y) dx = (-7x + 3y) dy$,

c) $y' = \frac{x \sqrt{1 + x^2}}{y e^y}$.

Zadatak 5.4 Nađite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $(1, 1)$, a ima svojstvo da joj je nagib u točki (x, y) jednak y^2/x^3 .

5.3 Polje smjerova

Ako je funkcija $y = f(x)$ rješenje diferencijalne jednačbe prvog reda

$$y' = F(x, y),$$

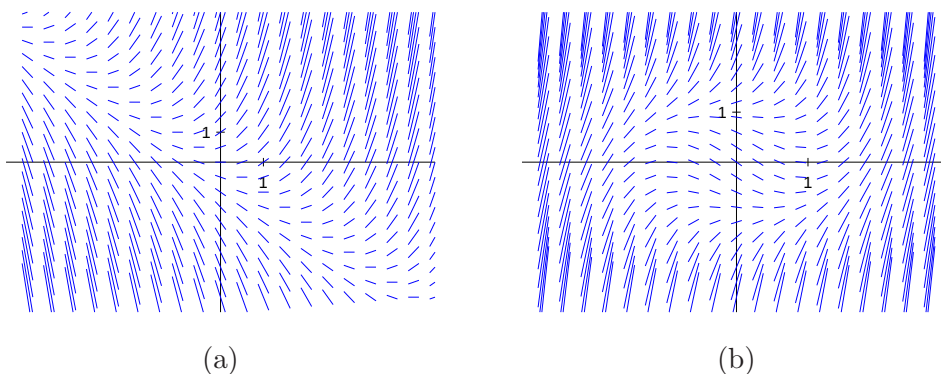
koje prolazi nekom točkom (x_0, y_0) , tada je smjer tangente na krivulju $y = f(x)$ u točki (x_0, y_0) dan upravo s $F(x_0, y_0)$. Kako se svaka funkcija o okolini zadane točke ponaša kao tangenta (vidi [M1, §5.1.1]), to se i rješenje $y = f(x)$ u okolini točke (x_0, y_0) ponaša približno slično kao pravac koji prolazi kroz točku (x_0, y_0) i ima koeficijent smjera $F(x_0, y_0)$.

Temeljem ovog razmatranja možemo napraviti sljedeće:

- odaberimo skup pravilno raspoređenih točaka (x, y) u onom dijelu ravnine u kojem tražimo rješenje diferencijalne jednačbe,
- kroz svaku od odabranih točaka nacrtamo mali dio pravca (segment) s koeficijentom smjera $F(x, y)$.

Na taj način dobili smo *polje smjerova* (polje *izoklina*) diferencijalne jednačbe $y' = F(x, y)$. Polje smjerova nam najčešće daje dobru ideju o izgledu rješenja – krenemo li od početnog uvjeta, možemo skicirati krivulju $y = f(x)$ koristeći svojstvo da nam u svakoj točki nacrtani segment daje smjer kretanja krivulje.

Na slici 5.7 prikazana su polja smjerova za diferencijalne jednačbe $y' = x + y$ i $y' = x^2 + y^2 - 1$.



Slika 5.7: Polje smjerova za jednačbe (a) $y' = x + y$ i (b) $y' = x^2 + y^2 - 1$

Slika 5.7 (b) nacrtana je pomoću sljedećeg Matlab programa:

```

% Polje smjerova za y'=x^2+y^2-1 za -3<=x<=3 i -3<=y<=3
a=-3; b=3;
c=-3; d=3;
nX=15;
nY=15;
dX=(b-a)/nX;
dY=(d-c)/nY;
hold
for i=1:nX+1,
    for j=1:nY+1,
        xx=a+i*dX;
        yy=c+j*dY;
        yDerivirano=xx^2+yy^2-1;
        x=xx-dX/4:dX/100:xx+dX/4;
        y=yDerivirano*(x-xx)+yy;
        plot (x,y,'b')
    end
end
end

```

Primjer 5.10 Polje smjerova logističke jednadžbe iz primjera 5.6,

$$\frac{dP}{dt} = 0.07 P \left(1 - \frac{P}{1000} \right),$$

zajedno s rješenjima za početne uvjete $P(0) = 100$ i $P(0) = 1500$ prikazano je na slici 5.8.

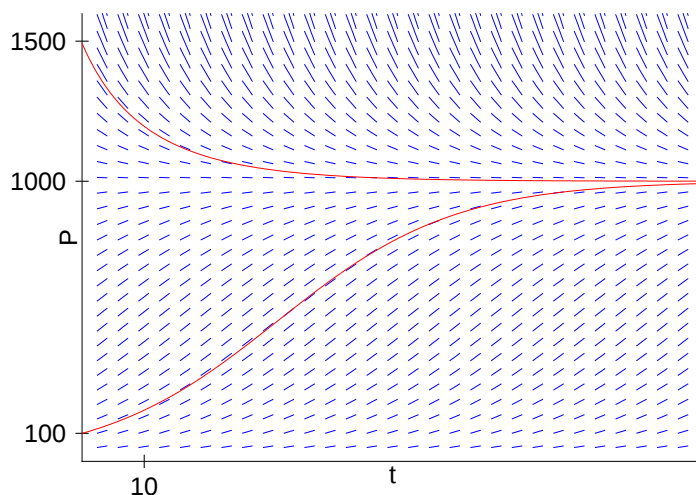
Zadatak 5.5 Za sljedeće diferencijalne jednadžbe skicirajte polje smjerova na području $[-2, 2] \times [-3, 3]$ i rješenja koje prolaze točkama $(0, 0)$, $(0, 1)$ i $(0, -1)$:

$$\begin{aligned} y' &= y - e^{-x}, \\ y' &= 2y(y - 2), \\ y' &= xy + y^2. \end{aligned}$$

5.4 Eulerova metoda

Eulerova metoda je metoda za numeričko rješavanje diferencijalne jednadžbe prvog reda oblika

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$



Slika 5.8: Polje smjerova logističke jednadžbe

Metoda se temelji na aproksimaciji funkcije y pomoću prvog člana Taylorovog reda [M1, teorem 6.17]:

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x) \Delta x.$$

Metoda se sastoji u sljedećem: za odabrani prirast Δx definiramo niz točaka

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x, \quad x_3 = x_2 + \Delta x, \dots,$$

U točki (x_0, y_0) derivacija funkcije y je $y' = F(x_0, y_0)$ pa Taylorova formula povlači

$$y(x_1) \equiv y_1 = y_0 + \Delta x F(x_0, y_0).$$

Slično, vrijedi

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \Delta x F(x_1, y_1), \\ y_3 &= y_2 + \Delta x F(x_2, y_2), \\ &\dots \end{aligned}$$

pa je, za zadanu točku (x_0, y_0) , Eulerova metoda definirana rekursivnom formulom

$$y_n = y_{n-1} + \Delta x F(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Primjer 5.11 Za diferencijalnu jednadžbu strujnog kruga iz primjera 5.2,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{E - RI}{L}, \quad L = 4 \text{ H}, \quad R = 12 \text{ Ohm}, \quad E = 60 \text{ V}, \quad (5.1)$$

uz početni uvjet $I(0) = 0$ i korak $\Delta t = 0.2$ s Eulerova metoda daje

$$\begin{aligned}
 I(0) &= 0, \\
 I(0.2) &= I(0) + 0.2(15 - 3 \cdot I(0)) = 0 + 0.2(15 - 3 \cdot 0) = 3 \\
 I(0.4) &= I(0.2) + 0.2(15 - 3 \cdot I(0.2)) = 3 + 0.2(15 - 3 \cdot 3) = 4.2 \\
 I(0.6) &= 4.2 + 0.2(15 - 3 \cdot 4.2) = 4.68 \\
 I(0.8) &= 4.68 + 0.2(15 - 3 \cdot 4.68) = 4.872 \\
 I(1) &= 4.872 + 0.2(15 - 3 \cdot 4.872) = 4.9488.
 \end{aligned}$$

Za korak od $\Delta t = 0,1$ s imamo redom

$$\begin{aligned}
 I(0) &= 0, \\
 I(0.1) &= 1.5, \\
 I(0.2) &= 2.55, \\
 I(0.3) &= 3.285, \\
 I(0.4) &= 3.79950, \\
 I(0.5) &= 4.15965, \\
 I(0.6) &= 4.41176, \\
 I(0.7) &= 4.58823, \\
 I(0.8) &= 4.71176, \\
 I(0.9) &= 4.79823, \\
 I(1) &= 4.85876.
 \end{aligned}$$

Sljedeći Matlab program računa i crta rješenje diferencijalne jednadžbe (5.1):

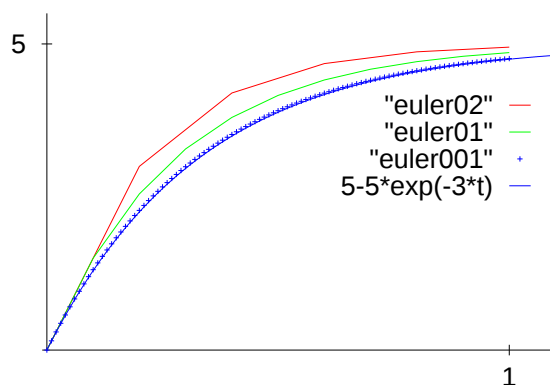
```

% Eulerova metoda za I(t)' = ( E - R * I(t) ), I(0)=0
x0=0;
xn=1;
y(1)=0;
h=0.1;
E=60;
R=12;
L=4;
x=x0:h:xn;
n=max(size(x));
for i=2:n
    yDerivirano=(E-R*y(i-1))/L;
    y(i)=y(i-1)+h*yDerivirano;
end

```

```
end
plot(x,y)
```

Vidimo da Eulerova metoda stalno griješi, no očekujemo da će za dovoljno male korake rješenje biti točnije. Na slici 5.9 prikazana su rješenja jednadžbe (5.1) za korake $\Delta t = 0.2$ s, $\Delta t = 0.1$ s, $\Delta t = 0.01$ s i točno rješenje $I(t) = 5 - 5e^{3t}$.



Slika 5.9: Eulerova metoda

Zadatak 5.6 Izračunajte i skicirajte približno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = y - e^{-x}, \quad y(0) = -1$$

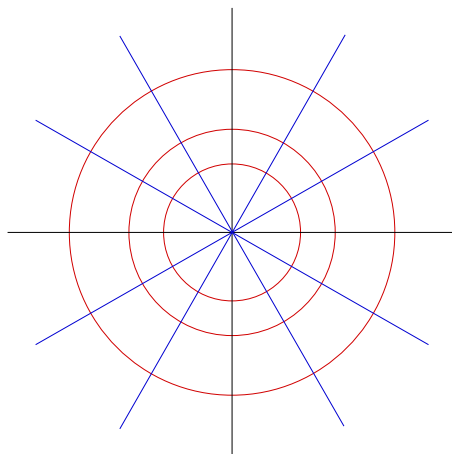
na intervalu $[0, 1]$ uz korake $\Delta x = 0.2$ i $\Delta x = 0.1$.

5.5 Ortogonalne i izogonalne trajektorije

Izogonalna trajektorija obitelji (familije) krivulja $F(x, y, C) = 0$ ovisne o parametru C je svaka krivulja koja siječe svaku krivulju zadane familije pod zadanim kutom. Ukoliko je kut pravi, radi se o *ortogonalnoj trajektoriji*.

Na primjer, ako je zadana familija pravaca koji prolaze kroz ishodište, $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$, tada je svaka kružnica sa središtem u ishodištu, $x^2 + y^2 = C$, $C \in (0, +\infty)$, ortogonalna trajektorija te familije (vidi sliku 5.10). Kažemo da su dvije familije ortogonalne trajektorije jedna drugoj.

Ortogonalne trajektorije možemo, ako postoje, naći sljedećim postupkom:

Slika 5.10: Ortogonalne trajektorije $y = kx$ i $x^2 + y^2 = C$

1. prvo deriviramo jednadžbu zadane familije krivulja, što daje

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

2. eliminacija parametra C iz prethodne jednadžbe i jednadžbe $F(x, y, C) = 0$ daje diferencijalnu jednadžbu zadane familije krivulja, na primjer,

$$\Phi(x, y, y') = 0, \quad (5.2)$$

3. za bilo koju krivulju vrijedi sljedeće: koeficijent smjera tangente zadane krivulje u točki $(x, y(x))$ je $y'(x)$, a koeficijent smjera normale u istoj točki je $-1/y'(x)$. Stoga ortogonalne trajektorije zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu

$$\Phi\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

pa je rješenje ove jednadžbe jednadžba familije ortogonalnih trajektorija.

Primjer 5.12 Nađimo ortogonalne trajektorije familije parabola $x = ky^2$, $k \in \mathbb{R}$: deriviranje daje

$$1 = k 2y y',$$

pri čemu smo koristili pravilo o deriviranju složene funkcije. Kako je $k = x/y^2$, uvrštavanje daje diferencijalnu jednadžbu

$$y' = \frac{y}{2x}.$$

Dakle, ortogonalne trajektorije zadovoljavaju jednadžbu

$$y' = -\frac{2x}{y},$$

odnosno

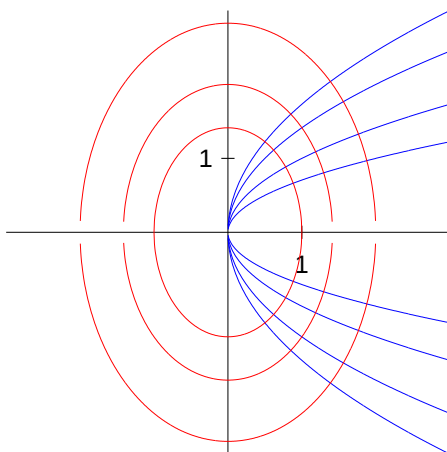
$$y \, dy = -2x \, dx.$$

Integriranje daje

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

pa su ortogonalne trajektorije elipse sa središtem u ishodištu (vidi sliku 5.11),

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{2C} = 1, \quad C > 0.$$



Slika 5.11: Ortogonalne trajektorije $x = ky^2$ i $x^2 + y^2/2 = C$

Zadatak 5.7 Dokažite da su kružnice $x^2 + y^2 = C$, $C \in (0, +\infty)$ ortogonalne trajektorije pravaca $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

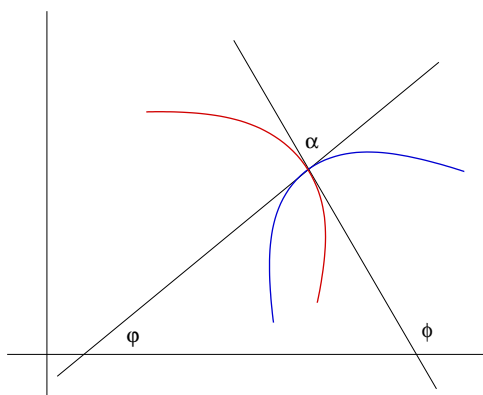
Postupak računanje izogonalnih trajektorija proizlazi iz sljedećeg zapažanja: ako je $dy/dx = \operatorname{tg} \varphi$ koeficijent smjera tangente na zadanu krivulju, i ako je $dy_T/dx = \operatorname{tg} \psi$ koeficijent smjera tangente izogonalne trajektorije koja zadanu krivulju siječe pod kutom α , tada vrijedi (vidi sliku 5.12)

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \alpha},$$

odnosno

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_T}{dx} - \operatorname{tg} \alpha}{\frac{dy_T}{dx} \operatorname{tg} \alpha + 1}. \quad (5.3)$$

Uvrštavanje ovog izraza za dy/dx u jednadžbu (5.2) i ispuštanje indeksa T daje diferencijalnu jednadžbu izogonalne trajektorije.



