Ivan Slapničar
Nevena Jakovčević Stor
Josipa Barić
Ivančica Miroševič

MATEMATIKA 2

Zbirka zadataka

http://www.fesb.hr/mat2

Sveučilište u Splitu
Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

Split, ožujak 2008.

Sadržaj

Popis slika

Predgovor

Ova zbirka namijenjena je studentima tehničkih i prirodnih znanosti, a u prvom redu studentima Sveučilišta u Splitu, Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje (FESB). U zbirci je izloženo gradivo kolegija "Matematika 2" po sadržaju koji se predaje na FESB-u. Sličan sadržaj nalazi se u većini istoimenih kolegija koji se predaju na tehničkim i prirodoslovnim fakultetima.

Zbirka prati gradivo i način izlaganja udžbenika Sveučilišta u Splitu: I. Slapničar, *Matematika 2*, te se rješenja zadataka, radi lakšeg praćenja i razumijevanja, referencijraju na odgovarajuće djelove udžbenika. Pored potpuno riješenih zadataka, zbirka sadrži i zadatake za vježbu s rješenjima.

Posebnost zbirke je u tome što svaki zadatak ima naslov iz kojeg se vidi što student treba naučiti.

Budući se radi o standardnom sadržaju, nije citirana posebna literatura. Spomenut ćemo samo neke od knjiga koje su utjecale na sadržaj, a koje preporučujemo i čitatelju:

B. P. Demidović, *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1978.

P. Javor, *Matematička analiza, Zbirka zadataka*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

V. Devide, *Riješeni zadaci iz više matematike, svezak II, III*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

B. Apsen, Riješeni zadaci više matematike, drugi dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1982.

U izradi zbirke korištena su iskustva i zabilješke bivših i sadašnjih nastavnika matematike na FESB-u pa im ovom prilikom iskazujemo svoju zahvalnost.

U Splitu, ožujka 2008.

Autori

1.

NEODREĐENI INTEGRAL

1.1 Neposredno integriranje

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\,dx,$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx,$

(e) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 x\,dx.$

Rješenje. U računanju primjenjujemo [M2, teorem 1.4] i tablicu osnovnih integrala [M2, §1.1.1].

(a) Da bismo mogli primjeniti integral potencije iz tablice osnovnih integrala podintegralu funkciju prvo zapisujemo u jednostavnijem obliku, pa vrijedi

$$\begin{aligned}\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx &= \int \left(1-\frac{1}{x^2}(g)x^{\frac{3}{4}}\,dx = \int x^{\frac{3}{4}}\,dx - \int x^{-\frac{5}{4}}\,dx\\ &= \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} + C = \frac{4x\sqrt[4]{x^3}}{7} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + C\\ &= \frac{4\left(x^2+7\right)}{7\sqrt[4]{x}} + C.\end{aligned}$$

(b) Tablični integral dobivamo nakon što brojniku dodamo i oduzmemo broj 1, pa vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= x - \mathrm{tg}x + C.\end{aligned}$$

(c) Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx + \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C\\ &= -\frac{5^{-x}}{\ln 5} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} + C.\end{aligned}$$

(d) Koristeći osnovni trigonometrijski identitet dobivamo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx\\ &= \mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C.\end{aligned}$$

(e) Zapisivanjem funkcije $\mathrm{tg}x$ u obliku $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^2 x\,dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int dx\\ &= \mathrm{tg}x - x + C.\end{aligned}$$

1.2 Metode supstitucije

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a}$,

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$,

(c) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$.

Rješenje. Integrale računamo svodeći zadani integral na tablični dopustivom zamjenom varijable integracije nekom funkcijom (bijekcijom) ili dopustivom zamjenom nekog analitičkog izraza novom varijablom integracije.

(a) Umjesto $x-a$ uvodimo novu varijablu t. Potrebno je promijeniti i dx koji je u ovom slučaju jednak dt, jer je $dt = d(x-a) = dx$.

$$\int \frac{dx}{x-a} = \left\{ \begin{array}{c} x-a=t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|x-a| + C.$$

(b) Umjesto $1+e^x$ uvodimo novu varijablu t, pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+e^x} &= \left\{ \begin{array}{c} 1+e^x = t \\ e^x\,dx = dt \\ x = \ln(t-1) \\ dx = \frac{dt}{t-1} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{dt}{t-1}}{t} = \int \frac{dt}{(t-1)\,t} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{(t-1)t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} \\ A=-1 \quad B=1 \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t-1| - \ln|t| + C \\
&= \ln e^x - \ln(1+e^x) + C = x - \ln(1+e^x) + C.
\end{aligned}$$

Osim suspstitucije u ovom zadatku korišten je i rastav na parcijalne razlomke gdje smo razlomak pod integralom $\frac{1}{(t-1)t}$ rastavili na dva jednostavnija.

(c) Zbog pojave $\sqrt[3]{x}$ u podintegralnom izrazu uvodimo zamjenu $x = t^3$, pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = t^3 \\ dx = 3t^2\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{\sin t}{t^2}\,3t^2\,dt \\
&= 3\int \sin t\,dt = -3\cos t + C = -3\cos\sqrt[3]{x} + C.
\end{aligned}$$

(d) Vrijedi

$$\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} 1+2\sin x = t \\ 2\cos\,dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{2t}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|1+2\sin x| + C.$$

1.3 Uvođenje novog argumenta

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \sin 3x\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Rješenje. Da bismo zadane integrale sveli na tablične umjesto x uvodimo novi argument, pa umjesto dx imamo $d(noviargument)$.

(a) Novi argument je $3x$, a kako je $d\,(3x) = 3\,dx$ integral je potrebno jo pomnožiti s $\frac{1}{3}$.

$$\int \sin 3x\,dx \frac{1}{3} = \int \sin 3x\,dx\,(3x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C.$$

(b) Za novi argument uzimamo $\ln x$, pa vrijedi

$$\int \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx = \int (\ln x)^4\,d\,(\ln x) = \frac{(\ln x)^5}{5} + C.$$

(c) Vrijedi

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,d\left(1+x^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C.$$

Ovi integrali mogu se rješiti i metodom supstitucije tipa $(noviargument) = t$.

1.4 Metoda parcijalne integracije

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int xe^x\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$,

(c) $\displaystyle\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$.

Rješenje. U računaju zadanih integrala koristimo formulu parcijalne integracije [M2, teorem 1.7]. Ideja je da integral koji se pojavi nakon parcijalne integracije bude jednostavniji od zadanog integrala.

(a) U parcijalnoj integraciji uzimamo da je $u = x$ i $dv = e^x\,dx$, jer time x derivacijom postaje 1 čime se integriranje pojednostavnjuje.

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= \left\{\begin{array}{cc} u = x & dv = e^x\,dx \\ du = \ dx & v = \int e^x\,dx = e^x \end{array}\right\} \\ &= xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)\,e^x + C.\end{aligned}$$

(b) Parcijalnu integraciju možemo provoditi i više puta uzastopce, npr. u slijedećem intgralu zadano je $\ln^2 x$, pa nakon dvije parcijelne integracije ln "nestaje".

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx &= \left\{\begin{array}{cc} u = \ln^2 x & dv = \sqrt{x}\,dx \\ du = \frac{2\ln x}{x}\,dx & v = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \end{array}\right\} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln^2 x - \frac{4}{3}\int \sqrt{x}\ln x\,dx \left\{\begin{array}{cc} u = \ln x & dv = \sqrt{x}\,dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \end{array}\right\} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln^2 x - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{2}{3}\int \sqrt{x}\,dx\right) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln^2 x - \frac{8}{9}\sqrt{x^3}\ln x + \frac{16}{27}\sqrt{x^3} + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}\right) + C.\end{aligned}$$

(c) Vrijedi

$$\begin{aligned}
\int x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx &= \left\{\begin{array}{cc} u=\ln\frac{1+x}{1-x} & dv = x\,dx \\ du=\frac{2}{1-x^2}\,dx & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\} \\
&= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{2}\frac{2}{1-x^2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \int \frac{-x^2+1-1}{1-x^2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \int dx - \int \frac{1}{1-x^2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\ln\frac{1+x}{1-x} + x + C.
\end{aligned}$$

(d) x^3 u brojinku zapisujemo kao $x^2 \cdot x$, pa slijedi

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int x^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&= \left\{\begin{array}{cc} u=x^2 & dv=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ du=2x\,dx & v=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\sqrt{1+x^2}\end{array}\right\} \\
&= x^2\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}2x\,dx \\
&= x^2\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,d\left(1+x^2\right) \\
&= x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

(e) Vrijedi

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x\,dx &= \left\{\begin{array}{cc} u=e^x & dv=\sin x\,dx \\ du=e^x\,dx & v=-\cos x\end{array}\right\} \\
&= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx \\
&= \left\{\begin{array}{cc} u=e^x & dv=\cos x\,dx \\ du=e^x\,dx & v=\sin x\end{array}\right\} \\
&= -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x \sin x\,dx.
\end{aligned}$$

Integral koji preostaje izračunati jednak je početnom integralu, označimo ga sa I, pa izjednačavanjem lijeve i desne strane dobivamo:

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I,$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} 2I &= e^x (\cos x - \sin x) \\ I &= \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\cos x - \sin x) + C. \end{aligned}$$

1.5 Rekurzivne formule

Nađite rekurzivnu formulu za integral: $I_n = \displaystyle\int \left(a^2 - x^2\right)^n dx, \quad n \in N.$

Rješenje. Za $n = 1$ vrijedi

$$I_1 = \int \left(a^2 - x^2\right) dx = a^2 x - \frac{x^3}{3} + C = x\left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right) + C.$$

Za $n \geq 2$ vrijedi

$$\begin{aligned} I_n &= \int \left(a^2 - x^2\right)^n dx = \left\{ \begin{array}{cc} u = \left(a^2 - x^2\right)^n & dv = dx \\ du = -2nx \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} dx & v = x \end{array} \right\} \\ &= x\left(a^2 - x^2\right)^n - \int -2nx^2 \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} dx \\ &= x\left(a^2 - x^2\right)^n + 2n \int \left[-\left(a^2 - x^2\right)\right]^n dx + 2n \int a^2 \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} dx \\ &= x\left(a^2 - x^2\right)^n - 2nI_n + 2na^2 I_{n-1}. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem lijeve i desne strane dobivamo traženu rekurzivnu formulu

$$\begin{aligned} I_n &= x\left(a^2 - x^2\right)^n - 2nI_n + 2na^2 I_{n-1} \\ I_n (1 + 2n) &= x\left(a^2 - x^2\right)^n + 2na^2 I_{n-1} \\ I_n &= \frac{x\left(a^2 - x^2\right)^n}{(2n+1)} + \frac{2na^2}{(2n+1)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

1.6 Integriranje racionalnih funkcija

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 5x},$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{2x^2-3x+4}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+2}{x^2+7x+12}\,dx$,

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$.

Rješenje.

(a) Polinom u nazivniku može se rastaviti na faktore $x^2+5x = x\,(x+5)$, pa tablične integrale dobivamo rastavom na parcijalne razlomke [M2, §1.4.3] . Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+5x} &= \int \frac{dx}{x\,(x+5)} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} / \cdot x\,(x+5) \\ 1 = Ax + 5A + Bx \\ A = \frac{1}{5} \quad B = -\frac{1}{5} \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+5} \\ &= \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln|x+5| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right| + C.\end{aligned}$$

(b) Polinom $2x^2-5x+7$ nema realnih nul-točaka, pa nazivnik ne možemo rastaviti na faktore. U tom slučaju integral računamo nadopunjavanjem nazivnika do punog kvadrata na slijedeći način:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2x^2-5x+7} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{7}{2}} \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{d\left(x-\frac{5}{4}\right)}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{31}{16}}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{5}{4}}{\sqrt{\frac{31}{16}}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}} + C.\end{aligned}$$

(c) Nazivnik se ni u ovom primjeru ne može rastaviti na faktore, pa integral računamo zaspisivanjem brojnika u dva dijela od kojih je jedan derivacija nazivnika, a drugi konstanta. Time dobivamo dva integrala od kojih se prvi može izračunati metodom supstitucije [M2 vježbe, §1.2] ili uvođenjem novog argumenta [M2 vježbe, §1.3], dok drugi računamo kao u ovom zadatku pod (b).

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}-1}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)-1}{x^2-x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

(d) Vrijedi

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x-2}{2x^2-3x+4}\,dx &= \int \frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}{2\left(x^2-\frac{3}{2}x+2\right)}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{x-\frac{2}{3}}{x^2-\frac{3}{2}x+2}\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{\frac{1}{2}\left(2x-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{x^2-\frac{3}{2}x+2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{\frac{1}{2}\left(2x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{12}}{x^2-\frac{3}{2}x+2}\,dx \\
&= \frac{3}{2}\frac{1}{2}\int \frac{2x-\frac{3}{2}}{x^2-\frac{3}{2}x+2}\,dx + \frac{3}{2}\frac{1}{12}\int \frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}x+2} \\
&= \frac{3}{4}\int \frac{d\left(x^2-\frac{3}{2}x+2\right)}{x^2-\frac{3}{2}x+2} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+2} \\
&= \frac{3}{4}\ln\left(x^2-\frac{3}{2}x+2\right) + \frac{1}{8}\frac{4}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{23}} + C.
\end{aligned}$$

(e) Kako je u ovom integralu stupanj brojnika podintegralne funkcije veći od stupnja nazivnika, prvo provodimo dijeljenje polinoma, a zatim integral rastavljamo na dva, od kojih je prvi tablični integral potencije, a drugi se svodi na neki od prethodnih slučajeva.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^3+x+2}{x^2+7x+12}\,dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \left(x^3+x+2\right) : \left(x^2+7x+12\right) = x-7 \\ \vdots \\ ost. 38x+86 \end{array} \right\} \\
&= \int (x-7)\,dx + \int \frac{38x+86}{x^2+7x+12}\,dx = \frac{x^2}{2} - 7x + I_1
\end{aligned}$$

Integral označen sa I_1 računamo posebno. Kako su $x_1 = -3$ i $x_1 = -4$ nultočke polinoma $x^2+7x+12$, nazivnik se može rastaviti na faktore, pa tablične integrale dobivamo rastavom na parcijalne razlomke.

$$\begin{aligned}
\int \frac{38x+86}{x^2+7x+12}\,dx &= \int \frac{38x+86}{(x+3)\,(x+4)}\,dx \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4} \\ A = -28 \quad B = 66 \end{array} \right\} \\
&= -28 \int \frac{d\,(x+3)}{x+3} + 66 \int \frac{d\,(x+4)}{x+4} \\
&= -28 \ln|x+3| + 66 \ln|x+4| + C.
\end{aligned}$$

Konačno rješenje je

$$I = \int \frac{x^3+x+2}{x^2+7x+12}\,dx = \frac{x^2}{2} - 7x - 28\ln|x+3| + 66\ln|x+4| + C.$$

(f) Slijedeći integral računamo dodavanjem i oduzimajnem x^2 u brojniku, pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx \\
&= \int \frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx - \int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)}\,dx - \int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx = \operatorname{arctg} x - I_1.
\end{aligned}$$

Integral označen sa I_1 računamo posebno koristeći parcijalnu integraciju,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx &= \int \frac{x\cdot x}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} u = x & dv = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = -\frac{1}{2\left(1+x^2\right)} \end{array} \right\} \\
&= -\frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} \\
&= -\frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.
\end{aligned}$$

pa je konačno rješenje

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + C.$$

1.7 Integriranje trigonometrijskih funkcija

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx,$

(b) $\displaystyle\int \cos x \cos 2x \cos 5x\,dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5},$

(d) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\,dx.$

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x\,dx &= \int \cos^3 x \cos^2 x\,dx = \int \cos^3 x\left(1-\sin^2 x\right)\,dx \\
&= \int \cos^3 x\,dx - \int \cos^3 x \sin^2 x\,dx \\
&= \int \cos x\left(1-\sin^2 x\right)\,dx - \int \cos^3 x \sin^2 x\,dx \\
&= \int \cos x\,dx - \int \cos x \sin^2 x\,dx - \int \cos^3 x \sin^2 x\,dx \\
&= \sin x - I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

Integrale označene sa I_1 i I_2 računamo posebno koristeći jednostavne supstitucije.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \cos x \sin^2 x \, dx = \left\{ \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \, dx = \, dt \end{array} \right\} \\
&= \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + C_2 = \frac{\sin^3 x}{3} + C_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \cos^3 x \sin^2 x \, dx = \left\{ \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \, dx = \, dt \end{array} \right\} \\
&= \int t^2 \left(1 - t^2\right) \, dt = \int t^2 \, dt - \int t^4 \, dt \\
&= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C_2 = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C_2.
\end{aligned}$$

pa je konačno rješenje

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x \, dx &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C \\
&= \sin x - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.
\end{aligned}$$

(b) Podintegralu funkciiju prvo raspišemo pomoću trigonometrijskih formula pretvorbe, pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\int \cos x \cos 2x \cos 5x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 3x) \cos 5x \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int \cos x \cos 5x \, dx + \frac{1}{2} \int \cos 3x \cos 5x \, dx \\
&= \frac{1}{4} \int (\cos 4x + \cos 6x) \, dx + \frac{1}{4} \int (\cos 2x + \cos 8x) \, dx \\
&= \frac{1}{4} \left(\int \cos 4x \, dx + \int \cos 6x \, dx + \int \cos 2x \, dx + \int \cos 8x \, dx \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 8x}{8} \right) + C \\
&= \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + \frac{\sin 8x}{32} + C.
\end{aligned}$$

(c) Integral računamo koristeći univerzalnu trigonometrijsku supstituciju [M2, §1.5.1].

