Ivan Slapničar
Marko Matić

Matematika 2

PODSJETNIK ZA UČENJE

http://www.fesb.hr/mat2

Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje
Split, 2003.

Sadržaj

Ova skripta nastala su na osnovi suradnje Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske i Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu na I-projektu Ministarstva "Matematika 2 – digitalni udžbenik s interaktivnim animacijama i interaktivnom provjerom znanja" (`http://www.fesb.hr/mat2`).

1 Neodređeni integral

1. Definirajte primitivnu funkciju i neodređeni integral. Primjer. Dokažite da se primitivne funkcije razlikuju do na konstantu.

2. Dokažite svojstva neodređenog integrala

   a) linearnost,

   b) $(\int f(x)dx)' = f(x)$,

   c) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$,

   d) $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. Kako glasi tablica osnovnih integrala?

4. Opišite metode integriranja i dajte primjere:

   a) metode supstitucije:

      (i) ako je $x = \phi(t)$, i ϕ bijekcija, tada je

      $$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt;$$

      (ii) ako je $I = \int f(x)dx$ oblika

      $$\int f(x)dx = \int f(\phi(x))\phi'(x)dx,$$

      tada uz supstituciju $\phi(x) = t$ imamo $I = \int f(t)dt$;

   b) parcijalna integracija (dokažite formulu):

   $$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du;$$

   c) rekurzivne formule: izvedite, na primjer, formulu

   $$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}$$

   d) integriranje racionalnih funkcija: eliminacija zajedničkih nul-točaka brojnika i nazivnika; svođenje na pravu racionalnu funkciju; rastav na parcijalne razlomke; rješavanje tri osnovna tipa integrala;

e) integriranje trigonometrijskih funkcija: izvedite univerzalnu trigonometrijsku supstituciju:

$$\begin{aligned} t &= \tan\frac{x}{2}, \\ x &= 2\arctan t, \\ dx &= \frac{2}{1+t^2}dt, \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \tan x &= \frac{2t}{1-t^2}. \end{aligned}$$

Za koje x vrijede gornje formule? Primjer. Izvedite supstituciju $t = \tan x$.

f) integriranje hiperbolnih funkcija;

g) integriranje iracionalnih funckija:

(i) integral

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$$

se riješava pomoću supstitucije

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

pri čemu je n najmanji zajednički nazivnik od $n_1, \dots, n_k$,

(ii) integral:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

se rješava pomoću supstitucije

$$\frac{2ax+b}{\sqrt{|4ac-b^2|}} = t$$

nakon čega dobijemo jedan od tri slučaja

$$\int R(t, \sqrt{1-t^2}dt = \{t = \sin z \text{ ili } \sqrt{1-t^2} = z(1-t)\} = \cdots$$

$$\int R(t, \sqrt{t^2-1}dt = \{t = \frac{1}{\sin z} \text{ ili } \sqrt{t^2-1} = t+z\} = \cdots$$

$$\int R(t, \sqrt{t^2+1}dt = \{t = \tan z \text{ ili } \sqrt{t^2+1} = t+z\} = \cdots$$

(iii) metoda neodređenih koeficijenata;

h) binomni integral:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = (m,n,p\in\mathbb{Q}) = \{x^n = t\}$$
$$= \frac{1}{n}\int\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{\frac{m+1}{n}+p-1}dt = \cdots$$

5. Kako se provodi i čemu služi postupak integriranja pomoću razvoja u red?

2 Određeni integral

1. Definirajte određeni (Riemannov) integral.

2. Objasnite osnovna svojstva određenog integrala:

a) ako je $f(x)\geq 0$ za svaki $x\in[a,b]$, tada

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

daje površinu između $f(x)$ i x-osi od a do b,

b) vrijedi

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0,$$

c) vrijedi

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx,$$

d) vrijedi

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

3. Što je određeni, a što neodređeni integral?

4. Dokažite Newton-Leibnitzovu formulu.

5. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a,b]$, tada je jedna primitivna funkcija dana s

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx, \quad x\in[a,b], \quad F(a)=0.$$

Dokažite!

6. Dokažite teorem srednje vrijednosti za određeni integral: ako je f neprekidna na $[a, b]$, tada postoji $c \in [a, b]$ tako da je

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Koja je grafička interpretacija tog teorema?