Slika 5.12: Tangens razlike kutova

Primjer 5.13 Nađimo izogonalne trajektorije familije pravaca $y = kx$ koje te pravce sijeku pod kutom $\pi/4$. Deriviranje zadane jednadžbe i eliminacija konstante C

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

U ovom slučaju je $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$ pa formule (5.3) daje

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{dy_T}{dx} - 1}{\frac{dy_T}{dx} + 1}.$$

Ispuštanjem indeksa T i sređivanjem nastale jednadžbe dobili smo diferencijalnu jednadžbu izogonalnih trajektorija:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Ovo je homogena diferencijalna jednadžba čije rješenje glasi

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln C.$$

U polarnim koordinatama (r, φ) vrijedi

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

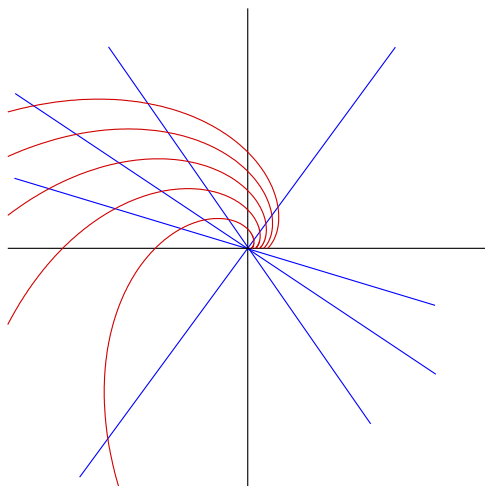
pa rješenje glasi

$$\ln r = \varphi + \ln C,$$

odnosno

$$r = Ce^{\varphi}$$

što je jednačba familije logaritamskih spirala (vidi sliku 5.13).



Slika 5.13: Izogonalne trajektorije $y = kx$ i $r = Ce^{\varphi}$

5.6 Singularna rješenja i ovojnice

Opće rješenje diferencijalne jednačbe prvog reda oblika

$$F(x, y, y') = 0$$

je skup funkcija $\Phi(x, y, C) = 0$ ovisnih o parametru C . No, u nekim slučajevima diferencijalna jednačba ima i rješenje $\Psi(x, y) = 0$ koje se ne može dobiti iz općeg rješenja ni za jednu vrijednost parametra C . Takvo rješenje zove se *singularno rješenje* i ima sljedeća svojstva koja navodimo bez dokaza:

- S1. kroz svaku točku $\Psi(x, y) = 0$ prolaze dva rješenja polazne diferencijalne jednačbe,

- S2. krivulja $\Psi(x, y) = 0$ je *ovojnica* familije krivulja $\Phi(x, y, C) = 0$, odnosno krivulja $\Psi(x, y) = 0$ u svakoj svojoj točki dira jednu od krivulja iz familije $\Phi(x, y, C) = 0$,
- S3. singularno rješenje $\Psi(x, y) = 0$ se dobije eliminacijom parametra C iz sustava jednačbi

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, C) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial C}\Phi(x, y, C) &= 0.\end{aligned}$$

Primjer 5.14 Nađimo singularno rješenje diferencijalne jednačbe

$$y^2(1 + y'^2) = \alpha^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Vrijedi

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - y^2}}{y}.$$

Separacija varijabli daje

$$\frac{y \, dy}{\pm \sqrt{\alpha^2 - y^2}} = dx.$$

pa je rješenje jednačbe familija kružnica radijusa α sa središtem na x -osi:

$$(x - C)^2 + y^2 = \alpha^2.$$

Ovojnice ove familije su pravci $y = \alpha$ i $y = -\alpha$ (vidi sliku (5.14)), a prema svojstvu S2 to su ujedno i singularna rješenja polazne jednačbe što se lako provjeri uvrštavanjem.

Singularno rješenje smo mogli dobiti i pomoću svojstva S3: jednakost

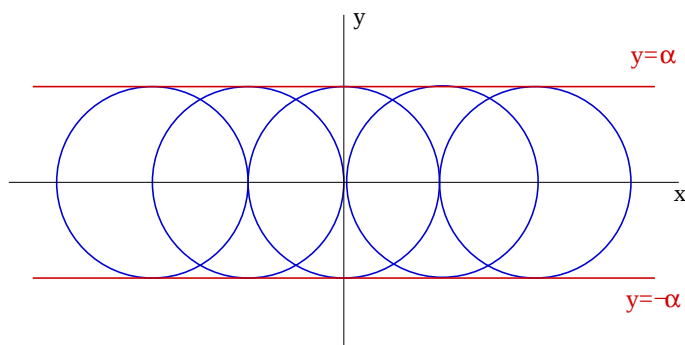
$$\Phi'_C(x, y, C) = [(x - C)^2 + y^2 - \alpha^2]'_C = -2(x - C) = 0$$

povlači $x = C$ pa uvrštavanje u jednačbu $(x - C)^2 + y^2 = \alpha^2$ daje singularno rješenje $y^2 = \alpha^2$.

Zadatak 5.8 Nađite singularno rješenje sljedećih jednačbi:

a) $2y(y' + 2) - x(y')^2 = 0,$

b) $y^2(y')^2 + y^2 - 1 = 0.$



Slika 5.14: Ovojnice

Primjer 5.15 *Clairautova diferencijalna jednačba glasi*

$$y = xy' + f(y').$$

Deriviranje jednačbe daje

$$y' = y' + xy'' + f'(y')y'',$$

odnosno

$$y''[x + f'(y')] = 0.$$

Izjednačavanje prvog faktora s nulom daje $y'' = 0$, odnosno $y' = C$. Dakle, opće rješenje jednačbe glasi

$$y = Cx + f(C),$$

što je familija pravaca ovisna o parametru C . Prema svojstvu S3, singularno rješenje dobijemo eliminacijom parametra C iz sustava

$$y = Cx + f(C), \quad 0 = x + f'(C).$$

Na primjer, opće rješenje jednačbe (uz supstituciju $t = x + 1$)

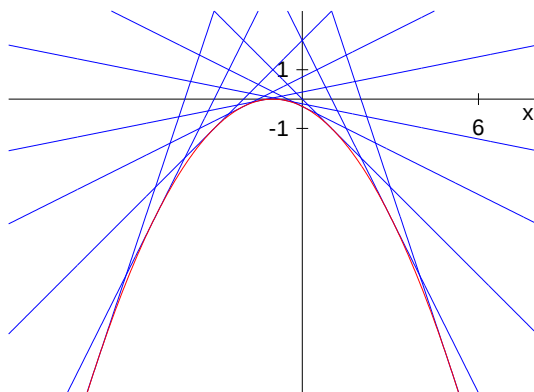
$$y = xy' + y' + (y')^2$$

je

$$y = C(x + 1) + C^2,$$

dok je singularno rješenje jednako (vidi sliku (5.15))

$$y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2.$$



Slika 5.15: Clairautova jednađžba

Zadatak 5.9 Nađite opće i singularno rješenje sljedećih jednađžbi:

a) $x = \frac{y}{y'} - \frac{1}{(y')^2},$

b) $y = xy' + \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$

5.7 Egzaktne jednađžbe i integrirajući faktori

Diferencijalna jednađžba oblika

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (5.4)$$

je *egzaktna* ako je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (5.5)$$

U tom slučaju postoji funkcija $F(x, y)$ takva da je

$$dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (5.6)$$

pa je rješenje jednađžbe dano s

$$F(x, y) = C.$$

Opišimo postupak nalaženja funkcije F . Ukoliko navedena funkcija F postoji, tada je $\partial F/\partial x = P$, odnosno

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y),$$

pri čemu je $\varphi(y)$ neka funkcija od y . Nadalje,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + \varphi'(y) = Q(x, y)$$

pa je

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx.$$

Izraz na desnoj strani prethodne jednakosti je funkcija od y jer uvjet (5.5) povlači

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right] &= \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int P(x, y) dx \\ &= \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\varphi(y) = \int \left[Q(x, y) dy - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right] dy$$

pa je konačno

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + \int \left[Q(x, y) dy - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right] dy.$$

Kako je

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) &= P(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx = Q(x, y), \end{aligned}$$

funkcija F zaista zadovoljava jednakost (5.6).

Primjer 5.16 Prethodno opisnim postupkom nađimo rješenje diferencijalne jednačbe

$$(2x + 2y^2) dx + (4xy + 3y^2) dy.$$

Jednačba je egzaktna jer je

$$\frac{\partial}{\partial y} (2x + 2y^2) = 4y = \frac{\partial}{\partial x} (4xy + 3y^2).$$

Vrijedi

$$F(x, y) = \int (2x + 2y^2) dx + \varphi(y) = x^2 + 2xy^2 + \varphi(y).$$

Dalje je

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 4xy + \varphi'(y) = 4xy + 3y^2,$$

pa je $\varphi'(y) = 3y^2$ odnosno $\varphi(y) = y^3$. Rješenje zadane jednađbe je stoga

$$x^2 + 2xy^2 + y^3 = C.$$

Zadatak 5.10 Riješite diferencijalne jednađbe:

a) $y'(4xy + 3y^2) + 2x + 2y^2 + 1 = 0$, uz uvjet $y(0) = -1$,

b) $(x + e^{x/y}) dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{x/y} dy = 0$,

c) $y' = \frac{\sin y}{x \cos y}$, uz uvjet $y(1) = \pi/4$.

Za neke jednađbe oblika (5.4) koje nisu egzaktne, postoji funkcija $\mu(x, y)$ takva da je jednađba

$$\mu(x, y) P(x, y) dx + \mu(x, y) Q(x, y) dy = 0 \quad (5.7)$$

egzaktna. U tom slučaju umjesto zadane jednađbe (5.4) možemo riješiti novu jednađbu. Funkcija μ je *integrirajući faktor* ili *Eulerov multiplikator*. Ako je jednađba (5.7) egzaktna, tada je $(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$ pa je

$$\mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_x,$$

odnosno

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = \mu(Q'_x - P'_y).$$

Ovo je parcijalna diferencijalna jednađba koja može biti i složenija od polaznog problema. Stoga nalaženje integrirajućeg faktora općenito nije jednostavno. No, kada je integrirajući faktor funkcija samo jedne varijable (bilo x bilo y), tada je postupak sljedeći: ako je $\mu = \mu(x)$ tada je $\mu'_y = 0$ pa je

$$-\mu'_x = \mu(Q'_x - P'_y),$$

odnosno

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx.$$

Dakle, $\mu = \mu(x)$ možemo naći ukoliko je kvocijent na desnoj strani funkcija od x . Slično, ako je $\mu = \mu(y)$ tada je $\mu'_x = 0$ pa je

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{Q'_x - P'_y}{P} dy$$

ukoliko je kvocijent na desnoj strani funkcija od y .

Primjer 5.17 Riješimo jednadžbu

$$(x^2 - y^2) dy + 2xy dx = 0.$$

Kako je $P = x^2 - y^2$ i $Q = 2xy$ te $P'_y = -2y$ i $Q'_x = 2y$, jednadžba nije egzaktna. Iz

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = -\frac{4y}{2xy} = -\frac{2}{x}$$

zaključujemo da je $\mu = \mu(x)$. Imamo

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{\mu} &= -\frac{2}{x} dx, \\ \ln |\mu| &= \ln |x|^{-2} + \ln C, \\ \mu &= \frac{C}{x^2}.\end{aligned}$$

Možemo uzeti bilo koji integrirajući faktor pa odaberimo $C = 1$ odnosno $\mu = 1/x^2$. Množenje polazne jednadžbe s integrirajućim faktorom daje egzaktnu diferencijalnu jednadžbu (provjerite)

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2} dx + \frac{2y}{x} dy = 0.$$

Postupak opisan na početku poglavlja daje:

$$\begin{aligned}F(x, y) &= \int \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \varphi(y) = x + \frac{y^2}{x} + \varphi(y), \\ F'_y(x, y) &= \frac{2y}{x} + \varphi'(y) = \frac{2y}{x}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = C$$

pa je rješenje zadane jednadžbe dano s

$$x + \frac{y^2}{x} = C.$$

Zadatak 5.11 Riješite diferencijalne jednačbe:

- a) $y + (y^2 - x)y' = 0$,
- b) $(x + y^3)dy - ydx = 0$, uz uvjet $y(1) = 1$,
- c) $(6x^3y + 3y^2)dx + (2x^4 + 6xy \ln x)dy = 0$.

5.8 Linearne diferencijalne jednačbe prvog reda

Linearna diferencijalna jednačba prvog reda ima oblik

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (5.8)$$

Rješenje jednačbe je

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int q(x) \mu(x) dx + C \right], \quad \mu(x) = e^{\int p(x) dx}. \quad (5.9)$$

Ako je $q(x) = 0$, jednačba je *homogena*,

$$y' + p(x)y = 0.$$

Ovo je jednačba sa separiranim varijablama:

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx.$$

Dakle,

$$\ln y = - \int p(x) dx + \ln C,$$

odnosno rješenje homogene jednačbe glasi

$$y = C e^{-\int p(x) dx}.$$

U nehomogenom slučaju, jednačba (5.8) je ekvivalentna s

$$dy + [p(x)y - q(x)] dx = 0.$$

Iz

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx = \frac{p(x) - 0}{1} dx = p(x) dx$$

zaključujemo da je integrirajući faktor dan s

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}.$$

Množenjem jednadžbe (5.8) integrirajućim faktorom imamo

$$e^{\int p(x) dx} y' + e^{\int p(x) dx} p(x) y = e^{\int p(x) dx} q(x).$$

Formula za deriviranje produkta daje

$$\left[e^{\int p(x) dx} y \right]' = e^{\int p(x) dx} q(x),$$

a integriranje daje

$$e^{\int p(x) dx} y = \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + C$$

i formula (5.9) je dokazana.

Primjer 5.18 Riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$y' = 2y + x, \quad y(0) = 2.$$

Vrijedi

$$\mu(x) = e^{\int (-2) dx} = e^{-2x}$$

pa je

$$y = e^{2x} \left[C + \int e^{-2x} x dx \right].$$

Parcijalna integracija daje

$$\int e^{-2x} x dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x}$$

pa opće rješenje glasi

$$y = e^{2x} \left[C - \frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right] = C e^{2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}.$$

Početni uvjet daje

$$y(0) = C - \frac{1}{4} = 2.$$

Dakle, $C = 9/4$ pa je rješenje zadaog problema funkcija

$$y(x) = \frac{9}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}.$$

Zadatak 5.12 Riješite diferencijalne jednadžbe:

a) $y' - y \sin x = \sin x \cos x,$

b) $y' + \frac{2}{x}y = x^3$,

c) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$, uz uvjet $y(0) = 1$.

Primjer 5.19 Bernoullijeva diferencijalna jednačba glasi

$$y' = p(x)y + q(x)y^r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Ako je $r = 0$, radi se o linearnoj diferencijalnoj jednačbi prvog reda oblika (5.8). Ako je $r = 1$, tada imamo homogenu jednačbu $y' = [p(x) - q(x)]y$. U ostalim slučajevima koristimo supstituciju $w = y^{1-r}$. Uvrštavanjem

$$y' = \left[w^{\frac{1}{1-r}} \right]' = \frac{1}{1-r} w^{\frac{1}{1-r}-1} w' = \frac{1}{1-r} w^{\frac{r}{1-r}} w'$$

dobili smo linearnu diferencijalnu jednačbu prvog reda

$$\frac{1}{1-r} w^{\frac{r}{1-r}} w' = p(x) w^{\frac{1}{1-r}} + q(x) w^{\frac{r}{1-r}},$$

odnosno

$$w' = (1-r)p(x)w + (1-r)q(x).$$

Zadatak 5.13 Riješite diferencijalne jednačbe:

a) $xy' = y + e^x y^3$ (rješenje: $y = (C/x^2 - 2e^x/x + 2e^x/x^2)^{-1/2}$),

b) $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$ (rješenje: $y = 1/(x\sqrt[3]{3\ln|C/x|})$).

5.9 Linearne diferencijalne jednačbe drugog reda

Linearna diferencijalna jednačba drugog reda glasi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

pri čemu su funkcije p , q i f neprekidne na nekom intervalu $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ na kojem promatramo jednačbu. *Rješenje jednačbe* je svaka funkcija y koja za bilo koji $x_0 \in \mathcal{I}$ može zadovoljiti proizvoljne početne uvjete

$$y(x_0) = a, \quad y'(x_0) = b.$$

Pripadna *homogena* jednačba glasi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

U općenitom slučaju kada su p i q proizvoljne funkcije od x , ne postoji univerzalna metoda za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda (5.14). No, takva metoda postoji u slučaju kada su p i q konstante (vidi poglavlje 5.9.3).

Poglavlje je organizirano na sljedeći način: prvo je uveden pojam linearne nezavisnosti funkcija. Potom je opisana struktura rješenja homogene jednadžbe (5.11). Nakon toga opisane su metode varijacije konstanti i metoda neodređenih koeficijenata za rješavanje nehomogene jednadžbe (5.14). Na kraju je opisan postupak rješavanja jednadžbe s konstantnim koeficijentima.