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} &= \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{4t-1+t^2+5+5t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{2\,dt}{6t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{3\left(t^2+\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}\right)} \\
&= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C.
\end{aligned}
$$

(d) U računanju integrala umjesto univerzalne trigonometrijske supstitucije koristit ćemo pojednostavnjenu supstituciju za racionalne funkcije sa svojstvom $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\,dx &= \left\{ \begin{array}{c} R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \\ \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{\cos^3 x\left(1+\cos^2 x\right)}{\sin^2 x\left(1+\sin^2 x\right)}\,dx \\
&= \int \frac{\cos^2 x\left(1+\cos^2 x\right)\cos x}{\sin^2 x\left(1+\sin^2 x\right)}\,dx \\
&= \int \frac{\left(1-t^2\right)\left(1+1-t^2\right)}{t^2\left(1+t^2\right)}\,dt = \int \frac{\left(1-t^2\right)\left(2-t^2\right)}{t^2\left(1+t^2\right)}\,dt \\
&= \int \frac{t^4-3t^2+2}{t^4+t}\,dt = \left\{ \begin{array}{c} \left(t^4-3t^2+2\right) : \left(t^4+t\right) = 1 \\ \vdots \\ ost.4t^2+2 \end{array} \right\} \\
&= \int 1\,dt + \int \frac{-4t^2+2}{t^2\left(1+t^2\right)}\,dt \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \frac{-4t^2+2}{t^2(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1} \\ A=0, \quad B=2, \quad C=0, \quad D=-6 \end{array} \right\} \\
&= t + \int \frac{2}{t^2}\,dt + \int \frac{-6}{t^2+1}\,dt = t - \frac{2}{t} - 6\operatorname{arctg} t + C.
\end{aligned}
$$

1.8 Integriranje iracionalnih funkcija racionalnom supstitucijom

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$,

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$,

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3\,(x+2)^5}}$.

Rješenje.

(a) Ovakav integral rješavamo supstitucijom $x=t^k$, gdje je k najmanji zajednički višekratnik nazivnika eksponenata od x koji se pojavljuje u podintergalnoj funkciji.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\,(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} &== \left\{\begin{array}{c} x=t^6 \\ dx=6t^5\,dt \end{array}\right\} \\
&= \int \frac{6t^5\,dt}{t^6\,(1+2t^3+t^2)} = \int \frac{6\,dt}{t\,(1+2t^3+t^2)} \\
&= \left\{\begin{array}{c} \left(2t^3+t^2+1\right)=0 \Longrightarrow t=-1 \\ \left(2t^3+t^2+1\right):(t+1)=2t^2-t+1 \\ \vdots \\ ost.0 \end{array}\right\} \\
&= 6\int \frac{dt}{t\,(t+1)\,(2t^2-t+1)} \\
&= \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{2t^2-t+1} \\ A=1,\quad B=\frac{-1}{4},\quad C=\frac{-3}{2},\quad D=\frac{1}{4} \end{array}\right\} \\
&= 6\int \frac{dt}{t} + 6\int \frac{\frac{-1}{4}\,dt}{t+1} - 9\int \frac{t-\frac{1}{6}}{2t^2-t+1}\,dt \\
&= 6\ln|t| - \frac{3}{2\ln}\,|t+1| - I_1 \\
&= 6\ln\left|\sqrt[6]{x}\right| - \frac{3}{2\ln}\left|\sqrt[6]{x}+1\right| - I_1
\end{aligned}$$

Integral označen sa I_1računamo posebno kao integral racionalne funkcije.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{t-\frac{1}{6}}{2t^2-t+1}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{4t-\frac{2}{3}}{2t^2-t+1}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{4t-1}{2t^2-t+1}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{3}}{2t^2-t+1}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2t^2-t+1\right) + \frac{1}{24}\int \frac{1}{t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2t^2-t+1\right) + \frac{1}{24}\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2t^2-t+1\right) + \frac{1}{24}\frac{4}{\sqrt{7}} arctg\frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2t^2-t+1\right) + \frac{1}{6\sqrt{7}} arctg\frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right) + \frac{1}{6\sqrt{7}} arctg\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C
\end{aligned}$$

pa je konačno rješenje

$$\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)} = 6\ln\left|\sqrt[6]{x}\right| - \frac{3}{2\ln}\left|\sqrt[6]{x}+1\right| - \frac{1}{4}\ln\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right) - \frac{1}{6\sqrt{7}} arctg\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C.$$

(b) Vrijedi

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}} &= \left\{ \begin{array}{cc} 2x+1=t^6 & dx=3t^5 \\ x=\frac{t^6-1}{2} & t=\sqrt[6]{2x+1} \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{3t^5\,dt}{t^4-t^3} = 3\int \frac{t^2\,dt}{t-1} = 3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt \\
&= 3\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)\,dt = 3\int (t+1)\,dt + 3\int \frac{1}{t-1}\,dt \\
&= \frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C \\
&= \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C.
\end{aligned}$$

(c) Vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3 (x+2)^5}} &= \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)(x-1)^4 (x+2)^4}} \\
&= \int \frac{1}{(x-1)(x+2)} \sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}\, dx \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x-1}{x+2} = t^4 & dx = \frac{12t^3}{(1-t^4)^2}\, dt \\ x = \frac{1+2t^4}{1-t^4} & \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{1-t^4}{3} \cdot \frac{1-t^4}{3t^4} t \frac{12t^3}{(1-t^4)^2}\, dt \\
&= \int \frac{4}{3}\, dt = \frac{4}{3} t + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C.
\end{aligned}
$$

1.9 Eulerova i trigonometrijska supstitucija

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$,

(b) $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$,

Rješenje.

(a) U računanju integrala koristimo Eulerovu supstituciju [M2, §1.7.2], pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} &= \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x^2+2x+2} = t - x \\ x = \frac{t^2-2}{2t+2} \\ dx = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}\, dt \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}}{1+t-\frac{t^2-2}{2t+2}}\, dt = \int \frac{\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}}{\frac{2t+2+2t^2+2t-t^2+2}{2(t+1)}}\, dt \\
&= \int \frac{\frac{t^2+2t+2}{t+1}}{t^2+4t+4}\, dt = \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2\,(t+1)}\, dt \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2(t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{(t+2)^2} \\ t^2+2t+2 = A\,(t+2)^2 + B\,(t+2)\,(t+1) + C\,(t+1) \\ A = 1, \quad B = 0, \quad C = -2 \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{dt}{t+1} - 2\int \frac{dt}{(t+2)^2} = \ln|t+1| - 2\int (t+2)^{-2}\, d\,(t+2) \\
&= \ln|t+1| + 2\,(t+2)^{-1} + C \\
&= \ln\left|\sqrt{x^2+2x+2} + x + 1\right| + 2\left(\sqrt{x^2+2x+2} + x + 2\right)^{-1} + C.
\end{aligned}$$

(b) Izraz pod korijenom nadpounjavamo do punog kvadrata, a zatim uvodimo dvije supstitucije

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx &= \int \sqrt{4-(1+x)^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} x+1 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} \\
&= \int \sqrt{4-t^2}\, dt = \left\{ \begin{array}{c} t = 2\sin z \\ dt = 2\cos z dz \end{array} \right\} \\
&= \int 2\cos z 2\cos z dz = 4\int \cos^2 z dz \\
&= 2\int (1+2\cos z)\, dz = 2\left(z + \frac{1}{2}\sin 2z\right) + C \\
&= 2\left(z + \sin z\sqrt{1-\sin^2 z}\right) + C \\
&= 2\arcsin\frac{t}{2} + t\sqrt{1-\frac{t^2}{4}} + C \\
&= 2\arcsin\frac{x+1}{2} + (x+1)\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{4}} + C \\
&= 2\arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + C.
\end{aligned}$$

1.10 Metoda neodređenih koeficijenata

Izračunajte integral $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx$.

Rješenje. Iz formule za metodu neodređenih koeficijenata [M2, §1.7.3], slijedi

$$I = \int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx = (a_1x+a_0)\sqrt{-x^2+4x} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x}}.$$

Deriviranjem po x dobivamo

$$\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}} = a_1\sqrt{-x^2+4x} + (a_1x+a_0)\frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{-x^2+4x}}$$

Pomnožimo li cijeli izraz sa $\sqrt{-x^2+4x}$ dobivamo

$$x^2+2x+3 = a_1 - x^2 + 4x + (a_1x+a_0)(2-x) + \lambda$$

Izjednačavanjem lijeve i desne strane dobivamo

$$\begin{aligned}
1 &= -a_1 - a_1\\
2 &= 4a_1 + 2a_1 - a_0\\
3 &= 2a_0 + \lambda
\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_0 = -5, \lambda = 13.$$

Integral I sada je jednak

$$\begin{aligned}
I &= \left(-\frac{1}{2}x - 5\right)\sqrt{-x^2+4x} + 13\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x}}\\
&= \left(-\frac{1}{2}x - 5\right)\sqrt{-x^2+4x} + 13\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\\
&= \left(-\frac{1}{2}x - 5\right)\sqrt{-x^2+4x} + 13\arcsin\frac{x-2}{2} + C.
\end{aligned}$$

1.11 Binomni integral

Izračunajte integral $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$

Rješenje. Integral rješavamo supstitucijom za binomni integral [M2, §1.7.4]. U ovom je slučaju $\frac{m+1}{n}$ cijeli broj $\left(m = \frac{1}{2}, n = \frac{3}{2}, p = \frac{-1}{2}\right)$, pa koristimo supstituciju $1 - x^{\frac{3}{2}} = t^2$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x}{1 - x\sqrt{x}}}\, dx &= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x\sqrt{x}}}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{-1}{2}} dx \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \frac{m+1}{n} = 1 \in Z \\ 1 - x^{\frac{3}{2}} = t^2 \\ x^{\frac{1}{2}} = \frac{-4}{3} t\, dt \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{-4}{3} t t^{-1}\, dt = \frac{-4}{3} t + C \\
&= \frac{-4}{3} \sqrt{1 - x\sqrt{x}} + C.
\end{aligned}$$

1.12 Integriranje razvojem u red

Riješite integral $\int \sin x^2\, dx$ razvojem u red potencija, koristeći razvoj $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Rješenje. Zadana podintegralna funkcija je $\sin x^2$, pa koristeći zadani razvoj sinusa dobivamo

$$\begin{aligned}
\sin x^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x^2\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} \\
&= x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} + \cdots
\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}
\int \sin x^2\, dx &= \int \left[x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \cdots \right] dx \\
&= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)\,(2n+1)!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)\,(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

1.13 Zadaci za vježbu

Izračunajte integrale:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

5. $\displaystyle\int e^{3\cos x}\sin x\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{5+x^3}}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}\,dx$

10. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$

11. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

12. $\displaystyle\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}\,dx$

14. $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$

15. $\displaystyle\int (x^2+2x+3)e^x\,dx$

16. $\displaystyle\int \ln x\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

19. $\displaystyle\int x^2 \arccos x\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$

21. $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+10\right)^2}$

24. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{x^4+5x^2+4}$

25. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$

26. $\displaystyle\int \frac{4x-3}{5-7x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}\,dx$

29. $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\,(2\cos^2 x-1)}$

32. $\displaystyle\int \sin^{10} x\cos^3 x\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$

34. $\displaystyle\int \sin 3x\cos 5x\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

37. $\displaystyle\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\, dx$

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\,(2 + \cos x - 2\sin x)}$

39. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + \sin x}\, dx$

40. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$

41. $\displaystyle\int \sin^4 3x \cos^2 3x\, dx$

42. $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})}\, dx.$

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

44. $\displaystyle\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}}\, dx.$

45. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(\sqrt{7x - 10 - x^2})^3}.$

46. $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}.$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} + 1}.$

48. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2 - 4x + 3}\, dx.$

49. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}\, dx.$

50. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\, dx.$

51. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} + 1)^{10}}.$

52. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

53. Odredite rekurzivnu formulu za integral $I_n = \int \sin^n x\,dx$. Koristeći se dobivenim rezultatom izračunajte vrijednost integrala $\int \sin^4 x\,dx$.

