NASLOV ORIGINALA

И. Н. БРОНШТЕЙН и К. А. СЕМЕНДЯЕВ

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И УЧАЩИХСЯ ВТУЗОВ

Издание девятое стереотипное

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1962

PREVELI S RUSKOG

Z. VISTRIČKA — I. UREMOVIĆ

REDAKTOR HRVATSKOSRPSKOGA IZDANJA

PROF. DR ING. D. BLANUŠA
pravi član Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti

I. N. BRONŠTEJN — K. A. SEMENDJAJEV

MATEMATIČKI PRIRUČNIK

ZA INŽENJERE I STUDENTE

TEHNIČKA KNJIGA

ZAGREB 1964

NATISNILA TISKARNA ČZP LJUDSKA PRAVICA, LJUBLJANA

PREDGOVOR HRVATSKOSRPSKOM IZDANJU

Matematički priručnik I. N. Bronštejna i K. A. Semendjajeva poznat je ne samo u Sovjetskom Savezu gdje je doživio 9 izdanja nego je i kod nas naišao na vrlo povoljan odaziv kod stručnjaka i studenata kojima su potrebna viša matematička sredstva. Malen broj kod nas raspoloživih primjeraka ruskog izdanja kao i jezične teškoće priječili su da korist, koju može pružiti to vrijedno djelo, dođe do punog izražaja. Zato je zacijelo bila zaslužna inicijativa Tehničke knjige u Zagrebu da taj priručnik učini pristupačnim čitateljima kojima je materinski jezik hrvatskosrpski.

Nažalost na tom jeziku postoje dvije, u mnogome različite, matematičke terminologije koje su se razvile u okviru historijski uvjetovanih prilika. Prijevod je izrađen u onoj terminologiji koja je uobičajena u SRH, napose na Sveučilištu u Zagrebu, no sigurno je da će se tim tekstom sasvim lako poslužiti i oni koji su navikli na terminologiju upotrebljavanu, recimo, na Univerzitetu u Beogradu. Doduše, svaki je naš stručnjak navikao na jednu od tih dviju terminologija, ali se bez teškoća snalazi i u drugoj.

Pri redigiranju prijevoda ispravljene su neke manje greške, napose su korigirane dvije slike na kojima je Arhimedova zavojnica bila neispravno prikazana.

Vjerujem da će ovaj spretno sastavljeni priručnik s bogatim i dobro odabranim sadržajem iz područja više matematike i numeričke analize biti velika pomoć onima koji se matematikom služe i onima koji je žele naučiti.

D. Blanuša

IZ PREDGOVORA PRVOM RUSKOM IZDANJU

Zadaća koju smo postavili — da u malom volumenu priručnika sažeto damo osnove matematike, potrebne inženjerima i studentima pri studiju i u praksi — bila je veoma teška. U želji da knjiga bude sažeta, trudili smo se da priručnik bude razumljiv, prikladan pri korištenju i po mogućnosti matematički egzaktan (toliko koliko je matematička egzaktnost potrebna inženjerima).

Treba imati na umu da ovo nije udžbenik ni repetitorij udžbenika, već priručnik. Prema tome u njemu nema sistematičnosti koju mora imati udžbenik. Čitaoca ne treba iznenaditi da je npr. l'Hospitalovo pravilo uvršteno u poglavlje o računanju limesa, a ovo je u glavi »Uvod u analizu« smješteno ispred pojma o derivaciji, dok su osnovi gama-funkcije u glavi »Algebra« neposredno nakon pojma faktorijela. Takvih »nesistematičkih« mjesta ima u priručniku mnogo. Zato, ako čitalac želi nešto potražiti, neka se onda ne služi samo poglavljima navedenim u sadržaju, nego i abecednim kazalom na kraju priručnika.

Ako je u tekstu neko pitanje samo načeto, a na drugom je mjestu priručnika obrađeno opširnije, onda je to mjesto označeno stranicom u zagradama...

I. Bronštejn
K. Semendjajev

IZ PREDGOVORA TREĆEM RUSKOM IZDANJU

Za treće je izdanje bio gotovo iznova napisan IV dio »Osnovi matematičke analize«, a mnoge su nadopune unesene i u drugim poglavljima. Ispravljene su primijećene pogreške i nedostaci...

Poglavlja 8 do 10, glave »Diferencijalne jednadžbe« (rubni problemi i jednadžbe s parcijalnim derivacijama), uglavnom je napisao M. P. Šura-Bura...

I. Bronštejn
K. Semendjajev

SADRŽAJ

PRVI DIO

TABLICE I GRAFOVI

I. Tablice

II. Grafovi

DRUGI DIO

ELEMENTARNA MATEMATIKA

I. Pravila približnog računanja

II. Algebra

III. Geometrija

IV. Trigonometrija

TREĆI DIO

ANALITIČKA I DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

I. Analitička geometrija

II. Diferencijalna geometrija

ČETVRTI DIO

OSNOVI MATEMATIČKE ANALIZE

I. Uvod u analizu

II. Diferencijalni račun

III. Integralni račun

IV. Diferencijalne jednadžbe

PETI DIO

DOPUNSKA POGLAVLJA ANALIZE

I. Kompleksni brojevi i funkcije kompleksne varijable

II. Vektorski račun

III. Fourierovi redovi (harmonijska analiza)

ŠESTI DIO

OBRADA OPAŽANJA

I. Osnovi teorije vjerojatnosti i teorija pogrešaka

II. Empirijske formule i interpolacija

MATEMATIČKE OZNAKE

I. ODNOSI VELIČINA

$=$	jednako
$\equiv$	identično jednako
$\neq$	nejednako
$\approx$	približno jednako
$<$	manje
$>$	veće
$\leqslant$	manje ili jednako
$\geqslant$	veće ili jednako

II. ALGEBRA

$\lvert a \rvert$	apsolutna vrijednost broja a
$+$	(plus) — zbrajanje
$-$	(minus) — oduzimanje
$\cdot$ ili $\times$	množenje, na primjer: $a \cdot b$ i $a \times b$; znak za množenje često ispuštamo, na primjer: ab
$:$ ili —	dijeljenje $\left(a : b \text{ i } \frac{a}{b}\right)$
a^m	a na m
$\sqrt{}$	kvadratni korijen, na primjer: $\sqrt{a}$
$\sqrt[n]{}$	n-ti korijen, na primjer: $\sqrt[n]{a}$
$\log_b$	logaritam za bazu b, na primjer: $5 = \log_2 32$ (str. 149)
lg	logaritam za bazu 10, na primjer: $2 = \lg 100$ (str. 150)
ln	prirodni logaritam, na primjer: $1 = \ln e$ (str. 150)
( ), [ ], { }	zagrade (poređaj matematičkih operacija)
!	faktorijela, na primjer: a!, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ (str. 183)

* U zagradama su navedene stranice priručnika na kojima su razjašnjeni odgovarajući pojmovi.

III. GEOMETRIJA

$\perp$	okomito	
$\parallel$	paralelno	
$\#$	jednako i paralelno	
$\sim$	slično, na primjer: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	
$\triangle$	trokut	
$\angle$	kut (ponekad $\sphericalangle$), na primjer: $\angle ABC$, $\sphericalangle ABC$	
$\frown$	luk, na primjer: $\overset{\frown}{AB}$	
$^\circ$	stupanj	kutni ili lučni na primjer: $32^\circ 14' 11'',5$
$'$	minuta	
$''$	sekunda	

IV. TRIGONOMETRIJA, HIPERBOLNE FUNKCIJE

sin	sinus	(str. 204)
cos	kosinus	
tg	tangens	
ctg	kotangens	
sc	sekans	
csc	kosekans	
Arc sin	arkus-sinus	(str. 214)
Arc cos	arkus-kosinus	
Arc tg	arkus-tangens	
Arc ctg	arkus-kotangens	
arc sin	glavna vrijednost arkus-sinusa	(str. 214—215)
arc cos	glavna vrijednost arkus-kosinusa	
arc tg	glavna vrijednost arkus-tangensa	
arc ctg	glavna vrijednost arkus-kotangensa	
sh	hiperbolni sinus	(str. 221—222)
ch	hiperbolni kosinus	
th	hiperbolni tangens	
cth	hiperbolni kotangens	
sch	hiperbolni sekans	
csch	hiperbolni kosekans	
Ar sh	area-sinus hiperbolni	(str. 223—224)
Ar ch	area-kosinus hiperbolni	
Ar th	area-tangens hiperbolni	
Ar cth	area-kotangens hiperbolni	

V. OZNAKE KONSTANTI

const	stalna veličina (konstanta)
$\pi = 3{,}14159\ldots$	odnos opsega kružnice i promjera (str. 192)
$e = 2{,}71828\ldots$	baza prirodnih logaritama (str. 317)
$C = 0{,}57722\ldots$	Eulerova konstanta (str. 317)

VI. MATEMATIČKA ANALIZA

lim	limes (str. 305, 314)
$\to$	teži k...
∞	beskonačno
	na primjer $\lim\limits_{N \to \infty}\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e$
Σ	suma
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	suma u kojoj se i mijenja od 1 do n
$f(\,),\ \varphi(\,)$	oznaka funkcije, na primjer: $y = f(x)$, $u = \varphi(x, y, z)$
Δ	prirast, na primjer: Δx
d	diferencijal, na primjer: dx (str. 349)
d_x, d_y itd.	parcijalni diferencijal, na primjer: $\mathrm{d}_x u$ (str. 350)
$'$, $''$, $'''$, $^{\mathrm{IV}}$ ili $\dot{}$, $\ddot{}$, $\dddot{}$, ...	oznake uzastopnih derivacija funkcije jedne varijable: na primjer za funkciju $y = f(x)$: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{\mathrm{IV}}(x)$, y', y'', y''', y^{IV}, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$ (str. 347, 351)
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$	prva derivacija, druga derivacija, na primjer: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ itd.
D	znak za derivaciju (operator deriviranja) na primjer: $Dy = y'$, $D^2y = y''$ itd. (str. 347, 351)
f'_x, f''_{xx}, f''_{xy} ili $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$	parijalne derivacije, na primjer: $f_x'(u)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ itd. (str. 348, 352)
$\int$	integral (str. 384)
$\int\limits_a^b$	određeni integral od donje granice a do gornje granice b (str. 450)
$\int\limits_{(K)}$	krivuljni integral uzet po odsječku K i po projekciji odsječka K (str. 480, 482)

$\int\limits_S$, $\int\limits_V$	integral po površini S, po volumenu V (str. 489, 490)
$\int\int$	dvostruki integral (str. 489, 490)
$\int\int\int$	trostruki integral (str. 489, 490)

VII. KOMPLEKSNI BROJEVI

i (nekad j)	imaginarna jedinica ($i^2 = -1$) (str. 575)
R (a)	realni dio broja a (str. 575)
I (a)	imaginarni dio broja a (str. 575)
$\lvert a \rvert$	modul a (str. 576)
arg a	argument a (str. 576)
$\bar{a}$	konjugirano kompleksni broj a, npr.: $a = 2 + 3i$; $\bar{a} = 2 - 3i$ (str. 577)
Ln	logaritam (prirodni) kompleksnog broja (str. 582)

VIII. VEKTORSKI RAČUN

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ili **a**, **b**, **c**	oznaka vektora (str. 603)
$\mathbf{a}^0$	jedinični vektor istog smjera kao i vektor **a** (str. 604)
i, **j**, **k**	koordinatni jedinični vektor za pravokutni koordinatni sistem
$\lvert \mathbf{a} \rvert$ ili a	dužina (apsolutna vrijednost) vektora **a** (str. 604)
$\mathbf{a} = \mathbf{b}$	vektorska jednadžba (str. 604)
$\mathbf{a} + \mathbf{b}$	zbrajanje vektora (str. 604)
$\mathbf{a} - \mathbf{b}$	oduzimanje vektora (str. 604)
$\alpha\mathbf{a}$	množenje skalara s vektorom (str. 604)
ab	skalarno množenje vektora (str. 606)
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ili [**ab**]	vektorsko množenje vektora (str. 607)
$\mathbf{abc} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$	mješoviti produkt triju vektora (str. 608)
a_x, a_y, a_z	koordinate vektora **a** u Descartesovom sistemu (str. 605)
∇	Hamiltonov diferencijalni operator (»nabla«) (str. 632)
Δ	Laplaceov operator (str. 634)
grad	gradijent skalarnog polja (grad $\varphi = \nabla\varphi$) (str. 622)

div	divergencija vektorskog polja (div $\mathbf{V} = \nabla\mathbf{V}$) (str. 630)
rot	rotacija vektorskog polja (rot $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V}$) (str. 630)
$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}}$	derivacija skalarnog polja u smjeru **c** (str. 622)

GRČKI ALFABET

Α	α	alfa	Ι	ι	jota	Ρ	ρ	rho
Β	β	beta	Κ	κ	kapa	Σ	σ ς	sigma
Γ	γ	gama	Λ	λ	lambda	Τ	τ	tau
Δ	δ	delta	Μ	μ	mi	Υ	υ	ipsilon
Ε	ε	epsilon	Ν	ν	ni	Φ	φ	fi
Ζ	ζ	zeta	Ξ	ξ	ksi	Χ	χ	hi
Η	η	eta	Ο	ο	omikron	Ψ	ψ	psi
Θ	ϑ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

PRVI DIO

TABLICE I GRAFOVI

I. TABLICE

Interpolacija. Većina dalje odštampanih tablica daje vrijednosti funkcija s četiri značajne znamenke za vrijednosti troznamenkastih argumenata. U slučaju, kada je argumenat zadan s većom tačnošću, a traženu vrijednost funkcije ne možemo naći neposredno iz tablica, treba izvršiti interpolaciju. Najjednostavnija je *linearna interpolacija*, pri kojoj dopuštamo da je prirast funkcije proporcionalan prirastu argumenta. Ako zadana vrijednost argumenta x leži između tabličnih vrijednosti x_0 i $x_1 = x_0 + h$, kojima odgovaraju vrijednosti funkcija $y_0 = f(x_0)$ i $y_1 = f(x_1) = y_0 + \Delta$, tada dobivamo

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta.$$

Interpolacijsku korekturu $\frac{x - x_0}{h}\Delta$ možemo lako izračunati pomoću tablice proporcionalnih dijelova na str. 79 i 80, a također i iste tablice koja je priložena priručniku. Te tablice daju produkte Δ (od 11 do 90) sa 0,1, 0,2, ... 0,9.