Definicija 5.2 Funkcije y_1 i y_2 su *linearno nezavisne* na intervalu $\mathcal{I}$ ako identitet

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{I}, \quad (5.10)$$

pri čemu su C_1 i C_2 realne konstante, povlači $C_1 = C_2 = 0$.

Ova definicija je formalno jednaka definiciji linearne nezavisnosti vektora [M1, §2.5]. Provjera linearne nezavisnosti je nešto složenija i za nju su nam potrebni sljedeća definicija i teorem.

Definicija 5.3 Neka su $y_1, y_2 : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilne funkcije. Funkcija

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)$$

je *determinanta Wronskog* ili *Wronskijan* funkcija y_1 i y_2 .

Teorem 5.1 Ako su funkcije y_1 i y_2 linearno zavisne na intervalu $\mathcal{I}$, tada je njihov Wronskijan identično jednak nula.

Dokaz. Neka je

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0,$$

pri čemu je, na primjer, $C_2 \neq 0$. Tada je $y_2 = \lambda y_1$ za $\lambda = -C_1/C_2$. No, tada je i

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{I}$$

i teorem je dokazan. ■

Zaključujemo da su dvije funkcije linearno nezavisne čim je Wronskijan u barem jednoj točki različit od nule, što nije teško provjeriti.

5.9.1 Homogene jednačbe

Sljedeća dva teorema daju strukturu rješenja homogene jednačbe

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (5.11)$$

Teorem 5.2 *Ako su y_1 i y_2 dva rješenja homogene jednačbe (5.11), tada je i svaka njihova linearna kombinacija $C_1 y_1 + C_2 y_2$ također rješenje te jednačbe.*

Dokaz. Teorem se dokazuje direktnim uvrštavanjem. ■

Teorem 5.3 *Neka su y_1 i y_2 dva rješenja homogene jednačbe (5.11). Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne³:*

- (i) $W(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathcal{I}$,
- (ii) $W(x_0) \neq 0$ za neki $x_0 \in \mathcal{I}$,
- (iii) funkcije y_1 i y_2 su linearno nezavisne na intervalu $\mathcal{I}$,
- (iv) opće rješenje jednačbe dano je s $C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Dokaz. Implikacija (iii) $\Rightarrow$ (ii) slijedi iz teorema 5.1.

Implikaciju (ii) $\Rightarrow$ (i) dokazujemo na sljedeći način: kako su y_1 i y_2 rješenja zadane jednačbe, vrijedi

$$\begin{aligned} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 &= 0, \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Množenjem prva jednačbe s y_2 i druge s y_1 te oduzimanjem prve jednačbe od druge, imamo

$$(y_2''y_1 - y_1''y_2) + p(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0,$$

odnosno, prema definiciji Wronskijana,

$$W' + p(x)W = 0.$$

³Drugim riječima, ako je bilo koja tvrdnja istinita, tada su istinite i ostale.

Separacija varijabli i teorem 2.3 daju

$$\ln W = - \int_{x_0}^x p(t) dt + \ln C,$$

odnosno

$$W(x) = C e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}. \quad (5.12)$$

Uvrštavanjem točke $x = x_0$ slijedi $C = W(x_0)$, odnosno

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}.$$

Kako je po pretpostavci $W(x_0) \neq 0$, a eksponencijalna funkcija je uvijek nenegativna, zaključujemo da je $W(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathcal{I}$ pa je implikacija dokazana.

Implikacija $(i) \Rightarrow (iii)$ je očita (teorem 5.1).

S ovim smo dokazali ekvivalentnost tvrdnji $(i) - (iii)$. Preostaje još uključiti tvrdnju (iv) . Dokažimo ekvivalentnost tvrdnji (i) i (iv) . Funkcija $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ je opće rješenje jednadžbe (5.11) ako za bilo koje početne uvjete

$$y(x_0) = a, \quad y'(x_0) = b, \quad x_0 \in \mathcal{I},$$

možemo naći odgovarajuće konstante C_1 i C_2 tako da uvjeti budu zadovoljeni. Uvrštavanjem zaključujemo da su C_1 i C_2 rješenja sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) &= a \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) &= b. \end{aligned}$$

Determinanta matrice ovog sustava je upravo Wronskijan. Prema Kronecker-Capellijevom teoremu [M1, teorem 2.5] i svojstvu determinanti D8 iz [M1, §2.9.1], ovaj sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $W(x) \neq 0$ za svaki $x = x_0$ u intervalu $\mathcal{I}$ i teorem je dokazan. ■

Skup linearno nezavisnih rješenja homogene jednadžbe (5.11) zove se *fundamentalna skup rješenja*.

Primjer 5.20 Rješenja diferencijalne jednadžbe

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$$

su

$$y_1 = x, \quad y_2 = -\frac{1}{x},$$

što se lako provjeri uvrštavanjem. Wronskijan je jednak

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & -\frac{1}{x} \\ 1 & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{2}{x}.$$

Očito je $W(x) \neq 0$ za $x \neq 0$ pa su prema teoremu 5.3 funkcije y_1 i y_2 linearno nezavisne, a opće rješenje jednačbe glasi

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}.$$

Ukoliko znamo samo jedno rješenje zadane homogene jednačbe, drugo linearno nezavisno rješenje možemo dobiti koristeći formulu (5.12). Prema toj formuli je

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = C e^{-\int p(x) dx}.$$

Dijeljenjem ove jednačbe s y_1^2 imamo

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} C e^{-\int p(x) dx}$$

pa pravilo o deriviranju produkta daje

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{1}{y_1^2} C e^{-\int p(x) dx},$$

odnosno

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{C e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx + D.$$

Kako tražimo samo jedno rješenje, možemo uzeti $C = 1$ i $D = 0$ pa je

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx. \quad (5.13)$$

Funkcije y_1 i y_2 su očito linearno nezavisne jer je funkcija y_2/y_1 različita od konstante pa je opće rješenje jednačbe jednako

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx.$$

Primjer 5.21 Jedno rješenje homogene diferencijalne jednačbe

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0$$

je $y_1 = x$. Prema formuli (5.13) vrijedi

$$\begin{aligned} y_2 &= x \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{-\ln|1-x^2|}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2 |1-x^2|} \\ &= \frac{1}{2} x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \pm 1 \end{aligned}$$

pa je opće rješenje zadane jednačbe jednako

$$y = C_1 x + C_2 \left(\frac{1}{2} x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \pm 1 \right).$$

5.9.2 Nehomogene jednačbe

Sljedeći teorem daje opće rješenje linearne diferencijalne jednačbe drugog reda

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x). \quad (5.14)$$

Teorem 5.4 Opće rješenje jednačbe (5.14) dano je s

$$y = y_H + y_P,$$

gdje je y_P neko partikularno rješenje, odnosno

$$y_P'' + p(x) y_P' + q(x) y_P = f(x),$$

a y_H rješenje pripadne homogene jednačbe (5.11).

Dokaz. Funkcija y je zaista rješenje jer vrijedi

$$\begin{aligned} (y_H + y_P)'' + p(x) (y_H + y_P)' + q(x) (y_H + y_P) &= \\ = [y_H'' + p(x) y_H' + q(x) y_H] + [y_P'' + p(x) y_P' + q(x) y_P] &= 0 + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Još treba pokazati da funkcija y može zadovoljiti bilo koje početne uvjete

$$y(x_0) = a, \quad y'(x_0) = b, \quad x_0 \in \mathcal{I}.$$

Prema teoremu 5.3, rješenje homogene jednačbe je oblika $y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$, gdje su y_1 i y_2 linearno nezavisne funkcije. Dakle,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_P.$$

Uvrštavanjem dobivamo sustav linearnih jednađbi u nepoznanicama C_1 i C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) &= a - y_P(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) &= b - y_P'(x_0). \end{aligned}$$

Determinanta matrice ovog sustava je upravo Wronskijan koji je različit od nule po teoremu 5.3. Stoga sustav ima jedinstveno rješenje i teorem je dokazan. ■

Partikularno rješenje nalazimo *metodom varijacije konstanti*. Neka je $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ rješenje pripadne homogene jednađbe pri čemu su y_1 i y_2 linearno nezavisne funkcije. Partikularno rješenje nehomogene jednađbe tražimo u istom obliku, s tom razlikom što pretpostavljamo da C_1 i C_2 nisu konstante već neke funkcije od x . Deriviranje daje

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2.$$

Odaberimo funkcije C_1 i C_2 tako da zadovoljavaju uvjet

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0. \quad (5.15)$$

Tada je

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

pa je

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'.$$

Uvrštavanje u jednađbu (5.14) daje

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + p(x)[C_1 y_1' + C_2 y_2'] + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x),$$

odnosno

$$C_1 [y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1] + C_2 [y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2] + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Kako su y_1 i y_2 rješenja homogene jednađbe, izrazi u uglatim zagradama su jednaki nula pa je

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Kombinirajući ovu jednakost s jednakošću (5.15), vidimo da su funkcije C_1' i C_2' rješenje sustava linearnih jednađbi

$$\begin{aligned} C_1' y_1 + C_2' y_2 &= 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' &= f(x). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Determinanta ovog sustava je Wronskijan linearno nezavisnih funkcija y_1 i y_2 koji je uvijek različit od nule pa sustav ima jedinstveno rješenje. Ako je rješenje sustava, na primjer,

$$C_1' = \alpha(x), \quad C_2'(x) = \beta(x),$$

tada je, konačno,

$$C_1(x) = \int \alpha(x) dx + A, \quad C_2(x) = \int \beta(x) dx + B$$

pri čemu su A i B konstante integracije.

Primjer 5.22 Nađimo opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' - \frac{y'}{x} = x.$$

Prvo nađimo opće rješenje homogene jednadžbe

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0.$$

Iz

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$$

slijedi

$$\ln y' = \ln x + \ln C$$

pa je $y' = Cx$. Dakle,

$$y_H = C_1 x^2 + C_2.$$

Partikularno rješenje ćemo odrediti metodom varijacije konstanti: funkcije C_1 i C_2 ćemo odrediti iz rješenja sustava

$$C_1' x^2 + C_1' 1 = 0, \quad 2 C_1' x + C_2' \cdot 0 = x.$$

Dakle,

$$C_1' = \frac{1}{2}, \quad C_2' = -\frac{1}{2} x^2$$

pa je

$$C_1 = \frac{1}{2} x + A, \quad C_2 = -\frac{1}{6} x^3 + B.$$

Stoga je, uz $A = B = 0$, partikularno rješenje jednako,

$$y_P = C_1 x^2 + C_2 = \frac{1}{3} x^3$$

pa je opće rješenje jednako

$$y = y_H + y_P = C_1 x^2 + C_2 + \frac{1}{3} x^3.$$

Napomena 5.1 Ukoliko je funkcija f zbroj dviju funkcija, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, tada je partikularno rješenje jednačbe

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

jednako $y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$ pri čemu je

$$y''_{P_i} + p(x)y'_{P_i} + q(x)y_{P_i} = f_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Na primjer, partikularno rješenje jednačbe $y'' - 4y = x$ je $y_{P_1} = x/4$, a partikularno rješenje jednačbe $y'' - 4y = 3e^x$ je $y_{P_2} = 3e^x/5$ pa je partikularno rješenje jednačbe

$$y'' - 4y = x + 3e^x$$

jednako

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{5}e^x.$$

5.9.3 Jednačbe s konstantnim koeficijentima

Linearna diferencijalna jednačba drugog reda s konstantnim koeficijentima glasi

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (5.17)$$

Rješenje pripadne homogene jednačbe,

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (5.18)$$

tražimo u obliku $y = e^{\lambda x}$, pri čemu, prema teoremu 5.3, trebamo naći dva linearno nezavisna rješenja. Uvrštavanje daje

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0,$$

odnosno

$$e^{\lambda x} (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$$

Kako je eksponencijalna funkcija uvijek nenegativna, λ ćemo dobiti kao rješenje *karakteristične jednačbe*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Dakle, vrijedi

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

pa razlikujemo tri slučaja.

Ako je $a^2 - 4b > 0$, nul-točke su različite i realne, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Tada su

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

dva linearno nezavisna rješenja homogene jednadžbe jer je

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

pa je

$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

Ako je $a^2 - 4b = 0$, tada imamo jednu dvostruku realnu nul-točku,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{a}{2}.$$

Dva linearno nezavisna rješenja homogene jednadžbe su jednaka

$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = x e^{\lambda x}$$

pa je

$$y_H = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

Zaista, funkcija y_1 je rješenje homogene jednadžbe jer λ zadovoljava karakterističnu jednadžbu, dok je funkcija y_2 prema formuli (5.13) jednaka

$$y_2 = e^{\lambda x} \int \frac{e^{-\int a dx}}{e^{2\lambda x}} dx = e^{\lambda x} \int dx = x e^{\lambda x}.$$

Ako je $a^2 - 4b < 0$, nul-točke su konjugirano kompleksne, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$, odnosno

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + i \frac{\sqrt{4b-a}}{2} \equiv \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} - i \frac{\sqrt{4b-a}}{2} \equiv \alpha - \beta i.$$

Tada su

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

dva linearno nezavisna rješenja homogene jednadžbe, kao i u prvom slučaju. No, prema teoremu 5.2, i funkcije

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2} [e^{(\alpha + \beta i)x} + e^{(\alpha - \beta i)x}] \\ &= \frac{1}{2} [e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)] \\ &= e^{\alpha x} \cos \beta x \end{aligned}$$

i

$$y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = \frac{1}{2i}[e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{(\alpha-\beta i)x}] = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

su također rješenja jednačbe (5.18). Pomoću Wronskijana vidimo da su funkcije y_3 i y_4 linearno nezavisne pa je

$$y_H = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Primjer 5.23 a) Za jednačbu

$$y'' + y' - 2y = 0$$

karakteristična jednačba glasi

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Stoga je $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -2$ pa je rješenje zadane jednačbe jednako

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

b) Karakteristična jednačba jednačbe

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

glasi

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Stoga je $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ pa je rješenje jednačbe jednako

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

c) Nađimo rješenja jednačbe

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Karakteristična jednačba glasi

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Rješenja su konjugirano kompleksna,

$$\lambda_1 = -1 + 2i, \quad \lambda_2 = -1 - 2i,$$

pa je

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Prvi uvjet daje

$$y(0) = 1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1.$$

Kako je

$$y'(x) = -e^{-x} (1 \cdot \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x} (1 \cdot (-2 \sin 2x) + 2 C_2 \cos 2x),$$

drugi uvjet daje

$$y'(0) = 0 = -1 + 2 C_2,$$

odnosno $C_2 = 1/2$, pa je opće rješenje jednadžbe

$$y = e^{-x} \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right).$$

Nakon što smo izračunali rješenje homogene jednadžbe (5.18), partikularno rješenje y_P jednadžbe (5.17) možemo naći ili metodom varijacije konstanti iz poglavlja 5.9.2 ili metodom neodređenih koeficijenata koja je opisana na kraju ovog poglavlja.

Primjer 5.24 Riješimo jednadžbu

$$y'' + 4y' + 3y = x.$$

Karakteristična jednadžba glasi $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ pa je $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -3$. Rješenje pripadne homogene jednadžbe je stoga

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}. \quad (5.19)$$

Metoda varijacije konstanti daje sustav (5.16):

$$\begin{aligned} C_1' e^{-x} + C_2' e^{-3x} &= 0, \\ C_1' (-e^{-x}) + C_2' (-3e^{-3x}) &= x. \end{aligned}$$

Sustav možemo riješiti, na primjer, Cramerovim pravilom [M1, §2.9.5]:

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ x & -3e^{-3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-3x} \\ -e^{-x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix}} = \frac{-xe^{-3x}}{-2e^{-3x}e^{-x}} = \frac{1}{2} x e^x, \\ C_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-3x} \\ -e^{-x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix}} = \frac{xe^{-x}}{-2e^{-3x}e^{-x}} = -\frac{1}{2} x e^{3x}. \end{aligned}$$

Integriranje daje

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \frac{1}{2} x e^x dx = \frac{1}{2} (x-1) e^x + A, \\ C_2(x) &= \int -\frac{1}{2} x e^{3x} dx = -\frac{1}{18} (3x-1) e^{3x} + B. \end{aligned}$$

Odabirom konstanti $A = B = 0$ i uvrštavanjem funkcija $C_1(x)$ i $C_2(x)$ u formulu (5.19) dobili smo partikularno rješenje

$$y_P = \frac{1}{3} x - \frac{4}{9}$$

pa je opće rješenje zadane jednačbe jednako

$$y = y_H + y_P = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3} x - \frac{4}{9}.$$

Ukoliko funkcija $f(x)$ u jednačbi (5.17) ima poseban oblik,

$$f(x) = e^{ax} p(x) \cos bx + e^{ax} q(x) \sin bx, \quad (5.20)$$

pri čemu su p i q polinomi stupnja najviše m , tada partikularno rješenje možemo naći *metodom neodređenih koeficijenata*: ako je $a + ib$ nul-točka karakterističnog polinoma kratnosti k , $k \in \{0, 1, 2\}$, tada partikularno rješenje y_P ima oblik

$$\begin{aligned} y_P &= x^k e^{ax} [(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m) \cos bx + \\ &\quad + (B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m) \sin bx]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Uvrštavanjem ove funkcije u jednačbu (5.17) i izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata, dobijemo sustav linearnih jednačbi koji uvijek ima jedinstveno rješenje.