54. Odredite rekurzivnu formulu za integral $I_n = \int (\ln x)^n\,dx$.

55. Odredite rekurzivnu formulu za integral $I_n = \int x^n e^{ax}\,dx$.

56. Razvijte u red potencija funkciju $\ln(1+x)$ pomoću $\displaystyle\int \frac{1}{1+x}\,dx$.

57. Odredite $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ razvojem podintegralne funkcije u red potencija.

1.14 Rješenja zadataka za vježbu

1. $\dfrac{2}{15}\sqrt{x}\left(-15+25x+3x^2\right)+C$

2. $\dfrac{2^{-x}}{5\ln 2} - 2\dfrac{5^{-x}}{\ln 5} + C$

3. $\dfrac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)}{a} + C$

4. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) + C$

5. $-\dfrac{1}{3}e^{3\cos x} + C$

6. $\dfrac{1}{2}\left(5+x^3\right)^{\frac{2}{3}} + C$

7. $2\sqrt{x} + \dfrac{\ln^2|x|}{2} + C$

8. $-\dfrac{1}{6}\ln|-1+2\sin x| + C$

9. $\ln(\cos x) + \ln(\sin x) + C$

10. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin(2x) + C$

11. $\dfrac{1}{2}(x+\cos x\sin x) + C$

12. $\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{7}(\sin x)^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{11}(\sin x)^{\frac{11}{2}}+C$

13. $e^{\operatorname{arctg} x}+\operatorname{arctg} x+\frac{1}{4}\ln^2\left(1+x^2\right)+C$

14. $e^x\left(2-2x+x^2\right)+C$

15. $e^x\left(3+x^2\right)+C$

16. $-x+x\ln|x|+C$

17. $-\frac{1+2\ln|x|}{4x^2}+C$

18. $-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\left(2+x^2\right)+C$

19. $-\frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}\left(2+x^2\right)+\frac{1}{3}\arccos x+C$

20. $\frac{x}{2a^2\left(a^2+x^2\right)}+\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)}{2a^3}+C$

21. $\frac{1}{2}x\left(\cos\left(\ln|x|\right)+\sin\left(\ln|x|\right)\right)+C$

22. $\operatorname{arctg}(2x+3)+c$

23. $\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+\frac{1}{18}\frac{x+1}{x^2+2x+10}+c$

24. $x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x+c$

25. $\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{2}{9}\ln|x+2|-\frac{1}{3x-3}+c$

26. $-\frac{4}{7}x+\frac{1}{49}\ln\left|x-\frac{5}{7}\right|+c$

27. $3\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+c$

28. $\ln|x|-2\ln|x+1|+\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$

29. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

30. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-3\operatorname{ctg} x+3\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+c$

31. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + c$

32. $\frac{1}{11}\sin^{11}x - \frac{1}{13}\sin^{13}x + c$

33. $-\operatorname{ctg}x + 2\operatorname{tg}x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + c$

34. $\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + c$

35. $-8\operatorname{ctg}2x - \frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x + c$

36. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}} + c$

37. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}}{\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}}\right| + c$

38. $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right| + \frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\right| + c$

39. $\ln|\sin x| - \sin x + c$

40. $\frac{1}{4}\ln|\sin x + \cos x| - \frac{1}{4}\cos x\,(\sin x + \cos x) + c$

41. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\sin 6x - \frac{1}{192}\sin 12x + \frac{1}{576}\sin 18x + c$

42. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + c.$

43. $2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + c.$

44. $-\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} + \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 6(x+1)^{\frac{1}{6}} +$
$3\ln|\sqrt[3]{x+1}+1| - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1} + c.$

45. $\frac{10}{9}\cdot\frac{x-2}{\sqrt{7x-10-x^2}} - \frac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2} + c.$

46. $2\ln|\sqrt{x^2-x+1}-x| - \frac{3}{2}\ln|2\sqrt{x^2-x+1}-2x+1| + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}-2x+1} + c.$

47. $-\frac{2}{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + c$

48. $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{2}\ln|2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 3}| + c.$

49. $(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{6}(g)\sqrt{1 + 2x - x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + c.$

50. $\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2}\ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + c.$

51. $-\frac{1}{2(\sqrt[4]{x} + 1)^8} + \frac{4}{9(\sqrt[4]{x} + 1)^9} + c.$

52. $2(1 + \sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}} + c.$

53. $I_n = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2},\ n \geq 2,$
$I_4 = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + c.$

54. $I_n = x\ln^n x - nI_{n-1}.$

55. $I_n = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}I_{n-1}.$

56. $\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},\ x \in \langle -1, 1].$

57. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2},\ x \in \langle -1, 1].$

2.

ODREĐENI INTEGRAL

2.1 Newton-Leibnitzova formula

Izračunajte integral $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$.

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2} &= \int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+2)\,(x+1)} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \frac{x}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} \\ A=2, B=-1 \end{array} \right\} \\
&= 2\int_0^1 \frac{dx}{x+2} - \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \\
&= 2\ln|x+2|\Big|_0^1 - \ln|x+1|\Big|_0^1 \\
&= 2\,(\ln 3 - \ln 2) - (\ln 2 - \ln 1) = 2\ln\frac{3}{2} - \ln 2 = \ln\frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

2.2 Supstitucija i parcijalna integracija

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(3+2x)^2}$,

(b) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^{e-1} \ln(x+1)\;dx$..

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(3+2x)^2} &= \left\{ \begin{array}{cc} 3+2x=t & \begin{array}{c|c|c} x & -1 & 1 \\ \hline t & 2 & 7 \end{array} \\ 2\,dx = dt & \end{array} \right\} \\
&= \int_1^7 \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t}\Big|_1^7 = -\frac{1}{2\cdot 7} + \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

(b) Koristimo formulu parcijalne integracije [M2, teorem 1.7] , pa slijedi

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x=\cos t \\ dx = -\sin t\,dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \hline t & \frac{\pi}{4} & 0 \end{array} \right\}$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\sin t\,dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\,dt = -\mathrm{tg} t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} + t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

(c) Vrijedi

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx = \left\{ \begin{array}{cc} u=\ln(x+1) & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x+1} & v = x \end{array} \right\}$$

$$= x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}\,dx$$

$$= (e-1)\ln e - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}\,dx$$

$$= e-1-\left(\int_0^{e-1} dx - \int_0^{e-1}\frac{dx}{x+1}\right)$$

$$= e-1-x\Big|_0^{e-1} + \ln|x+1|\Big|_0^{e-1}$$

$$= e-1-(e-1)+\ln e = 1.$$

2.3 Nepravi integral

Izračunajte slijedeće integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$,

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$,

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$.

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}\\
&= \left\{\begin{array}{cc} \sqrt{x^2+1}=t-x & dx=\frac{4t^2-2\left(t^2-1\right)}{4t^2}\,dt \\ x^2+1=(t-x)^2 & dx=\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt \\ x=\frac{t^2-1}{2t} & \end{array}\quad \begin{array}{c|c|c} x & 1 & b \\ \hline t & \sqrt{2}+1 & \sqrt{b^2+1}+b \end{array}\right\}\\
&= \lim_{b\to\infty}\int\limits_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{b^2+1}+b}\frac{\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2-1}{2t}\left(t-\frac{t^2-1}{2t}\right)} = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int\limits_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{b^2+1}+b}\frac{\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2-1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t}}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int\limits_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{b^2+1}+b}\frac{4\,dt}{t^2-1} = 2\lim_{b\to\infty}\int\limits_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{b^2+1}+b}\frac{dt}{t^2-1}\\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{b^2+1}+b}\\
&= \lim_{b\to\infty}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2+1}+b-1}{\sqrt{b^2+1}+b+1}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{2}+1-1}{\sqrt{2}+1+1}\right|\\
&= \lim_{b\to\infty}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1}{b^2}+1}+1-\frac{1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{b^2}+1}+1+\frac{1}{b}}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}\right|\\
&= \ln 1-\ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} = \ln\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).
\end{aligned}
$$

(b) Vrijedi

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5} &= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+5}+\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+4x+5}\\ &= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2+1}+\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{(x+2)^2+1}\\ &= \lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(x+2)\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}(x+2)\Big|_0^b\\ &= \lim_{a\to-\infty}[\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}(a+2)]+\lim_{b\to\infty}[\operatorname{arctg}(b+2)-\operatorname{arctg}2]\\ &= \operatorname{arctg}2+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}2=\pi.\end{aligned}$$

(c) Vrijedi

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3} = \int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3}+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^3} &== \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{0-\epsilon}\frac{dx}{x^3}+\lim_{\delta\to\infty}\int\limits_{0+\delta}^{1}\frac{dx}{x^3}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2x^2}\Big|_{-1}^{0-\epsilon}+\lim_{\delta\to\infty}\frac{-1}{2x^2}\Big|_{0+\delta}^{1}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{2\varepsilon^2}+\frac{1}{2}\right)+\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}=\infty-\infty,\end{aligned}$$

pa integral divergira.

2.4 Površina ravninskog lika

Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama:

(a) $y=x^2, x=-1, x=2$ i osi x,

(b) $x^2+y^2=2$ i $y=x^2$ unutar parabole,

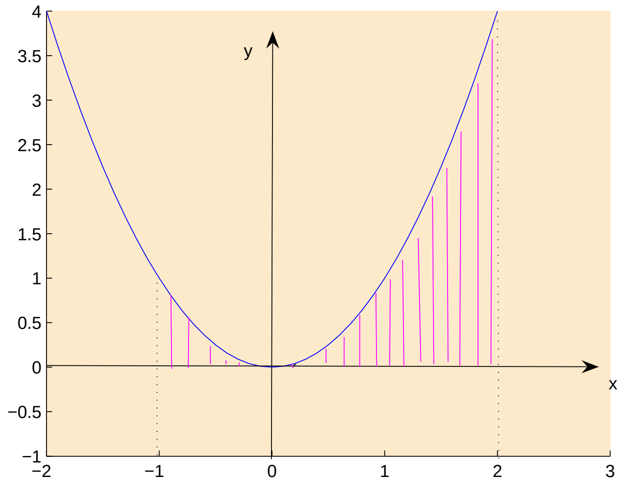
(c) $\begin{cases} x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}, t\in[0,2\pi]$, (astroida),

(d) $r^2=a^2\cos(2\varphi), \varphi\in[0,2\pi]$, (Bernoullijeva lemniskata).

Rješenje.

(a) Prema slici 2.1 vrijedi

$$P = \int\limits_{-1}^{2} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3.$$



Slika 2.1: Površina ravninskog lika (a)

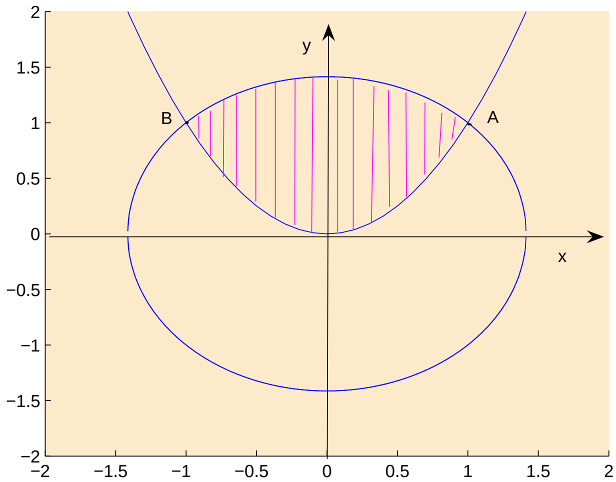
(b) Sjecišta krivulja $x^2 + y^2 = 2$ i $y^2 = x^2$ su točke $A\,(1,1)$ i $B\,(-1,1)$, (slika 2.2), pa vrijedi

$$P = \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt{2-x^2} - x^2\right)\, dx = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}\, dx - \int\limits_{-1}^{1} x^2\, dx.$$

Prvi se integral rješava parcijalnom integracijom [M2, teorem 1.7], pa je

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{2-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(-1 + 2\arcsin\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(c) Na slici 2.3 vidimo da se cijela površina P može računati kao $4P_1$. Za računanje P_1 korist ćemo formulu za površinu ravninskih likova, gdje je krivulja zadana



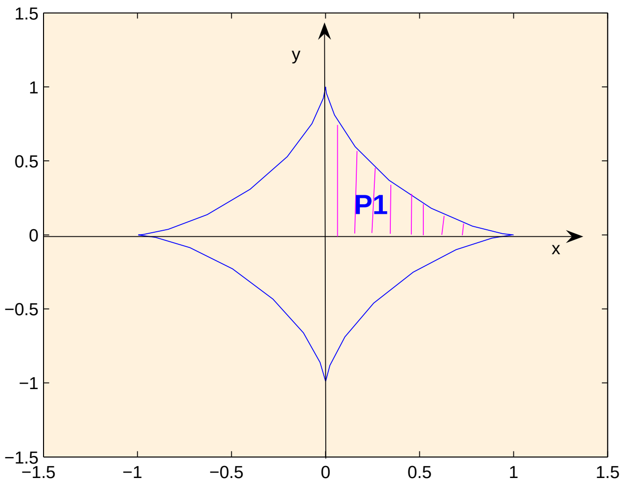
Slika 2.2: Površina ravninskog lika (b)

parametarski [M2, §2.6.1.1].

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \int_{\pi/2}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\,(-\sin t)\ dt \\
&= -3a^2 \int_{\pi/2}^{0} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = 3a^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)^2 \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt \\
&= \frac{3}{8}a^2 \int_0^{\pi/2} \left[\sin^2(2t) - \sin^2(2t)\cos(2t)\right]\ dt \\
&= \frac{3}{16}a^2 \int_0^{\pi/2} [1-\cos(4t)]\ dt - \frac{3}{8}a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2(2t)\,\frac{1}{2}d\,(\sin(2t)) \\
&= \frac{3}{16}a^2 t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{3}{4\cdot 16}a^2\sin(4t)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{3}{16}a^2\frac{\sin^2(2t)}{3}\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{3}{16}a^2\frac{\pi}{2} = \frac{3a^2\pi}{32},
\end{aligned}
$$

pa je

$$
P = 4P_1 = 4\frac{3a^2\pi}{32} = \frac{3a^2\pi}{8}.
$$



Slika 2.3: Astroida

(d) Na slici 2.4 vidimo da se cijela površina P može izračunati kao $4P_1$, gdje je P_1 (koristimo formulu za površinu ravninskih likova, gdje je krivulja zadana u polarnim koordinatama [M2, §2.6.1.2])

$$P_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2\cos(2\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\sin(2\varphi)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{a^2}{2}\frac{-\cos(2\varphi)}{2}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}\left(-\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{a^2}{4},$$

pa je

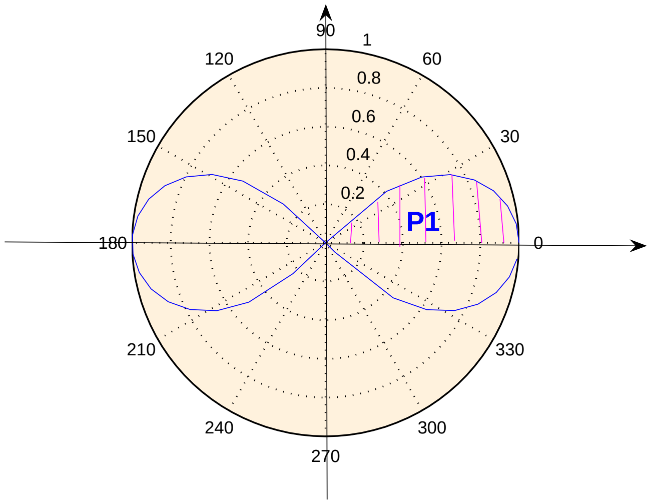
$$P = 4P_1 = 4\frac{a^2}{4} = a^2.$$

2.5 Duljina luka ravninske krivulje

(a) Nađite opseg lika omeđenog krivuljama: $y^3 = x^2$ i $y = \sqrt{2-x}$,

(b) Izračunajte duljinu luka krivulje $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 - t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$, $t \in [0,3]$.

Rješenje.



Slika 2.4: Bernoullijeva lemniskata

(a) Krivulje $y^3 = x^2$ i $y = \sqrt{2-x}$ se sijeku u točkama $A\,(1,1)$ i $B\,(-1,1)$. Ukupnu duljinu luka računat ćemo kao

$$l = 2\,(l_1 + l_2)\,,$$

(vidi sliku 2.5), koristeći formulu za duljinu luka krivulje [M2, §2.6.2.1], pa je

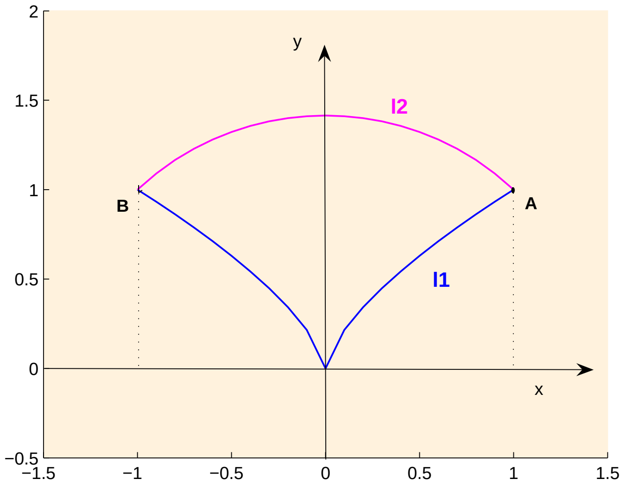
$$l_1 = \int\limits_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}y}dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (4+9y)^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (4+9y)^{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{9}d\,(4+9y)$$
$$= \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}\,(4+9y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)$$

i

$$l_2 = \int\limits_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2}}\,dx = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} =$$
$$= \sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4},$$

iz čega slijedi

$$l = 2\left[\frac{1}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right] \approx 5.1.$$



Slika 2.5: Duljina luka (a)

(b) Za $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 - t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$ je $\dot{x}(t) = t^2 - 1$ i $\dot{y}(t) = 2t$, pa iz formule za duljinu luka krivulje zadane u polarnim koordinatama [M2, §2.6.2.2] slijedi

$$l = \int_0^3 \sqrt{(t^2-1)^2 + 4t^2}\,dt = \int_0^3 \sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2}\,dt = \int_0^3 \sqrt{(t^2+1)^2}\,dt$$

$$= \int_0^3 (t^2+1)\,dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Big|_0^3 = 12.$$

2.6 Volumen rotacionog tijela

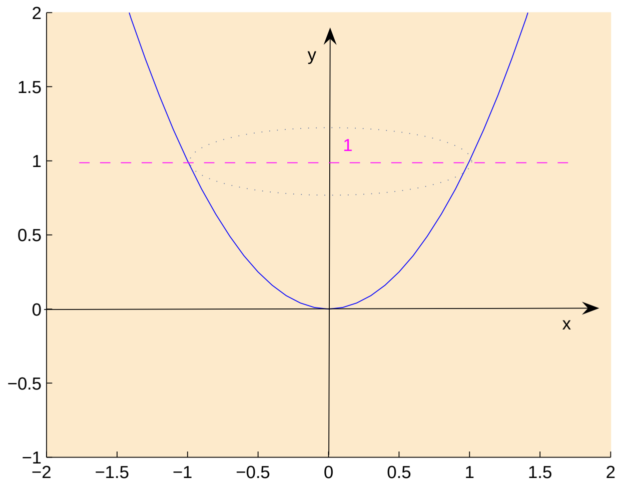
(a) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog parabolom: $y = x^2$, osi y i pravcem $y = 1$ oko osi y.