Primjeri: 1) $1{,}6754^2$? U tablicama (str. 25) nalazimo: $1{,}67^2 = 2{,}789$; $1{,}68^2 = 2{,}822$; $\Delta = 33$*. Iz tablice proporcionalnih dijelova: $0{,}5 \cdot 33 = 16{,}5$; $0{,}04 \cdot 33 = 1{,}3$;

$$\frac{x - x_0}{h}\Delta = 16{,}5 + 1{,}3 \approx 18; \qquad 1{,}6754^2 = 2{,}807.$$

2) tg 79°24′? U tablicama (str. 58 i 80) nalazimo: tg 79°20′ = 5,309; tg 79°30′ = 5,396; $\Delta = 87$; $0{,}4 \cdot 87 \approx 35$, tg 79°24′ = 5,344.

Pogreška linearne interpolacije ne prelazi jedinicu reda posljednje značajne znamenke, samo ako se dvije susjedne diferencije Δ_0 i Δ_1 ne razlikuju za više od 4 jedinice (posljednje znamenke).

* Razliku Δ i korekciju obično izražavamo u jedinicama mjesne vrijednosti posljednje značajne znamenke, ne pripisujući decimalni zarez, ni nule ispred nje.

Ako taj uvjet nije ispunjen (kao npr. u tablici $\operatorname{tg} x$ pri $x > 80°$, str. 58) moramo se poslužiti složenijim interpolacijskim formulama. U većini slučajeva zadovoljava *kvadratna interpolacija* po Besselu:

$$f(x) = f(x_0) + k\Delta_0 - k_1(\Delta_1 - \Delta_{-1}),$$

gdje je

$$k = \frac{x - x_0}{h}, \text{ a } k_1 = \frac{k(1-k)}{4};$$

veličinu k_1 nalazimo u tablici na str. 81.

$x_{-1} = x_0 - h$	y_{-1}	Δ_{-1}
x_0	y_0	Δ_0
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δ_1
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	

Primjer: Treba naći $\operatorname{tg} 85°33'$ (tablica na str. 58). Nađemo ($h = 10'$): $k = 0{,}3$, $k_1 = 0{,}052$; korektura je jednaka

$$0{,}3 \cdot 491 - 0{,}052 \cdot 75 \approx 143;$$

$$\operatorname{tg} 85°33' = 12{,}849.$$

x	$\operatorname{tg} x$	Δ
85°20′	12,251	
		455
85°30′	12,706	
		491
85°40′	13,197	
		530
85°50′	13,727	

A. TABLICE OSNOVNIH (ELEMENTARNIH) FUNKCIJA

1. NEKE KONSTANTE KOJE NAM ČESTO TREBAJU

Veličina	n	$\lg n$	Veličina	n	$\lg n$
π	3,141593	0,49715	$1:\pi$	0,318310	$\bar{1}$,50285
2π	6,283185	0,79818	$1:2\pi$	0,159155	$\bar{1}$,20182
3π	9,424778	0,97427	$1:3\pi$	0,106103	$\bar{1}$,02573
4π	12,566371	1,09921	$1:4\pi$	0,079577	$\bar{2}$,90079
$\pi:2$	1,570796	0,19612	$2:\pi$	0,636620	$\bar{1}$,80388
$\pi:3$	1,047198	0,02003	$3:\pi$	0,954930	$\bar{1}$,97997
$\pi:4$	0,785398	$\bar{1}$,89509	$4:\pi$	1,273240	0,10491
$\pi:6$	0,523599	$\bar{1}$,71900	$6:\pi$	1,909859	0,28100
$\pi:180\ (=1°)$	0,017453	$\bar{2}$,24188	$180°:\pi$	57°,295780	1,75812
$\pi:10\,800\ (=1')$	0,000291	$\bar{4}$,46373	$10\,800':\pi$	3437′,7468	3,53627
$\pi:648\,000\ (=1'')$	0,000005	$\bar{6}$,68557	$648\,000'':\pi$	206264″,81	5,31443
π^2	9,869604	0,99430	$1:\pi^2$	0,101321	$\bar{1}$,00570
$\sqrt{\pi}$	1,772454	0,24857	$\sqrt{1:\pi}$	0,564190	$\bar{1}$,75143
$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,39909	$\sqrt{1:2\pi}$	0,398942	$\bar{1}$,60091
$\sqrt{\pi:2}$	1,253314	0,09806	$\sqrt{2:\pi}$	0,797885	$\bar{1}$,90194
$\sqrt[3]{\pi}$	1,464592	0,16572	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0,682784	$\bar{1}$,83428
$\sqrt[3]{4\pi:3}$	1,611992	0,20736	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0,620350	$\bar{1}$,79264
e	2,718282	0,43429	$1:e$	0,367879	$\bar{1}$,56571
e^2	7,389056	0,86859	$1:e^2$	0,135335	$\bar{1}$,13141
$\sqrt{e}$	1,648721	0,21715	$\sqrt{1:e}$	0,606531	$\bar{1}$,78285
$\sqrt[3]{e}$	1,395612	0,14476	$\sqrt[3]{1:e}$	0,716532	$\bar{1}$,85524
$e^{\pi:2}$	4,810477	0,68219	$e^{-\pi:2}$	0,207880	$\bar{1}$,31781
e^{π}	23,140693	1,36438	$e^{-\pi}$	0,043214	$\bar{2}$,63562
$e^{2\pi}$	535,491656	2,72875	$e^{-2\pi}$	0,001867	$\bar{3}$,27125
C*	0,577216	$\bar{1}$,76134	$\ln \pi$	1,144730	0,05870
$M = \lg e$	0,434294	$\bar{1}$,63778	$1:M = \ln 10$	2,302585	0,36222
g**	9,81	0,99167	$1:g$	0,10194	$\bar{1}$,00833
g^2	96,2361	1,98334	$1:2g$	0,050968	$\bar{2}$,70730
$\sqrt{g}$	3,13209	0,49583	$\pi\sqrt{g}$	9,83976	0,99298
$\sqrt{2g}$	4,42945	0,64635	$\pi\sqrt{2g}$	13,91552	1,14350

* C je Eulerova konstanta, vidi na str. 317.

** g je ubrzanje sile teže u m/s²; ovdje je dana zaokružena vrijednost g za nivo mora i 45 do 50° zemljine geografske širine.

2. KVADRATI, KUBI, KORIJENI

OBJAŠNJENJA TABLICE

Pomoću tablice na str. 24 do 43 možemo naći kvadrate, kube, kvadratne i kubne korijene na četiri značajne znamenke. Za argumente n između 1 i 10, veličine n^2 i n^3 nalazimo neposredno u tablicama ako su vrijednosti argumenta dane s tri značajne znamenke. *Na primjer*: $1{,}79^2 = 3{,}204$ (str. 25). Ako je vrijednost argumenta zadana sa više od tri značajne znamenke, moramo primijeniti interpolaciju (vidi str. 19). Za tu tablicu greška linearne interpolacije nigdje ne prelazi jednu jedinicu posljednje znamenke.

Kada tražimo n^2 i n^3 za $n > 10$ i $n < 1$ treba imati na umu da se kod povećanja broja n 10^k puta broj n^2 povećava 10^{2k}, n^3 10^{3k} puta, tj. kada decimalni zarez u n premjestimo za k mjesta na desno, kod n^2 treba ga premjestiti za $2k$, kod n^3 za $3k$ na desno. Pri tome, broju uzetom iz tablice pripišemo po potrebi nule s desne ili s lijeve strane. *Na primjer*: $0{,}179^2 = 0{,}03204$; $179^3 = 5\,735\,000$*.

Kvadratne korijene brojeva n između 1 i 100 možemo naći u tablicama [primjenom linearne interpolacije (str. 19)], a za neki drugi n po ovim pravilima:

1) Radikand podijelimo u grupe po dvije znamenke na jednu i drugu stranu od decimalnog zareza. 2) Ovisno o tome da li prva grupa s lijeve strane, koja se ne sastoji od nula, ima jednu ili dvije značajne znamenke, vrijednost korijena nađemo u koloni $\sqrt{n}$ ili $\sqrt{10n}$. 3) Nađenoj vrijednosti korijena odredimo mjesto decimalnog zareza prema pravilu: koliko grupa ima radikand lijevo od decimalnog zareza, toliko znamenaka ima korijen prije decimalnog zareza, odnosno, za radikand manji od 1, koliko grupa nula ima desno od decimalnog zareza, toliko nula ima korijen iza decimalnog zareza.

Primjer: 1) $\sqrt{23{,}9} = 4{,}889$; 2) $\sqrt{0{,}00|02|39} = 0{,}01546$; 3) $\sqrt{23|90|00} = 488{,}9$; 4) $\sqrt{0{,}00|3} = 0{,}05477$. (U posljednjem primjeru treba u mislima radikandu dodati još jednu nulu, da se posljednja grupa popuni; zato korijen treba tražiti u koloni $\sqrt{10n}$.)

Kubne korijene za brojeve n između 1 i 1000 možemo naći neposredno iz tablica (s primjenom linearne interpolacije) a za neki drugi n po ovim pravilima:

1) Radikand podijelimo u grupe po tri znamenke na obje strane od decimalnog zareza. 2) Ovisno o tome da li prva grupa s lijeve strane koja se ne sastoji od nula ima jednu, dvije ili tri značajne znamenke, vrijednost korijena nađemo u koloni $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[3]{10n}$ ili $\sqrt[3]{100n}$. 3) Nađenoj vrijednosti korijena odredimo položaj decimalnog zareza jednako kao i za kvadratni korijen.

Primjeri: 1) $\sqrt[3]{23{,}9} = 2{,}880$*; 2) $\sqrt[3]{239|000} = 62{,}06$;

3) $\sqrt[3]{0{,}000|002|39} = 0{,}01337$; 4) $\sqrt[3]{0{,}000|3} = 0{,}06694$;

5) $\sqrt[3]{0{,}03} = 0{,}3107$.

(U posljednja dva primjera treba u mislima radikandu dodati još dvije odnosno jednu nulu.)

---

* Bolje je pisati $179^3 = 5{,}735 \cdot 10^6$, kako bi izbjegli upotrebu nula kao zamjenu za nepoznate znamenke (tačno $179^3 = 5735339$).

* Nulu na kraju treba zadržati, jer je ona značajna znamenka (vidi str. 128) i karakterizira tačnost dobivene vrijednosti korijena.