Primjer 5.25 Funkcija $f(x) = x$ u primjeru 5.24 ima oblik (5.20) uz $a = 0$, $b = 0$, $m = 1$ i $p(x) = x$. Prema formuli (5.21), partikularno rješenje ima oblik

$$y_P = (A_0 + A_1 x) e^{0x} = A_0 + A_1 x.$$

Uvrštavanje u zadanu jednačbu daje

$$0 + 4 A_1 + 3 (A_0 + A_1 x) = x.$$

Izjednačavanje lijeve i desne strane po potencijama od x daje sustav jednačbi

$$3 A_1 = 1, \quad 4 A_1 + 3 A_0 = 0$$

pa je partikularno rješenje jednako

$$y_P = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

Ovaj postupak je jednostavniji od metode varijacije konstanti koju smo koristili u primjeru 5.24.

Primjer 5.26 Riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}.$$

Rješenje homogene jednadžbe je

$$y_H = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Funkcija f ima oblik (5.20) uz $a = 3$, $b = 0$, $m = 2$ i $p(x) = x^2 + 1$. Stoga, prema formuli (5.21) partikularno rješenje ima oblik

$$y_P = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.$$

Uvrštavanje y_P u zadanu jednadžbu, kraćenje s e^{3x} i izjednačavanje koeficijenata uz potencije od x , daje sustav jednadžbi s nepoznicama A , B i C čije je rješenje

$$A = \frac{1}{18}, \quad B = -\frac{1}{27}, \quad C = \frac{5}{81}.$$

Dakle, partikularno rješenje je jednako

$$y_P = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x},$$

a opće rješenje zadane jednadžbe je $y = y_H + y_P$.

Primjer 5.27 Riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Nul-točke karakteristične jednadžbe su $\lambda_1 = 2i$ i $\lambda_2 = -2i$ pa je rješenje homogene jednadžbe jednako

$$y_H = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Funkcija f ima oblik (5.20) uz $a = 0$, $b = 2$, $m = 0$ i $p(x) = 1$. Kako je $a + ib$ nul-točka karakteristične jednadžbe kratnosti $k = 1$, u skladu s formulom (5.21) partikularno rješenje ima oblik

$$y_P = x(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Uvrštavanje y_P u zadanu jednačbu i izjednačavanje koeficijenata uz $\sin 2x$ i $\cos 2x$ daje

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{4}$$

pa je opće rješenje zadane jednačbe jednako

$$y = y_H + y_P = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

Zadatak 5.14 Riješite diferencijalne jednačbe:

a) $y'' + 3y' = 3x e^{-3x}$ (rješenje: $y = A + B e^{-3x} - \frac{1}{2} x^2 e^{-3x} - \frac{1}{3} x e^{-3x}$),

b) $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$ (rješenje: $y = A \sin x + B \cos x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{1}{2 \sin x}$),

c) $y'' + 4y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ (rješenje: $y = \frac{9}{16} e^{2x} + \frac{7}{16} e^{-2x} - \frac{x}{4}$),

d) $y'' + 7y' + 6y = (x - 2) e^x$ (rješenje: $y = A e^{6x} + B e^x + x(-\frac{1}{10} x + \frac{9}{25}) e^x$),

e) $y'' - y = 3 e^{2x} \cos x$ (rješenje: $y = A e^x + B e^{-x} + e^{2x} (\frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \sin x)$),

f) $y'' + 4y' + 7y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$

g) $y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x.$

5.9.4 Slobodna, gušena i prisilna titranja

Najzanimljiviji problem koji se svodi na diferencijalnu jednačbu drugog reda sa konstantnim koeficijentima je sustav mase i opruge. Tijelo mase m titra na opruzi koja ima koeficijent opruge $k > 0$. Sustav ima dodatno trenje (gušenje) s koeficijentom gušenja $b > 0$, a na tijelo djeluje vanjska sila f . Neka je $y(t)$ otklon tijela od položaja mirovanja u trenutku t . Na tijelo djeluju sljedeće sile:

- sila jednaka umnošku mase i ubrzanja prema Newtonovom drugom zakonu gibanja,

$$m \frac{d^2 y}{dt^2},$$

- sila gušenja koja je proporcionalna brzini,

$$b \frac{dy}{dt},$$

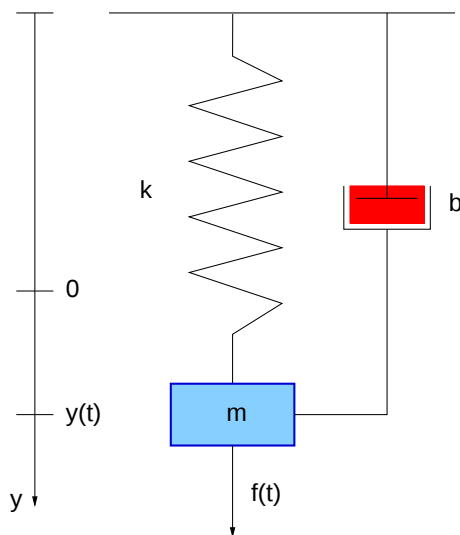
- i sila kojom djeluje opruga prema Hookeovom zakonu, a koja je proporcionalna odklonu od položaja mirovanja (vidi primjer 2.20),

$$k y.$$

Navedene sile moraju biti u ravnoteži s vanjskom silom f , što daje diferencijalnu jednačbu drugog reda s konstantnim koeficijentima:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + k y = f(t). \quad (5.22)$$

Ovaj sustav, koji je složeniji od sustava opisanog u primjeru 5.1, je prikazan na slici 5.16.



Slika 5.16: Titranje mase obješene na oprugu uz gušenje i vanjsku silu

U najjednostavnijem slučaju kada nema ni gušenja ni vanjske sile ($b = 0$ i $f(t) = 0$), radi se o *harmonijskom oscilatoru*. Pripadna (homogena) diferencijalna jednačba glasi

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k y = 0.$$

Karakteristična jednačba je

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$$

pa jednačba titranja glasi

$$y(t) = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t, \quad \alpha = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

što je periodička funkcija s periodom

$$P = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Konstante C_1 i C_2 možemo odrediti iz početnog položaja $y(t_0) = y_0$ i početne brzine $y'(t_0) = y_1$. Nadalje, uz oznake

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \cos \varphi = \frac{C_1}{A}, \quad \sin \varphi = \frac{C_2}{A}, \quad (5.23)$$

imamo

$$y(t) = A (\cos \alpha t \cos \varphi + \sin \alpha t \sin \varphi)$$

pa adicióni teorem [M1, §4.6.5] daje opću kosinusoidu

$$y(t) = A \cos(\alpha t - \varphi).$$

U slučaju kada nema vanjske sile, (homogena) diferencijalna jednađba glasi

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + k y = 0.$$

Karakteristična jednađba glasi

$$m \lambda^2 + b \lambda + k = 0$$

pa je

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}.$$

U skladu s razmatranjima iz poglavlja 5.9.3, razlikujemo tri slučaja:

- (i) ako je $b^2 - 4mk > 0$, tada je $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i $\lambda_{1,2} < 0$ pa je rješenje diferencijalne jednađbe jednako

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

- (ii) ako je $b^2 - 4mk = 0$, tada je $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda = -b/(2m)$ pa je rješenje diferencijalne jednađbe jednako

$$y = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t},$$

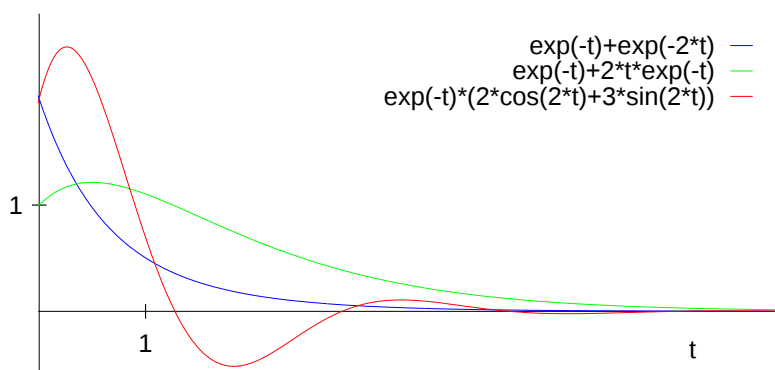
- (iii) ako je $b^2 - 4mk < 0$, tada je

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm i \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \equiv \alpha \pm i \beta$$

pa je rješenje diferencijalne jednađbe jednako

$$y = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

U sva tri slučaja vrijedi $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. U prvom slučaju radi se o gušenju bez titranja, u drugom slučaju može doći do jednokratnog porasta početnog otklona nakon čega nastupa gušenje bez titranja, a u trećem slučaju se radi o gušenom titranju oko položaja ravnoteže. Primjeri ponašanja sustava dani su na slici 5.17.



Slika 5.17: Gušeno titranje

Ukoliko na sustav djeluje i vanjska sila f , radi se o *prisilnim oscilacijama*. Sustav je opisan nehomogenom jednadžbom (5.22). Ponašanje sustava opisat ćemo na primjeru kada je vanjska sila jednaka

$$f(t) = F \cos ct, \quad c > 0.$$

Kao što smo već vidjeli, kod rješavanja pripadne homogene jednadžbe razlikujemo tri slučaja. U prvom slučaju, kada je $b^2 - 4mk > 0$, rješenje pripadne homogene jednadžbe glasi

$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Partikularno rješenje možemo naći metodom neodređenih koeficijenta koja je opisana u poglavlju 5.9.3. Iz formula (5.20) i (5.21) zaključujemo da partikularno rješenje ima oblik

$$y_P = G_1 \cos ct + G_2 \sin ct. \quad (5.24)$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} y'_P &= G_1 c (-\sin ct) + G_2 c \cos ct, \\ y''_P &= -G_1 c^2 \cos ct - G_2 c^2 \sin ct. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Uvrštavanje u jednačbu (5.22) daje

$$m(-G_1 c^2 \cos ct - G_2 c^2 \sin ct) + b(-G_1 c \sin ct + G_2 c \cos ct) + k(G_1 \cos ct + G_2 \sin ct) = F \cos ct.$$

Izjednačavanje koeficijenata uz $\cos ct$ i $\sin ct$ daje sustav linearnih jednačbi s nepoznicama G_1 i G_2 :

$$\begin{aligned} (-bc)G_1 + (-mc^2 + k)G_2 &= 0, \\ (-mc^2 + k)G_1 + (bc)G_2 &= F. \end{aligned}$$

Cramerovo pravilo [M1, §2.9.5] daje

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{-F(-mc^2 + k)}{-(bc)^2 - (-mc^2 + k)^2} = \frac{F(k - mc^2)}{(k - mc^2)^2 + (bc)^2}, \\ G_2 &= \frac{-F(bc)}{-(bc)^2 - (-mc^2 + k)^2} = \frac{F(bc)}{(k - mc^2)^2 + (bc)^2}. \end{aligned}$$

Uz oznaku

$$h(c)^2 = (k - mc^2)^2 + (bc)^2$$

možemo pisati

$$y_P = \frac{F}{[h(c)]^2} [(k - mc^2) \cos ct + (bc) \sin ct],$$

a uz oznake

$$\cos \varphi = \frac{k - mc^2}{h(c)}, \quad \sin \varphi = \frac{bc}{h(c)}$$

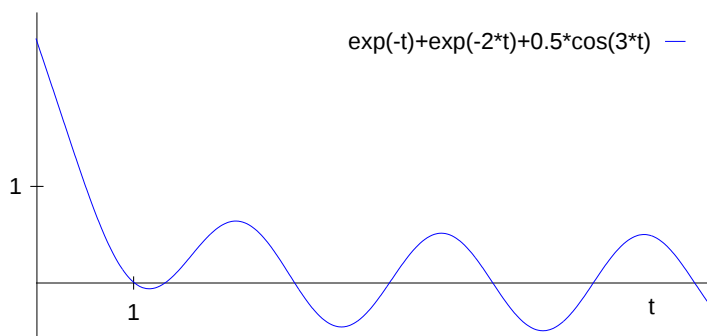
slijedi uobičajeni oblik partikularnog rješenja

$$y_P = \frac{F}{h(c)} (\cos ct \cos \varphi + \sin ct \sin \varphi) = \frac{F}{h(c)} \cos(ct - \varphi).$$

Dosadašnje razmatranje omogućava nam uvid u ponašanje zadanog sustava. Opće rješenje jednačbe (5.22),

$$y = y_H + y_P = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{F}{h(c)} \cos(ct - \varphi)$$

se sastoji iz dva dijela. Prvi dio, y_H , teži k nuli kada $t \rightarrow \infty$ i taj dio predstavlja *prijelazno rješenje*. Drugi dio, y_P , je periodička funkcija s periodom $P = 2\pi/c$. Kada $t \rightarrow \infty$ ponašanje sustava je periodičko i ne ovisi o početnim uvjetima⁴ već samo o vanjskoj sili f . Primjer ponašanja sustava



Slika 5.18: Gušeni sustav s prisilnim oscilacijama

dan je na slici 5.18. Slični zaključci vrijede i u dva preostala slučaja gušenog sustava s prisilnim oscilacijama, $b^2 - 4mk = 0$ i $b^2 - 4mk < 0$.

Promotrimo još sustav s prisilnim oscilacijama bez gušenja ($b = 0$) čija jednačba glasi

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k y = f(t) = F \cos ct. \quad (5.26)$$

Rješenje pripadne homogene jednačbe je

$$y_H = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t, \quad \alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Razlikujemo dva slučaja. Ako je $c \neq \alpha$, tada prema formulama (5.20) i (5.21) partikularno rješenje ima oblik (5.24). Uvrštavanje izraza (5.24) i (5.25) u jednačbu sustava i izjednačavanje koeficijenata uz $\cos ct$ i $\sin ct$ daje sustav linearnih jednačbi s nepoznicama G_1 i G_2

$$\begin{aligned} (-m c^2 + k) G_2 &= 0, \\ (-m c^2 + k) G_1 &= F. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je očito,

$$G_1 = \frac{F}{k - m c^2} = \frac{F}{m(\alpha^2 - c^2)}, \quad G_2 = 0$$

pa je opće rješenje jednačbe (5.26) jednako

$$y = y_H + y_P = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t + \frac{F}{m(\alpha^2 - c^2)} \cos ct.$$

⁴O početnim uvjetima ovise konstante C_1 i C_2 , no taj dio rješenja nestaje u beskonačnosti.

Uz oznake (5.23) imamo

$$y = A \cos(\alpha t - \varphi) + \frac{F}{m(\alpha^2 - c^2)} \cos ct.$$

Vidimo da je opće rješenje jednačbe (5.26) zbroj dvaju periodičkih funkcija s periodima $P_1 = 2\pi/\alpha$ i $P_2 = 2\pi/c$, redom. Ako je $c/\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ pri čemu je $p, q \in \mathbb{N}$ i p i q nemaju zajedničkih faktora, tada je y periodička funkcija s periodom

$$P = \frac{2\pi q}{\alpha} = \frac{2\pi p}{c}.$$

U protivnom y je *skoro periodična funkcija*.