(b) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom astroide $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ oko osi y.

Rješenje.

(a) Koristeći formulu za volumen rotacionog tijela koje nastaje rotacijom krivulje [M2, §2.6.3], za krivulju $x = \sqrt{y}$ u granicama od 0 do 1 koja rotira oko oko osi y, vidi sliku 2.6, dobivamo

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2\, dy = \pi \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$



Slika 2.6: Rotacija parabole $y = x^2$

(b) Koristeći formulu za volumen rotacionog tijela koje nastaje rotacijom krivulje zadane parametarski [M2, §2.6.3], za krivulju $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ (astroida), oko osi y, i koristeći simetriju astroide dobivamo

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} a^2\cos^6 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t\, dt = \left\{ \begin{array}{c} u = \sin t \\ du = \cos t\, dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline u & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

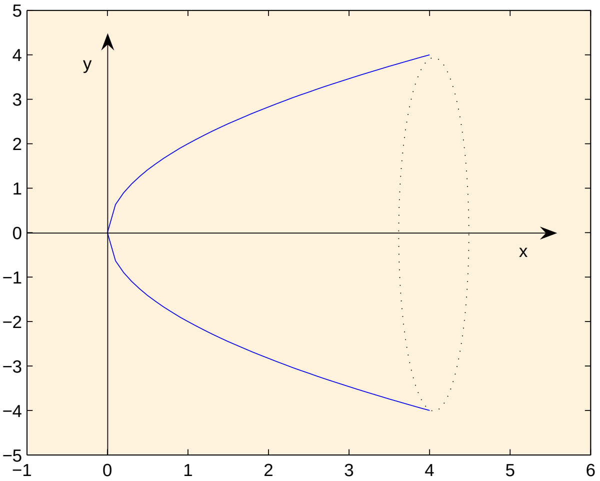
$$= 6\pi a^3 \int_0^1 \left(1-t^2\right)^3 t^2\, dt = 6\pi a^3 \int_0^1 \left(t^2 - 3t^4 + 3t^6 - t^8\right)\, dt$$

$$= 6\pi a^3 \int_0^1 \left(t^2 - 3t^4 + 3t^6 - t^8\right)\, dt = 6\pi a^3 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^5}{5} + \frac{3t^7}{7} - \frac{t^9}{9}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 6\pi a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9}\right) = 6\pi a^3 \frac{16}{315} = \frac{32\pi a^3}{105}.$$

2.7 Oplošje rotacionog tijela

Izračunajte oplošje tijela koja nastaje rotacijom luka parabole $y^2 = 4x$, oko osi x, od $x_1 = 0$ do $x_2 = 4$.
Rješenje. Koristeći formulu za oplošje rotacionog tijela [M2, §2.6.4] i prema slici 2.7 dobivamo



Slika 2.7: Rotacija parabole $y^2 = 4x$

$$P = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_0^4 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx$$

$$= 4\pi \int_0^4 \sqrt{x}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}\, dx = 4\pi \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8\pi}{3}\left(\sqrt{125} - 1\right).$$

2.8 Trapezna formula

Primjenom Trapezne formule [M2, §2.7.2] izračunajte integral $I = \int\limits_1^2 \ln x\, dx$, podijelom na 5 intervala.
Rješenje.

$$n = 5 \Rightarrow \Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{5} = 0.2 = h$$

pa je

$$x_i = a + ih, \quad h = 0.2, \quad i = 0, 1, \ldots n.$$

iz čega slijedi

$$x_0 = 1,\; x_1 = 1.2,\; x_2 = 1.4,\; x_3 = 1.6,\; x_4 = 1.8,\; x_5 = 2.$$

Integral je sada

$$\begin{aligned} I = \int_1^2 \ln x\, dx &\approx 0.2 \left[\frac{f(x_0) + f(x_5)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) \right] \\ &= 0.2 \left[\frac{0 + 0.69314}{2} + 0.18232 + 0.33647 + 0.47 + 0.58778 \right] = 0.38463. \end{aligned}$$

2.9 Simpsonova formula

Primjenom Simpsonove formule [M2, §2.7.3] za $n = 2$ izvedite približnu formulu za duljinu luka elipse $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rješenje.

$$I_s = \frac{b-a}{6n} \left\{ f(x_0) + f(x_{2n}) + 4\left[f(x_1) + \ldots + f(x_{2n-1})\right] + 2\left[f(x_2) + f(x_{2n})\right] \right\}.$$

U našem je slučaju

$$n = 2 \Rightarrow x_0 = 0,\; x_1 = \frac{\pi}{4},\; x_2 = \frac{\pi}{2}.$$

pa je

$$f(x_0) = b, \quad f(x_1) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad f(x_2) = a.$$

iz čega slijedi

$$l = \frac{\pi}{24} \left(b + a + 4\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right).$$

2.10 Zadaci za vježbu

Izračunajte integrale:

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

3. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

4. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

5. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\sin(\pi x)\,dx$

   Izračunajte neprave integrale (ili ustanovite njihovu divergenciju):

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^a e^x\,dx$

10. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

12. Izračunajte površinu lika omeđenog parabolom $y = 2x - x^2$ i pravcem $y = -x$.

13. Izračunajte površinu lika omeđenog parabolom $y = \frac{3}{4}x^2$ i pravcem $x + y = 5$.

14. Izračunajte površinu lika omeđenog kardioidom $r = a(1 + \cos\varphi)$.

15. Izračunajte duljinu luka krivulje $y^2 = (x-1)^3$ između točaka $A(2,-1)$, $B(5,-8)$.

16. Izračunajte duljinu luka krivulje $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ od $t = 0$ do $t = \ln \pi$.

17. Izračunajte duljinu luka krivulje $r = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$ od $\varphi = 0$ do $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

18. Izračunajte duljinu luka kardioide $r = a(1 + \cos \varphi)$.

19. Izračunajte volumen tijela koje nastaje kada luk parabole $y^2 = 2x$, $x \in [0, 5]$, rotira oko osi y.

20. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom jednog svoda cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ oko osi x.

21. Izračunajte oplošje tijela koja nastaje rotacijom oko osi x jednog poluvala sinusoide $y = \sin x$.

22. Koristeći trapeznu formulu, $n = 4$, izračunajte vrijednost integrala $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx$, gdje je
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

23. Izračunajte integral $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{6x - 5}dx$ primjenom Simpsonove formule ($n = 8$).

2.11 Rješenja zadataka za vježbu

1. $\dfrac{4}{3}$

2. $\dfrac{\pi}{4}$

3. $2\sqrt{2} - 2$

4. $4 - 2 \ln 3$

5. $4 - \pi$

6. $\dfrac{\pi}{2} - 1$

7. $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$

8. $\dfrac{\pi}{\pi^2 + 1} \cdot \dfrac{1 + e}{e}$

9. e^a

10. Integral divergira.

11. $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$

12. $P = \dfrac{9}{2}$.

13. $P = \dfrac{13}{2}$.

14. $P = \dfrac{3a^2\pi}{2}$.

15. $l \approx 7.63$.

16. $l = \sqrt{2}(\pi - 1)$.

17. $l = \dfrac{a}{8}(2\pi + 3\sqrt{3})$.

18. $l = 8a$.

19. $V = 10\sqrt{10}\pi$.

20. $V = 5\pi^2 a^3$.

21. $P = 2\pi\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)\right]$.

22. $I \approx 1.83$.

23. $I \approx 37.9655$.

3.

FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI

4.

VIŠESTRUKI INTEGRALI

5.

DIFERENCIJALNE JEDNADžBE

5.1 Uvod

(a) Provjerite da li je $\varphi(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$ rješenje diferencijalne jednadžbe $xy + \sqrt{1-x^2} \cdot y' = 0$.

(b) Pokažite da je svaki član familije krivulja $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = xy$, te odredite ono rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 2$.

(c) Odredite diferencijalnu jednadžbu čije je rješenje familija krivulja $y = Cx + C^2$.

(d) Odredite krivulju iz familije krivulja $y = C_1e^x - 2C_2e^{-2x}$ za koju je $y(0) = 1$ i $y'(0) = -2$.

Rješenje.

(a) Provjeru vršimo uvrštavanjem $\varphi(x)$ u zadanu diferencijalnu jednadžbu. Prvo računamo derivaciju od $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = e^{\sqrt{1-x^2}} \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$\begin{aligned} x \cdot e^{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\frac{-xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} &= 0 \\ x \cdot e^{\sqrt{1-x^2}} - xe^{\sqrt{1-x^2}} &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, $\varphi(x)$ jest rješenje diferencijalne jednad žbe $xy + \sqrt{1-x^2} \cdot y' = 0$.

(b) Uvrštavanjem $Ce^{\frac{x^2}{2}}$ u zadanu diferencijalnu jednadžbu $y' = xy$, dobivamo

$$Ce^{\frac{x^2}{2}}x = xCe^{\frac{x^2}{2}},$$

pa $Ce^{\frac{x^2}{2}}$ jest rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = xy$. Preostaje još pronaći ono rješ enje koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 2$.

$$\begin{aligned} y(1) = 2 &\Rightarrow 2 = Ce^{\frac{1}{2}} \\ C &= 2e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Traženo partikularno rješenje dobije se uvrštavanjem dobivene konstante C u opće rješenje.

$$\begin{aligned} y &= Ce^{\frac{x^2}{2}}, C = 2e^{-\frac{1}{2}} \\ y &= 2e^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{x^2}{2}} = 2e^{\frac{1}{2}(x^2-1)}. \end{aligned}$$

(c) Zadanu familiju krivulja prvo deriviramo s ciljem eliminiranja konstante C.

$$\begin{aligned} y &= Cx + C^2 \\ y' &= C, \end{aligned}$$

pa uvrštavanjem u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$y = xy' + \left(y'\right)^2.$$

(d) Vrijedi

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} \\ y' &= C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\Rightarrow 1 = C_1 e^0 - 2C_2 e^{-2\cdot 0} \\ y'(0) = -2 &\Rightarrow -2 = C_1 e^0 + 4C_2 e^{-2\cdot 0}. \end{aligned}$$

Rješenje sustava

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 - 2C_2 \\ -2 &= C_1 + 4C_2. \end{aligned}$$

je $C_1 = 0$ i $C_2 = -\dfrac{1}{2}$, pa se tra žena krivulja dobije uvrštavanjem tih konstanti u zadanu familiju krivulja

$$y = -2\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x} \Rightarrow y = e^{-2x}.$$

5.2 Populacijska jednadžba

Kultura bakterija u početku ima 1000 bakterija. Stopa rasta proporcionalna je broju bakterija. Nakon 2 sata populacija je narasla na 9000 jedinki. Odredite izraz koji daje broj bakterija nakon t sati. Odredite broj bakterija nakon 10 sati.

Rješenje.

Zadani uvjeti su slijedeći:

$$\begin{aligned} P(0) &= 1000 \\ P(2) &= 9000 \end{aligned}$$

želimo izračunati $P(t)$, a zatim i $P(10)$ koristeći formulu za populacijsku jednadžbu [M2, §5.1].

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

integriranjem dobivamo

$$P(t) = Ae^{kt} \tag{5.1}$$

Iz uvjeta za početnu populaciju slijedi

$$P(0) = A = 1000 \Rightarrow P(t) = 1000 \cdot e^{kt}.$$

Iz veličine populacije nakon dva sata slijedi

$$9000 = 1000 \cdot e^{2k},$$

pa je

$$k = \frac{1}{2} \ln 9 = \ln 3.$$

Uvrštavanjem u (5.1) dobivamo

$$P(t) = 1000 \cdot e^{t \ln 3}$$

Nakon 10 sati broj bakterija bit će

$$P(10) = 1000 \cdot e^{10 \ln 3}$$
$$P(10) = 59049000.$$

5.3 Logistička jednadžba

Vijesti se šire gradom tako da je brzina širenja vijest proporcionalna produktu dijela stanovništva y koji su čuli vijest i dijela stanovništva koji nisu čuli vijest. Gradić ima 1000 stanovnika. U 8 sati, vijest je čulo 80 ljudi, a do podne ju je čulo pola grada.

(a) Napišite diferencijalnu jednadžbu koju y zadovoljava i rije šite je.

(b) U kojem će trenutku 90% stanovništva znati vijest?

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$y' = ky(1000 - y),$$

pa je

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y\,(1000-y)} &= k\,dt \\ \frac{1}{1000}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{1000-y}\right)dy &= k\,dt. \end{aligned}$$

Integriranjem dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{1000}\ln\frac{y}{1000-y} &= kt+\ln C \\ \ln\frac{y}{1000-y} &= 1000kt+1000\ln C \\ \frac{y}{1000-y} &= Ae^{1000kt}. \end{aligned}$$

(b) Zadano je

$$\begin{aligned} y\,(0) &= 80 \\ y\,(4) &= 500 \\ y\,(t_0) &= 900. \end{aligned}$$

želimo izračunati t_0. Iz rješenja pod (a) slijedi

$$\frac{80}{1000-80} = A \Rightarrow A = 0.08696$$

i

$$\frac{500}{1000-500} = 0.08696e^{400k} \Rightarrow k = 0.00061,$$

pa je

$$\frac{y}{1000-y} = 0.08696e^{0.61t_0}.$$

Ako uvrstimo $y\,(t_0) = 900$ dobivamo

$$\frac{900}{1000-900} = 0.08696e^{0.61t_0}$$

iz čega je

$$t_0 = \frac{\ln\frac{9}{0.08696}}{0.61} = 7.6.$$

Dakle u 8 sati + 7.6, odnosno u 15 sati i 36 minuta 900 ljudi će znati vijest.

5.4 Jednadžbe sa separiranim varijablama

(a) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $x + xy + y'(y + xy) = 0$.

(b) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $\left(1 + x^2\right) y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$, te partikularno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 1$.

Rješenje.