Kvadrati, kubi, kvadratni i kubni korijeni

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,00	1,000	1,000	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642
1,01	1,020	1,030	1,005	3,178	1,003	2,162	4,657
1,02	1,040	1,061	1,010	3,194	1,007	2,169	4,672
1,03	1,061	1,093	1,015	3,209	1,010	2,176	4,688
1,04	1,082	1,125	1,020	3,225	1,013	2,183	4,703
1,05	1,102	1,158	1,025	3,240	1,016	2,190	4,718
1,06	1,124	1,191	1,030	3,256	1,020	2,197	4,733
1,07	1,145	1,225	1,034	3,271	1,023	2,204	4,747
1,08	1,166	1,260	1,039	3,286	1,026	2,210	4,762
1,09	1,188	1,295	1,044	3,302	1,029	2,217	4,777
1,10	1,210	1,331	1,049	3,317	1,032	2,224	4,791
1,11	1,232	1,368	1,054	3,332	1,035	2,231	4,806
1,12	1,254	1,405	1,058	3,347	1,038	2,237	4,820
1,13	1,277	1,443	1,063	3,362	1,042	2,244	4,835
1,14	1,300	1,482	1,068	3,376	1,045	2,251	4,849
1,15	1,322	1,521	1,072	3,391	1,048	2,257	4,863
1,16	1,346	1,561	1,077	3,406	1,051	2,264	4,877
1,17	1,369	1,602	1,082	3,421	1,054	2,270	4,891
1,18	1,392	1,643	1,086	3,435	1,057	2,277	4,905
1,19	1,416	1,685	1,091	3,450	1,060	2,283	4,919
1,20	1,440	1,728	1,095	3,464	1,063	2,289	4,932
1,21	1,464	1,772	1,100	3,479	1,066	2,296	4,946
1,22	1,488	1,816	1,105	3,493	1,069	2,302	4,960
1,23	1,513	1,861	1,109	3,507	1,071	2,308	4,973
1,24	1,538	1,907	1,114	3,521	1,074	2,315	4,987
1,25	1,562	1,953	1,118	3,536	1,077	2,321	5,000
1,26	1,588	2,000	1,122	3,550	1,080	2,327	5,013
1,27	1,613	2,048	1,127	3,564	1,083	2,333	5,027
1,28	1,638	2,097	1,131	3,578	1,086	2,339	5,040
1,29	1,664	2,147	1,136	3,592	1,089	2,345	5,053
1,30	1,690	2,197	1,140	3,606	1,091	2,351	5,066
1,31	1,716	2,248	1,145	3,619	1,094	2,357	5,079
1,32	1,742	2,300	1,149	3,633	1,097	2,363	5,092
1,33	1,769	2,353	1,153	3,647	1,100	2,369	5,104
1,34	1,796	2,406	1,158	3,661	1,102	2,375	5,117
1,35	1,822	2,460	1,162	3,674	1,105	2,381	5,130
1,36	1,850	2,515	1,166	3,688	1,108	2,387	5,143
1,37	1,877	2,571	1,170	3,701	1,111	2,393	5,155
1,38	1,904	2,628	1,175	3,715	1,113	2,399	5,168
1,39	1,932	2,686	1,179	3,728	1,116	2,404	5,180
1,40	1,960	2,744	1,183	3,742	1,119	2,410	5,192
1,41	1,988	2,803	1,187	3,755	1,121	2,416	5,205
1,42	2,016	2,863	1,192	3,768	1,124	2,422	5,217
1,43	2,045	2,924	1,196	3,782	1,127	2,427	5,229
1,44	2,074	2,986	1,200	3,795	1,129	2,433	5,241
1,45	2,102	3,049	1,204	3,808	1,132	2,438	5,254

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,45	2,102	3,049	1,204	3,808	1,132	2,438	5,254
1,46	2,132	3,112	1,208	3,821	1,134	2,444	5,266
1,47	2,161	3,177	1,212	3,834	1,137	2,450	5,278
1,48	2,190	3,242	1,217	3,847	1,140	2,455	5,290
1,49	2,220	3,308	1,221	3,860	1,142	2,461	5,301
1,50	2,250	3,375	1,225	3,873	1,145	2,466	5,313
1,51	2,280	3,443	1,229	3,886	1,147	2,472	5,325
1,52	2,310	3,512	1,233	3,899	1,150	2,477	5,337
1,53	2,341	3,582	1,237	3,912	1,152	2,483	5,348
1,54	2,372	3,652	1,241	3,924	1,155	2,488	5,360
1,55	2,402	3,724	1,245	3,937	1,157	2,493	5,372
1,56	2,434	3,796	1,249	3,950	1,160	2,499	5,383
1,57	2,465	3,870	1,253	3,962	1,162	2,504	5,395
1,58	2,496	3,944	1,257	3,975	1,165	2,509	5,406
1,59	2,528	4,020	1,261	3,987	1,167	2,515	5,418
1,60	2,560	4,096	1,265	4,000	1,170	2,520	5,429
1,61	2,592	4,173	1,269	4,012	1,172	2 525	5,440
1,62	2,624	4,252	1,273	4,025	1,174	2,530	5,451
1,63	2,657	4,331	1,277	4,037	1,177	2,535	5.463
1,64	2,690	4,411	1,281	4,050	1,179	2,541	5,474
1,65	2,722	4,492	1,285	4,062	1,182	2,546	5,485
1,66	2,756	4,574	1,288	4,074	1,184	2,551	5,496
1,67	2,789	4,657	1,292	4,087	1,186	2,556	5.507
1,68	2,822	4,742	1,296	4,099	1,189	2,561	5,518
1,69	2,856	4,827	1,300	4,111	1,191	2,566	5,529
1,70	2,890	4,913	1,304	4,123	1,193	2,571	5,540
1,71	2,924	5,000	1,308	4,135	1,196	2,576	5,550
1,72	2,958	5,088	1,311	4,147	1,198	2,581	5,561
1,73	2,993	5,178	1,315	4,159	1,200	2,586	5,572
1,74	3,028	5,268	1,319	4,171	1,203	2,591	5,583
1,75	3,062	5,359	1,323	4,183	1,205	2,596	5,593
1,76	3,098	5,452	1,327	4,195	1,207	2,601	5,604
1,77	3,133	5,545	1,330	4,207	1,210	2,606	5,615
1,78	3,168	5,640	1,334	4,219	1,212	2,611	5,625
1,79	3,204	5,735	1,338	4,231	1,214	2,616	5,636
1,80	3,240	5,832	1,342	4,243	1,216	2,621	5,646
1,81	3,276	5,930	1,345	4,254	1,219	2,626	5,657
1,82	3,312	6,029	1,349	4,266	1,221	2,630	5,667
1,83	3,349	6,128	1,353	4,278	1,223	2,635	5,677
1,84	3,386	6,230	1,356	4,290	1,225	2,640	5,688
1,85	3.422	6,332	1,360	4,301	1,228	2,645	5,698
1,86	3,460	6,435	1,364	4,313	1,230	2,650	5,708
1,87	3,497	6,539	1,367	4.324	1,232	2,654	5,718
1,88	3,534	6,645	1,371	4,336	1,234	2,659	5,729
1,89	3,572	6,751	1,375	4,347	1,236	2,664	5,739
1,90	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,90	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749
1,91	3,648	6,968	1,382	4,370	1,241	2,673	5,759
1,92	3,686	7,078	1,386	4,382	1,243	2,678	5,769
1,93	3,725	7,189	1,389	4,393	1,245	2,682	5,779
1,94	3,764	7,301	1,393	4,405	1,247	2,687	5,789
1,95	3,802	7,415	1,396	4,416	1,249	2,692	5,799
1,96	3,842	7,530	1,400	4,427	1,251	2,696	5,809
1,97	3,881	7,645	1,404	4,438	1,254	2,701	5,819
1,98	3,920	7,762	1,407	4,450	1,256	2,705	5,828
1,99	3,960	7,881	1,411	4,461	1,258	2,710	5,838
2,00	4,000	8,000	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848
2,01	4,040	8,121	1,418	4,483	1,262	2,719	5,858
2,02	4,080	8,242	1,421	4,494	1,264	2,723	5,867
2,03	4,121	8.365	1,425	4,506	1,266	2,728	5,877
2,04	4,162	8,490	1,428	4,517	1,268	2,732	5,887
2,05	4,202	8,615	1,432	4,528	1,270	2,737	5,896
2,06	4,244	8,742	1,435	4,539	1,272	2,741	5,906
2,07	4,285	8,870	1,439	4,550	1,274	2,746	5,915
2,08	4,326	8,999	1,442	4,561	1,277	2,750	5,925
2,09	4,368	9,129	1,446	4,572	1,279	2,755	5,934
2,10	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944
2,11	4,452	9,394	1,453	4,593	1,283	2,763	5,953
2,12	4,494	9,528	1,456	4,604	1,285	2,768	5,963
2,13	4,537	9,664	1,459	4,615	1,287	2,772	5,972
2,14	4,580	9,800	1,463	4,626	1,289	2,776	5,981
2,15	4,622	9,938	1,466	4,637	1,291	2,781	5,991
2,16	4,666	10,08	1,470	4,648	1,293	2,785	6,000
2,17	4,709	10,22	1,473	4,658	1,295	2,789	6,009
2,18	4,752	10,36	1,476	4,669	1,297	2,794	6,018
2,19	4,796	10,50	1,480	4,680	1,299	2,798	6,028
2,20	4,840	10,65	1,483	4,690	1,301	2,802	6,037
2,21	4,884	10,79	1,487	4,701	1,303	2,806	6,046
2,22	4,928	10,94	1,490	4,712	1,305	2,811	6,055
2,23	4,973	11,09	1,493	4,722	1,306	2,815	6,064
2,24	5,018	11,24	1,497	4,733	1,308	2,819	6,073
2,25	5,062	11,39	1,500	4,743	1,310	2,823	6,082
2,26	5,108	11,54	1,503	4,754	1,312	2,827	6,091
2,27	5,153	11,70	1,507	4,764	1,314	2,831	6,100
2,28	5,198	11,85	1,510	4,775	1,316	2,836	6,109
2,29	5,244	12,01	1,513	4,785	1,318	2,840	6,118
2,30	5,290	12,17	1,517	4,796	1,320	2,844	6,127
2,31	5,336	12,33	1,520	4,806	1,322	2,848	6,136
2,32	5,382	12,49	1,523	4,817	1,324	2,852	6,145
2,33	5,429	12,65	1,526	4,827	1,326	2,856	6,153
2,34	5,476	12,81	1,530	4,837	1,328	2,860	6,162
2,35	5,522	12,98	1,533	4,848	1,330	2,864	6,171

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,35	5,522	12,98	1,533	4,848	1,330	2,864	6,171
2,36	5,570	13,14	1,536	4,858	1,331	2,868	6,180
2,37	5,617	13,31	1,539	4,868	1,333	2,872	6,188
2,38	5,664	13,48	1,543	4,879	1,335	2,876	6,197
2,39	5,712	13,65	1,546	4,889	1,337	2,880	6,206
2,40	5,760	13,82	1,549	4,899	1,339	2,884	6,214
2,41	5,808	14,00	1,552	4,909	1,341	2,888	6,223
2,42	5,856	14,17	1,556	4,919	1,343	2,892	6,232
2,43	5,905	14,35	1,559	4,930	1,344	2,896	6,240
2,44	5,954	14,53	1,562	4,940	1,346	2,900	6,249
2,45	6,002	14,71	1,565	4,950	1,348	2,904	6,257
2,46	6,052	14,89	1,568	4,960	1,350	2,908	6,266
2,47	6,101	15,07	1,572	4,970	1,352	2,912	6,274
2,48	6,150	15,25	1,575	4,980	1,354	2,916	6,283
2,49	6,200	15,44	1,578	4,990	1,355	2,920	6,291
2,50	6,250	15,62	1,581	5,000	1,357	2,924	6,300
2,51	6,300	15,81	1,584	5,010	1,359	2,928	6,308
2,52	6,350	16,00	1,587	5,020	1,361	2,932	6,316
2,53	6,401	16,19	1,591	5,030	1,363	2,936	6,325
2,54	6,452	16,39	1,594	5,040	1,364	2,940	6,333
2,55	6,502	16,58	1,597	5,050	1,366	2,943	6,341
2,56	6,554	16,78	1,600	5,060	1,368	2,947	6,350
2,57	6,605	16,97	1,603	5,070	1,370	2,951	6,358
2,58	6,656	17,17	1,606	5,079	1,372	2,955	6,366
2,59	6,708	17,37	1,609	5,089	1,373	2,959	6,374
2,60	6,760	17,58	1,612	5,099	1,375	2,962	6,383
2,61	6,812	17,78	1,616	5,109	1,377	2,966	6,391
2,62	6,864	17,98	1,619	5,119	1,379	2,970	6,399
2,63	6,917	18,19	1,622	5,128	1,380	2,974	6,407
2,64	6,970	18,40	1,625	5,138	1,382	2,978	6,415
2,65	7,022	18,61	1,628	5,148	1,384	2,981	6,423
2,66	7,076	18,82	1,631	5,158	1,386	2,985	6,431
2,67	7,129	19,03	1,634	5,167	1,387	2,989	6,439
2,68	7,182	19,25	1,637	5,177	1,389	2,993	6,447
2,69	7,236	19,47	1,640	5,187	1,391	2,996	6,455
2,70	7,290	19,68	1,643	5,196	1,392	3,000	6,463
2,71	7,344	19,90	1,646	5,206	1,394	3,004	6,471
2,72	7,398	20,12	1,649	5,215	1,396	3,007	6,479
2,73	7,453	20,35	1,652	5,225	1,398	3,011	6,487
2,74	7,508	20,57	1,655	5,235	1,399	3,015	6,495
2,75	7,562	20,80	1,658	5,244	1,401	3,018	6,503
2,76	7,618	21,02	1,661	5,254	1,403	3,022	6,511
2,77	7,673	21,25	1,664	5,263	1,404	3,026	6,519
2,78	7,728	21,48	1,667	5,273	1,406	3,029	6,527
2,79	7,784	21,72	1,670	5,282	1,408	3,033	6,534
2,80	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,80	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542
2,81	7,896	22,19	1,676	5,301	1,411	3,040	6,550
2,82	7,952	22,43	1,679	5,310	1,413	3,044	6,558
2,83	8,009	22,67	1,682	5,320	1,414	3,047	6,565
2,84	8,066	22,91	1,685	5,329	1,416	3,051	6,573
2,85	8,122	23,15	1,688	5,339	1,418	3,055	6,581
2,86	8,180	23,39	1,691	5,348	1,419	3,058	6,589
2,87	8,237	23,64	1,694	5,357	1,421	3,062	6,596
2,88	8,294	23,89	1,697	5,367	1,423	3,065	6,604
2,89	8,352	24,14	1,700	5,376	1,424	3,069	6,611
2,90	8,410	24,39	1,703	5,385	1,426	3,072	6,619
2,91	8,468	24,64	1,706	5,394	1,428	3,076	6,627
2,92	8,526	24,90	1,709	5,404	1,429	3,079	6,634
2,93	8,585	25,15	1,712	5,413	1,431	3,083	6,642
2,94	8,644	25,41	1,715	5,422	1,433	3,086	6,649
2,95	8,702	25,67	1,718	5,431	1,434	3,090	6,657
2,96	8,762	25,93	1,720	5,441	1,436	3,093	6,664
2,97	8,821	26,20	1,723	5,450	1,437	3,097	6,672
2,98	8,880	26,46	1,726	5,459	1,439	3,100	6,679
2,99	8,940	26,73	1,729	5,468	1,441	3,104	6,687
3,00	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694
3,01	9,060	27,27	1,735	5,486	1,444	3,111	6,702
3,02	9,120	27,54	1,738	5,495	1,445	3,114	6,709
3,03	9,181	27,82	1,741	5,505	1,447	3,118	6,717
3,04	9,242	28,09	1,744	5,514	1,449	3,121	6,724
3,05	9,302	28,37	1,746	5,523	1,450	3,124	6,731
3,06	9,364	28,65	1,749	5,532	1,452	3,128	6,739
3,07	9,425	28,93	1,752	5,541	1,453	3,131	6,746
3,08	9,486	29,22	1,755	5,550	1,455	3,135	6,753
3,09	9,548	29,50	1,758	5,559	1,457	3,138	6,761
3,10	9,610	29,79	1,761	5,568	1,458	3,141	6,768
3,11	9,672	30,08	1,764	5,577	1,460	3,145	6,775
3,12	9,734	30,37	1,766	5,586	1,461	3,148	6,782
3,13	9,797	30,66	1,769	5,595	1,463	3,151	6,790
3,14	9,860	30,96	1,772	5,604	1,464	3,155	6,797
3,15	9,922	31,26	1,775	5,612	1,466	3,158	6,804
3,16	9,986	31,55	1,778	5,621	1,467	3,162	6,811
3,17	10,05	31,86	1,780	5,630	1,469	3,165	6,818
3,18	10,11	32,16	1,783	5,639	1,471	3,168	6,826
3,19	10,18	32,46	1,786	5,648	1,472	3,171	6,833
3,20	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840
3,21	10,30	33,08	1,792	5,666	1,475	3,178	6,847
3,22	10,37	33,39	1,794	5,675	1,477	3,181	6,854
3,23	10,43	33,70	1,797	5,683	1,478	3,185	6,861
3,24	10,50	34,01	1,800	5,692	1,480	3,188	6,868
3,25	10,56	34,33	1,803	5,701	1,481	3,191	6,875