Potencijalno najopasniji je slučaj kada je $c = \alpha$, odnosno kada vanjska sila i rješenje homogene jednačbe imaju istu frekvenciju. Tada nastaje fenomen *mehaničke rezonancije* sustava. Prema formulama (5.20) i (5.21) partikularno rješenje ima oblik

$$y_P = t(G_1 \cos \alpha t + G_2 \sin \alpha t).$$

Uvrštavanje y_P i y_P'' u jednačbu sustava i izjednačavanje koeficijenata uz $\cos \alpha t$ i $\sin \alpha t$ daje sustav linearnih jednačbi čije je rješenje

$$G_1 = 0, \quad G_2 = \frac{F}{2\alpha m}.$$

Dakle, opće rješenje jednačbe (5.26) u ovom slučaju glasi

$$y = y_H + y_P = A \cos(\alpha t - \varphi) + \frac{F t}{2\alpha m} \sin \alpha t.$$

Ovo je periodička funkcija s periodom $P = 2\pi/\alpha$. Međutim, oscilacije su neomeđene kada $t \rightarrow \infty$ (vidi sliku 5.19) pa će za dovoljno veliki t doći do razbijanja sustava. Uočimo da do fenomena rezonancije ne može doći ukoliko sustav ima gušač.

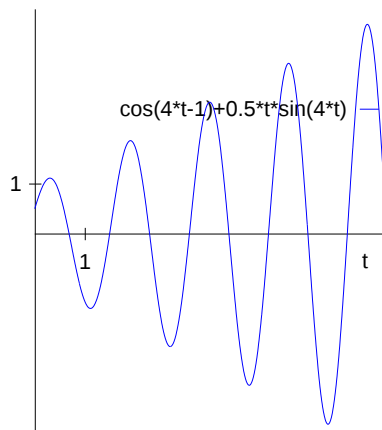
Zadatak 5.15 a) Proučite rušenje mosta *Tacoma Narrows* koje s dogodilo 1940. godine⁵. Što je uzrok kolapsa mosta?

b) Proučite detalje sličnog problema oscilacija koji se pojavio na pješačkom mostu *Millenium bridge* koji je izgrađen 2000. godine u Londonu⁶. Kako je riješen problem? Zašto vojska preko mosta nikad ne prelazi strojnim korakom?

c) Kako izgleda automobilski amortizer i zašto?

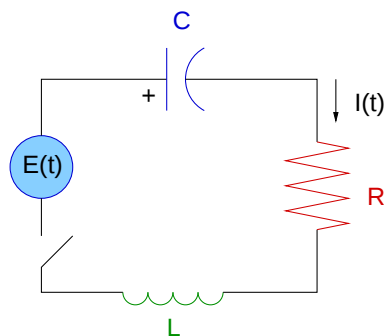
⁵Vidi http://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge.

⁶Vidi http://en.wikipedia.org/wiki/London_Millennium_Bridge.



Slika 5.19: Neomeđjene oscilacije

Na kraju, primijetimo da mehanički sustav koji se sastoji od mase, opruge i gušača ima svoj električni ekvivalent. Promotrimo strujni krug koji se sastoji od kondenzatora kapaciteta C farada (F), otpora od R oma (Ohm) i zavojnice s induktivitetom L henrija (H), a na koji djeluje elektromotorna sila koja u trenutku t proizvodi napon od $E(t)$ volta (V) i struju od $I(t)$ ampera (A) (usporedi s primjerom 5.2). Krug je prikazan na slici 5.20.



Slika 5.20: Strujni krug s kondenzatorom, otporom i zavojnicom

Prema Ohmovom zakonu pad napona na otporu jednak je RI . Pad napona na zavojnici jednak je $L(dI/dt)$, a pad napona na kondenzatoru jednak je Q/C , pri čemu je Q naboj pozitivne ploče kondenzatora. Prema Kirchoffovom zakonu zbroj padova napona jednak je naponu kojeg daje naponski izvor, odnosno

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t).$$

Iz ove jednađbe možemo dobiti linearnu jednađbu drugog reda na dva načina: uvrštavanje $I = dQ/dt$ daje

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t),$$

dok deriviranje daje

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = E'(t).$$

Uspoređujući obje prethodne jednađbe s jednađbom (5.22) zaključujemo da je zavojnica ekvivalentna s masom, otpor s gušaćem, a kondenzator s oprugom. Također zaključujemo da prijelazna faza rješenje odgovara zagrijavanju električnog uređaja (na primjer, televizije), dok je otpor nužan radi izbjegavanja rezonancije sustava.

5.10 Linearne diferencijalne jednađbe višeg reda

U ovom poglavlju poopćit ćemo rezultate iz poglavlja 5.9 na linearne jednađbe višeg reda. Dokazi tvrdnji su slični dokazima iz poglavlja 5.9 pa ih izostavljamo.

Linearna diferencijalna jednađba višeg reda glasi

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x) y' + p_0(x) y = f(x), \quad (5.27)$$

pri čemu su funkcije p_i i f neprekidne na nekom intervalu $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ na kojem promatramo jednađbu. *Rješenje jednađbe* je svaka funkcija y koja za bilo koji $x_0 \in \mathcal{I}$ može zadovoljiti početne uvjete

$$y(x_0) = a_0, \quad y'(x_0) = a_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}.$$

Pripadna homogena jednađba glasi

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x) y' + p_0(x) y = 0. \quad (5.28)$$

Za n funkcija $y_1, \dots, y_n$ kažemo da su *linearno nezavisne* na intervalu $\mathcal{I}$ ako relacija

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{I},$$

povlači $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$. Wronskijan funkcija $y_1, \dots, y_n$ je determinanta

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Wronskijan ili nikad nije nula ili je identično jednak nuli na intervalu $\mathcal{I}$. Stoga su funkcije $y_1, \dots, y_n$ linearno nezavisne ako i samo ako je $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0$ za neki $x \in \mathcal{I}$.

Opće rješenje jednadžbe (5.27) ima oblik

$$y = y_H + y_P,$$

gdje je y_P neko partikularno rješenje, a y_H je rješenje pripadne homogene jednadžbe (5.28). Rješenje homogene jednadžbe ima oblik

$$y_H = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

pri čemu linearno nezavisne funkcije $y_1, \dots, y_n$ tvore fundamentalan skup rješenja.

Ukoliko znamo rješenje nehomogene jednadžbe, partikularno rješenje nehomogene jednadžbe možemo naći *metodom varijacije konstanti*. Partikularno rješenje, y_P , ima isti oblik kao i rješenje homogene jednadžbe y_H , s tom razlikom što pretpostavljamo da C_i nisu konstante već funkcije od x . Formiramo sustav od n linearnih jednadžbi u varijablama C'_i :

$$\begin{aligned} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n &= 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n &= 0 \\ &\vdots \\ C'_1 y_2^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} &= 0 \\ C'_1 y_2^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} &= f(x). \end{aligned} \tag{5.29}$$

Determinanta ovog sustava je upravo Wronskijan $W(y_1, \dots, y_n)$ koji je različit od nule pa sustav ima jedinstveno rješenje. Tražene funkcije C_i tada izračunamo integrirajući rješenja sustava C'_i .⁷

Linearna diferencijalna jednadžba višeg reda s konstantnim koeficijentima glasi

$$y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_1 y' + p_0 y = f(x), \quad p_i \in \mathbb{R}. \tag{5.30}$$

Rješenje pripadne homogene jednadžbe,

$$y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_1 y' + p_0 y = 0, \quad p_i \in \mathbb{R}, \tag{5.31}$$

⁷Opravdanost ovog postupka dokazujemo tako da funkciju $y_P = \sum C_i y_i$ deriviramo n puta koristeći pri tome jednakosti iz zadanog sustava te potom uvrstimo u jednadžbu (5.27).

tražimo u obliku $y = e^{\lambda x}$, pri čemu, prema prethodnom izlaganju, trebamo naći n linearno nezavisnih rješenja. Uvrštavanje daje

$$\lambda^n e^{\lambda x} + p_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + p_1 \lambda e^{\lambda x} + p_0 e^{\lambda x} = 0$$

pa su vrijednosti λ rješenja *karakteristične jednačbe*

$$\lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0 = 0.$$

Linearno nezavisna rješenja homogene jednačbe formiramo ovisno o karakteru rješenja λ prema sljedećim pravilima:

- (1) svakom jednostrukom realnom rješenju karakteristične jednačbe odgovara rješenje homogene jednačbe $e^{\lambda x}$,
- (2) svakom jednostrukom paru konjugirano kompleksnih rješenju karakteristične jednačbe oblika $\lambda = \alpha \pm i\beta$ odgovara par rješenja homogene jednačbe $e^{\alpha x} \cos \beta x$ i $e^{\alpha x} \sin \beta x$,
- (3) svakom višestrukome realnom rješenju karakteristične jednačbe kratnosti k odgovara k rješenje homogene jednačbe

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\lambda x},$$

- (4) svakom višestrukome paru konjugirano kompleksnih rješenju karakteristične jednačbe oblika $\lambda = \alpha \pm i\beta$ kratnosti k odgovara $2k$ rješenja homogene jednačbe

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned}$$

Primjer 5.28 Za jednačbu

$$y''' + y'' = x$$

karakteristična jednačba glasi

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0.$$

Stoga je $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ i $\lambda_3 = -1$ pa je rješenje pripadne homogene jednačbe jednako

$$y_H = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}.$$

Sustav (5.29) glasi

$$\begin{aligned}C_1' + C_2' x + C_3' e^{-x} &= 0 \\C_2' - C_3' e^{-x} &= 0 \\C_3' e^{-x} &= x.\end{aligned}$$

Sustav ima jedinstveno rješenje jer je $W(1, x, e^{-x}) = e^{-1} \neq 0$. Pored toga, sustav je već u trokutastom obliku pa je rješenje lako očitati:

$$C_3' = x e^x, \quad C_2' = x, \quad C_3' = -x^2 - x.$$

Integriranje daje

$$\begin{aligned}C_1(x) &= \int (-x^2 - x) dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}, \\C_2(x) &= \int x dx = \frac{x^2}{2}, \\C_3(x) &= \int x e^x dx = x e^x - e^x.\end{aligned}$$

Partikularno rješenje je jednako

$$y_P = C_1(x) + C_2(x) x + C_3(x) e^{-x} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1$$

pa je opće rješenje zadane jednadžbe jednako

$$y = y_H + y_P = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}$$

za neke konstante $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Konstante možemo odrediti iz početnih uvjeta, ukoliko su zadani. Ako su, na primjer, zadani početni uvjeti $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, uvrštavanje daje sustav jednadžbi

$$C_1 + C_3 = 0, \quad C_2 - C_3 = 0, \quad C_3 - 1 = 0,$$

pa je $C_1 = -1$, $C_2 = 1$ i $C_3 = 1$.

Slično kao i u poglavlju 5.9.3, ako funkcija $f(x)$ u jednadžbi (5.30) ima oblik

$$f(x) = e^{ax} p(x) \cos bx + e^{ax} q(x) \sin bx,$$

pri čemu su p i q polinomi stupnja najviše m , tada partikularno rješenje možemo naći i *metodom neodređenih koeficijenata*: ako je $a + ib$ nul-točka

karakterističnog polinoma kratnosti k , tada partikularno rješenje y_P ima oblik

$$y_P = x^k e^{ax} [(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m) \cos bx + (B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m) \sin bx].$$

Uvrštavanjem ove funkcije u jednačbu (5.30) i izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata, dobijemo sustav linearnih jednačbi koji uvijek ima jedinstveno rješenje.

Primjer 5.29 Prema prethodnim formulama partikularno rješenje jednačbe iz primjera 5.28 ima oblik (uz $a = 0$, $b = 0$, $m = 1$, $p(x) = x$, $k = 2$)

$$y_P = x^2 e^{0x} (A_0 + A_1 x) = A_0 x^2 + A_1 x^3.$$

Uvrštavanje u jednačbu daje

$$6A_1 + 2A_0 + 6A_1 x = x.$$

Izjednačavanje koeficijenata po potencijama od x daje sustav jednačbi

$$6A_1 + 2A_0 = 0, \quad 6A_1 = 1$$

pa je partikularno rješenje jednako

$$y_P = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3.$$

Zadatak 5.16 Riješite diferencijalne jednačbe:

a) $y''' + y' = \operatorname{tg} x$

$$(y = A + B \cos x + C \sin x - \ln |\cos x| + -\sin \ln |\operatorname{tg} x + 1/\cos x|),$$

b) $y^{(6)} + y^{(3)} = 1 + e^x$

$$(y = C - 1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x} + e^{x/2} (C_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x) + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} e^x),$$

c) $y''' + 4y'' + 5y' = \operatorname{ch}^2 x,$

d) $y''' + 2y' - 3y = x e^x,$

e) $y^{(v)} + y''' = 2 \cos^2(2x).$

5.11 Sustavi diferencijalnih jednadžbi

U ovom poglavlju opisat ćemo postupke rješavanja nekih (jednostavnijih) *sustava linearnih diferencijalnih jednadžbi* oblika

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y, t), \\x' &= g(x, y, t),\end{aligned}$$

pri čemu je $x = x(t)$ i $y = y(t)$.

Zanimljiv primjer je *sustav lovac-plijen*. Zamislamo sustav u kojem postoji populacija lovaca (predatora) i plijena (žrtve). Neka su predatori vukovi, a plijen zečevi. Označimo populacije vukova i zečeva s V i Z , redom. Izvedimo model ponašanja obaju populacija. Ukoliko nema vukova, pretpostavljamo da se zečevi razmnožavaju u skladu s populacijskom jednadžbom iz poglavlja 5.1,

$$\frac{dZ}{dt} = z Z, \quad z > 0.$$

Ukoliko nema zečeva, populacija vukova će odumirati, opet u skladu s populacijskom jednadžbom,

$$\frac{dV}{dt} = -v V, \quad v > 0.$$

Ukoliko u sustavu postoje obje populacije, tada će zbog međusobnih susreta populacija zečeva nazadovati, dok će populacija vukova napredovati. Ukoliko vjerojatnost susreta modeliramo produktom ZV , dobili smo poznate *Lotka-Volterra-ine jednadžbe*:

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{dt} &= z Z - a Z V = Z(z - a V), \\ \frac{dV}{dt} &= -v V + b Z V = V(-v + b Z),\end{aligned}$$

pi čemu je $v, z, a, b > 0$. Stabilno stanje obaju populacija je ono u kojem nema promjena, odnosno ono stanje u kojem su obje derivacije jednake nula. Vidimo da imamo dva stabilna stanja: trivijalno stanje u kojem nema ni vukova ni zečeva ($Z = 0$ i $V = 0$) i stanje u kojem je

$$V = \frac{z}{a}, \quad Z = \frac{v}{b}.$$

Ako je, na primjer,

$$v = 0.02, \quad z = 0.06, \quad a = 0.001, \quad b = 0.00002,$$

sustav jednadžbi glasi

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{dt} &= Z(0.06 - 0.001V), \\ \frac{dV}{dt} &= V(-0.02 + 0.00002Z),\end{aligned}\tag{5.32}$$

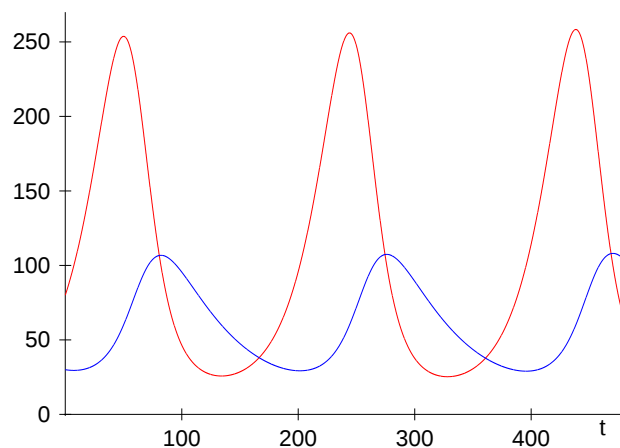
pa je stabilno stanje sustava ono u kojem imamo 60 vukova i 1000 zečeva.

Sustav (5.32) nije moguće direktno riješiti. No, oblik sustava omogućava primjenu Eulerove metode iz poglavlja 5.4 pomoću koje možemo naći približno numeričko rješenje.