7. Dokažite

a) monotonost:

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

b) nejednakost trokuta:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

8. Što je nepravi integral? Dokažite:

$$\int_0^\infty e^{-x} = 1,$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{za } \alpha > 0, \\ \text{divergira}, & \text{za } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

9. Opišite kriterije konvergencije za nepravi integral (majoranta, minoranta, apsolutna konvergencija).

10. Kako računamo površinu ravninskih likova? Izvedite dP u Kartezijevim koordinatama,

$$dP = dx\, dy,$$

i polarnim koordinatama,

$$dP = \frac{1}{2} r^2 d\phi.$$

Izvedite dP za parametarski zadane krivulje. Dajte primjere.

11. Kako računamo duljinu luka ravninskih krivulja? Izvedite ds u Kartezijevim koordinatama,
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}dx,$$
i polarnim koordinatama,
$$ds = \sqrt{r'^2 + r^2}d\phi.$$
Izvedite ds za parametarski zadane krivulje. Dajte primjere.

12. Slično pitanje za obujam rotacionih tijela.

13. Slično pitanje za oplošje rotacionih ploha (komplanacija).

14. Objasnite postupak numeričkog integriranja (trapezna formula, Simpsonova formula, Richardsonova ekstrapolacija)?

3 Funkcije više varijabli

1. Definirajte n-dimenzionalni prostor $\mathbb{R}^n$. Na koje sve načine možemo zadati funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$? Što su nivo-plohe?

2. Kako definiramo udaljenost? Što je otvorena kugla $K(T, \delta)$?

3. Definicija limesa funkcije više varijabli:
$$\lim_{T \to T_0} F(T) = a$$
ako
$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0)$$
tako da
$$T \in K(T_0, \delta) \Rightarrow |f(T) - a| < \varepsilon.$$
Kako možemo limes definirati pomoću nizova?

4. Definirajte neprekidnost funkcije više varijabli.

5. Neprekidna funkcija poprima na zatvorenom skupu svoj maksimum i minimum.

6. Definicija parcijalnih derivacija.

7. Schwartzov teorem.

8. Definicija totalnog diferencijala.

9. Da li je svaka neprekidno derivabilna funkcija i diferencijabilna?

10. Definirajte tangencijalnu ravninu i normalu na plohu.
11. Parcijalno deriviranje složene funkcije.
12. Totalni diferencijal višeg reda.
13. Taylorova formula za funkcije više varijabli:

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{r=1}^{m} \frac{d^r(f(T_0))}{r!} + \frac{d^{(m+1)}(f(T_\nu))}{p \cdot m!}(1-\nu)^{m+1-p}$$

    Razvijte funkciju e^{x+y} u Taylorov red u okolini točke $(1,-1)$.

14. Nuždan uvjet ekstrema.
15. Dovoljan uvjet ekstrema pomoću totalnog diferencijala.
16. Dovoljan uvjet ekstrema pomoću pod-determinanti matrice drugih parcijalnih derivacija.
17. Teorem o implicitnoj funkciji.
18. Izvedite nužne uvjete za uvjetni ekstrem funkcije dvije varijable.

4 Višestruki integrali

1. Kako definiramo višestruki integral?
2. Svojstva: linearnost, homogenost, integral ne ovisi o redoslijedu integracije.
3. Primjene dvostrukog integrala: obujam, površina ako je $f(x,y) = 1$.
4. Prebacivanje dvostrukog integrala iz Kartezijevih u polarne koordinate. Primjer.
5. Primjer nepravog dvostrukog integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

6. Primjene trostrukog integrala.
7. Prebacivanje trostrukog integrala iz Kartezijevih u cilindrične i sferne koordinate. Primjeri.
8. Kako glase općenite formule za zamjenu varijabli kod višesestrukih integrala?