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,25	10,56	34,33	1,803	5,701	1,481	3,191	6,875
3,26	10,63	34,65	1,806	5,710	1,483	3,195	6,882
3,27	10,69	34,97	1,808	5,718	1,484	3,198	6,889
3,28	10,76	35,29	1,811	5,727	1,486	3,201	6,896
3,29	10,82	35,61	1,814	5,736	1,487	3,204	6,903
3,30	10,89	35,94	1,817	5,745	1,489	3,208	6,910
3,31	10,96	36,26	1,819	5,753	1,490	3,211	6,917
3,32	11,02	36,59	1,822	5,762	1,492	3,214	6,924
3,33	11,09	36,93	1,825	5,771	1,493	3,217	6,931
3,34	11,16	37,26	1,828	5,779	1,495	3,220	6,938
3,35	11,22	37,60	1,830	5,788	1,496	3,224	6,945
3,36	11,29	37,93	1,833	5,797	1,498	3,227	6,952
3,37	11,36	38,27	1,836	5,805	1,499	3,230	6,959
3,38	11,42	38,61	1,838	5,814	1,501	3,233	6,966
3,39	11,49	38,96	1,841	5,822	1,502	3,236	6,973
3,40	11,56	39,30	1,844	5,831	1,504	3,240	6,980
3,41	11,63	39,65	1,847	5,840	1,505	3,243	6,986
3,42	11,70	40,00	1,849	5,848	1,507	3,246	6,993
3,43	11,76	40,35	1,852	5,857	1,508	3,249	7,000
3,44	11,83	40,71	1,855	5,865	1,510	3,252	7,007
3,45	11,90	41,06	1,857	5,874	1,511	3,255	7,014
3,46	11,97	41,42	1,860	5,882	1,512	3,259	7,020
3,47	12,04	41,78	1,863	5,891	1,514	3,262	7,027
3,48	12,11	42,14	1,865	5,899	1,515	3,265	7,034
3,49	12,18	42,51	1,868	5,908	1,517	3,268	7,041
3,50	12,25	42,88	1,871	5,916	1,518	3,271	7,047
3,51	12,32	43,24	1,873	5,925	1,520	3,274	7,054
3,52	12,39	43,61	1,876	5,933	1,521	3,277	7,061
3,53	12,46	43,99	1,879	5,941	1,523	3,280	7,067
3,54	12,53	44,36	1,881	5,950	1,524	3,283	7,074
3,55	12,60	44,74	1,884	5,958	1,525	3,287	7,081
3,56	12,67	45,12	1,887	5,967	1,527	3,290	7,087
3,57	12,74	45,50	1,889	5,975	1,528	3,293	7,094
3,58	12,82	45,88	1,892	5,983	1,530	3,296	7,101
3,59	12,89	46,27	1,895	5,992	1,531	3,299	7,107
3,60	12,96	46,66	1,897	6,000	1,533	3,302	7,114
3,61	13,03	47,05	1,900	6,008	1,534	3,305	7,120
3,62	13,10	47,44	1,903	6,017	1,535	3,308	7,127
3,63	13,18	47,83	1,905	6,025	1,537	3,311	7,133
3,64	13,25	48,23	1,908	6,033	1,538	3,314	7,140
3,65	13,32	48,63	1,910	6,042	1,540	3,317	7,147
3,66	13,40	49,03	1,913	6,050	1,541	3,320	7,153
3,67	13,47	49,43	1,916	6,058	1,542	3,323	7,160
3,68	13,54	49,84	1,918	6,066	1,544	3,326	7,166
3,69	13,62	50,24	1,921	6,075	1,545	3,329	7,173
3,70	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,70	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179
3,71	13,76	51,06	1,926	6,091	1,548	3,335	7,186
3,72	13,84	51,48	1,929	6,099	1,549	3,338	7,192
3,73	13,91	51,90	1,931	6,107	1,551	3,341	7,198
3,74	13,99	52,31	1,934	6,116	1,552	3,344	7,205
3,75	14,06	52,73	1,936	6,124	1,554	3,347	7,211
3,76	14,14	53,16	1,939	6,132	1,555	3,350	7,218
3,77	14,21	53,58	1,942	6,140	1,556	3,353	7,224
3,78	14,29	54,01	1,944	6,148	1,558	3,356	7,230
3,79	14,36	54,44	1,947	6,156	1,559	3,359	7,237
3,80	14,44	54,87	1,949	6,164	1,560	3,362	7,243
3,81	14,52	55,31	1,952	6,173	1,562	3,365	7,250
3,82	14,59	55,74	1,954	6,181	1,563	3,368	7,256
3,83	14,67	56,18	1,957	6,189	1,565	3,371	7,262
3,84	14,75	56,62	1,960	6,197	1,566	3,374	7,268
3,85	14,82	57,07	1,962	6,205	1,567	3,377	7,275
3,86	14,90	57,51	1,965	6,213	1,569	3,380	7,281
3,87	14,98	57,96	1,967	6,221	1,570	3,382	7,287
3,88	15,05	58,41	1,970	6,229	1,571	3,385	7,294
3,89	15,13	58,86	1,972	6,237	1,573	3,388	7,300
3,90	15,21	59,32	1,975	6,245	1,574	3,391	7,306
3,91	15,29	59,78	1,977	6,253	1,575	3,394	7,312
3,92	15,37	60,24	1,980	6,261	1,577	3,397	7,319
3,93	15,44	60,70	1,982	6,269	1,578	3,400	7,325
3,94	15,52	61,16	1,985	6,277	1,579	3,403	7,331
3,95	15,60	61,63	1,987	6,285	1,581	3,406	7,337
3,96	15,68	62,10	1,990	6,293	1,582	3,409	7,343
3,97	15,76	62,57	1,992	6,301	1,583	3,411	7,350
3,98	15,84	63,04	1,995	6,309	1,585	3,414	7,356
3,99	15,92	63,52	1,997	6,317	1,586	3,417	7,362
4,00	16,00	64,00	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368
4,01	16,08	64,48	2,002	6,332	1,589	3,423	7,374
4,02	16,16	64,96	2,005	6,340	1,590	3,426	7,380
4,03	16,24	65,45	2,007	6,348	1,591	3,428	7,386
4,04	16,32	65,94	2,010	6,356	1,593	3,431	7,393
4,05	16,40	66,43	2,012	6,364	1 594	3,434	7,399
4,06	16,48	66,92	2,015	6,372	1,595	3,437	7,405
4,07	16,56	67,42	2,017	6,380	1,597	3,440	7,411
4,08	16 65	67,92	2,020	6,387	1,598	3,443	7,417
4,09	16,73	68,42	2,022	6.395	1,599	3,445	7,423
4,10	16,81	68,92	2,025	6,403	1,601	3,448	7,429
4,11	16,89	69,43	2,027	6,411	1,602	3,451	7,435
4,12	16,97	69,93	2,030	6,419	1,603	3,454	7,441
4,13	17,06	70,44	2,032	6,427	1,604	3,457	7,447
4,14	17,14	70,96	2,035	6,434	1,606	3,459	7,453
4,15	17,22	71,47	2,037	6,442	1,607	3,462	7,459

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,15	17,22	71,47	2,037	6,442	1,607	3,462	7,459
4,16	17,31	71,99	2,040	6,450	1,608	3,465	7,465
4,17	17,39	72,51	2,042	6,458	1,610	3,468	7,471
4,18	17,47	73,03	2,045	6,465	1,611	3,471	7,477
4,19	17,56	73,56	2,047	6,473	1,612	3,473	7,483
4,20	17,64	74,09	2,049	6,481	1,613	3,476	7,489
4,21	17,72	74,62	2,052	6,488	1,615	3,479	7,495
4,22	17,81	75,15	2,054	6,496	1,616	3,482	7,501
4,23	17,89	75,69	2,057	6,504	1,617	3,484	7,507
4,24	17,98	76,23	2,059	6,512	1,619	3,487	7,513
4,25	18,06	76,77	2,062	6,519	1,620	3,490	7,518
4,26	18,15	77,31	2,064	6,527	1,621	3,493	7,524
4,27	18,23	77,85	2,066	6,535	1,622	3,495	7,530
4,28	18,32	78,40	2,069	6,542	1,624	3,498	7,536
4,29	18,40	78,95	2,071	6,550	1,625	3,501	7,542
4,30	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548
4,31	18,58	80,06	2,076	6,565	1,627	3,506	7,554
4,32	18,66	80,62	2,078	6,573	1,629	3,509	7,560
4,33	18,75	81,18	2,081	6,580	1,630	3,512	7,565
4,34	18,84	81,75	2,083	6,588	1,631	3,514	7,571
4,35	18,92	82,31	2,086	6,595	1,632	3,517	7,577
4,36	19,01	82,88	2,088	6,603	1,634	3,520	7,583
4,37	19,10	83,45	2,090	6,611	1,635	3,522	7,589
4,38	19,18	84,03	2,093	6,618	1,636	3,525	7,594
4,39	19,27	84,60	2,095	6,626	1,637	3,528	7,600
4,40	19,36	85,18	2,098	6,633	1,639	3,530	7,606
4,41	19,45	85,77	2,100	6,641	1,640	3,533	7,612
4,42	19,54	86,35	2,102	6,648	1,641	3,536	7,617
4,43	19,62	86,94	2,105	6,656	1,642	3,538	7,623
4,44	19,71	87,53	2,107	6,663	1,644	3,541	7,629
4,45	19,80	88,12	2,110	6,671	1,645	3,544	7,635
4,46	19,89	88,72	2,112	6,678	1,646	3,546	7,640
4,47	19,98	89,31	2,114	6,686	1,647	3,549	7,646
4,48	20,07	89,92	2,117	6,693	1,649	3,552	7,652
4,49	20,16	90,52	2,119	6,701	1,650	3,554	7,657
4,50	20,25	91,12	2,121	6,708	1,651	3,557	7,663
4,51	20,34	91,73	2,124	6,716	1,652	3,560	7,669
4,52	20,43	92,35	2,126	6,723	1,653	3,562	7,674
4,53	20,52	92,96	2,128	6,731	1,655	3,565	7,680
4,54	20,61	93,58	2,131	6,738	1,656	3,567	7,686
4,55	20,70	94,20	2,133	6,745	1,657	3,570	7,691
4,56	20,79	94,82	2,135	6,753	1,658	3,573	7,697
4,57	20,88	95,44	2,138	6,760	1,659	3,575	7,703
4,58	20,98	96,07	2,140	6,768	1,661	3,578	7,708
4,59	21,07	96,70	2,142	6,775	1,662	3,580	7,714
4,60	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,60	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719
4,61	21,25	97,97	2,147	6,790	1,664	3,586	7,725
4,62	21,34	98,61	2,149	6,797	1,666	3,588	7,731
4,63	21,44	99,25	2,152	6,804	1,667	3,591	7,736
4,64	21,53	99,90	2,154	6,812	1,668	3,593	7,742
4,65	21,62	100,5	2,156	6,819	1,669	3,596	7.747
4,66	21,72	101,2	2,159	6,826	1,670	3,599	7,753
4,67	21,81	101,8	2,161	6,834	1,671	3,601	7,758
4,68	21,90	102,5	2,163	6,841	1,673	3,604	7,764
4,69	22,00	103,2	2,166	6,848	1,674	3,606	7,769
4,70	22,09	103,8	2,168	6,856	1,675	3,609	7,775
4,71	22,18	104,5	2,170	6,863	1,676	3,611	7,780
4,72	22,28	105,2	2,173	6,870	1,677	3,614	7,786
4,73	22,37	105,8	2,175	6,877	1,679	3,616	7,791
4,74	22,47	106,5	2,177	6,885	1,680	3,619	7,797
4,75	22,56	107,2	2,179	6,892	1,681	3,622	7,802
4,76	22,66	107,9	2,182	6,899	1,682	3,624	7,808
4,77	22,75	108,5	2,184	6,907	1,683	3,627	7,813
4,78	22,85	109,2	2,186	6,914	1,685	3,629	7,819
4,79	22,94	109,9	2,189	6,921	1,686	3,632	7,824
4,80	23,04	110,6	2,191	6,928	1,687	3,634	7,830
4,81	23,14	111,3	2,193	6,935	1,688	3,637	7,835
4,82	23,23	112,0	2,195	6,943	1,689	3,639	7,841
4,83	23,33	112,7	2,198	6,950	1,690	3,642	7,846
4,84	23,43	113,4	2,200	6,957	1,692	3,644	7,851
4,85	23,52	114,1	2,202	6,964	1,693	3,647	7,857
4,86	23,62	114,8	2,205	6,971	1,694	3,649	7,862
4,87	23,72	115,5	2,207	6,979	1,695	3,652	7,868
4,88	23,81	116,2	2,209	6,986	1,696	3,654	7,873
4,89	23,91	116,9	2,211	6,993	1,697	3,657	7,878
4,90	24,01	117,6	2,214	7,000	1,698	3,659	7,884
4,91	24,11	118,4	2,216	7,007	1,700	3,662	7,889
4,92	24,21	119,1	2,218	7,014	1,701	3,664	7,894
4,93	24,30	119,8	2,220	7,021	1,702	3,667	7,900
4,94	24,40	120,6	2,223	7,029	1,703	3,669	7,905
4,95	24,50	121,3	2,225	7,036	1,704	3,672	7,910
4,96	24,60	122,0	2,227	7,043	1,705	3,674	7,916
4,97	24,70	122,8	2,229	7,050	1,707	3,677	7,921
4,98	24,80	123,5	2,232	7,057	1,708	3,679	7,926
4,99	24,90	124,3	2,234	7,064	1,709	3,682	7,932
5,00	25,00	125,0	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937
5,01	25,10	125,8	2,238	7,078	1,711	3,686	7,942
5,02	25,20	126,5	2,241	7,085	1,712	3,689	7,948
5,03	25,30	127,3	2,243	7,092	1,713	3,691	7,953
5,04	25,40	128,0	2,245	7,099	1,715	3,694	7,958
5,05	25,50	128,8	2,247	7,106	1,716	3,696	7,963