Sljedeći Matlab program računa i crta ponašanje sustava (5.32) uz početne uvjete $V(0) = 30$ i $Z(0) = 800$. Rješenja su prikazana na slici 5.21⁸

```
% Eulerova metoda za sustav lovac-plijen:
% dZ / dt = Z ( 0.06 - 0.001 * V )
% dV / dt = V ( -0.02 + 0.00002 * Z )
% V=vukovi, Z=zecevi
% Pocetni uvjeti su V=30, Z=800
% Graf prikazuje populaciju kao funkciju vremena
t0=0;
tn=500;
V(1)=30;
Z(1)=800;
h=0.1;
t=t0:h:tn;
n=max(size(t));
for i=2:n
    zDerivirano=Z(i-1)*(0.06-0.001*V(i-1));
    vDerivirano=V(i-1)*(-0.02+0.00002*Z(i-1));
    V(i)=V(i-1)+h*vDerivirano;
    Z(i)=Z(i-1)+h*zDerivirano;
end
title('Populacije vukova (V) i zeceva (Z/10) pocevsi od V=30, Z=800')
xlabel('vrijeme')
plot(t,Z/10,'r',t,V,'b')
```

⁸Radi preglednije slike, broj zečeva je podijeljen s deset, odnosno nacrtane su funkcije $V(t)$ i $Z(t)/10$.



Slika 5.21: Populacije vukova (V) i zečeva ($Z/10$) uz $V(0) = 30$ i $Z(0) = 800$

Sustav jednadžbi (5.32) može se egzaktno riješiti u faznom prostoru varijabli V i Z (jednu od tih varijabli tretiramo kao funkciju druge). Vrijedi

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dt}$$

iz čega slijedi jednadžba koja povezuje populacije vukova i zečeva:

$$\frac{dV}{dZ} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dZ}{dt}} = \frac{V(-0.02 + 0.00002 Z)}{Z(0.06 - 0.001 V)}. \quad (5.33)$$

Polje smjerova (vidi poglavlje 5.3) ove jednadžbe prikazano je na slici 5.22. Na slici se lijepo vidi da su rješenja jednadžbe zatvorene ovalne krivulje koje prolaze kroz zadane početne uvjete. Također se lijepo vidi ravnotežno rješenje $V = 60$, $Z = 1000$.

Jednadžba (5.33) je jednadžba sa separiranim varijablama (vidi poglavlje 5.2) za koju je lako izračunati egzaktno rješenje. Vrijedi:

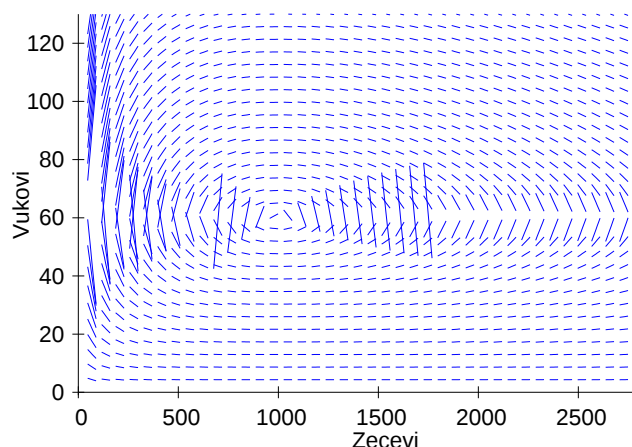
$$\frac{dV}{V} (0.06 - 0.001 V) = \frac{dZ}{Z} (-0.02 + 0.00002 Z)$$

pa je

$$0.06 \ln V - 0.001 V = -0.02 \ln Z + 0.00002 Z + \ln C.$$

Dakle,

$$\ln V^{0.06} + \ln Z^{0.02} = 0.001 V + 0.00002 Z + \ln C,$$



Slika 5.22: Polje smjerova za populacije vukova i zečeva

odnosno rješenje jednađbe dano je implicitno zadanom funkcijom

$$V^{0.06} Z^{0.02} = C e^{0.001 V} e^{0.00002 Z}.$$

Ako su zadani početni uvjeti $V(0) = 30$ i $Z(0) = 800$, tada je

$$C = \frac{30^{0.06} 800^{0.02}}{e^{0.03} e^{0.016}} \approx 1.3388.$$

Funkcija je prikazana na slici 5.23.

Na kraju poglavlja opisat ćemo postupak rješavanja jednostavnih sustava diferencijalnih jednađbi oblika

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + f(t), \\ y' &= \gamma x + \delta y + g(t), \end{aligned}$$

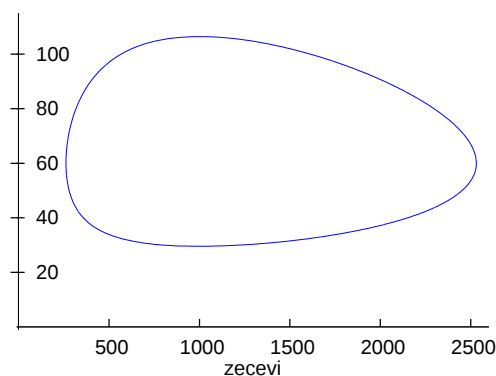
gdje je $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Sustav se rješava tako da se iz prve jednađbe izračuna y' i uvrsti u drugu, što daje linearnu diferencijalnu jednađbu drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Primjer 5.30 Riješimo sustav

$$\begin{aligned} x' &= 3y - x, \\ y' &= x + y + e^t \end{aligned}$$

uz uvjete $x(0) = y(0) = 0$. Prva jednađba daje

$$y = \frac{1}{3} x' + \frac{1}{3} x, \quad y' = \frac{1}{3} x'' + \frac{1}{3} x'$$



Slika 5.23: Populacije vukova i zečeva uz uvjete $V(0) = 30$ i $Z(0) = 800$

pa uvrštavanje u drugu jednadžbu daje

$$\frac{1}{3}x'' + \frac{1}{3}x' = x + \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}x + e^t,$$

odnosno

$$x'' - 4x = 3e^t. \quad (5.34)$$

Prema poglavlju 5.9.3 vrijedi

$$x_H = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}.$$

Uvrštavanjem partikularnog rješenja oblika $x_P = A e^t$ u jednadžbu (5.34) slijedi $A = -1$ pa opće rješenje jednažbe glasi

$$x = x_H + x_P = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} - e^t.$$

Deriviranje daje

$$x' = -2C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{2t} - e^t$$

pa je

$$y = \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}x = -\frac{1}{3}C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} - \frac{2}{3}e^t.$$

Dakle, opće rješenje zadanog sustava (bez zadanih uvjeta) glasi

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} - e^t, \\y(t) &= -\frac{1}{3} C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} - \frac{2}{3} e^t.\end{aligned}$$

Početni uvjeti daju sustav linearnih jednačbi

$$\begin{aligned}x(0) &= 0 = C_1 + C_2 - 1, \\y(0) &= 0 = -\frac{1}{3} C_1 + C_2 - \frac{2}{3},\end{aligned}$$

s rješenjima $C_1 = 1/4$ i $C_2 = 3/4$ pa je rješenje zadanog sustava jednako

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{3}{4} e^{2t} - e^t, \\y(t) &= -\frac{1}{12} e^{-2t} + \frac{3}{4} e^{2t} - \frac{2}{3} e^t.\end{aligned}$$

Zadatak 5.17 a) Riješite sustav diferencijalnih jednačbi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} + 3x + y &= 0, \\ \frac{dy}{dt} - x + y &= 0,\end{aligned}$$

uz uvjete $x(0) = y(0) = 1$ (rješenje: $x(t) = (1 - 2t) e^{-2t}$, $y(t) = (1 + 2t) e^{-2t}$).

b) Riješite sustav diferencijalnih jednačbi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= t + x + y.\end{aligned}$$

6.

METODA NAJMANJIH KVADRATA I QR RASTAV

6.1	Problem najmanjih kvadrata	285
6.1.1	Linearna regresija	286
6.1.2	Metoda najmanjih kvadrata	289
6.2	QR rastav	295
6.2.1	QR rastav vektora i Householderov reflektor	296
6.2.2	QR rastav matrice	298
6.2.3	Numeričko računanje QR rastava	299
6.2.4	Rješavanje problema najmanjih kvadrata	300
6.2.5	Ekonomični QR rastav	302
6.2.6	QR rastav s pivotiranjem po stupcima	302

6.1 Problem najmanjih kvadrata

U ovom poglavlju dat ćemo kratki uvod u matrični problem najmanjih kvadrata. Metoda najmanjih kvadrata se koristi kod preodređenih sustava $Ax = b$ u slučaju kada imamo više jednadžbi nego nepoznanica i kada sustav nije rješiv po Kronecker-Capellijevom teoremu [M1, teorem 2.5].

Problem najmanjih kvadrata se često koristi u raznim tehničkim primjenama kao i u ekonomiji (linearna regresija).

Duljina ili *norma* n -dimenzionalnog vektora $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ je broj (vidi [M1, §3.6])

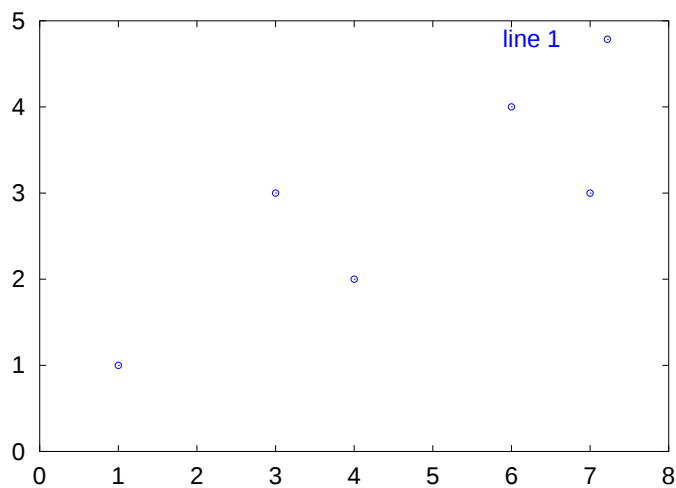
$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

6.1.1 Linearna regresija

Linearnu regresiju ćemo najbolje objasniti na primjeru. Neka je zadano pet točaka u ravnini

x	1	3	4	6	7
y	1	3	2	4	3

kao na slici 6.1. Ukoliko bi pravac $y = kx + l$ prolazio kroz sve zadane točke,



Slika 6.1: Pet točaka u ravnini

tada bi za svaku točku (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 5$ vrijedilo

$$k x_i + l = y_i.$$

U našem slučaju to daje sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} k + l &= 1 \\ 3k + l &= 3 \\ 4k + l &= 2 \\ 6k + l &= 4 \\ 7k + l &= 3. \end{aligned}$$

Ovo je sustav s pet jednadžbi i dvije nepoznanice k i l . Matrični zapis sustava glasi (vidi [M1, §2.2])

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

odnosno $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ako bi ovaj sustav bio rješiv, tada bi vrijedilo $A\mathbf{x} - \mathbf{b} = 0$ odnosno $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = 0$. Međutim, zadani sustav očito nije rješiv, pa se postavlja pitanje što možemo napraviti. Prirodan zahtjev je da izraz $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ bude što bliži nul-stupcu, odnosno da norma $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ bude što manja moguća. Taj zahtjev matematički zapisujemo kao

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \rightarrow \min.$$

Ako je x rješenje ovog problema, tada je x također i rješenje problema

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 \rightarrow \min$$

pa naziv *problem najmanjih kvadrata* slijedi iz definicije norme vektora.

Postupak za rješavanje problema najmanjih kvadrata je u ovom slučaju jednostavan: rješenje $\mathbf{x}$ dobit ćemo kao rješenje sustava od dvije jednadžbe i dvije nepoznanice

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.$$

Kako je

$$A^T A = \begin{bmatrix} 111 & 21 \\ 21 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 63 \\ 13 \end{bmatrix},$$

rješenje x dobijemo rješavanjem sustava

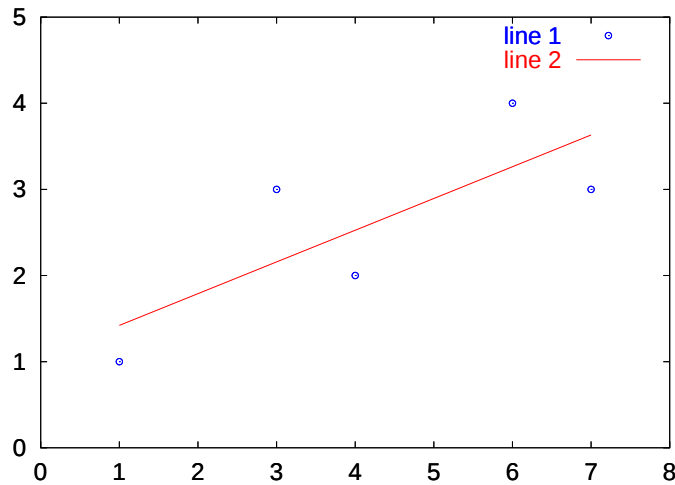
$$\begin{bmatrix} 111 & 21 \\ 21 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Ovaj sustav možemo lako riješiti Gaussovom eliminacijom [M1§2,4] ili, još jednostavnije, Cramerovim pravilom [M1,§2.9.5], pa je

$$k = \frac{\begin{vmatrix} 63 & 21 \\ 13 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 111 & 21 \\ 21 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{42}{114}, \quad l = \frac{\begin{vmatrix} 111 & 63 \\ 21 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 111 & 21 \\ 21 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{120}{114}.$$

Geometrijska interpretacija rješenja je slijedeća (slika 6.2): pravac $y = kx + l$ "najbolje" prolazi točkama (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 5$ i smislu da je suma kvadrata udaljenosti između zadanih točaka (x_i, y_i) i točaka na pravcu $(x_i, kx_i + l)$ minimalna. Drugim riječima,

$$\sum_{i=1}^5 [y_i - (kx_i + l)]^2 \rightarrow \min.$$



Slika 6.2: Rješenje problema najmanjih kvadrata

Napomena 6.1 Ravinski problem najmanjih kvadrata zove se *linearna regresija*, a pravac $y = kx + l$ zove se *regresijski pravac*.

Rješenje prethodnog problem i slike 6.1 i 6.2 mogu se dobiti pomoću slijedećeg Matlab (Octave) programa

```

x=[1 3 4 6 7]
y=[1 3 2 4 3]
plot(x,y,"b*")
A=[x' ones(5,1)]
b=y'
xLS=(A'*A)\(A'*b)
k=xLS(1)
l=xLS(2)
yLS=k*x+l
plot(x,y,'b*',x,yLS,'r')

```

U Matlabovoj sintaksi A' je transponirana matrica matrice A , `ones(5,1)` je vektor dimenzije 5×1 sa svim elementima jednakim 1, dok izraz oblika $x=A \backslash b$ daje rješenje sustava $Ax = b$. Štoviše, u slučaju preodređenog sustava kao u našem primjeru, Matlabova naredba `xLS=A\b` će automatski dati rješenje problema najmanjih kvadrata. Zamijenite liniju `xLS=(A'*A)\(A'*b)` s `xLS=A\b` i uvjerite se da su rješenja ista!

Zadatak 6.1 Prema podacima Državnog zavoda za statistiku (<http://www.dzs.hr>) prosječna bruto plaća u listopadu kroz protekle tri godine bila je slijedeća

Listopad	2000	2001	2002
Prosječna bruto plaća (kn)	4921	5051	5447

Izračunajte i nacrtajte regresijski pravac i predvidite kolika će biti bruto plaća u listopadu 2003. Rješenje provjerite pomoću Matlaba ili programa Octave On-line.

Zadatak 6.2 Kroz točke

x	-1	1	2	3	5
y	1	0	1	2	3

provucite najbolji pravac u smislu najmanjih kvadrata. Nacrtajte zadane točke i dobiveni pravac te provjerite rješenje pomoću Matlaba ili programa Octave On-line.

6.1.2 Metoda najmanjih kvadrata

Postupak iz prethodnog poglavlja primjenjiv je i na višedimenzionalne probleme. U ovom poglavlju pokazat ćemo da je postupak primjenjiv uvijek kada matrica sustava A ima linearno nezavisne stupce te je u tom slučaju rješenje problema najmanjih kvadrata jedinstveno.