(a) Uvrštavanjem $y' = \dfrac{dy}{dx}$ u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\frac{x}{1+x}\,dx = -\frac{y}{1+y}dy$$

Ovo je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli [M2, §5.2] , pa je rješavamo integriranjem:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{1+x}\,dx &= -\int \frac{y}{1+y}dy \\
\int \frac{x+1-1}{1+x}\,dx &= -\int \frac{y+1-1}{1+y}dy \\
\int dx - \int \frac{1}{1+x}\,dx &= -\int dy + \int \frac{1}{1+y}dy \\
x - \ln|x+1| &= -y + \ln|y+1| + C
\end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
x + y - (\ln|x+1| + \ln|y+1|) + \ln C &= 0 \\
x + y - \ln C\,(x+1)\,(y+1) &= 0.
\end{aligned}$$

(b) Uvrštavanjem $y' = \dfrac{dy}{dx}$ u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned}
\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} &= xy - y\sqrt{1+x^2}\\
\left(1+x^2\right)dy &= y\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)dx\\
\frac{dy}{y} &= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx\\
\int\frac{dy}{y} &= \int\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx\\
\int\frac{dy}{y} &= \int\frac{x}{1+x^2}\,dx - \int\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx\\
\ln|y| &= \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2} - \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\\
\ln|y| &= \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \ln C
\end{aligned}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\ln|y| - \ln\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \ln C &= 0\\
\ln\frac{Cy\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{1+x^2}} &= 0\\
\frac{Cy\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{1+x^2}} &= e^0\\
Cy\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) &= \sqrt{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Za početni uvjet $y(0) = 1$ dobivamo

$$C\left(0+\sqrt{0^2+1}\right) = \sqrt{1+0^2},$$

iz čega slijedi $C = 1$, odnosno partikularno rješenje za ovaj početni uvjet je

$$y\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \sqrt{1+x^2}.$$

5.5 Homogene diferencijalne jednadžbe

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi

(a) $yy' = y - x$.

(b) $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$.

Rješenje.

(a) Uvrštavanjem $y' = \dfrac{dy}{dx}$ u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$ydy = (y - x)\ dx,$$

odnosno

$$(y - x)\ dx - ydy = 0 \tag{5.2}$$

Ovo je homogena diferencijalna jednadžba 1. stupnja homogenosti, pa je rješavamo supstitucijom:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= z \\ y &= xz \\ y' &= z + xz' \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (5.2) dobivamo

$$\begin{aligned} (xz - x) - xz\left(z + xz'\right) &= 0 / : x \\ z - 1 &= z\left(z + xz'\right) \\ z - 1 - z^2 &= xz' \cdot z \\ xz\frac{dz}{dx} &= z - 1 - z^2 \\ \frac{zdz}{z - 1 - z^2} &= \frac{dx}{x} \\ \frac{zdz}{z^2 - z + 1} &= -\frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Ovo je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli, pa vrijedi

$$\begin{aligned} \int \frac{zdz}{z^2 - z + 1} &= -\int \frac{dx}{x} \\ \int \frac{\frac{1}{2}d\left(z^2 - z + 1\right) + \frac{1}{2}}{z^2 - z + 1} &= -\ln|x| + C \\ \frac{1}{2}\int \frac{d\left(z^2 - z + 1\right)}{z^2 - z + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2 - z + 1} &= -\ln|x| + C \\ \frac{1}{2}\ln\left|z^2 - z + 1\right| + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{z - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} &= -\ln|x| + C \\ \ln\sqrt{z^2 - z + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2z - 1}{\sqrt{3}} &= -\ln|x| + C. \end{aligned}$$

Vraćanjem u susptituciju $\dfrac{y}{x} = z$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
\ln \sqrt{\frac{y}{x}^2 - \frac{y}{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\frac{y}{x} - 1}{\sqrt{3}} &= -\ln|x| + C \\
\ln \sqrt{y^2 - xy + x^2} - \ln|x| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y - x}{x\sqrt{3}} &= -\ln|x| + C \\
\ln \sqrt{y^2 - xy + x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y - x}{x\sqrt{3}} &= C \\
\ln C \sqrt{y^2 - xy + x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y - x}{x\sqrt{3}} &= 0.
\end{aligned}
$$

(b) Ovo je homogena diferencijalna jednadžba stupnja homogenosti 0, pa je rješavamo supstitucijom:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{y} &= z \\
x &= yz \\
\frac{dx}{dy} &= x' = z + yz'
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$
\begin{aligned}
(1 + e^z)\left(z'y + z\right) + e^z (1 - z) &= 0 \\
z'y + z + yz'e^z + ze^z + e^z - ze^z &= 0 \\
z'y (1 + e^z) &= -z - e^z \\
y (1 + e^z) \frac{dz}{dy} &= -z - e^z \\
y (1 + e^z)\, dz &= (-z - e^z)\, dy \\
-\frac{1 + e^z}{e^z + z} dz &= \frac{dy}{y}.
\end{aligned}
$$

Ovo je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli, pa vrijedi

$$
\begin{aligned}
-\int \frac{d(e^z + z)}{e^z + z} &= \int \frac{dy}{y} \\
-\ln|e^z + z| &= \ln|y| + C \\
\frac{1}{|e^z + z|} &= Cy \\
e^z + z &= \frac{1}{Cy}.
\end{aligned}
$$

Vraćanjem u susptituciju $\frac{x}{y} = z$ dobivamo

$$e^{\frac{x}{y}} + \frac{x}{y} = \frac{1}{Cy}.$$

5.6 Diferencijalne jednadžbe koje se svode na homogene

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi

(a) $(3y - 7x + 7)\, dx - (3x - 7y - 3)\, dy = 0$,

(b) $y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$.

Rješenje.

(a) Zadanu diferencijalnu jednadžbu možemo pisati kao

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-7x + 3y + 7}{3x - 7y - 3}. \tag{5.3}$$

Tražimo sjecište pravaca:

$$\begin{aligned} -7\alpha + 3\beta + 7 &= 0 \\ 3\alpha - 7\beta - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobije se $\alpha = 1, \beta = 0$, pa zadanu diferencijalnu jednadžbu rješavamo supstitucijom

$$\begin{aligned} x &= X + 1 \\ y &= Y. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (5.3) dobivamo

$$\frac{dY}{dx} = \frac{-7X + 3Y - 7 + 7}{3X - 7Y + 3 - 3}$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{-7X + 3Y}{3X - 7Y}. \tag{5.4}$$

Ovo je homogena diferencijalna jednadžba, pa je rješavamo supstitucijom:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{X} &= z \\ Y &= Xz \\ Y' &= z + Xz' \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (5.4) dobivamo

$$\begin{aligned}
z'X + z &= \frac{-7+3z}{3-7z} \\
\frac{dz}{dX}X &= \frac{-7+3z-3z+7z^2}{3-7z} \\
\frac{-7z+3}{7\left(z^2-1\right)}dz &= \frac{dX}{X}.
\end{aligned}$$

Ovo je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli, pa je rješ avamo integriranjem

$$\begin{aligned}
\int \frac{-7z+3}{7\left(z^2-1\right)}dz &= \int \frac{dX}{X} \\
-\int \frac{z}{z^2-1}dz + \frac{3}{7}\int \frac{dz}{z^2-1} &= \int \frac{dX}{X} \\
-\frac{1}{2}\ln\left(z^2-1\right) + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{z-1}{z+1} &= \ln CX.
\end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
CX &= \left[\left(z^2-1\right)^{-7}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3\right]^{\frac{1}{14}} \\
CX &= \left[(z-1)^{-4}(z+1)^{-10}\right]^{\frac{1}{14}} \\
CX &= \left[(z-1)^{-2}(z+1)^{-5}\right]^{\frac{1}{7}}
\end{aligned}$$

Vraćanjem u susptituciju $z = \frac{Y}{X} = \frac{y}{x-1}$ dobivamo

$$C(x-1) = \left[\left(\frac{y}{x-1}-1\right)^{-2}\left(\frac{y}{x-1}+1\right)^{-5}\right]^{\frac{1}{7}},$$

odnosno

$$(y-x+1)^2(y+x-1)^5 = C.$$

(b) Pravci

$$\begin{aligned}
2x+y-1 &= 0 \\
4x+2y+5 &= 0
\end{aligned}$$

su paralelni $\left(\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=2\right)$ pa koristimo supstituciju

$$\begin{aligned} z &= 2x+y \\ z' &= 2+y' \\ y' &= z'-2. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} z'-2 &= \frac{z-1}{2z+5} \\ z' &= \frac{z-1+4z+10}{2z+5} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{5z+9}{2z+5} \\ \frac{2z+5}{5z+9}dz &= dx. \end{aligned}$$

Ovo je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli, pa vrijedi

$$\begin{aligned} \int \frac{2z+5}{5z+9}dz &= \int dx \\ \frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\ln(5z+9) &= x+C \end{aligned}$$

Vraćanjem u susptituciju $z=2x+y$ dobivamo

$$\frac{2}{5}(2x+y)+\frac{7}{25}\ln(10x+5y+9)=x+C.$$

5.7 Egzaktne diferencijalne jednadžbe i integrirajući faktor

(a) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'=-\dfrac{\sin y}{x\cos y}$.

(b) Riješite egzaktnu diferencijalnu jednadžbu $\left(2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3}\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$, ako je $\lambda=\lambda(x)$.

(c) Riješite egzaktnu diferencijalnu jednadžbu $y(1+xy)\,dx-xdy=0$, ako je $\lambda=\lambda(y)$.

Rješenje.

(a) Zadanu diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\sin y\,dx+x\cos y dy=0.$$

Ovo je egzaktna diferencijalna jednadžba [M2, §5.7] jer vrijedi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Rješenje zadane diferencijalne jednadžbe dobije se rješavanjem integrala

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\, dy = C$$

Za početnu točku (x_0, y_0) uzmimo npr. točku $(0,0)$, pa vrijedi

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin y\, dx + \int_0^y 0 \cdot \cos y dy &= C \\ x \sin y \Big|_0^x + 0 &= C \\ x \sin y &= C, \end{aligned}$$

i to je rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

(b) Kako je $\lambda = \lambda(x)$ računamo ga po formuli za inetgrirajući faktor [M2, §5.7], pa je

$$\lambda(x) = \pm e^{\int \frac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}} = \pm e^{\int dx} = \pm e^x.$$

Rješenje dobivamo inetgriranjem

$$\int_{x_0}^{x} \left(2xy_0 + x^2 y_0 + \frac{y_0^3}{3}\right) e^x\, dx + \int_{y_0}^{y} \left(x^2+y^2\right) e^x dy = C$$

za npr. početnu točku $(0,0)$ je

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0 + \frac{0^3}{3}\right) e^x\, dx + \int_0^y \left(x^2+y^2\right) e^x dy &= C \\ 0 + x^2 e^x \int_0^y dy + e^x \int_0^y y^2 dy &= C \\ x^2 e^x y \Big|_0^y + e^x \frac{y^3}{3}\Big|_0^y &= C \\ x^2 e^x y + e^x \frac{y^3}{3} &= C \\ e^x \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right) &= C \end{aligned}$$

(c) Kako je $\lambda = \lambda(y)$ rač unamo ga po formuli za inetgrirajući faktor [M2, §5.7], pa je

$$\lambda(x) = \pm e^{\int \frac{1+2xy+1}{-y(1+xy)}} = \pm e^{-\int \frac{2}{y}\,dx} = \pm e^{-2\ln|y|} = \pm \frac{1}{y^2}$$

i rješenje dobivamo integriranjem

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{1+xy}{y}\,dx - \int\limits_{y_0}^{y} \frac{x_0}{y^2} dy = C$$

za npr. početnu točku $(0,1)$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{0}^{x} \frac{1+xy}{y}\,dx - \int\limits_{1}^{y} \frac{0}{y^2} dy &= C \\
\left.\frac{x}{y}\right|_0^x + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x &= C \\
\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} &= C.
\end{aligned}$$

5.8 Ortogonalne trajektorije

Odredite ortogonalne trajektorije familije elipsa $x^2 + y^2 = a^2$.

Rješenje.

Derivirajnem dobivamo

$$\begin{aligned}
2x + 4yy' &= 0 \\
x + 2yy' &= 0
\end{aligned}$$

Diferencijalna jednadžba ortogonalnih trajektorija zadane familije elipsa dobije se uvrštavanjem $-\dfrac{1}{y'}$ umjesto y'.

$$\begin{aligned}
x + 2y\left(-\frac{1}{y'}\right) &= 0 \\
x &= \frac{2y}{y'} \\
y' &= \frac{2y}{x}
\end{aligned}$$

Ovo je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli, pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{2y}{x} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{2\,dx}{x} \\
\ln y &= 2\ln x + C \\
y &= Cx^2
\end{aligned}$$

Dakle, rješenje je familija parabola $y = Cx^2$.

5.9 Singularna rješenja

Odredite singularna rješenja diferencijalnih jednadžbi

(a) $2y\left(y' + 2\right) - x\left(y'\right)^2 = 0$.

(b) $\left(y'\right)^2 (2 - 3y)^2 = 4\,(1 - y)$.

Rješenje.

(a) Deriviranjem zadane diferencijalne jednadžbe po y' dobivamo

$$2y - 2xy' = 0.$$

Da bi dobili potencijalna singularna rješenja zadane diferencijalne jednadžbe rješavamo sustav:

$$\begin{aligned}
2y\left(y' + 2\right) - x\left(y'\right)^2 &= 0 \\
2y - 2xy' &= 0.
\end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe slijedi

$$y' = \frac{y}{x},$$

pa uvrštavanjem u prvu dobivamo

$$\begin{aligned}
2y\left(\frac{y}{x} + 2\right) - x\left(\frac{y}{x}\right)^2 &= 0 \\
\frac{2y^2}{x} + 4y - \frac{y^2}{x} &= 0 \\
\frac{y^2}{x} + 4y &= 0 \\
y^2 + 4xy &= 0.
\end{aligned}$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$y_1 = 0, y_2 = -4x$$

Da bi to bila singularna rješenja zadane diferencijalne jednadžbe nužno je i dovoljno je da je zadovoljavaju, pa ćemo to i provjeriti:
Za $y_1 = 0$ je

$$\begin{aligned} 2y\left(y'+2\right) - x\left(y'\right)^2 &= 0 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

pa $y_1 = 0$ jest singularno rješenje.
Za $y_2 = -4x$ je

$$\begin{aligned} 2y\left(y'+2\right) - x\left(y'\right)^2 &= 0 \\ -8x\left(-4+2\right) - 16x &= 0 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

pa je i $y_2 = -4x$ singularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

(b) Deriviranjem zadane diferencijalne jednadžbe po y' dobivamo

$$2y\left(2-3y\right)^2 = 0.$$

Rješavamo sustav:

$$\begin{aligned} \left(y'\right)^2\left(2-3y\right)^2 &= 4\left(1-y\right) \\ 2y'\left(2-3y\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe slijedi

$$y' = \frac{2\sqrt{1-y}}{2-3y},$$

pa uvrštavanjem u drugu dobivamo

$$\begin{aligned} 2\frac{2\sqrt{1-y}}{2-3y}\left(2-3y\right)^2 &= 0 \\ \sqrt{1-y}\left(2-3y\right) &= 0 \end{aligned}$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$y_1 = 1, y_2 = \frac{2}{3}.$$

Provjerimo da li ova rješenja zadovoljavaju početnu diferencijalnu jednadžbu.
Za $y_1 = 1$ je

$$\begin{aligned} \left(y'\right)^2\left(2-3y\right)^2 &= 4\left(1-y\right) \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

pa $y_1 = 1$ jest singularno rješenje.
Za $y_2 = \frac{2}{3}$ je

$$
\begin{aligned}
\left(y'\right)^2 (2-3y)^2 &= 4(1-y) \\
(0)^2 \left(2 - 3\frac{2}{3}\right)^2 &= 4\left(1 - \frac{2}{3}\right) \\
0 &= \frac{4}{3},
\end{aligned}
$$

pa $y_2 = \frac{2}{3}$ nije singularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

5.10 Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi:

(a) $y' \cos x - y \sin x = \sin(2x)$.

(b) $y' = \dfrac{1}{x \cos y + a \sin(2y)}, a \neq 0$.

(c) $y' - y = e^x$.

(d) $\left(x^2 + 1\right) y' + 4xy = 3$.

Napomena: Zadatke pod (a) i (b) rješavat ćemo primjenom formule za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe [M2, §5.8], a zadatke pod (c) i (d) metodom varijacije konstanti.

Rješenje.