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,05	25,50	128,8	2,247	7,106	1,716	3,696	7,963
5,06	25,60	129,6	2,249	7,113	1,717	3,699	7,969
5,07	25,70	130,3	2,252	7,120	1,718	3,701	7,974
5,08	25,81	131,1	2,254	7,127	1,719	3,704	7,979
5,09	25,91	131,9	2,256	7,134	1,720	3,706	7,984
5,10	26,01	132,7	2,258	7,141	1,721	3,708	7,990
5,11	26,11	133,4	2,261	7,148	1,722	3,711	7,995
5,12	26,21	134,2	2,263	7,155	1,724	3,713	8,000
5,13	26,32	135,0	2,265	7,162	1,725	3,716	8,005
5,14	26,42	135,8	2,267	7,169	1,726	3,718	8,010
5,15	26,52	136,6	2,269	7,176	1,727	3,721	8,016
5,16	26,63	137,4	2,272	7,183	1,728	3,723	8,021
5,17	26,73	138,2	2,274	7,190	1,729	3,725	8,026
5,18	26,83	139,0	2,276	7,197	1,730	3,728	8,031
5,19	26,94	139,8	2,278	7,204	1,731	3,730	8,036
5,20	27,04	140,6	2,280	7,211	1,732	3,733	8,041
5,21	27,14	141,4	2,283	7,218	1,734	3,735	8,047
5,22	27,25	142,2	2,285	7,225	1,735	3,737	8,052
5,23	27,35	143,1	2,287	7,232	1,736	3,740	8,057
5,24	27,46	143,9	2,289	7,239	1,737	3,742	8,062
5,25	27,56	144,7	2,291	7,246	1,738	3,744	8,067
5,26	27,67	145,5	2,293	7,253	1,739	3,747	8,072
5,27	27,77	146,4	2,296	7,259	1,740	3,749	8,077
5,28	27,88	147,2	2,298	7,266	1,741	3,752	8,082
5,29	27,98	148,0	2,300	7,273	1,742	3,754	8,088
5,30	28,09	148,9	2,302	7,280	1,744	3,756	8,093
5,31	28,20	149,7	2,304	7,287	1,745	3,759	8,098
5,32	28,30	150,6	2,307	7,294	1,746	3,761	8,103
5,33	28,41	151,4	2,309	7,301	1,747	3,763	8,108
5,34	28,52	152,3	2,311	7,308	1,748	3,766	8,113
5,35	28,62	153,1	2,313	7,314	1,749	3,768	8,118
5,36	28,73	154,0	2,315	7,321	1,750	3,770	8,123
5,37	28,84	154,9	2,317	7,328	1,751	3,773	8,128
5,38	28,94	155,7	2,319	7,335	1,752	3,775	8,133
5,39	29,05	156,6	2,322	7,342	1,753	3,777	8,138
5,40	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143
5,41	29,27	158,3	2,326	7,355	1,755	3,782	8,148
5,42	29,38	159,2	2,328	7,362	1,757	3,784	8,153
5,43	29,48	160,1	2,330	7,369	1,758	3,787	8,158
5,44	29,59	161,0	2,332	7,376	1,759	3,789	8,163
5,45	29,70	161,9	2,335	7,382	1,760	3,791	8,168
5,46	29,81	162,8	2,337	7,389	1,761	3,794	8,173
5,47	29,92	163,7	2,339	7,396	1,762	3,796	8,178
5,48	30,03	164,6	2,341	7,403	1,763	3,798	8,183
5,49	30,14	165,5	2,343	7,409	1,764	3,801	8,188
5,50	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,50	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193
5,51	30,36	167,3	2,347	7,423	1,766	3,805	8,198
5,52	30,47	168,2	2,349	7,430	1,767	3,808	8,203
5,53	30,58	169,1	2,352	7,436	1,768	3,810	8,208
5,54	30,69	170,0	2,354	7,443	1,769	3,812	8,213
5,55	30,80	171,0	2,356	7,450	1,771	3,814	8,218
5,56	30,91	171,9	2,358	7,457	1,772	3,817	8,223
5,57	31,02	172,8	2,360	7,463	1,773	3,819	8,228
5,58	31,14	173,7	2,362	7,470	1,774	3,821	8,233
5,59	31,25	174,7	2,364	7,477	1,775	3,824	8,238
5,60	31,36	175,6	2,366	7,483	1,776	3,826	8,243
5,61	31,47	176,6	2,369	7,490	1,777	3,828	8,247
5,62	31,58	177,5	2,371	7,497	1,778	3,830	8,252
5,63	31,70	178,5	2,373	7,503	1,779	3,833	8,257
5,64	31,81	179,4	2,375	7,510	1,780	3,835	8,262
5,65	31,92	180,4	2,377	7,517	1,781	3,837	8,267
5,66	32,04	181,3	2,379	7,523	1,782	3,839	8,272
5,67	32,15	182,3	2,381	7,530	1,783	3,842	8,277
5,68	32,26	183,3	2,383	7,537	1,784	3,844	8,282
5,69	32,38	184,2	2,385	7,543	1,785	3,846	8,286
5,70	32,49	185,2	2,387	7,550	1,786	3,849	8,291
5,71	32,60	186,2	2,390	7,556	1,787	3,851	8,296
5,72	32,72	187,1	2,392	7,563	1,788	3,853	8,301
5,73	32,83	188,1	2,394	7,570	1,789	3,855	8,306
5,74	32,95	189,1	2,396	7,576	1,790	3,857	8,311
5,75	33,06	190,1	2,398	7,583	1,792	3,860	8,316
5,76	33,18	191,1	2,400	7,589	1,793	3,862	8,320
5,77	33,29	192,1	2,402	7,596	1,794	3,864	8,325
5,78	33,41	193,1	2,404	7,603	1,795	3,866	8,330
5,79	33,52	194,1	2,406	7,609	1,796	3,869	8,335
5,80	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340
5,81	33,76	196,1	2,410	7,622	1,798	3,873	8,344
5,82	33,87	197,1	2,412	7,629	1,799	3,875	8,349
5,83	33,99	198,2	2,415	7,635	1,800	3,878	8,354
5,84	34,11	199,2	2,417	7,642	1,801	3,880	8,359
5,85	34,22	200,2	2,419	7,649	1,802	3,882	8,363
5,86	34,34	201,2	2,421	7,655	1,803	3,884	8,368
5,87	34,46	202,3	2,423	7,662	1,804	3,886	8,373
5,88	34,57	203,3	2,425	7,668	1,805	3,889	8,378
5,89	34,69	204,3	2,427	7,675	1,806	3,891	8,382
5,90	34,81	205,4	2,429	7,681	1,807	3,893	8,387
5,91	34,93	206,4	2,431	7,688	1,808	3,895	8,392
5,92	35,05	207,5	2,433	7,694	1,809	3,897	8,397
5,93	35,16	208,5	2,435	7,701	1,810	3,900	8,401
5,94	35,28	209,6	2,437	7,707	1,811	3,902	8,406
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411
5,96	35,52	211,7	2,441	7,720	1,813	3,906	8,416
5,97	35,64	212,8	2,443	7,727	1,814	3,908	8,420
5,98	35,76	213,8	2,445	7,733	1,815	3,911	8,425
5,99	35,88	214,9	2,447	7,740	1,816	3,913	8,430
6,00	36,00	216,0	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434
6,01	36,12	217,1	2,452	7,752	1,818	3,917	8,439
6,02	36,24	218,2	2,454	7,759	1,819	3,919	8,444
6,03	36,36	219,3	2,456	7,765	1,820	3,921	8,448
6,04	36,48	220,3	2,458	7,772	1,821	3,924	8,453
6,05	36,60	221,4	2,460	7,778	1,822	3,926	8,458
6,06	36,72	222,5	2,462	7,785	1,823	3,928	8,462
6,07	36,84	223,6	2,464	7,791	1,824	3,930	8,467
6,08	36,97	224,8	2,466	7,797	1,825	3,932	8,472
6,09	37,09	225,9	2,468	7,804	1,826	3,934	8,476
6,10	37,21	227,0	2,470	7,810	1,827	3,936	8,481
6,11	37,33	228,1	2,472	7,817	1,828	3,939	8,486
6,12	37,45	229,2	2,474	7,823	1,829	3,941	8,490
6,13	37,58	230,3	2,476	7,829	1,830	3,943	8,495
6,14	37,70	231,5	2,478	7,836	1,831	3,945	8,499
6,15	37,82	232,6	2,480	7,842	1,832	3,947	8,504
6,16	37,95	233,7	2,482	7,849	1,833	3,949	8,509
6,17	38,07	234,9	2,484	7,855	1,834	3,951	8,513
6,18	38,19	236,0	2,486	7,861	1,835	3,954	8,518
6,19	38,32	237,2	2,488	7,868	1,836	3,956	8,522
6,20	38,44	238,3	2,490	7,874	1,837	3,958	8,527
6,21	38,56	239,5	2,492	7,880	1,838	3,960	8,532
6,22	38,69	240,6	2,494	7,887	1,839	3,962	8,536
6,23	38,81	241,8	2,496	7,893	1,840	3,964	8,541
6,24	38,94	243,0	2,498	7,899	1,841	3,966	8,545
6,25	39,06	244,1	2,500	7,906	1,842	3,969	8,550
6,26	39,19	245,3	2 502	7,912	1,843	3,971	8,554
6,27	39,31	246,5	2,504	7,918	1,844	3,973	8,559
6,28	39,44	247,7	2,506	7,925	1,845	3,975	8,564
6,29	39,56	248,9	2,508	7,931	1,846	3,977	8,568
6,30	39,69	250,0	2,510	7,937	1,847	3,979	8,573
6,31	39,82	251,2	2,512	7,944	1,848	3,981	8,577
6,32	39,94	252,4	2,514	7,950	1,849	3,983	8,582
6,33	40,07	253,6	2,516	7,956	1,850	3,985	8,586
6,34	40,20	254,8	2,518	7,962	1,851	3,987	8,591
6,35	40,32	256,0	2,520	7,969	1,852	3,990	8,595
6,36	40,45	257,3	2,522	7,975	1,853	3,992	8,600
6,37	40,58	258,5	2,524	7,981	1,854	3,994	8,604
6,38	40,70	259,7	2,526	7,987	1,855	3,996	8,609
6,39	40,83	260,9	2,528	7,994	1,856	3,998	8,613
6,40	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
6,40	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618
6,41	41,09	263,4	2,532	8,006	1,858	4,002	8,622
6,42	41,22	264,6	2,534	8,012	1,859	4,004	8,627
6,43	41,34	265,8	2,536	8,019	1,860	4,006	8,631
6,44	41,47	267,1	2,538	8,025	1,860	4,008	8,636
6,45	41,60	268,3	2,540	8,031	1,861	4,010	8,640
6,46	41,73	269,6	2,542	8,037	1,862	4,012	8,645
6,47	41,86	270,8	2,544	8,044	1,863	4,015	8,649
6,48	41,99	272,1	2,546	8,050	1,864	4,017	8,653
6,49	42,12	273,4	2,548	8,056	1,865	4,019	8,658
6,50	42,25	274,6	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662
6,51	42,38	275,9	2,551	8,068	1,867	4,023	8,667
6,52	42,51	277,2	2,553	8,075	1,868	4,025	8,671
6,53	42,64	278,4	2,555	8,081	1,869	4,027	8,676
6,54	42,77	279,7	2,557	8,087	1,870	4,029	8,680
6,55	42,90	281,0	2,559	8,093	1,871	4,031	8,685
6,56	43,03	282,3	2,561	8,099	1,872	4,033	8,689
6,57	43,16	283,6	2,563	8,106	1,873	4,035	8,693
6,58	43,30	284,9	2,565	8,112	1,874	4,037	8,698
6,59	43,43	286,2	2,567	8,118	1,875	4,039	8,702
6,60	43,56	287,5	2,569	8,124	1,876	4,041	8,707
6,61	43,69	288,8	2,571	8,130	1,877	4,043	8,711
6,62	43,82	290,1	2,573	8,136	1,878	4,045	8,715
6,63	43,96	291,4	2,575	8,142	1,879	4,047	8,720
6,64	44,09	292,8	2,577	8,149	1,880	4,049	8,724
6,65	44,22	294,1	2,579	8,155	1,881	4,051	8,729
6,66	44,36	295,4	2,581	8,161	1,881	4,053	8,733
6,67	44,49	296,7	2,583	8,167	1,882	4,055	8,737
6,68	44,62	298,1	2,585	8,173	1,883	4,058	8,742
6,69	44,76	299,4	2,587	8,179	1,884	4,060	8,746
6,70	44,89	300,8	2,588	8,185	1,885	4,062	8,750
6,71	45,02	302,1	2,590	8,191	1,886	4,064	8,755
6,72	45,16	303,5	2,592	8,198	1,887	4,066	8,759
6,73	45,29	304,8	2,594	8,204	1,888	4,068	8,763
6,74	45,43	306,2	2,596	8,210	1,889	4,070	8,768
6,75	45,56	307,5	2,598	8,216	1,890	4,072	8,772
6,76	45,70	308,9	2,600	8,222	1,891	4,074	8,776
6,77	45,83	310,3	2,602	8,228	1,892	4,076	8,781
6,78	45,97	311,7	2,604	8,234	1,893	4,078	8,785
6,79	46,10	313,0	2,606	8,240	1,894	4,080	8,789
6,80	46,24	314,4	2,608	8,246	1,895	4,082	8,794
6,81	46,38	315,8	2,610	8,252	1,895	4,084	8,798
6,82	46,51	317,2	2,612	8,258	1,896	4,086	8,802
6,83	46,65	318,6	2,613	8,264	1,897	4,088	8,807
6,84	46,79	320,0	2,615	8,270	1,898	4,090	8,811
6,85	46,92	321,4	2,617	8,276	1,899	4,092	8,815