Neka je zadan preodređeni sustav $Ax = b$ od m jednadžbi s n nepoznanica, pri čemu je $m > n$. Kako za normu vektora x vrijedi $\|x\|^2 = x^T x$, problem najmanjih kvadrata

$$\|Ax - \mathbf{b}\|^2 \rightarrow \min$$

možemo zapisati kao

$$(Ax - \mathbf{b})^T (Ax - \mathbf{b}) \rightarrow \min.$$

Uvedimo oznaku

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= \|Ax - \mathbf{b}\|^2 = (Ax - \mathbf{b})^T (Ax - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} - \mathbf{b}^T A \mathbf{x} - \mathbf{x}^T A^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \\ &= \mathbf{x}^T B \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{c} + \beta \end{aligned} \quad (6.1)$$

gdje je

$$B = A^T A, \quad \mathbf{c} = A^T \mathbf{b}, \quad \beta = \|\mathbf{b}\|^2.$$

Ideju za postupak rješavanja daje nam jednodimenzionalni slučaj: ako su x , B , c i β realni brojevi, tada je $Q(x) = Bx^2 - 2xc + \beta$ kvadratna parabola čiji se minimum nalazi u točki

$$x = \frac{c}{B}.$$

U višedimenzionalnom slučaju tome odgovara

$$x = B^{-1}c$$

pa je x rješenje sustava

$$Bx = c,$$

odnosno

$$A^T A x = A^T b.$$

Ova jednadžba zove se *normalna jednadžba*. Dokažimo sada da ovaj intuitivni postupak zaista daje rješenje.

Teorem 6.1 *Neka su stupci matrice A linearno nezavisni, odnosno $\text{rang}(A) = n$. Tada je rješenje x problema najmanjih kvadrata $Q(\mathbf{x}) \rightarrow \min$ ujedno i jedinstveno rješenje normalne jednadžbe $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{y}$ bilo koji n -dimenzionalni vektor i neka je $\mathbf{h} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$. Tada je prema (6.1)

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{y}) &= \mathbf{y}^T B \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{c} + \beta \\ &= (\mathbf{x} + \mathbf{h})^T B (\mathbf{x} + \mathbf{h}) - 2(\mathbf{x} + \mathbf{h})^T \mathbf{c} + \beta \\ &= \mathbf{x}^T B \mathbf{x} + \mathbf{h}^T B \mathbf{x} + \mathbf{x}^T B \mathbf{h} + \mathbf{h}^T B \mathbf{h} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{c} - 2\mathbf{h}^T \mathbf{c} + \beta. \end{aligned}$$

Kako je $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$, to je

$$\mathbf{h}^T B \mathbf{x} = \mathbf{h}^T \mathbf{c},$$

a kako se radi o matricama dimenzije 1, to je zbog $B^T = (A^T A)^T = B$ i

$$\mathbf{x}^T B \mathbf{h} = (\mathbf{x}^T B \mathbf{h})^T = \mathbf{h}^T B^T \mathbf{x} = \mathbf{h}^T B \mathbf{x} = \mathbf{h}^T \mathbf{c}.$$

Uvrštavanje u $Q(\mathbf{y})$ daje

$$Q(\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x} + \mathbf{h}^T B \mathbf{h} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{c} + \beta = Q(\mathbf{x}) + \mathbf{h}^T B \mathbf{h}.$$

Izraz $\mathbf{h}^T B \mathbf{h}$ je veći ili jednak od nule:

$$\mathbf{h}^T B \mathbf{h} = \mathbf{h}^T A^T A \mathbf{h} = (A \mathbf{h})^T A \mathbf{h} = \|A \mathbf{h}\|^2.$$

Dakle, uvijek je

$$Q(\mathbf{y}) \geq Q(\mathbf{x}),$$

odnosno vrijednost $Q(\mathbf{x})$ je zaista najmanja moguća.

Dokažimo sada da je rješenje $\mathbf{x}$ jedinstveno. Ako je

$$Q(\mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y},$$

tada je $\|A \mathbf{h}\| = 0$. No, tada je i $A \mathbf{h} = \mathbf{0}$ (samo nul-vektor ima normu jednaku nula), što zajedno s $\mathbf{h} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ znači da su stupci matrice A linearno zavisni. To je kontradikcija pa je teorem dokazan. ■

Primijetimo da su vektori $A \mathbf{x}$ i $A \mathbf{x} - \mathbf{b}$ međusobno okomiti:

$$(A \mathbf{x}) \cdot (A \mathbf{x} - \mathbf{b}) = (A \mathbf{x})^T (A \mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{x}^T A^T (A \mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0.$$

Geometrijski to znači da je vektor $A \mathbf{x}$ ortogonalna projekcija vektora $\mathbf{b}$ na skup $\{A \mathbf{y} : \mathbf{y} \text{ proizvoljan}\}$. Nadalje, vektori $A \mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ i $A \mathbf{x} - \mathbf{b}$ tvore pravokutni trokut s hipotenuzom $\mathbf{b}$.

Rješenje problema najmanjih kvadrata $\mathbf{x}$ zove se još i *kvadratična prilagodba* sustavu $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ u smislu najmanjih kvadrata. Kvalitetu prilagodbe mjerimo s

$$q = \sqrt{\frac{Q(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{0})}} = \frac{\|A \mathbf{x} - \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Iz činjenice da je $\mathbf{b}$ hipotenuza pravokutnog trokuta sa stranicama $A\mathbf{x}$, $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ i $\mathbf{b}$ slijedi da je q uvijek je između 0 i 1. Ukoliko je $q = 0$ tada je prilagodba najbolja moguća, odnosno $\mathbf{x}$ je točno rješenje sustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ukoliko je q mali, prilagodba je dobra, a ukoliko je q blizu jedan, prilagodba je loša.

Primjer 6.1 Riješimo sustav

$$\begin{aligned}x + y &= 0 \\y + z &= 1 \\x + z &= 0 \\-x + y + z &= 1 \\-x - z &= 0\end{aligned}$$

u smislu najmanjih kvadrata. U matričnom obliku sustav glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Normalna jednadžba glasi

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

pa je rješenje dano s

$$x = -\frac{10}{29}, \quad y = \frac{12}{29}, \quad z = \frac{11}{29}.$$

Kvaliteta prilagodbe je

$$q = 0.1857$$

Odgovarajući Matlab program glasi

```
A = [1 1 0;
      0 1 1;
      1 0 1;
      -1 1 1;
      -1 0 -1]
b=[0 1 0 1 0]';
B=A'*A
```

```

c=A'*b
x=B\c
% ili krace x=A\b
q=norm(A*x-b)/norm(b)

```

Primjer 6.2 Kroz točke

x	1	2	4	5	6
y	0	1	4	8	14

provucimo kvadratnu parabolu

$$y = ax^2 + bx + c$$

koja ima najbolju kvadratičnu prilagodbu. Dakle, moramo naći koeficijente parabole tako da je

$$\sum_{i=1}^5 (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \rightarrow \min.$$

Ovaj problem možemo zapisati kao problem najmanjih kvadrata

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Rješavanje normalne jednačbe daje

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.68994 \\ -2.16071 \\ 1.86364 \end{bmatrix},$$

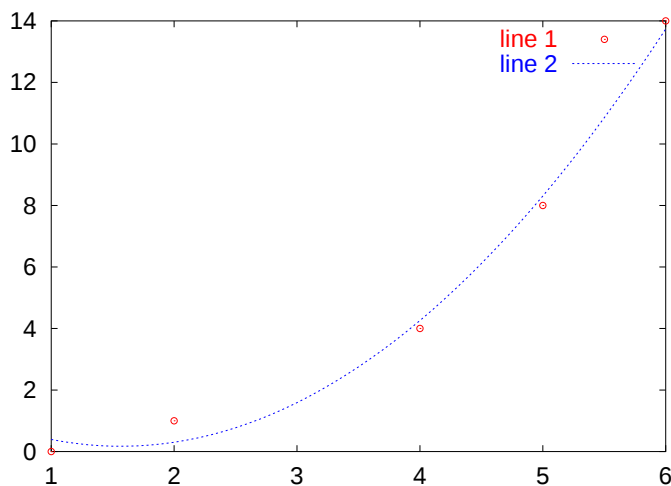
a kvaliteta prilagodbe iznosi $q = 0.0562$. Zadane točke i dobivena parabola prikazane su na slici 6.3.

Parabola i slike mogu se dobiti slijedećim Matlab programom

```

A = [1 1 1
     4 2 1
     16 4 1
     25 5 1
     36 6 1]
y = [0 1 4 8 14]

```



Slika 6.3: Parabola s najboljom prilagodbom

```
% rjesenje
xLS=A\y
% kvaliteta prilagodbe
q=norm(A*xLS-y)/norm(y)
% slike
x=[1 2 4 5 6]'
plot(x,y,'r*')
hold
% gusca mreza radi bolje slike parabole
x1=1:0.1:6
y1=xLS(1)*x1.^2+xLS(2)*x1+xLS(3)
plot(x1,y1,'b')
```

Napomena 6.2 Vidimo da je puni stupčani rang matrice A nužan za funkcioniranje metode normalnih jednažbi jer bi u protivnom matrica $B = A^T A$ bila singularna. Ukoliko matrica A nema puni stupčani rang tada rješenje problema najmanjih kvadrata nije jedinstveno i za rješavanje problema ne može se koristiti normalna jednažbe. U tom slučaju od svih mogućih (beskonačno) rješenja, zanima nas ono koje samo po sebi ima najmanju normu. Za rješavanje takvih problema koristimo ili *QR rastav* s pivotiranjem po stupcima ili *rastav singularnih vrijednosti* $\hat{A}$ (*SVD* ili *singular value decomposition*). Nadalje, ove dvije metode je zbog njihovih svojstava (numeričke stabilnosti) poželjno koristiti i kada su stupci matrice A gotovo linearno

zavisni. Detaljna analiza ovih slučajeva izlazi izvan okvira kolegija, pa je izostavljamo.

Zadatak 6.3 Za rast svjetske populacije prema podacima iz tablice 5.1 u primjeru 5.3 odredite parametre C i k za koje funkcija $P(t) = C e^{k(t-1950)}$ najbolje aproksimira podatke od 1950.–2050. godine u smislu najmanjih kvadrata. Nacrtajte sliku i usporedite sa slikom 5.5. Predvidite populaciju 2050. godine.

6.2 QR rastav

U ovom poglavlju dat ćemo definiciju QR rastava (QR dekompozicije) te njegova osnovna svojstva i opisati primjenu na rješavanje problema najmanjih kvadrata. Slično kao u prethodnom poglavlju, ograničit ćemo se na slučaj kada je zadana matrica A tipa $m \times n$, gdje je $m \geq n$. QR rastav je također podloga za metode koje računaju svojstvene vrijednosti i vektore.

Definicija 6.1 Neka je A tipa $m \times n$, $m \geq n$. *QR rastav* matrice A glasi

$$A = QR,$$

pri čemu je Q *ortonormirana* matrica dimenzije $m \times m$, odnosno

$$Q^T Q = Q Q^T = I,$$

a R je $m \times n$ gornje trokutasta matrica. Ortonormiranu matricu kraće zovemo i *ortogonalna* matrica.

Ako je, na primjer, matrica A tipa 5×3 , tada rastav $A = QR$ možemo shematski prikazati na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Korištenje QR rastava za rješavanje problema najmanjih kvadrata temelji se na sljedećem važnom svojstvu ortogonalne matrice: za svaki vektor $\mathbf{x}$ dimenzije $m \times 1$ vrijedi

$$\|\mathbf{x}\| = \|Q\mathbf{x}\|. \quad (6.3)$$

Zaista,

$$\|Q\mathbf{x}\|^2 = (Q\mathbf{x})^T Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^T Q^T Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2.$$

Slično je i $\|Q^T \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

Osnovna svojstva QR rastava su slijedeća:

QR1. QR rastav je jedinstven do na predznake stupaca matrice Q i predznake redaka matrice R .

Neka je J dijagonalna matrica reda m s dijagonalnim elementima $J_{ii} \in \{-1, 1\}$. Matrica J je očito simetrična i ortogonalna. Ako je $\bar{Q} = QJ$ i $\bar{R} = JR$, tada je

$$\bar{Q}\bar{R} = QJJR = QR = A$$

također QR rastav matrice A .

QR2. Vrijedi $\text{rang}(A) = \text{rang}(R)$.

Ovo svojstvo slijedi iz teorema [M1, §2.11].

QR3. Posebno, ako je $\text{rang } A = n$, tada su zbog svojstva QR2. svi dijagonalni elementi matrice R različiti od nule,

$$r_{ii} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zadatak 6.4 Naredba za računanje QR rastava matrice A u programskom jeziku Matlab glasi `[Q,R]=qr(A)`. Izračunajte QR rastav matrice A iz primjera 6.2 te provjerite da ja zaista $A - QR = 0$ te da je matrica Q ortogonalna.

6.2.1 QR rastav vektora i Householderov reflektor

U ovom i sljedećem poglavlju opisat ćemo detalje QR algoritma.

Neka je zadan m -dimenzionalni vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

i neka je

$$\mathbf{x} = Q\mathbf{r}$$

njegov QR rastav. Tada je zbog svojstva (6.3) $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{x}\|$ pa vrijedi

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} -\|\mathbf{x}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nalaženje matrice Q je složenije. U ovom slučaju matrica Q jednaka je *Householderovom reflektoru*. Householderov reflektor je simetrična matrica definirana s

$$H = I - \frac{2}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \mathbf{v} \mathbf{v}^T, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \pm \|\mathbf{x}\| \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Uvrštavanjem se može provjeriti da za ovaj izbor matrice H vrijedi

$$H\mathbf{x} = \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mp \|\mathbf{x}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ortogonalnosti i simetričnosti matrice H povlači

$$\mathbf{x} = H^T(H\mathbf{x}) = H^T \mathbf{r} = H\mathbf{r}$$

pa smo dobili QR rastav vektora $\mathbf{x}$.

Primjer 6.3 Ako je $\mathbf{x} = [3 \ 1 \ 5 \ 1]^T$, tada je $\|\mathbf{x}\| = 6$,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \frac{1}{54} \begin{bmatrix} -27 & -9 & -45 & -9 \\ -9 & 53 & -5 & -1 \\ -45 & -5 & 29 & -5 \\ -9 & -1 & -5 & 53 \end{bmatrix}, \quad H\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Napomena 6.3 U prethodnom primjeru uzeli smo da je $v_1 = x_1 + \|\mathbf{x}\|$. U praksi se često zbog numeričke stabilnosti (izbjegavanje oduzimanja) uzima

$$v_1 = x_1 + \text{sign}(x_1)\|\mathbf{x}\|.$$

6.2.2 QR rastav matrice

QR rastave matrice nalazimo rekursivnom primjenom QR rastava vektora. Postupak ćemo ilustrirati na matrici tipa 5×3 . Neka je $\mathbf{a}_1$ prvi stupac matrice A i neka je

$$H_1 \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \pm \|\mathbf{a}_1\| \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

QR rastav vektora $\mathbf{a}_1$ izračunat prema postupku opisanom uz prethodnom poglavlju. Stavimo $Q_1 = H_1$. Tada je (matrica Q_1 je simetrična)

$$Q_1 A = \left[\begin{array}{c|cc} \pm \|\mathbf{a}_1\| & \times & \times \\ \hline 0 & & \\ 0 & & \\ 0 & A_2 & \\ 0 & & \end{array} \right].$$

Neka je $\mathbf{a}_2$ prvi stupac matrice A_2 koja je tipa 4×2 i neka je

$$H_2 \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \pm \|\mathbf{a}_2\| \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

QR rastav vektora $\mathbf{a}_2$. Stavimo

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & H_2 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$Q_2 Q_1 A = \left[\begin{array}{cc|c} \pm \|\mathbf{a}_1\| & \times & \times \\ 0 & \pm \|\mathbf{a}_2\| & \times \\ \hline 0 & 0 & \\ 0 & 0 & A_3 \\ 0 & 0 & \end{array} \right]$$

pri čemu je matrica A_3 tipa 3×1 . Konačno, neka je $\mathbf{a}_3 = A_3$ i neka je

$$H_3 \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \pm \|\mathbf{a}_3\| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

QR rastav matrice (vektora) $\mathbf{a}_3$. Stavimo

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & H_3 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$Q_3 Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} \pm \|\mathbf{a}_1\| & \times & \times \\ 0 & \pm \|\mathbf{a}_2\| & \times \\ 0 & 0 & \pm \|\mathbf{a}_3\| \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

Zbog ortogonalnosti i simetričnosti matrica Q_i , $i = 1, 2, 3$, za matricu $Q = Q_1 Q_2 Q_3$ vrijedi

$$Q Q_3 Q_2 Q_1 A = A = QR$$

pa sam tako dobili QR rastav matrice A .

Ovaj postupak je lako poopćiti na matricu bilo koje dimenzije.