5 Vektorska analiza

1. Kako definiramo vektorsku funkciju skalarne varijable $\vec{w}(t)$?
2. Kako definiramo limes, neprekidnost, derivaciju i integral vektorske funkcije $\vec{w}(t)$ u slučaju kada je $t \in D \subseteq \mathbb{R}$?
3. Ako je $\vec{s}(t)$ položaj materijalne točke u trenutku t, kako ćemo izračunati brzinu $\vec{v}(t)$ i ubrzanje $\vec{a}(t)$ u trenutku t? Ako je zadano ubrzanje $\vec{a}(t)$, kako ćemo izračunati brzinu i položaj?
4. Što je skalarno polje? Što su ekvipotencijalne plohe? Što je vektorsko polje? Što su silnice? Da li ova polja ovise o odabranom koordinatnom sustavu?
5. Kako definiramo gradijent, divergenciju i rotaciju? Kako možemo ova tri operatora prikazati pomoću Hamiltonovog diferencijalnog operatora $\vec{\nabla}$?
6. Dokažite neka od svojstava gradijenta, divergencije i rotacije pomoću $\vec{\nabla}$.
7. Kada je vektorsko polje potencijalno (konzervativno, bezvrtložno)? Kako računamo potencijal?
8. Definirajte usmjerene derivacije skalarnog i vektorskog polja.
9. Kako vidimo da skalarno polje najbrže raste u smjeru gradijenta?

6 Krivuljni i plošni integrali

1. Što je glatka krivulja i kako je sve možemo zadati?
2. Kako definiramo krivuljni integral skalarnog polja (krivuljni integral prve vrste)? Navedite jednu fizikalnu interpretaciju? Primjer.
3. Kako definiramo krivuljni integral vektorskog polja (krivuljni integral druge vrste)? Navedite jednu fizikalnu interpretaciju? Primjer.
4. Koja je veza između krivuljnog integrala skalarnog polja i krivuljnog integrala vektorskog polja?
5. Što je cirkulacija vektorskog polja?
6. Kako se ponaša krivuljni integral potencijalnog vektorskog polja? Primjer.
7. Kako glasi Greenov teorem? Primjer. Kako možemo Greenov teorem koristiti za računanje površine?

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_{\overleftarrow{C}} P dx + Q dy$$

8. Kako definiramo glatku plohu? Kako sve možemo zadati glatku plohu? Što je po djelovima glatka ploha?

9. Kako glasi i kako se dobije formula za element površine plohe dS? Kako glasi formula za površinu plohe?

10. Kako glasi formula za plošni integral skalarnog polja (plošni integral prve vrste), koja su mu svojstva i kako ga računamo? Navedite jednu fizikalnu primjenu. Primjer.

11. Kako glasi formula za plošni integral vektorskog polja (plošni integral druge vrste), koja su mu svojstva i kako ga računamo? Primjer.

12. Kako možemo plošni integral vektorskog polja izraziti kao plošni integral skalarnog polja?

13. Kako glasi teorem o divergenciji (Gauss-Ostrogradsky formula)? Primjer.

$$\int\int\int_V \operatorname{div} \vec{w} dV = \int\int_{\overleftarrow{S}} \vec{w} d\vec{S} \equiv \int\int_{\overleftarrow{\partial V}} \vec{w} \cdot \vec{n}_0 dS$$

Kako glasi teorem u skalarnom obliku?

14. Kako glasi teorem o gradijentu? Primjer.

$$\begin{aligned} &\int\int\int_V \operatorname{grad} f\, dV = \int\int_{\partial V} f\vec{n}_0 dS = \int\int_{\partial V} f\, d\vec{S} \\ &= \vec{i}\int\int_{\partial V} \cos\alpha f dS + \vec{j}\int\int_{\partial V} \cos\beta f dS + \vec{k}\int\int_{\partial V} \cos\gamma f dS \end{aligned}$$

15. Kako glasi teorem o rotaciji? Primjer.

$$\int\int\int_V \operatorname{rot} \vec{w}\, dV = \int\int_{\partial V} (\vec{n}_0 \times \vec{w}) dS.$$

16. Kako glasi Stokesov teorem? Primjer.

$$\int\int_{\vec{S}} \operatorname{rot} \vec{w} d\vec{S} = \oint_{\overleftarrow{\partial S}} \vec{w} d\vec{r} = \oint_{\partial S} \vec{w}\vec{t}_0 ds$$

Kako glasi teorem u skalarnom obliku?