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
6,85	46,92	321,4	2,617	8,276	1,899	4,092	8,815
6,86	47,06	322,8	2,619	8,283	1,900	4,094	8,819
6,87	47,20	324,2	2,621	8,289	1,901	4,096	8,824
6,88	47,33	325,7	2,623	8,295	1,902	4,098	8,828
6,89	47,47	327,1	2,625	8,301	1,903	4,100	8,832
6,90	47,61	328,5	2,627	8,307	1,904	4,102	8,837
6,91	47,75	329,9	2,629	8,313	1,905	4,104	8,841
6,92	47,89	331,4	2,631	8,319	1,906	4,106	8,845
6,93	48,02	332,8	2,632	8,325	1,907	4,108	8,849
6,94	48,16	334,3	2,634	8,331	1,907	4,109	8,854
6,95	48,30	335,7	2,636	8,337	1,908	4,111	8,858
6,96	48,44	337,2	2,638	8,343	1,909	4,113	8,862
6,97	48,58	338,6	2,640	8,349	1,910	4,115	8,866
6,98	48,72	340,1	2,642	8,355	1,911	4,117	8,871
6,99	48,86	341,5	2,644	8,361	1,912	4,119	8,875
7,00	49,00	343,0	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879
7,01	49,14	344,5	2,648	8,373	1,914	4,123	8,883
7,02	49,28	345,9	2,650	8,379	1,915	4,125	8,887
7,03	49,42	347,4	2,651	8,385	1,916	4,127	8,892
7,04	49,56	348,9	2,653	8,390	1,917	4,129	8,896
7,05	49,70	350,4	2,655	8,396	1,917	4,131	8,900
7,06	49,84	351,9	2,657	8,402	1,918	4,133	8,904
7,07	49,98	353,4	2,659	8,408	1,919	4,135	8,909
7,08	50,13	354,9	2,661	8,414	1,920	4,137	8,913
7,09	50,27	356,4	2,663	8,420	1,921	4,139	8,917
7,10	50,41	357,9	2,665	8,426	1,922	4,141	8,921
7,11	50,55	359,4	2,666	8,432	1,923	4,143	8,925
7,12	50,69	360,9	2,668	8,438	1,924	4,145	8,929
7,13	50,84	362,5	2,670	8,444	1,925	4,147	8,934
7,14	50,98	364,0	2,672	8,450	1,926	4,149	8,938
7,15	51,12	365,5	2,674	8,456	1,926	4,151	8,942
7,16	51,27	367,1	2,676	8,462	1,927	4,152	8,946
7,17	51,41	368,6	2,678	8,468	1,928	4,154	8,950
7,18	51,55	370,1	2,680	8,473	1,929	4,156	8,955
7,19	51,70	371,7	2,681	8,479	1,930	4,158	8,959
7,20	51,84	373,2	2,683	8,485	1,931	4,160	8,963
7,21	51,98	374,8	2,685	8,491	1,932	4,162	8,967
7,22	52,13	376,4	2,687	8,497	1,933	4,164	8,971
7,23	52,27	377,9	2,689	8,503	1,934	4,166	8,975
7,24	52,42	379,5	2,691	8,509	1,935	4,168	8,979
7,25	52,56	381,1	2,693	8,515	1,935	4,170	8,984
7,26	52,71	382,7	2,694	8,521	1,936	4,172	8,988
7,27	52,85	384,2	2,696	8,526	1,937	4,174	8,992
7,28	53,00	385,8	2,698	8,532	1,938	4,176	8,996
7,29	53,14	387,4	2,700	8,538	1,939	4,177	9,000
7,30	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,30	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004
7,31	53,44	390,6	2,704	8,550	1,941	4,181	9,008
7,32	53,58	392,2	2,706	8,556	1,942	4,183	9,012
7,33	53,73	393,8	2,707	8,562	1,943	4,185	9,016
7,34	53,88	395,4	2,709	8,567	1,943	4,187	9,021
7,35	54,02	397,1	2,711	8,573	1,944	4,189	9,025
7,36	54,17	398,7	2,713	8,579	1,945	4,191	9,029
7,37	54,32	400,3	2,715	8,585	1,946	4,193	9,033
7,38	54,46	401,9	2,717	8,591	1,947	4,195	9,037
7,39	54,61	403,6	2,718	8,597	1,948	4,196	9,041
7,40	54,76	405,2	2,720	8,602	1,949	4,198	9,045
7,41	54,91	406,9	2,722	8,608	1,950	4,200	9,049
7,42	55,06	408,5	2,724	8,614	1,950	4,202	9,053
7,43	55,20	410,2	2,726	8,620	1,951	4,204	9,057
7,44	55,35	411,8	2,728	8,626	1,952	4,206	9,061
7,45	55,50	413,5	2,729	8,631	1,953	4,208	9,065
7,46	55,65	415,2	2,731	8,637	1,954	4,210	9,069
7,47	55,80	416,8	2,733	8,643	1,955	4,212	9,073
7,48	55,95	418,5	2,735	8,649	1,956	4,213	9,078
7,49	56,10	420,2	2,737	8,654	1,957	4,215	9,082
7,50	56,25	421,9	2,739	8,660	1,957	4,217	9,086
7,51	56,40	423,6	2,740	8,666	1,958	4,219	9,090
7,52	56,55	425,3	2,742	8,672	1,959	4,221	9,094
7,53	56,70	427,0	2,744	8,678	1,960	4,223	9,098
7 54	56,85	428,7	2,746	8,683	7,961	4,225	9,102
7,55	57,00	430,4	2,748	8,689	1,962	4,227	9,106
7,56	57,15	432,1	2,750	8,695	1,963	4,228	9,110
7,57	57,30	433,8	2,751	8,701	1,964	4,230	9,114
7,58	57,46	435,5	2,753	8,706	1,964	4,232	9,118
7,59	57,61	437,2	2,755	8,712	1,965	4,234	9,122
7,60	57,76	439,0	2,757	8,718	1,966	4,236	9,126
7,61	57,91	440,7	2,759	8,724	1,967	4,238	9,130
7,62	58,06	442,5	2,760	8,729	1,968	4,240	9,134
7,63	58,22	444,2	2,762	8,735	1,969	4,241	9,138
7,64	58,37	445,9	2,764	8,741	1,970	4,243	9,142
7,65	58,52	447,7	2,766	8,746	1,970	4,245	9,146
7,66	58,68	449,5	2,768	8,752	1,971	4,247	9,150
7,67	58,83	451,2	2,769	8,758	1,972	4,249	9,154
7,68	58,98	453,0	2,771	8,764	1,973	4,251	9,158
7,69	59,14	454,8	2,773	8,769	1,974	4,252	9,162
7,70	59,29	456,5	2,775	8,775	1,975	4,254	9,166
7,71	59,44	458,3	2,777	8,781	1,976	4,256	9,170
7,72	59,60	460,1	2,778	8,786	1,976	4,258	9,174
7,73	59,75	461,9	2,780	8,792	1,977	4,260	9,178
7,74	59,91	463,7	2,782	8,798	1,978	4,262	9,182
7,75	60,06	465,5	2,784	8,803	1,979	4,264	9,185