6.2.3 Numeričko računanje QR rastava

Za formiranje Householderove matrice H potrebno je $O(n^2)$ računskih operacija. Za množenje nekog vektora x Householderovom matricom također je potrebno $O(n^2)$ računskih operacija. No, umnožak $H\mathbf{x}$ može se izračunati i bez formiranja matrice H :

$$H\mathbf{x} = \left(I - 2 \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} \right) \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{v} \frac{2(\mathbf{v}^T\mathbf{x})}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}.$$

Za računanje produkta pomoću prethodne jednakosti potrebno je samo $O(6n)$ računskih operacija. Slično, produkt HA se u praksi računa pomoću formula:

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{2}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}, \\ \mathbf{w} &= \beta A^T \mathbf{v} \\ HA &= A + \mathbf{v}\mathbf{w}^T. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Koristeći prethodna poboljšanja možemo napisati potprograme za računanje QR rastava. Prvi potprogram računa vektor $\mathbf{v}$ iz zadanog vektora $\mathbf{x}$ prema formuli (6.4) i napomeni 6.3:

```
function v=House(x)
% racuna Householderov vektor v iz vektora x
sig=sign(x(1)); if sig==0, sig=1; end
v=x;
v(1)=v(1)+sig*norm(v);
end
```

Slijedeći potprogram računa umnožak HA bez formiranja matrice H prema formuli (6.5):

```
function B=mnozi_House(v,A)
% racuna produkt HA=(I-2*v*v'/(v'*v))*A
% bez formiranja matrice H
beta=-2/(v'*v);
w=beta*A'*v;
B=A+v*w';
end
```

Konačno, slijedeći program računa QR rastav matrice A oprema postupku opisanom u prethodnom poglavlju:

```
function [Q,R]=moj_QR(A)
% QR rastav A=Q*R. A je m x n i mora biti rank(A)=n.
[m,n]=size(A);
Q=eye(m);
for i=1:min(m-1,n)
    v=House(A(i:m,i));
    A(i:m,i:n)=mnozi_House(v, A(i:m,i:n));
    Q(i:m,:)=mnozi_House(v, Q(i:m,:));
end
R=A;
Q=Q';
end
```

Zadatak 6.5 Izračunajte QR rastav matrice A iz primjera 6.2 pomoću prethodnih potprograma i usporedite rješenje s onim koje daje Matlabova naredba $[Q,R]=qr(A)$.

6.2.4 Rješavanje problema najmanjih kvadrata

Koristeći svojstvo ortogonalne matrice Q da je $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ možemo lako riješiti problem najmanjih kvadrata. Neka je A matrica tipa $m \times n$, $m > n$,

neka je $\text{rang } A = n$ i neka je $A = QR$ rastav matrice A . Tada je

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \|QR\mathbf{x} - QQ^T\mathbf{b}\|^2 = \|Q(R\mathbf{x} - Q^T\mathbf{b})\|^2 = \|R\mathbf{x} - Q^T\mathbf{b}\|^2.$$

Matricu R možemo zapisati kao

$$R = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

gdje je R_0 gornje trokutasta kvadratna matrica reda n , a vektor $Q^T\mathbf{b}$ možemo zapisati kao

$$Q^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix},$$

gdje je $\mathbf{c}$ dimenzije $n \times 1$ i $\mathbf{d}$ dimenzije $(m - n) \times 1$. Sada imamo

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \|R\mathbf{x} - Q^T\mathbf{b}\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} R_0\mathbf{x} - \mathbf{c} \\ -\mathbf{d} \end{bmatrix} \right\|^2 = \|R_0\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2.$$

Kako je $\text{rang } A = n$, iz svojstva QR3. zaključujemo da trokutasti sustav $R_0\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ima jedinstveno rješenje $\mathbf{x}$ za koje je $\|R_0\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = 0$. Kako $\mathbf{d}$ ne ovisi o $\mathbf{x}$, vrijednost $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ se ne može više smanjiti pa je $\mathbf{x}$ upravo (jedinstveno) rješenje problema najmanjih kvadrata. Očito je

$$\min_{\mathbf{x}} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{d}\|.$$

Slijedeći Matlab potprogram rješava problem najmanjih kvadrata pomoću QR rastava:

```
function x=LS(A,b)
% Rjesava problem najmanjih kvadrata || A\vec{b}f x - \vec{b}f b || --> min
% za matricu punog stupcanog ranga A koristeći QR rastav.
[m,n]=size(A);
[Q,R]=moj_QR(A);
b1=Q'*b;
c=b1(1:n);
x=R(1:n,1:n)\c;
end
```

Zadatak 6.6 Riješite problem najmanjih kvadrata iz primjera 6.2 pomoću prethodnog potprograma i usporedite rješenje s rješenjima dobivenim korištenjem normalne jednačbe i Matlabove naredbe $\mathbf{x}=\mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$.

Napomena 6.4 Vidjeli smo da problem najmanjih kvadrata možemo rješavati na dva načina: pomoću normalne jednadžbe i pomoću QR rastava. Rješavanje problema najmanjih kvadrata pomoću QR rastava je otprilike dva puta sporije ali zato ima bolja numerička svojstva odnosno u određenim situacijama daje točnije rješenje.

6.2.5 Ekonomični QR rastav

Iz prikaza (6.2) vidimo da zadnjih $m - n$ stupaca matrice Q ne sudjeluje kod računanja produkta QR jer se množe s nulom. Stoga QR rastav $A = QR$ možemo u ekonomičnom obliku zapisati kao

$$A = Q_0 R_0,$$

gdje su stupci matrice Q_0 prvih n stupaca matrice Q , a matrica R_0 je definirana s (6.6). Za matricu Q_0 vrijedi

$$Q_0^T Q_0 = I_n,$$

ali

$$Q_0 Q_0^T \neq I_m.$$

Važno je napomenuti da stupci matrice Q_0 tvore ortogonalnu bazu potprostora razapetog stupcima matrice A . Analogno prikazu (6.2), ekonomični QR rastav matrice dimenzije 5×3 možemo shematski prikazati na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Zadatak 6.7 Matlabova naredba `[Q,R]=qr(A,0)` daje ekonomični QR rastav matrice A . Usporedite "obični" i ekonomični QR rastav matrice A iz prethodnog zadatka.

6.2.6 QR rastav s pivotiranjem po stupcima

U nekim primjenama kao rješavanje problema najmanjih kvadrata kada matrica A nema puni rang, rang $A < n$, koristi se QR rastav s pivotiranjem stupaca. QR rastav s pivotiranjem matrice A glasi

$$AP = QR,$$

gdje je P matrica permutacija odabrana tako da su dijagonalni elementi matrice R složeni padajući po apsolutnim vrijednostima,

$$|r_{ii}| \geq |r_{i+1,i+1}|.$$

Matlab naredba za QR rastav s pivotiranjem matrice A glasi $[Q,R,P]=\text{qr}(A)$.

Zadatak 6.8 Izračunajte QR rastav matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

bez pivotiranja i s pivotiranjem i provjerite da je u drugom slučaju zaista $AP - QR = 0$.

Indeks

A

anti-derivacija, 1
Arhimedova spirala
 duljina luka, 73
 površina, 70

B

Bernoulli, Johann, 201
Bernoullijeva jednadžba, 251
beta funkcija, 199
brahistohrona, 201, 207
Bronštejn, I. N., 89

C

cikloida, 75
 duljina luka, 72
 površina, 66
cilindar, 118
 eliptički, 119
 hiperbolički, 119
 parabolički, 119
cilindrični koordinatni sustav, 184
Clairautova jednadžba, 244

D

džul, 78
dekompozicija, 44, 90
determinanta Wronskog, 252, 273
diferencijal, 5
 parcijalni, 127
 totalni, 127, 135
diferencijalna jednadžba, 221
 Bernoullijeva, 251
 Clairautova, 244
 egzaktna, 245

homogena, 249, 251, 273
linearna drugog reda, 251
 opće rješenje, 256
 s konstantnim koeficijentima, 259
linearna prvog reda, 249
linearna višeg reda, 273
 s konstantnim koeficijentima, 274
sa separiranim varijablama, 231
separabilna, 231
singularno rješenje, 242

Dirichletov integral, 198
dovoljan uvjet ekstrema, 144, 206
duljina luka krivulje, 70
duljina vektora, 285
dvostruki integral, 173

E

ekstrem, 139
 uvjetni, 159, 213
 vezani, 159, 213
element
 duljine, 70
 oplošja, 76
 površine, 62, 68, 176
 volumena, 73
element volumena, 183
elipsa
 opseg, 89
 površina, 64, 66
elipsoid, 111
Eulerov integral
 druge vrste, 198

prve vrste, 199
 Eulerov multiplikator, 247
 Eulerova jednadžba, 205
 Eulerova metoda, 235, 279

F

fazni prostor, 280
 fundamentalan skup rješenja, 254, 274
 funkcija
 derivabilna, 123, 129
 diferencijabilna, 127, 129, 134, 138
 implicitno zadana, 148, 152
 integrabilna, 44, 170
 neprekidna, 109
 omeđena, 105
 padajuća, 106
 rastuća, 106
 funkcional, 200

G

gama funkcija, 198
 Gaussova eliminacija, 21
 Gaussova razdioba, 34, 180
 granična vrijednost, 107

H

harmonijski oscilator, 266
 hiperboloid, 116
 dvokrilni, 116
 jednokrilni, 116
 homogena diferencijalna jednadžba, 232
 homogena funkcija, 232
 Hookeov zakon, 79, 222, 266
 Householderov reflektor, 297

I

integral
 n -terostruki, 169, 170
 binomni, 32
 divergentan, 57

donji, 44
 dvostruki, 173
 eliptički, 88
 gornji, 44
 hiperbolne funkcije, 26
 iracionalne funkcije, 28, 30
 konvergentan, 57
 neodređeni, 1, 4
 svojstva, 5
 nepravi, 57, 180
 određeni, 5, 43, 44, 170
 svojstva, 45, 54
 racionalne funkcije, 15, 16, 19, 20
 reda funkcija, 34
 Riemannov, 44
 sa separiranim varijablama, 174
 trigonometrijske funkcije, 22
 trostruki, 183
 višestruki, 169
 svojstva, 172
 integralna suma
 desna, 45
 donja, 44, 170
 gornja, 44, 170
 lijeva, 45, 219
 integrand, 4
 integrirajući faktor, 247
 interval, 2
 izobara, 103
 izogonalna trajektorija, 238
 izohipsa, 103
 izoklina, 234

J

Jakobijan, 188

K

kamatni račun, 228
 karakteristična jednadžba, 259, 275
 Kirchoffov zakon, 223, 272
 komplanacija, 76

konstanta integracije, 4, 13
 konus, 116
 koordinate
 cilindrične, 184
 polarne, 67, 185
 sferne, 185
 kriteriji konvergencije, 59
 krivulja u polarnim koordinatama,
 67, 72, 75, 77
 kružnica
 opseg, 72
 površina, 65, 68
 kugla, 111
 oplošje, 77
 otvorena, 107
 volumen, 74–76
 kvadar
 n -dimenzionalni, 169
 rastav, 170
 kvadratična prilagodba, 291

L

Lagrangeov multiplikator, 163, 213
 Lagrangeova funkcija, 162
 Lagrangeovi uvjeti, 206
 lančanica, 211
 Leibnitzova formula, 195
 limes, 107, 109
 linearna regresija, 286
 linearno nezavisne funkcije, 252, 273,
 274
 logistička jednadžba, 229
 lokalni
 ekstrem, 139
 maksimum, 139
 minimum, 139
 uvjetni maksimum, 159
 uvjetni minimum, 159
 vezani maksimum, 159
 vezani minimum, 159
 Lotka-Volterra-ine jednadžbe, 278

M

Maclaurinova formula, 138
 maksimum
 lokalni, 139
 masa, 190, 192
 Matlab, 36–38, 97, 211, 220, 234,
 237, 279
 mehanička rezonancija, 271
 metoda
 neodređenih koeficijenata, 30
 parcijalne integracije, 12
 supstitucije, 9
 metoda konačnih razlika, 218
 metoda najmanjih kvadrata, 285
 metoda neodređenih koeficijenta, 262,
 263, 276
 metoda varijacije konstanti, 257,
 262, 274
 minimum
 lokalni, 139
 moment, 84, 190, 192
 inercije, 191, 193

N

nejednakost trokuta, 55
 neposredno integriranje, 8
 NetPlot, 26, 89
 Newton, Isaac, 39, 78, 201, 222
 Newton-Leibnitzova formula, 49, 173
 Newtonov drugi zakon gibanja, 39,
 78, 222, 265
 Newtonov zakon hlađenja, 231
 nivo krivulja, 102
 nivo ploha, 102
 njutn, 78
 norma vektora, 285
 normala, 130
 normalna jednadžba, 290
 normalna razdioba, 180
 nužan uvjet ekstrema, 139, 203, 213
 numeričko integriranje, 88
 pogreška, 95

O

Octave On-line, 37, 38, 98, 211, 220
 Ohmov zakon, 223, 272
 okolina, 107, 135, 139
 ortogonalna matrica, 295
 ortogonalna trajektorija, 238
 ortonormirana matrica, 295
 ostatak, 137
 ovojnica, 243
 ovorena kugla, 107

P

pacijalna derivacija
 m -tog reda, 124
 paraboloid, 154
 eliptički, 112
 hiperbolički, 114
 parametarski zadana krivulja, 66, 71, 74, 77
 parcijalna derivacija, 122
 implicitno zadane funkcije, 155
 kompozicije funkcija, 134
 parcijalna integracija, 12, 54
 Pitagorin poučak, 70
 ploha
 drugog reda, 111
 podintegralna funkcija, 4
 pogreška, 35
 relativna, 35
 polarni koordinatni sustav, 67, 177
 polje smjerova, 234, 280
 populacijska jednadžba, 224, 278
 poredbeni kriterij, 59
 površina ravninskog lika, 62
 prava racionalna funkcija, 17
 prebrojiv skup, 2
 prijelazno rješenje, 269
 primitivna funkcija, 2
 prirast
 funkcije, 110
 varijable, 110

prisilne oscilacije, 268
 pritisak, 82

Q

QR rastav, 294, 295
 ekonomični, 302
 matrice, 298
 numeričko računanje, 299
 s pivotiranjem, 302
 vektora, 296

R

račun varijacija, 200
 rad, 78
 radioaktivni raspad, 227
 rast populacije, 224
 rastav, 44
 rastav na parcijalne razlomke, 18
 rastav singularnih vrijednosti, 294
 regresijski pravac, 288
 rektifikacija, 70
 rekurzivna formula, 15
 Richardsonova ekstrapolacija, 92, 94, 95
 rotaciona ploha, 73
 rotaciono tijelo
 oplošje, 76
 volumen, 73
 rubni uvjeti, 201

S

Schwartzov teoem, 145
 Schwartzov teorem, 124
 sedlasta točka, 141
 segment
 dekompozicija, 44
 rastav, 44
 Semendjajev, K. A., 89
 sfera, 111
 sferne koordinate, 185
 sila, 78
 Simpsonova formula, 93, 97
 pogreška, 94

srednja vrijednost, 55
stacionarna točka, 140
stožac, 116, 153
 eliptički, 102
 krnji, 76
 volumen, 74
supstitucija
 Eulerova, 29, 31
 racionalna, 28
 trigonometrijska, 29, 31, 65
 u određenom integralu, 52
 univerzalna hiperbolna, 26
 univerzalna trigonometrijska, 23
sustav lovac-plijen, 278
sustav diferencijalnih jednadžbi, 278
SVD, 294

T

tablica osnovnih integrala, 6
tangencijalna ravnina, 130, 140
tangenta, 129
Taylorov red, 138
Taylorova formula, 137, 142
težište, 84, 190, 192
teorem
 adicioni, 23
 o apsolutnoj konvergenciji, 60
 srednje vrijednosti, 54
The Integrator, 22, 26, 30
tlak, 82
 hidrostatski, 82
totalni diferencijal, 127
 višeg reda, 135
trapezna formula, 90, 97
 pogreška, 91
trostruki integral, 183

U

udaljenost, 106
uniformna konvergencija, 34
uvjeti transverzalnosti, 205

V

varijabla integracije, 4
varijacija, 203
varijacioni račun, 200
volumen, 176

W

Wronskijan, 252, 273

Z

zamjena varijabli, 9
 u višestrukom integralu, 188