(a) Dijeljenjem zadane diferencijalne jednadžbe sa $\cos x$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
y' - y\mathrm{tg}x &= \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} \\
y' - y\mathrm{tg}x &= 2 \sin x
\end{aligned}
$$

U formulu za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe [M2, §5.8] uvrštavamo

$$p(x) = -\mathrm{tg}x, q(x) = 2 \sin x$$

i dobivamo

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-\int(-\mathrm{tg}x)\,dx}\left[\int 2\sin x e^{\int(-\mathrm{tg}x)\,dx}\,dx + C\right]\\
y &= e^{\int \mathrm{tg}x\,dx}\left[\int 2\sin x e^{-\int \mathrm{tg}x\,dx}\,dx + C\right]\\
y &= e^{-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}}\left[\int 2\sin x e^{\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}}\,dx + C\right]\\
y &= e^{\ln\frac{1}{|\cos x|}}\left[\int 2\sin x e^{\ln|\cos x|}\,dx + C\right]\\
y &= \frac{1}{|\cos x|}\left[\int 2\sin x\,|\cos x|\;dx + C\right]\\
y &= \frac{1}{|\cos x|}\left[\mathrm{sgn}\,(\cos x)\int 2\sin x\cos x\,dx + C\right]\\
y &= \frac{1}{|\cos x|}\left[\mathrm{sgn}\,(\cos x)\int \sin 2x\,dx + C\right]\\
y &= \frac{1}{|\cos x|}\left[\mathrm{sgn}\,(\cos x)\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x + C\right]\\
y &= -\frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\cos x} + \frac{C}{\cos x}.
\end{aligned}
$$

(b) Neka je $x = x\,(y)$. Tada je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'},$$

pa zadanu diferencijlanu jednadžbu možemo pisati kao

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x'} &= \frac{1}{x\cos y + a\sin(2y)}\\
x' &= x\cos y + a\sin(2y)\\
x' - x\cos y &= a\sin(2y)\,.
\end{aligned}
$$

U formulu za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe [M2, §5.8] uvrštavamo

$$p\,(y) = -\cos y, q\,(y) = a\sin(2y)$$

i dobivamo

$$
\begin{aligned}
x &= e^{-\int -\cos y dy}\left[a\int \sin(2y)\, e^{-\int \cos y dy} dy + C\right] \\
x &= e^{\sin y}\left[a\int \sin(2y)\, e^{-\sin y} dy + C\right] \\
x &= e^{\sin y}\left[2a\int \sin y \cos y e^{-\sin y} dy + C\right] \\
x &= e^{\sin y}\left[2a\int \sin y \cos y e^{-\sin y} dy + C\right]. \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

Označimo sa I integral $\int \sin y \cos y e^{-\sin y} dy$ i riješimo ga:

$$
\begin{aligned}
I = \int \sin y \cos y e^{-\sin y} dy &= \left\{ \begin{array}{c} \sin y = t \\ \cos y dy = dt \end{array} \right\} = \int t e^{-t}\, dt \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} u = t & dv = e^{-t}\, dt \\ du = dt & v = -e^{-t} \end{array} \right\} = -te^{-t} + \int e^{-t}\, dt \\
&= -te^{-t} - e^{-t} = -(t+1)\, e^{-t} = -(\sin y + 1)\, e^{-\sin y}.
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem dobivenog rješenja u (5.5) slijedi

$$
\begin{aligned}
x &= e^{\sin y}\left[-2a(\sin y + 1)\, e^{-\sin y} + C\right] \\
x &= Ce^{\sin y} - 2a(\sin y + 1).
\end{aligned}
$$

(c) Ovu linearnu diferencijalnu jednadžbu rješavat ćemo metodom varijacije konstanti. Prvo ćemo riješiti pripadnu homogenu diferencijalnu jednadžbu, koja je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli.

$$
\begin{aligned}
y' - y &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= y \\
\frac{dy}{y} &= dx \\
\int \frac{dy}{y} &= \int dx \\
\ln|y| &= x + C \\
\ln Cy &= x \\
y &= Ce^{x}.
\end{aligned}
$$

Sada je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe oblika $y = C(x)\, e^{x}$, pa ga u nju i uvrštavamo.

$$
C'(x)\, e^{x} + C(x)\, e^{x} - C(x)\, e^{x} = e^{x}
$$

Integriranjem dobivamo $C(x)$.

$$\begin{aligned}
C'(x)\,e^x &= e^x \\
C'(x) &= 1 \\
C(x) &= \int dx \\
C(x) &= x + A.
\end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi:

$$y = (x + A)\,e^x.$$

(d) I ovu linearnu diferencijalnu jednadžbu rješavat ćemo metodom varijacije konstanti. Prvo ćemo riješiti pripadnu homogenu diferencijalnu jednadžbu.

$$\begin{aligned}
y' - \frac{4x}{x^2+1}y &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{4x}{x^2+1}y \\
\frac{dy}{y} &= -\frac{4x}{x^2+1}\,dx \\
\int \frac{dy}{y} &= -2\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} \\
\ln|y| &= -2\ln\left(x^2+1\right) + \ln C \\
y &= \frac{C}{\left(x^2+1\right)^2}.
\end{aligned}$$

Sada je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe oblika $y = \dfrac{C(X)}{\left(x^2+1\right)^2}$, pa ga uvrštavamo u zadanu diferencijalnu jednadžbu.

$$\begin{aligned}
\frac{C'(X)\left(x^2+1\right)^2 - 4x\left(x^2+1\right)C(X)}{\left(x^2+1\right)^4} + \frac{4x}{x^2+1}\frac{C(X)}{\left(x^2+1\right)^2} &= \frac{3}{x^2+1} \\
\frac{C'(X)\left(x^2+1\right) - 4xC(X)}{\left(x^2+1\right)^3} + \frac{4x}{x^2+1}\frac{C(X)}{\left(x^2+1\right)^2} &= \frac{3}{x^2+1}
\end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
C'(x) &= 3\left(x^2+1\right) \\
C(x) &= x^3 + 3x + A.
\end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi:

$$y = \frac{x^3 + 3x + A}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

5.11 Bernoullijeva diferencijalna jednadžba

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi:

(a) $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.

(b) $\left(x^2 y^3 + xy\right) y' = 1$.

Rješenje.

(a) Uvođenjem supstitucije

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{y^2} \\ z' &= -2y^{-3} y' \\ \frac{z'}{-2} &= \frac{y'}{y^3} \end{aligned}$$

i dijeljenjem zadane diferencijalne jednadžbe sa y^3 dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^3} - \frac{x}{y^2} &= -e^{-x^2} \\ \frac{z'}{-2} - xz &= -e^{-x^2} \\ z' + 2xz &= 2e^{-x^2}, \end{aligned}$$

a ovo je linearna diferencijalna jednadžba. U formulu za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe [M2, §5.8] uvrštavamo

$$p(x) = 2x, q(x) = 2e^{-x^2}$$

i dobivamo

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int 2x\,dx} \left[\int 2e^{-x^2} e^{\int 2x\,dx}\, dx + C \right] \\ z &= e^{-x^2} \left[\int 2e^{-x^2} e^{x^2}\, dx + C \right] \\ z &= e^{-x^2} (2x + C) \end{aligned}$$

Vraćanjem u susptituciju $z = \dfrac{1}{y^2}$ dobivamo

$$\frac{1}{y^2} = e^{-x^2} (2x + C).$$

(b) Neka je $x = x(y)$. Tada je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'},$$

pa zadanu diferencijlanu jednadžbu možemo pisati kao:

$$\begin{aligned} \left(x^2y^3 + xy\right)\frac{1}{x'} &= 1 \\ x' &= \left(x^2y^3 + xy\right) \\ x' - xy &= x^2y^3. \end{aligned}$$

Dijeljenjem zadane diferencijalne jednadžbe sa x^2 dobivamo

$$\frac{x'}{x^2} - \frac{y}{x} = y^3, \tag{5.6}$$

pa uvodimo supstituciju

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{x} \\ z' &= -\frac{x'}{x^2} \\ -z' &= \frac{x'}{x^2}. \end{aligned}$$

Sada diferencijalna jednadžba (5.6) glasi:

$$z' + yz = -y^3$$

a ovo je linearna diferencijalna jednadžba u kojoj je

$$p(y) = y, q(y) = -y^3$$

pa uvrštavanjem u formulu za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe [M2, §5.8] dobivamo

$$z = e^{-\int y dy}\left[-\int y^3 e^{\int y dy} dy + C\right]$$

Rješavanjem integrala i vraćanjem u spustituciju dobivamo konačno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe

$$\frac{1}{x} = 2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

5.12 Eulerova metoda

(a) Eulerovom metodom s korakom 0.5 izračunajte približne vrijednosti za

$$y_i\left(x_i\right), i = 1, ..., 4$$

ako je $y\left(x\right)$ rješenje početnog problema

$$\begin{aligned} y' &= 1 + 3x - 2y \\ y\left(1\right) &= 2. \end{aligned}$$

(b) Eulerovom metodom s korakom 0.2 izračunajte približnu vrijednost $y\left(1\right)$, ako je $y\left(x\right)$ rješenje početnog problema

$$\begin{aligned} y' &= x + y^2 \\ y\left(0\right) &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$\begin{aligned} F\left(x, y\right) &= 1 + 3x - 2y \\ x_0 &= 1, y_0 = 2 \end{aligned}$$

Za korak $h = 0.5$ vrijedi

$$x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5, x_4 = 3.$$

Koristeći formulu [M2, §5.4] Eulerove metode

$$\begin{aligned} y_1 &= y\left(x_1\right) = y\left(1.5\right) = y_0 + 0.5\left(1 + 3x_0 - 2y_0\right) = 2 + 0.5\left(1 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2\right) = 2 \\ y_2 &= y\left(2\right) = y_1 + 0.5\left(1 + 3x_1 - 2y_1\right) = 2 + 0.5\left(1 + 3 \cdot 1.5 - 2 \cdot 2\right) = 2.75 \\ y_3 &= y\left(2.5\right) = y_2 + 0.5\left(1 + 3x_2 - 2y_2\right) = 2.75 + 0.5\left(1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2.75\right) = 3.5 \\ y_4 &= y\left(3\right) = y_3 + 0.5\left(1 + 3x_3 - 2y_3\right) = 3.5 + 0.5\left(1 + 3 \cdot 2.5 - 2 \cdot 3.5\right) = 4.25 \end{aligned}$$

(b) Vrijedi

$$\begin{aligned} F\left(x, y\right) &= x + y^2 \\ x_0 &= 0, y_0 = 0 \end{aligned}$$

Za korak $h = 0.2$ vrijedi

$$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1.$$

Koristeći formulu [M2, §5.4] Eulerove metode dobivamo

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + 0.2\left(x_0 + y_0^2\right) = 0 + 0.2\left(0 + 0^2\right) = 0 \\
y_2 &= y_1 + 0.2\left(x_1 + y_1^2\right) = 0 + 0.2\left(0.2 + 0^2\right) = 0.04 \\
y_3 &= y_2 + 0.2\left(x_2 + y_2^2\right) = 0.04 + 0.2\left(0.4 + 0.04^2\right) = 0.12032 \\
y_4 &= y_3 + 0.2\left(x_3 + y_3^2\right) = 0.12032 + 0.2\left(0.6 + 0.12032^2\right) = 0.2432153 \\
y_5 &= y_4 + 0.2\left(x_4 + y_4^2\right) = 0.2432153 + 0.2\left(0.8 + 0.2432153^2\right) = 0.415046 = y\,(1)\,.
\end{aligned}
$$

5.13 Diferencijalne jednadžbe drugog reda - Opće rješenje

Ispitajte da li je $y = C_1 x^{\frac{3}{2}} + C_2$ opće rješenje diferencijalne jednadžbe $2xy'' - y' = 0$ u području $x > 0$ i odredite partikularno rješenje koje odgovara početnim uvjetima $y(1) = 4$, $y'(1) = 3$.

Rješenje. Funkciju $y(x) = C_1 x^{\frac{3}{2}} + C_2$ dva puta deriviramo po varijabli x i dobivamo: $y'(x) = \dfrac{3}{2} C_1 x^{\frac{1}{2}}$, $y''(x) = \dfrac{3}{4} C_1 x^{-\frac{1}{2}}$. Uvrštavanjem dobivenih derivacija u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo istinitu jednakost

$$
2x \cdot \frac{3}{4} C_1 x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} C_1 x^{\frac{1}{2}} = 0
$$

i zaključujemo da je $y(x) = C_1 x^{\frac{3}{2}} + C_2$ opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

Da bismo odredili partikularno rješenje, u opće rješenje i njegovu prvu derivaciju ćemo uvrstiti zadane početne uvjete. Na taj način iz uvjeta $y'(1) = 3$ dobivamo $C_1 = 2$, a potom, iz uvjeta $y(1) = 4$ slijedi $C_2 = 2$.

Dakle, partikularno rješenje, koje zadovoljava zadane početne uvjete, glasi $y(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 2$.

5.14 Reduciranje DJ-e drugog reda na DJ-u prvog reda I

Ako se u DJ-i drugog reda, kojoj je opći oblik $y'' = f(x, y, y')$, ne pojavljuje eksplicitno jedna od varijabli x, y ili y' onda kažemo da je DJ-a nepotpuna te ju možemo riješiti reduciranjem (spuštanjem) reda.

Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' = xe^{-x}$ uz početne uvjete $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Rješenje. Ako je DJ-a drugog reda oblika $y'' = f(x)$ onda njeno opće rješenje dobivamo uzastopnim integriranjem zadane jednadžbe.

Dakle, integrirajmo, po varijabli x, jednadžbu $y'' = xe^{-x}$. Dobivamo

$$y'(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1. \tag{5.7}$$

Sada ćemo iskoristiti zadani uvjet $y'(0) = 0$ tj. uvrstit ćemo ga u (5.7) pa slijedi $C_1 = 1$.

Jednakost (5.7) integriramo još jednom i dobivamo

$$y(x) = (x+2)e^{-x} + C_1 \cdot x + C_2. \tag{5.8}$$

Iz (5.8) i uvjeta $y(0) = 1$ je sada $C_2 = -1$.

Time smo dobili da partikularno rješenje ove diferencijalne jednadžbe, uz zadane početne uvjete, glasi $y(x) = (x+2)e^{-x} + x - 1$.

5.15 Reduciranje DJ-e drugog reda na DJ-u prvog reda II

Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin(2x)$.

Rješenje. Diferencijalne jednadžbe oblika $y'' = f(x, y')$ rješavamo uvođenjem supstitucije $y'(x) = p(x)$ te na taj način zadanu diferencijalnu jednadžbu drugog reda svedemo na diferencijalnu jednadžbu prvog reda.

Dakle, neka je $y'(x) = p(x)$. Tada je $y''(x) = p'(x)$ pa, nakon uvođenja ovih zamjena u zadanu diferencijalnu jednadžbu, dobivamo

$$p' + p \operatorname{tg} x = \sin(2x). \tag{5.9}$$

Jednadžba (5.9) je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda koju ćemo riješiti primjenom formule [M2, §5.8]. Slijedi

$$\begin{aligned}
p(x) &= e^{-\int \operatorname{tg} x\, dx} \left[\int \sin(2x) e^{\int \operatorname{tg} x\, dx} dx + C_1 \right] \\
&= e^{\ln|\cos x|} \left[\int 2 \sin x \cos x e^{-\ln|\cos x|} dx + C_1 \right] \\
&= |\cos x| \left[2sgn(\cos x) \int \sin x\, dx + C_1 \right] \\
&= |\cos x| \left[2sgn(\cos x) \cdot (-\cos x) + C_1 \right] \\
&= -2\cos^2 x + C_1 \cos x.
\end{aligned}$$

Da bismo dobili opće rješenje zadane jednadžbe pomoćni parametar p zamjenit ćemo sa $\dfrac{dy}{dx}$. Slijedi

$$\begin{aligned} y(x) &= \int (-2\cos^2 x + C_1 \cos x)dx \\ y(x) &= -\int (1+\cos(2x))dx + C_1 \int \cos x\, dx + C_2. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje glasi

$$y(x) = -x - \frac{1}{2}\sin(2x) + C_1 \sin x + C_2.$$

5.16 Reduciranje DJ-e drugog reda na DJ-u prvog reda III

Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Rješenje. U slučaju kada diferencijalna jednadžba ne sadrži eksplicitno nezavisnu varijablu x tj. ima oblik $y'' = f(y, y')$ rješavamo ju uvođenjem supstitucije $y'(x) = p(y)$. Tada je $y''(x) = \dfrac{dp}{dy}p(y)$.