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,75	60,06	465,5	2,784	8,803	1,979	4,264	9,185
7,76	60,22	467,3	2,786	8,809	1,980	4,265	9,189
7,77	60,37	469,1	2,787	8,815	1,981	4,267	9,193
7,78	60,53	470,9	2,789	8,820	1,981	4,269	9,197
7,79	60,68	472,7	2,791	8,826	1,982	4,271	9,201
7,80	60,84	474,6	2,793	8,832	1,983	4,273	9,205
7,81	61,00	476,4	2,795	8,837	1,984	4,274	9,209
7,82	61,15	478,2	2,796	8,843	1,985	4,276	9,213
7,83	61,31	480,0	2,798	8,849	1,986	4,278	9,217
7,84	61,47	481,9	2,800	8,854	1,987	4,280	9,221
7,85	61,62	483,7	2,802	8,860	1,987	4,282	9,225
7,86	61,78	485,6	2,804	8,866	1,988	4,284	9,229
7,87	61,94	487,4	2,805	8,871	1,989	4,285	9,233
7,88	62,09	489,3	2,807	8,877	1,990	4,287	9,237
7,89	62,25	491,2	2,809	8,883	1,991	4,289	9,240
7,90	62,41	493,0	2,811	8,888	1,992	4,291	9,244
7,91	62,57	494,9	2,812	8,894	1,992	4,293	9,248
7 92	62,73	496,8	2,814	8,899	1,993	4,294	9,252
7,93	62,88	498,7	2,816	8,905	1,994	4,296	9,256
7,94	63,04	500,6	2,818	8,911	1,995	4,298	9,260
7,95	63,20	502,5	2,820	8,916	1,996	4,300	9,264
7,96	63,36	504,4	2,821	8,922	1,997	4,302	9,268
7,97	63,52	506,3	2,823	8,927	1,997	4,303	9,272
7,98	63,68	508,2	2,825	8,933	1,998	4,305	9,275
7,99	63,84	510,1	2,827	8,939	1,999	4,307	9,279
8,00	64,00	512,0	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283
8,01	64,16	513,9	2,830	8,950	2,001	4,311	9,287
8,02	64,32	515,8	2,832	8,955	2,002	4,312	9,291
8,03	64,48	517,8	2,834	8,961	2,002	4,314	9,295
8,04	64,64	519,7	2,835	8,967	2,003	4,316	9,299
8,05	64,80	521,7	2,837	8,972	2,004	4,318	9,302
8,06	64,96	523,6	2,839	8,978	2,005	4,320	9,306
8,07	65,12	525,6	2,841	8,983	2,006	4,321	9,310
8,08	65,29	527,5	2,843	8,989	2,007	4,323	9,314
8,09	65,45	529,5	2,844	8,994	2,007	4,325	9,318
8,10	65,61	531,4	2,846	9,000	2,008	4,327	9,322
8,11	65,77	533,4	2,848	9,006	2,009	4,329	9,326
8,12	65,93	535,4	2,850	9,011	2,010	4,330	9,329
8,13	66,10	537,4	2,851	9,017	2,011	4,332	9,333
8,14	66,26	539,4	2,853	9,022	2,012	4,334	9,337
8,15	66,42	541,3	2,855	9,028	2,012	4,336	9,341
8,16	66,59	543,3	2,857	9,033	2,013	4,337	9,345
8,17	66,75	545,3	2,858	9,039	2,014	4,339	9,348
8,18	66,91	547,3	2,860	9,044	2,015	4,341	9,352
8,19	67,08	549,4	2,862	9,050	2,016	4,343	9,356
8,20	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,20	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360
8,21	67,40	553,4	2,865	9,061	2,017	4,346	9,364
8,22	67,57	555,4	2,867	9,066	2,018	4,348	9,368
8,23	67,73	557,4	2,869	9,072	2,019	4,350	9,371
8,24	67,90	559,5	2,871	9,077	2,020	4,352	9,375
8,25	68,06	561,5	2,872	9,083	2,021	4,353	9,379
8,26	68,23	563,6	2,874	9,088	2,021	4,355	9,383
8,27	68,39	565,6	2,876	9,094	2,022	4,357	9,386
8,28	68,56	567,7	2,877	9,099	2,023	4,359	9,390
8,29	68,72	569,7	2,879	9,105	2,024	4,360	9,394
8,30	68,89	571,8	2,881	9,110	2,025	4,362	9,398
8,31	69,06	573,9	2,883	9,116	2,026	4,364	9,402
8,32	69,22	575,9	2,884	9,121	2,026	4,366	9,405
8,33	69,39	578,0	2,886	9,127	2,027	4,367	9,409
8,34	69,56	580,1	2,888	9,132	2,028	4,369	9,413
8,35	69,72	582,2	2,890	9,138	2,029	4,371	9,417
8,36	69,89	584,3	2,891	9,143	2,030	4,373	9,420
8,37	70,06	586,4	2,893	9,149	2,030	4,374	9,424
8,38	70,22	588,5	2,895	9,154	2,031	4,376	9,428
8,39	70,39	590,6	2,897	9,160	2,032	4,378	9,432
8,40	70,56	592,7	2,898	9,165	2,033	4,380	9,435
8,41	70,73	594,8	2,900	9,171	2,034	4,381	9,439
8,42	70,90	596,9	2,902	9,176	2,034	4,383	9,443
8,43	71,06	599,1	2,903	9,182	2,035	4,385	9,447
8,44	71,23	601,2	2,905	9,187	2,036	4,386	9,450
8,45	71,40	603,4	2,907	9,192	2,037	4,388	9,454
8,46	71,57	605,5	2,909	9,198	2,038	4,390	9,458
8,47	71,74	607,6	2,910	9,203	2,038	4,392	9,462
8,48	71,91	609,8	2,912	9,209	2,039	4,393	9,465
8,49	72,08	612,0	2,914	9,214	2,040	4,395	9,469
8,50	72,25	614,1	2,915	9,220	2,041	4,397	9,473
8,51	72,42	616,3	2,917	9,225	2,042	4,399	9,476
8,52	72,59	618,5	2,919	9,230	2,042	4,400	9,480
8,53	72,76	620,7	2,921	9,236	2,043	4,402	9,484
8,54	72,93	622,8	2,922	9,241	2,044	4,404	9,488
8,55	73,10	625,0	2,924	9,247	2,045	4,405	9,491
8,56	73,27	627,2	2,926	9,252	2,046	4,407	9,495
8,57	73,44	629,4	2,927	9,257	2,046	4,409	9,499
8,58	73,62	631,6	2,929	9,263	2,047	4,411	9,502
8,59	73,79	633,8	2,931	9,268	2,048	4,412	9,506
8,60	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510
8,61	74,13	638,3	2,934	9,279	2,050	4,416	9,513
8,62	74,30	640,5	2,936	9,284	2,050	4,417	9,517
8,63	74,48	642,7	2,938	9,290	2,051	4,419	9,521
8,64	74,65	645,0	2,939	9,295	2,052	4,421	9,524
8,65	74,82	647,2	2,941	9,301	2,053	4,423	9,528

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,65	74,82	647,2	2,941	9,301	2,053	4,423	9,528
8,66	75,00	649,5	2,943	9,306	2,054	4,424	9,532
8,67	75,17	651,7	2,944	9,311	2,054	4,426	9,535
8,68	75,34	654,0	2,946	9,317	2,055	4,428	9,539
8,69	75,52	656,2	2,948	9,322	2,056	4,429	9,543
8,70	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546
8,71	75,86	660,8	2,951	9,333	2,057	4,433	9,550
8,72	76,04	663,1	2,953	9,338	2,058	4,434	9,554
8,73	76,21	665,3	2,955	9,343	2,059	4,436	9,557
8,74	76,39	667,6	2,956	9,349	2,060	4,438	9,561
8,75	76,56	669,9	2,958	9,354	2,061	4,440	9,565
8,76	76,74	672,2	2,960	9,359	2,061	4,441	9,568
8,77	76,91	674,5	2,961	9,365	2,062	4,443	9,572
8,78	77,09	676,8	2,963	9,370	2,063	4,445	9,576
8,79	77,26	679,2	2,965	9,375	2,064	4,446	9,579
8,80	77,44	681,5	2,966	9,381	2,065	4,448	9,583
8,81	77,62	683,8	2,968	9,386	2,065	4,450	9,586
8,82	77,79	686,1	2,970	9,391	2,066	4,451	9,590
8,83	77,97	688,5	2,972	9,397	2,067	4,453	9,594
8,84	78,15	690,8	2,973	9,402	2,068	4,455	9,597
8,85	78,32	693,2	2,975	9,407	2,068	4,456	9,601
8,86	78,50	695,5	2,977	9,413	2,069	4,458	9,605
8,87	78,68	697,9	2,978	9,418	2,070	4,460	9,608
8,88	78,85	700,2	2,980	9,423	2,071	4,461	9,612
8,89	79,03	702,6	2,982	9,429	2,072	4,463	9,615
8,90	79,21	705,0	2,983	9,434	2,072	4,465	9,619
8,91	79,39	707,3	2,985	9,439	2,073	4,466	9,623
8,92	79,57	709,7	2,987	9,445	2,074	4,468	9,626
8,93	79,74	712,1	2,988	9,450	2,075	4,470	9,630
8,94	79,92	714,5	2,990	9,455	2,075	4,471	9,633
8,95	80,10	716,9	2,992	9,460	2,076	4,473	9,637
8,96	80,28	719,3	2,993	9,466	2,077	4,475	9,641
8,97	80,46	721,7	2,995	9,471	2,078	4,476	9,644
8,98	80,64	724,2	2,997	9,476	2,079	4,478	9,648
8,99	80,82	726,6	2,998	9,482	2,079	4,480	9,651
9,00	81,00	729,0	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655
9,01	81,18	731,4	3,002	9,492	2,081	4,483	9,658
9,02	81,36	733,9	3,003	9,497	2,082	4,485	9,662
9,03	81,54	736,3	3,005	9,503	2,082	4,486	9,666
9,04	81,72	738,8	3,007	9,508	2,083	4,488	9,669
9,05	81,90	741,2	3,008	9,513	2,084	4,490	9,673
9,06	82,08	743,7	3,010	9,518	2,085	4,491	9,676
9,07	82,26	746,1	3,012	9,524	2,085	4,493	9,680
9,08	82,45	748,6	3,013	9,529	2,086	4,495	9,683
9,09	82,63	751,1	3,015	9,534	2,087	4,496	9,687
9,10	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,10	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691
9,11	82,99	756,1	3,018	9,545	2,089	4,500	9,694
9,12	83,17	758,6	3,020	9,550	2,089	4,501	9,698
9,13	83,36	761,0	3,022	9,555	2,090	4,503	9,701
9,14	83,54	763,6	3,023	9,560	2,091	4,505	9,705
9,15	83,72	766,1	3,025	9,566	2,092	4,506	9,708
9,16	83,91	768,6	3,027	9,571	2,092	4,508	9,712
9,17	84,09	771,1	3,028	9,576	2,093	4,509	9,715
9,18	84,27	773,6	3,030	9,581	2,094	4,511	9,719
9,19	84,46	776,2	3,032	9,586	2,095	4,513	9,722
9,20	84,64	778,7	3,033	9,592	2,095	4,514	9,726
9,21	84,82	781,2	3,035	9,597	2,096	4,516	9,729
9,22	85,01	783,8	3,036	9,602	2,097	4,518	9,733
9,23	85,19	786,3	3,038	9,607	2,098	4,519	9,736
9,24	85,38	788,9	3,040	9,612	2,098	4,521	9,740
9,25	85,56	791,5	3,041	9,618	2,099	4,523	9,743
9,26	85,75	794,0	3,043	9,623	2,100	4,524	9,747
9,27	85,93	796,6	3,045	9,628	2,101	4,526	9,750
9,28	86,12	799,2	3,046	9,633	2,101	4,527	9,754
9,29	86,30	801,8	3,048	9,638	2,102	4,529	9,758
9,30	86,49	804,4	3,050	9,644	2,103	4,531	9,761
9,31	86,68	807,0	3,051	9,649	2,104	4,532	9,764
9,32	86,86	809,6	3,053	9,654	2,104	4,534	9,768
9,33	87,05	812,2	3,055	9,659	2,105	4,536	9,771
9,34	87,24	814,8	3,056	9,664	2,106	4,537	9,775
9,35	87,42	817,4	3,058	9,670	2,107	4,539	9,778
9,36	87,61	820,0	3,059	9,675	2,107	4,540	9,782
9,37	87,80	822,7	3,061	9,680	2,108	4,542	9,785
9,38	87,98	825,3	3,063	9,685	2,109	4,544	9,789
9,39	88,17	827,9	3,064	9,690	2,110	4,545	9,792
9,40	88,36	830,6	3,066	9,695	2,110	4,547	9,796
9,41	88,55	833,2	3,068	9,701	2,111	4,548	9,799
9,42	88,74	835,9	3,069	9,706	2,112	4,550	9,803
9,43	88,92	838,6	3,071	9,711	2,113	4,552	9,806
9,44	89,11	841,2	3,072	9,716	2,113	4,553	9,810
9,45	89,30	843,9	3,074	9,721	2,114	4,555	9,813
9,46	89,49	846,6	3,076	9,726	2,115	4,556	9,817
9,47	89,68	849,3	3,077	9,731	2,116	4,558	9,820
9,48	89,87	852,0	3,079	9,737	2,116	4,560	9,824
9,49	90,06	854,7	3,081	9,742	2,117	4,561	9,827
9,50	90,25	857,4	3,082	9,747	2,118	4,563	9,830
9,51	90,44	860,1	3,084	9,752	2,119	4,565	9,834
9,52	90,63	862,8	3,085	9,757	2,119	4,566	9,837
9,53	90,82	865,5	3,087	9,762	2,120	4,568	9,841
9,54	91,01	868,3	3,089	9,767	2,121	4,569	9,844
9,55	91,20	871,0	3,090	9,772	2,122	4,571	9,848

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,55	91,20	871,0	3,090	9,772	2,122	4,571	9,848
9,56	91,39	873,7	3,092	9,778	2,122	4,572	9,851
9,57	91,58	876,5	3,094	9,783	2,123	4,574	9,855
9,58	91,78	879,2	3,095	9,788	2,124	4,576	9,858
9,59	91,97	882,0	3,097	9,793	2,125	4,577	9,861
9,60	92,16	884,7	3,098	9,798	2,125	4,579	9,865
9,61	92,35	887,5	3,100	9,803	2,126	4,580	9,868
9,62	92,54	890,3	3,102	9,808	2,127	4,582	9,872
9,63	92,74	893,1	3,103	9,813	2,128	4,584	9,875
9,64	92,93	895,8	3,105	9,818	2,128	4,585	9,879
9,65	93,12	898,6	3,106	9,823	2,129	4,587	9,882
9,66	93,32	901,4	3,108	9,829	2,130	4,588	9,885
9,67	93,51	904,2	3,110	9,834	2,130	4,590	9,889
9,68	93,70	907,0	3,111	9,839	2,131	4,592	9,892
9,69	93,90	909,9	3,113	9,844	2,132	4,593	9,896
9,70	94,09	912,7	3,114	9,849	2,133	4,595	9,899
9,71	94,28	915,5	3,116	9,854	2,133	4,596	9,902
9,72	94,48	918,3	3,118	9,859	2,134	4,598	9,906
9,73	94,67	921,2	3,119	9,864	2,135	4,599	9,909
9,74	94,87	924,0	3,121	9,869	2,136	4,601	9,913
9,75	95,06	926,9	3,122	9,874	2,136	4,603	9,916
9,76	95,26	929,7	3,124	9,879	2,137	4,604	9,919
9,77	95,45	932,6	3,126	9,884	2,138	4,606	9,923
9,78	95,65	935,4	3,127	9,889	2,139	4,607	9,926
9,79	95,84	938,3	3,129	9,894	2,139	4,609	9,930
9,80	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,933
9,81	96,24	944,1	3,132	9,905	2,141	4,612	9,936
9,82	96,43	947,0	3,134	9,910	2,141	4,614	9,940
9,83	96,63	949,9	3,135	9,915	2,142	4,615	9,943
9,84	96,83	952,8	3,137	9,920	2,143	4,617	9,946
9,85	97,02	955,7	3,138	9,925	2,144	4,618	9,950
9,86	97,22	958,6	3,140	9,930	2,144	4,620	9,953
9,87	97,42	961,5	3,142	9,935	2,145	4,621	9,956
9,88	97,61	964,4	3,143	9,940	2,146	4,623	9,960
9,89	97,81	967,4	3,145	9,945	2,147	4,625	9,963
9,90	98,01	970,3	3,146	9,950	2,147	4,626	9,967
9,91	98,21	973,2	3,148	9,955	2,148	4,628	9,970
9,92	98,41	976,2	3,150	9,960	2,149	4,629	9,973
9,93	98,60	979,1	3,151	9,965	2,149	4,631	9,977
9,94	98,80	982,1	3,153	9,970	2,150	4,632	9,980
9,95	99,00	985,1	3,154	9,975	2,151	4,634	9,983
9,96	99,20	988,0	3,156	9,980	2,152	4,635	9,987
9,97	99,40	991,0	3,158	9,985	2,152	4,637	9,990
9,98	99,60	994,0	3,159	9,990	2,153	4,638	9,993
9,99	99,80	997,0	3,161	9,995	2,154	4,640	9,997
10,00	100,00	1 000,0	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000

Objašnjenje tablice vidi na str. 19 i 22.