Nakon ovih zamjena zadana diferencijalna jednadžba poprima sljedeći oblik

$$p\left[2p - (y-1)\frac{dp}{dy}\right] = 0.$$

Iz $p(y) = \dfrac{dy}{dx} = 0$ dobivamo partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y = C$.

Iz $2p - (y-1)\dfrac{dp}{dy} = 0$ ćemo, separiranjem varijabli, doći do općeg rješenja zadane diferencijalne jednadžbe. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{dp}{2p} &= \frac{dy}{y-1} \\ \frac{1}{2}\ln|p| &= \ln|y-1| + \ln C_1 \\ p &= C_1^2(y-1)^2 \\ \frac{dy}{dx} &= C_1^2(y-1)^2 \\ \frac{dy}{C_1^2(y-1)^2} &= dx. \end{aligned}$$

Nakon integriranja dobivamo opće rješenje oblika $(x + C_2)(y-1) = C_1$.

5.17 Homogene LDJ drugog reda s konstantnim koeficijentima

Odredite opća odnosno partikularna rješenja diferencijalnih jednadžbi:

(a) $y'' - 5y' - 6y = 0$,

(b) $y'' - 2y' + y = 0$ ako je $y(0) = 4$ i $y'(0) = 2$,

(c) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Rješenje. Prema [M2, §5.10] opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima ima oblik $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ gdje su y_1 i y_2 linearno nezavisna partikularna rješenja do kojih ćemo doći rješavajući karakterističnu jednadžbu zadane diferencijalne jednadžbe. Karakterističnu jednadžbu formiramo na način da u zadanoj diferencijalnoj jednadžbi umjesto y'' pišemo λ^2, umjesto y' pišemo λ i umjesto y pišemo 1. Dobivamo kvadratnu jednadžbu u varijabli λ čija će rješenja, λ_1 i λ_2, odredite oblik općeg rješenja diferencijalne jednadžbe na sljedeći način.

Ako su λ_1 i λ_2 realni i ralzičiti brojevi onda opće rješenje diferencijalne jednadžbe glesi $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Ako su λ_1 i λ_2 realni i jednaki brojevi tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ onda opće rješenje ima oblik $y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$. Ako su λ_1 i λ_2 konjugiorano kompleksni brojevi tj $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ onda je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe $y(x) = e^{ax}\left(C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx)\right)$.

(a) Karakteristična jednadžba glasi $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$. Njena rješenja su: $\lambda_1 = 6$ i $\lambda_2 = -1$. Prema gore opisanom postupku zaključujemo da opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe ima oblik $y(x) = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}$.

(b) Karakteristična jednadžba ima oblik $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ i rješenja $\lambda_{1,2} = 1$. Tada je opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y(x) = e^x((C_1 + C_2 x)$. Iz $y(0) = 4$ dobivamo da je $C_1 = 4$, a iz drugog zadanog uvjeta $y'(0) = 2$ slijedi da je $C_2 = -2$. Dakle, partikularno rješenje diferencijalne jednažbe je $y(x) = e^x(4 - 2x)$.

(c) Iz karakteristične jednadžbe $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$ dobivamo rješenja $\lambda_{1,2} = -3 \pm 2i$. Tada opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y(x) = e^{-3x}\left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right)$.

5.18 Nehomogene LDJ drugog reda s konstantnim koeficijentima

Izračunajte opća odnosno partikularna rješenja sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

(a) $y'' - 2y' + 2y = x^2$,

(b) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, ako je $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$,

(c) $y'' + y = 5\sin(2x)$,

(d) $y'' + y' = 4x^2e^x$,

(e) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$.

Rješenje. Opće rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe oblika $y'' + ay' + by = f(x)$ je zbroj rješenja pripadne homogene diferencijalne jednadžbe i partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe tj. $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$. Rješenje pripadne homogene jednadžbe određivat ćemo kao u prethodnom zadatku a do partikularnog rješenja možemo doći na dva načina. Prvi način, metodu neodređenih koeficijenata, pokazat ćemo u ovom zadatku, a u sljedećem zadatku ćemo primjenjivati drugi način tj. metodu varijacije konstanti.

Metoda neodređenih koeficijenata podrazumjeva formiranje partikularnog rješenja ovisno o obliku funkcije $f(x)$ pa razlikujemo nekoliko slučajeva:

(a) *Prvi slučaj.* Ako je $f(x)$ polinom n- tog stupnja onda je $y_P(x)$ polinom stupnja $n+r$, gdje je r red najniže derivacije koja se pojavljuje u diferencijalnoj jednadžbi.

U zadatku pod (a) najprije riješimo pripadnu homogenu diferencijalnu jednadžbu $y'' - 2y' + 2y = 0$. Njena karakteristična jednadžba ima oblik $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Rješenja karakteristične jednadžbe su $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ pa rješenje homogene diferencijalne jednadžbe glasi $y_H(x) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)\, e^x$.

Prema prethodno opisanom postupku određivanja partikularnog rješenja zaključujemo da y_P ima oblik $y_P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Da bismo odredili nepoznate koeficijente a_2, a_1 i a_0 u zadanu diferencijalnu jednadžbu ćemo uvrstiti y_P, y_P' i y_P''. Na taj način dobivamo sljedeću jednakost

$$2a_2x^2 + (-4a_2 + 2a_1)x + (2a_2 - 2a_1 + 2a_0) = x^2. \tag{5.10}$$

Nakon izjednačavanja koeficijenata u (5.10) slijedi

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 1 \quad \text{i} \quad a_2 = \frac{1}{2}.$$

Tada je $y_P(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$ pa opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y(x) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)\, e^x + \frac{1}{2}(x+1)^2$.

(b) *Drugi slučaj.* Ako je $f(x)$ eksponencijalna funkcija oblika $f(x) = ke^{bx}$, k je konstanta, onda je partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe jednako:

– $y_P(x) = \dfrac{ke^{bx}}{P(b)}$ ako je $b \neq \lambda_1, \lambda_2$,

– $y_P(x) = \dfrac{kxe^{bx}}{P'(b)}$ ako je $b = \lambda_1$ i $b \neq \lambda_2$,

– $y_P(x) = \dfrac{kx^2e^{bx}}{P''(b)}$ ako je $b = \lambda_1 = \lambda_2$,

gdje je $P(r)$ oznaka za polinom na lijevoj strani karekteristične jednadžbe određene diferencijalne jednadžbe.

Diferencijalnoj jednadžbi zadanoj pod (b) najprije rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu $y'' - 8y' + 16y = 0$. Njena karakteristična jednadžba je $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, a njena rješenja su $\lambda_{1,2} = 4$. Dakle, vrijedi $y_H(x) = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}$.

Budući je $f(x) = e^{4x}$, tj. $b = \lambda_{1,2} = 4$ zaključujemo da je $y_P(x) = \dfrac{kx^2e^{bx}}{P''(b)}$. Nadalje, $P(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 16$ pa je $P(b) = b^2 - 8b + 16$, odnosno $P'' = 2$. Dakle, partikularno rješenje ove diferencijalne jednadžbe glasi $y_P(x) = \dfrac{x^2e^{4x}}{2}$.

Tada je opće rješenje jednako $y(x) = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x} + \dfrac{x^2e^{4x}}{2}$.

Uvrštavanjem zadanih početnih uvjeta u dobiveno opće rješenje diferencijalne jednadžbe slijedi da je $C_1 = 0$ i $C_2 = 1$ pa partikularno rješenje koje zadovoljava zadane uvjete glasi $y(x) = xe^{4x}\left(1 + \dfrac{1}{2}x\right)$.

(c) *Treći slučaj.* Ako funkcija $f(x)$ ima oblik $k\sin(mx)$ ili $k\cos(mx)$ onda je njeno partikularno rješenje $y_P(x) = A\cos(mx) + B\sin(mx)$, gdje su A i B nepoznate konstante.

Za diferencijalnu jednadžbu pod (c) pripadna homogena jednadžba glasi $y'' + y = 0$. Njena karakteristična jednadžba ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i$ pa je $y_H(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$. Budući je $f(x) = 5\sin(2x)$ slijedi $m = 2$ i $y_P(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$. Sada ćemo $y_P(x)$, $y_P'(x)$ i $y_P''(x)$ uvrstiti u zadanu diferencijalnu jednadžbu. Time dolazimo do jednakosti

$$-3A\cos(2x) - 3B\sin(2x) = 5\sin(2x). \tag{5.11}$$

Izjednačavanjem koeficijenata jednakosti (5.11) koji se nalaze uz $\cos(2x)$ odnosno $\sin(2x)$ dobivamo $A = 0$ i $B = -\dfrac{5}{3}$ pa partikularno rješenje glasi $y_P(x) = -\dfrac{5}{3}\sin(2x)$.

Dakle, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe je $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{5}{3}\sin(2x)$.

(d) *Četvrti slučaj.* Ako je funkcija f oblika $f(x) = P_n(x)e^{bx}$, gdje je P_n oznaka za polinom n-tog stupnja, onda je

$$y_P = x^s\left(a_nx^n + ... + a_1x + a_0\right)e^{bx},$$

gdje je

- $s = 0$, za $b \neq \lambda_1, \lambda_2$,
- $s = 1$, za $b = \lambda_1, b \neq \lambda_2$ i
- $s = 2$, za $b = \lambda_1 = \lambda_2$,

gdje su λ_1 i λ_2 rješenja karakteristične jednadžbe.

Karakteristična jednadžba diferencijalne jednadžbe zadane pod (d) ima rješenja $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -1$ pa je $y_H(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$. Budući je $f(x) = 4x^2 e^x$ zaključujemo $n = 2$, $b = 1 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$ pa je $s = 0$. Dakle, partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe je oblika $y_P(x) = \left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) e^x$. Sada izračunamo y_P' i y_P'' te ih, zajedno sa y_P uvrstimo u zadanu diferencijalnu jednadžbu. Dobivamo sljedeću jednakost

$$e^x \left[a_2 x^2 + (4a_2 + a_1)x + 2a_2 + 2a_1 + a_0\right] + e^x \left[a_2 x^2 + (2a_2 + a_1)x + a_1 + a_0\right] = 4x^2 e^x. \tag{5.12}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije, slijedi da je $a_0 = 7$, $a_1 = -6$ i $a_2 = 2$.

Dakle, $y_P(x) = (2x^2 - 6x + 7)e^x$ pa opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + (2x^2 - 6x + 7)e^x$.

(e) *Peti slučaj.* Ako je $f(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ili $f(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ onda je

$$y_p = x^s e^{\alpha x} \left(a_0 \cos(\beta x) + b_0 \sin(\beta x)\right),$$

gdje je:

- $s = 0$, ako $\alpha \pm i\beta$ nije par kompleksno konjugiranih rješenja karakteristične jednadžbe,
- $s = 1$, ako je $\alpha \pm i\beta$ jednostruki par kompleksno konjugiranih rješenja karakteristične jednadžbe,
- $s = 2$, ako je $\alpha \pm i\beta$ dvostruki par kompleksno konjugiranih rješenja karakteristične jednadžbe.

Rješenja karakteristične jednadžbe diferencijalne jednadžbe u zadatku pod (e) su $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ pa je $y_H(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x$.Kako je zadana funkcija f oblika $f(x) = e^x \sin x$ slijedi da je $\alpha = 1$, $\beta = 1$ tj. $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ što nije jednako rješenju karakteristične jednadžbe. Zaključujemo $s = 0$ i $y_P(x) = e^x(a_0 \cos x + b_0 \sin x)$. Nakon uvrštavanja izraza za y_P, y_P' i y_P'' u zadanu diferencijalnu jednadžbu i izjednačavanja koeficijenata uz odgovarajuće potencije dobivamo da je $a_0 = -\dfrac{1}{8}$ i $b_0 = \dfrac{1}{8}$ tj.

$$y_p(x) = \frac{1}{8} e^x \left(-\cos x + \sin x\right).$$

Dakle, opće rješenje glasi $y(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + \dfrac{1}{8} e^x \left(-\cos x + \sin x\right)$.

5.19 Homogene LDJ višeg reda

Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$, te partikularno rješenje uz početne uvjete $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, i $y''(0) = 3$.

Rješenje. Zadatak rješavamo analogno kao i homogenu diferencijalnu jednadžbu drugog reda. Pripadna karakteristična jednadžba ima oblik $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ tj. $(r + 1)^3 = 0$ pa su njena rješenja $\lambda_{1,2,3} = -1$. Budući su sva tri rješenja realna i međusobno jednaka, prema [M2, §5.10], opće rješenje zadane diferencijalne jednažbe glasi

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}.$$

Nakon uvrštavanja zadanih početnih uvjeta u dobiveno opće rješenje, odnosno njegovu prvu i drugu derivaciju dobivamo da je $C_1 = 1$, $C_2 = 3$ i $C_3 = 4$, pa traženo partikularno rješenje glasi

$$y(x) = e^{-x} + 3xe^{-x} + 4x^2 e^{-x}.$$

5.20 Princip superpozicije rješenja

Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 2y' = e^{2x} + 5$.

Rješenje. Ako je desna strana diferencijalne jednadžbe suma više funkcija

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \tag{5.13}$$

a y_i, $(i = 1, 2, ...n)$, su rješenja pojedinih jednadžbi $y''+py'+qy = f_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., n)$, onda je suma

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

rješenje jednadžbe (5.13).

Pripadna homogena jednadžba zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y'' - 2y' = 0$, a njena karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ ima rješenja $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$. Dakle, opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe je $y_H(x) = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Odredimo sada partikularno rješenje y_1 za diferencijalnu jednadžbu $y'' - 2y' = e^{2x}$.

Prema [M2 vjžbe, §3.18] y_1 ima oblik $y_1 = \frac{xke^{bx}}{P'(b)}$. Budući je $b = 2 = \lambda_2$, $k = 1$ i $P'(2) = 2$ zaključujemo $y_1 = \dfrac{xe^{2x}}{2}$.

Za funkciju $f_2(x) = 5$ tj. diferencijalnu jednadžbu $y'' - 2y' = 5$ partikularno rješenje ima oblik $y_2(x) = ax + b$, gdje je $a - \dfrac{5}{2}$ i $b = 0$. Dakle, $y_2 = -\dfrac{5}{2}x$.

Iz svega dobivenog zaključujemo da opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + \dfrac{1}{2} xe^{2x} - \dfrac{5}{2}x$.

5.21 Metoda varijacije konstanti

Metodom varijacije konstanti odredite opća rješenja diferencijalnih jednadžbi

(a) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$, te provjerite linearnu nezavisnost partikularnih rješenja,

(b) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$,

(c) $y''' + y'' = \dfrac{x-1}{x^2}$.

Rješenja.

(a) Odredimo najprije rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe $y''+y=0$. Njena karakteristična jednadžba $\lambda^2+1=0$ ima rješenja $\lambda_{1,2}=\pm i$ pa je rješenje homogene diferencijalne jednadžbe $y_H(x) = C_1\cos x + C_2 \sin x$. P rema [M2, §5.10], opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe ima oblik $y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Nepoznate funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ odredit ćemo iz sljedećeg sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} C_1'(x)\cos x + C_2'(x) &= 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'8x)\cos x &= \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

Slijedi: $C_1'(x) = -1$ odnosno $C_1(x) = -x + A$ i $C_2'(x) = \operatorname{ctg} x$ odnosno $C_2(x) = \ln|\sin x| + B$.

Dakle, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y(x) = A\sin x + B\cos x - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|$. Da bismo provjerili linearnu nezavisnost partikularnih rješenja $y_1(x) = \cos x$ i $y_2(x) = \sin x$, prema [M2, §5.10],, izračunat ćemo vrijednost determinante Wronskoga. Vrijedi

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

Zaključujemo da su partikularna rješenja linearno nezavisna.

(b) Pripadna homogena diferencijalna jednadžba zadane jednadžbe glasi $y'' - 2y' + y = 0$. Rješenja njene karakteristične jednadžbe $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ su $\lambda_{1,2} = 1$ pa zaključujemo da je rješenje homogene jednadžbe $y_H(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Dakle, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe ima oblik $yx) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$ pa ćemo, u svrhu određivanja nepoznatih funkcija $C_1(x)$ i $C_2(x)$, riješiti sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x &= 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) &= \frac{e^x}{x}. \end{aligned}$$

Slijedi: $C_1(x) = -x + A$, $C_2(x) = \ln|x| + B$ pa opće rješenje zadane jednadžbe glasi $y(x) = e^x(A + Bx) + xe^x(\ln|x| - 1)$.

(c) Analogno kao u prethodna dva zadatka riješit ćemo najprije pripadnu homogenu diferencijalnu jednadžbu na način da joj pridružimo njenu karakterističnu jednadžbu $\lambda^3 + \lambda^2 = 0$. Rješenja karakteristične jednadžbe su $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -1$ pa rješenje homogene diferencijalne jednadžbe glasi $y_H(x) = C_1 + xC_2 + e^{-x}C_3$. Sada zaključujemo da opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe ima oblik $yx) = C_1(x) + xC_2(x) + e^{-x}C_3(x)$. Nepoznate funkcije $C_1(x)$, $C_2(x)$ i $C_3(x)$ određujemo iz sljedećeg sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}
C_1'(x) + xC_2'(x) + C_3'(x)e^{-x} &= 0\\
C_2'(x) - C_3'(x)e^{-x} &= 0\\
C_3'(x)e^{-x} &= \frac{x-1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Rješavanjem jednadžbi iz sustava dobivamo da je $C_1(x) = -\frac{1}{x} - x + A$, $C_2(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + B$ i $C_3(x) = \frac{1}{x}e^x + C$. Dakle, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y(x) = A + Bx + Ce^{-x} - x + x\ln|x| + 1$.

5.22 Sustavi diferencijalnih jednadžbi

(a) Riješite sustav difrencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= y + 1\\
\frac{dy}{dt} &= x + 1.
\end{aligned}$$

Rješenje. Rješenje sustava, tj. nepoznate funkcije $x(t)$ i $y(t)$, odredit ćemo na način da najprije iz prve jednadžbe sustava izrazimo jednu funkciju. Tada je, npr.

$$y = \frac{dx}{dt} - 1. \tag{5.14}$$

Dobivenu jednadžbu ćemo derivirati po varijabli t. Slijedi $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Sada, izraze dobivene za y i $\frac{dy}{dt}$ uvrštavamo u drugu po redu jednadžbu zadanog sustava. Dobivamo sljedeću diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 1. \tag{5.15}$$

(5.15) je linearna nehomogena diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima pa ju riješitavamo tako da najprije odredimo rješenje pripadne homogene diferencijalne jednažbe $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$. Rješenja pripadne karakteristične jednadžbe su $\lambda_{1,2} = \pm 1$ pa je rješenje homogene diferencijalne jednadžbe $x_H(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Budući je desna strana jednadžbe (5.15) polinom nultog stupnja, zaključujemo da je partikularno rješenje također polinom nultog stupnja oblika $x_P(t) = A$, A je konstanta. Uvrštavanjem x_P u (5.15) dobivamo da je A_-1 pa je opće rješenje diferencijalne jednadžbe (5.15) $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - 1$. Sada, iz (5.14) i dobivenog rješenja za funkciju $x(t)$, slijedi $y(t) = C_1e^t - C_2e^{-t} - 1$.

(b) Odredite ono rješenje sustava

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0\\ \frac{dy}{dt} - x + y = 0\end{aligned}$$

koje zadovoljava početne uvjete $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Rješenje. Primjenit ćemo isti postupak kao u zadatku pod (a). Iz prve jednadžbe sustava slijedi

$$y(t) = -\frac{dx}{dt} - 3x \tag{5.16}$$

i $\frac{dy}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt}$. Uvrštavanjem tih dviju jednakosti u drugu jednadžbu sustava dobivamo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0. \tag{5.17}$$

(5.17) je linearna homogena diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Rješenja njene karaktaristične jednadžbe su $\lambda_{1,2} = -2$ pa je opće rješenje jednadžbe (5.17) $x(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}$. Iz (5.16) i dobivenog rješenja $x(t)$ slijedi $y(t) = -C_1e^{-2t} - C_2e^{-2t} - C_2te^{-2t}$. Iskoristimo sada zadane početne uvjete. Iz $x(0) = 1$ dobivamo da je $C_1 = 1$, a iz $y(0) = 1$ da je $C_2 = -2$. Dakle, partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava dane početne uvjete glasi $x(t) = (1-2t)e^{-2t}$, $y(t) = (1+2t)e^{-2t}$.

(c) Odredite opće rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3 - 2y\\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 2t.\end{aligned}$$

Rješenje. Analognim postupkom kao u prethodna dva primjera iz prve jednadžbe sustava slijedi da je $y(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{3}{2}$ te $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$. Uvrštavanjem u drugu jednadžbu sustava dobivamo linearnu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima koja glasi $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 4t$. Rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe je $x_H(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$. Matodom neodređenih koeficijenata ili metodom varijacije konstanti jednostavno se pokazuje da je opće rješenje za funkciju $x(t)$ dano sa $x(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + t$. Uvrštavanjem dobivenog rješenja natrag u prvu jednadžbu sustava slijedi i opće rješenje za funkciju $y(t)$ koje glasi $y(t) = C_1 \sin(2t) - C_2 \cos(2t) + 1$.

5.23 Lovac-plijen jednadžba

Populacija ptica (lovci) i insekata (plijen) modelirana je jednadžbama

$$\frac{dx}{dt} = 0.4x - 0.002xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.000008xy.$$

Odredite rješenja ravnoteže (konstantna rješenja) i objasniti njihovo značenje?

Rješenje. Konstantna rješenja dobivamo rješavanjem sustava jednadžbi

$$\frac{dx}{dt} = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Dakle, uvrštavanjem zadanih podataka u sustav rješenja ravnoteže dobivamo sljedeće jednadžbe

$$0.4x - 0.002xy = 0$$
$$-0.2y + 0.000008xy = 0.$$

Izlučivanjem zajedničkih faktora u jednadžbama dobivamo

$$x(0.4 - 0.002y) = 0$$
$$y(-0.2 + 0.000008x) = 0.$$

Dakle, prvo rješenje sustava je $x = 0$, $y = 0$ ali ono je u kontradikciji sa zadanim podacima pa ga odbacujemo. Drugo rješenje sustava glasi $x = 25000$, $y = 200$ pa zaključujemo da ćemo uravnoteženost populacije postići sa brojem od 200 ptica i 25000 insekata, tj. 25000 insekata je dovoljno da održi konstantnom populaciju od 200 ptica.

5.24 Zadaci za vježbu

1. Provjerite da li je $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' = x^2 + y^2$.

2. Odredite diferencijalnu jednadžbu za familiju krivulja $\dfrac{x^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

3. Odredite krivulju iz familije krivulja $y = c_1 \sin(x - c_2)$, koja zadovoljava početne uvjete $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 0$.

4. Populacija je modelirana diferencijalnom jednadžbom $\dfrac{dP}{dt} = 1.2P\left(1 - \dfrac{P}{4200}\right)$.

    (a) Za koje vrijednosti od P populacija raste?

    (b) Za koje vrijednosti od P populacija pada?

5. Kolač je izvađen iz pećnice na $200°C$. Nakon 10 minuta temperatura kolača bila je $150°C$. Za koliko će vremena kolač biti na temperaturi od $30°C$ ako je sobna temperatura $20°C$?

6. Vrijeme poluraspada izotopa stroncija ^{90}Sr je 25 godina. Početna masa uzorka ^{90}Sr je 18 mg.

    (a) Izračunajte masu koja ostaje nakon t godina.

    (b) Koliko vremena treba da se masa smanji na 2 mg?

7. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'x^3 = 2y$.

8. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $xy' + y = y^2$.

9. Nađite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$ uz početni uvjet $y(0) = 0$.

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi:

10. $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$.

11. $\left(y' - \dfrac{y}{x}\right) \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = 1$

12. $(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$

13. $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$

14. $(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0$

15. $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0, \quad \lambda = \lambda(y)$

16. $(x \cos y - y \sin y)\, dy + (x \sin y + y \cos y)\, dx = 0$, $\lambda = \lambda(x)$.

17. Odredite jednadžbu ortogonalne trajektorije familije krivulja $x^2 + y^2 = 2ax$ koja prolazi kroz točku $(1, 1)$.

18. Odredite ortogonalne trajektorije familije krivulja $y^2 = ax$.

19. Nađite ortogonalne trajektorije familije krivulja $xy = a$.

20. Odredite singularna rješenja jednadžbe $y^2(y')^2 + y^2 - 1 = 0$

21. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, te partikularno rješenje koje zadovoljava uvjet $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

22. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $\left(1 - x^2\right) y' + 2xy - 4x = 0$, te partikularno rješenje koje zadovoljava uvjet $y(0) = -1$.

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi:

23. $xy' + (x+1)\, y = 3x^2 e^{-x}$

24. $y = x\left(y' - x\cos x\right)$

25. $y' + xy = x^3 y^3$

26. $y' - ytgx = y^4 \cos x$.

27. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4$.

28. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $xy' - y\,(2y\ln x - 1) = 0$, te partikularno rješenje koje zadovoljava uvjet $y(1) = 1$.

29. Eulerovom metodom s korakom 0.5 izračunajte približnu vrijednost $y\,(2)$ ako je $y = y\,(x)$ rješenje početnog problema $y' = x\sin(x+y), \quad y\,(-1) = 1$.

30. Eulerovom metodom s korakom 0.2 izračunajte približnu vrijednost $y\,(1)$ ako je $y = y\,(x)$ rješenje početnog problema $y' = 2xy^2, \quad y\,(0) = 1$.

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi:

31. $y'' = 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$

32. $(1+x)y'' + y' = 0$

33. $y'' + 2y(y')^3 = 0$

34. $2y'' - y' - y = 0$

35. $y'' + 6y' + 13y = 0$.

36. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + 2y' + 5y = 0$, te partikularno rješenje uz početne uvjete $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi:

37. $y'' - 2y' = x^2 - x$

38. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

39. $y'' - 2y' + 10y = 37\cos(3x)$

40. $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

41. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y^{(4)} - 81y = 27e^{-3x}$.

42. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 4y' + 4y = \sin(2x) + e^{2x}$.

43. Metodom varijacije konstanti odredite opće rješ enje diferencijalne jednadžbe $y'' + 2y' + y = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$.

44. Metodom varijacije konstanti odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$.

45. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$ metodom varijacije konstanti.

46. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$ metodom varijacije konstanti te Provjerite linearnu nezavisnost partikularnih rješenja.

47. Riješite sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y + z\\ \frac{dz}{dx} &= x + y + z.\end{aligned}$$

48. Odredite ono rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 3z - y\\ \frac{dz}{dt} &= y + z + e^t,\end{aligned}$$

koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

49. Riješite sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + 2y + z &= \sin x \\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z &= \cos x.\end{aligned}$$

50. Populacije biljnih ušiju (eng. aphids) i bubamara (eng. ladybugs) modelirane su jednadžbama

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= 2A - 0.01AL \\ \frac{dL}{dt} &= -0.5L + 0.0001AL.\end{aligned}$$

   (a) Odredite rješenja ravnoteže i objasnite njihovo značenje
   (b) Odredite izraz za $\dfrac{dL}{dA}$.

5.25 Rješenja zadataka za vježbu

1. Ne.
2. $-xyy' + y^2 = 4$.
3. $y = -\cos x$.
4. (a) $0 < P < 4200$,
   (b) $P > 4200$.
5. $t = 88.93$.
6. (a) $m(t) = 18 \cdot e^{-\frac{1}{25}t\ln 2}$,
   (b) $t = 25\dfrac{\ln 9}{\ln 2}$.
7. $y = ce^{-\frac{1}{x^2}}$.
8. $y = \dfrac{1}{1-cx}$.
9. $y = \ln\left[c(1+x^2) - 1\right]$, $c = 2$, $y = \ln(2x^2+1)$.
10. $2y^2\ln(cy) + x^2 = 0$.
11. $\dfrac{y}{x}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \ln c$.

12. $(x+y-1)^3 = c(x-y+3)$.

13. $3x+y+2\ln|x+y-1| = c$.

14. $\dfrac{1}{3}x^3 - xy + \dfrac{1}{3}y^3 = c$.

15. $x^2 \ln y + \dfrac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}} = c$.

16. $y = (x\sin y + y\cos y - \sin y)\, e^x = c$.

17. $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

18. $2x^2 + y^2 = c^2$.

19. $x^2 - y^2 = c$.

20. $y = 1, y = -1$.

21. $y = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}$, $c = e$, $y = \sin x - 1 + e^{1-\sin x}$.

22. $y = 2 + c\left(1-x^2\right)$, $c = -3$, $y = 2 - 3\left(1-x^2\right)$.

23. $xy = \left(x^3 + c\right) e^{-x}$.

24. $y = cx + x\sin x$.

25. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+ce^{x^2}}}$.

26. $c = \dfrac{1}{\sqrt[3]{c\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x}}$.

27. $y = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{3\ln\frac{c}{x}}}$.

28. $y = \dfrac{1}{2\left(\ln x + 1\right) + cx}, c = -1, y = \dfrac{1}{2(\ln x + 1) - x}$.

29. $y \approx 1.05484$

30. $y \approx 4.28982$

31. $y = \dfrac{1}{3}\sin^3 x + c_1 x + c_2$.

32. $y = c_1 \ln(x+1) + c_2$.

33. $3x = y^3 + c_1 y + c_2$.

34. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$.

35. $y = e^{-3x}(c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x))$.

36. $y = e^{-x}(c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x))$, $y = \frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)$.

37. $y = c_1 + c_2e^{2x} - \dfrac{x^3}{6}$.

38. $y = c_1e^x + c_2xe^x + e^{2x}$.

39. $y = (c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x))e^x + \cos(3x) - 6\sin(3x)$.

40. $y = c_1e^x + c_2e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\dfrac{4}{5}x - \dfrac{28}{25}\right)e^{2x}$.

41. $y(x) = c_1e^{3x} + \left(c_2 - \dfrac{x}{4}\right)e^{-3x} + c_3\cos x + c_4\sin x$.

42. $y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \dfrac{1}{8}\cos(2x) + \dfrac{1}{2}x^2e^{2x}$.

43. $y(x) = \dfrac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}e^{-x} + Be^{-x} + Axe^{-x}$.

44. $y(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x} - \dfrac{1}{2\sin x} + A\sin x + B\cos x$.

45. $y(x) = e^{-2x}\left(\dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{3}{4}x^2 + Ax + B\right)$.

46. $y(x) = Ae^{2x} + Be^x + e^x(2x^2 + x)$.

47. $y(x) = c_1 + c_2e^{2x} - \dfrac{1}{4}(x^2 + x)$, $z(x) = c_2e^{2x} - c_1 + \dfrac{1}{4}(x^2 - x - 1)$.

48. $y(t) = -e^{-t} + \dfrac{1}{4}e^{-2t} + \dfrac{3}{4}e^{2t}$, $z(t) = -\dfrac{2}{3}e^t - \dfrac{1}{12}e^{-2t} + \dfrac{3}{4}e^{2t}$.

49. $y(x) = c_1 + c_2x + 2\sin x$, $z(t) = -2c_1 - c_2(2x + 1) - 3\sin x - 2\cos x$.

50. (a) $L = 200,\ A = 5000$, (b) $\dfrac{dL}{dA} = \dfrac{-0.5L + 0.0001AL}{2A - 0.01AL}$.

6.

METODA NAJMANJIH KVADRATA I QR RASTAV