3. POTENCIJE CIJELIH BROJEVA

od $n = 1$ do $n = 100$

n	n^2	n^3	n^4	n^5
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1 024
5	25	125	625	3 125
6	36	216	1 296	7 776
7	49	343	2 401	16 807
8	64	512	4 096	32 768
9	81	729	6 561	59 049
10	100	1 000	10 000	100 000
11	121	1 331	14 641	161 051
12	144	1 728	20 736	248 832
13	169	2 197	28 561	371 293
14	196	2 744	38 416	537 824
15	225	3 375	50 625	759 375
16	256	4 096	65 536	1 048 576
17	289	4 913	83 521	1 419 857
18	324	5 832	104 976	1 889 568
19	361	6 859	130 321	2 476 099
20	400	8 000	160 000	3 200 000
21	441	9 261	194 481	4 084 101
22	484	10 648	234 256	5 153 632
23	529	12 167	279 841	6 436 343
24	576	13 824	331 776	7 962 624
25	625	15 625	390 625	9 765 625
26	676	17 576	456 976	11 881 376
27	729	19 683	531 441	14 348 907
28	784	21 952	614 656	17 210 368
29	841	24 389	707 281	20 511 149
30	900	27 000	810 000	24 300 000
31	961	29 791	923 521	28 629 151
32	1 024	32 768	1 048 576	33 554 432
33	1 089	35 937	1 185 921	39 135 393
34	1 156	39 304	1 336 336	45 435 424
35	1 225	42 875	1 500 625	52 521 875
36	1 296	46 656	1 679 616	60 466 176
37	1 369	50 653	1 874 161	69 343 957
38	1 444	54 872	2 085 136	79 235 168
39	1 521	59 319	2 313 441	90 224 199
40	1 600	64 000	2 560 000	102 400 000
41	1 681	68 921	2 825 761	115 856 201
42	1 764	74 088	3 111 696	130 691 232
43	1 849	79 507	3 418 801	147 008 443
44	1 936	85 184	3 748 096	164 916 224
45	2 025	91 125	4 100 625	184 528 125
46	2 116	97 336	4 477 456	205 962 976
47	2 209	103 823	4 879 681	229 345 007
48	2 304	110 592	5 308 416	254 803 968
49	2 401	117 649	5 764 801	282 475 249

n	n^2	n^3	n^4	n^5
50	2 500	125 000	6 250 000	312 500 000
51	2 601	132 651	6 765 201	345 025 251
52	2 704	140 608	7 311 616	380 204 032
53	2 809	148 877	7 890 481	418 195 493
54	2 916	157 464	8 503 056	459 165 024
55	3 025	166 375	9 150 625	503 284 375
56	3 136	175 616	9 834 496	550 731 776
57	3 249	185 193	10 556 001	601 692 057
58	3 364	195 112	11 316 496	656 356 768
59	3 481	205 379	12 117 361	714 924 299
60	3 600	216 000	12 960 000	777 600 000
61	3 721	226 981	13 845 841	844 596 301
62	3 844	238 328	14 776 336	916 132 832
63	3 969	250 047	15 752 961	992 436 543
64	4 096	262 144	16 777 216	1 073 741 824
65	4 225	274 625	17 850 625	1 160 290 625
66	4 356	287 496	18 974 736	1 252 332 576
67	4 489	300 763	20 151 121	1 350 125 107
68	4 624	314 432	21 381 376	1 453 933 568
69	4 761	328 509	22 667 121	1 564 031 349
70	4 900	343 000	24 010 000	1 680 700 000
71	5 041	357 911	25 411 681	1 804 229 351
72	5 184	373 248	26 873 856	1 934 917 632
73	5 329	389 017	28 398 241	2 073 071 593
74	5 476	405 224	29 986 576	2 219 006 624
75	5 625	421 875	31 640 625	2 373 046 875
76	5 776	438 976	33 362 176	2 535 525 376
77	5 929	456 533	35 153 041	2 706 784 157
78	6 084	474 552	37 015 056	2 887 174 368
79	6 241	493 039	38 950 081	3 077 056 399
80	6 400	512 000	40 960 000	3 276 800 000
81	6 561	531 441	43 046 721	3 486 784 401
82	6 724	551 368	45 212 176	3 707 398 432
83	6 889	571 787	47 458 321	3 939 040 643
84	7 056	592 704	49 787 136	4 182 119 424
85	7 225	614 125	52 200 625	4 437 053 125
86	7 396	636 056	54 700 816	4 704 270 176
87	7 569	658 503	57 289 761	4 984 209 207
88	7 744	681 472	59 969 536	5 277 319 168
89	7 921	704 969	62 742 241	5 584 059 449
90	8 100	729 000	65 610 000	5 904 900 000
91	8 281	753 571	68 574 961	6 240 321 451
92	8 464	778 688	71 639 296	6 590 815 232
93	8 649	804 357	74 805 201	6 956 883 693
94	8 836	830 584	78 074 896	7 339 040 224
95	9 025	857 375	81 450 625	7 737 809 375
96	9 216	884 736	84 934 656	8 153 726 976
97	9 409	912 673	88 529 281	8 587 340 257
98	9 604	941 192	92 236 816	9 039 207 968
99	9 801	970 299	96 059 601	9 509 900 499
100	10 000	1 000 000	100 000 000	10 000 000 000

4. RECIPROČNE VRIJEDNOSTI

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	10000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174
1,1	9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403
1,2	8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7812	7752
1,3	7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194
1,4	7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711
1,5	6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289
1,6	6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917
1,7	5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587
1,8	5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291
1,9	5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025
2,0	5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785
2,1	4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566
2,2	4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367
2,3	4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184
2,4	4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016
2,5	4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861
2,6	3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717
2,7	3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584
2,8	3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460
2,9	3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344
3,0	3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236
3,1	3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135
3,2	3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040
3,3	3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950
3,4	2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865
3,5	2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786
3,6	2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710
3,7	2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639
3,8	2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571
3,9	2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506
4,0	2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445
4,1	2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387
4,2	2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331
4,3	2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278
4,4	2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227
4,5	2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179
4,6	2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132
4,7	2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088
4,8	2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045
4,9	2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004
5,0	2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965
5,1	1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927
5,2	1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890
5,3	1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855
5,4	1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789
5,6	1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757
5,7	1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727
5,8	1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698
5,9	1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669
6,0	1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642
6,1	1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616
6,2	1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590
6,3	1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565
6,4	1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541
6,5	1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517
6,6	1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495
6,7	1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473
6,8	1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451
6,9	1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431
7,0	1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410
7,1	1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391
7,2	1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372
7,3	1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353
7,4	1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335
7,5	1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318
7,6	1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300
7,7	1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284
7,8	1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267
7,9	1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252
8,0	1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236
8,1	1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221
8,2	1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206
8,3	1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192
8,4	1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178
8,5	1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164
8,6	1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151
8,7	1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138
8,8	1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125
8,9	1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112
9,0	1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100
9,1	1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1091	1089	1088
9,2	1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076
9,3	1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065
9,4	1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054
9,5	1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043
9,6	1042	1041	1040	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032
9,7	1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021
9,8	1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011
9,9	1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001

Objašnjenje tablica vidi na idućoj stranici.

OBJAŠNJENJE TABLICE RECIPROČNIH VRIJEDNOSTI

U tablici 4 na str. 46 i 47 dane su četveroznamenkaste vrijednosti $10000 : n$ za troznamenkastu vrijednost argumenta između 1 i 10. Svaki broj u tablici smješten je u redak prvim dvjema značajnim znamenkama argumenta (u stupcu n) i u stupac prema trećoj značajnoj znamenki argumenta. Npr. $10000 : 2{,}26 = 4425$. Ako je argumenat zadan sa četiri znamenke, onda treba izvršiti linearnu interpolaciju (vidi str. 19). Treba obratiti pažnju na to, da ovdje interpolacione korekture ne dodajemo, nego oduzimamo.

Brojeve u tablici možemo smatrati i decimalama iza decimalnog zareza u razlomku $1 : n$; npr. $1 : 2{,}26 = 0{,}4425$. Kada tražimo $1 : n$ za $n > 10$ i $n < 1$ trebamo uzeti u obzir da se pri množenju n sa 10^k veličina $1 : n$ množi sa 10^{-k}, tj. kada decimalni zarez u n premjestimo za k mjesta na desno, kod $1 : n$ treba decimalni zarez pomaknuti za k mjesta u lijevo, i obrnuto. Npr.: $1 : 22{,}6 = 0{,}04425$; $1 : 0{,}0226 = 44{,}25$.

5. FAKTORIJELE I NJIHOVE RECIPROČNE VRIJEDNOSTI

n	$n!$	n	$n!$
1	1	11	39 916 800
2	2	12	479 001 600
3	6	13	6 227 020 800
4	24	14	87 178 291 200
5	120	15	1 307 674 368 000
6	720	16	20 922 789 888 000
7	5 040	17	355 687 428 096 000
8	40 320	18	6 402 373 705 728 000
9	362 880	19	121 645 100 408 832 000
10	3 628 800	20	2 432 902 008 176 640 000

*Recipročne vrijednosti faktorijela**

n	$1 : n!$	n	$1 : n!$	n	$1 : n!$
1	1,000000	11	$0{,}0^{7}25052$	21	$0{,}0^{19}19573$
2	0,500000	12	$0{,}0^{8}20877$	22	$0{,}0^{21}88968$
3	0,166667	13	$0{,}0^{9}16059$	23	$0{,}0^{22}38682$
4	0,041667	14	$0{,}0^{10}11471$	24	$0{,}0^{23}16117$
5	$0{,}0^{2}83333$	15	$0{,}0^{12}76472$	25	$0{,}0^{25}64470$
6	$0{,}0^{2}13889$	16	$0{,}0^{13}47795$	26	$0{,}0^{26}24796$
7	$0{,}0^{3}19841$	17	$0{,}0^{14}28115$	27	$0{,}0^{28}91837$
8	$0{,}0^{4}24802$	18	$0{,}0^{15}15619$	28	$0{,}0^{29}32799$
9	$0{,}0^{5}27557$	19	$0{,}0^{17}82206$	29	$0{,}0^{30}11310$
10	$0{,}0^{6}27557$	20	$0{,}0^{18}41103$	30	$0{,}0^{32}37700$

* Za $1 : n!$ upotrebljavamo skraćenu oznaku za nule iza decimalnog zareza. Tako je $1 : 8! = 0{,}000024802$.

6. NEKE POTENCIJE BROJEVA 2, 3 i 5

n	2^n	3^n	5^n
1	2	3	5
2	4	9	25
3	8	27	125
4	16	81	625
5	32	243	3 125
6	64	729	15 625
7	128	2 187	78 125
8	256	6 561	390 625
9	512	19 683	1 953 125
10	1 024	59 049	9 765 625
11	2 048	177 147	48 828 125
12	4 096	531 441	244 140 625
13	8 192	1 594 323	1 220 703 125
14	16 384	4 782 969	6 103 515 625
15	32 768	14 348 907	30 517 578 125
16	65 536	43 046 721	152 587 890 625
17	131 072	129 140 163	762 939 453 125
18	262 144	387 420 489	3 814 697 265 625
19	524 288	1 162 261 467	19 073 486 328 125
20	1 048 576	3 486 784 401	95 367 431 640 625

OBJAŠNJENJA TABLICA LOGARITAMA I ANTILOGARITAMA

Tablica 7 (str. 51 i 52) služi nam za nalaženje dekadskih logaritama brojeva. Najprije za zadani broj pomoću pravila (str. 151) nađemo *karakteristiku* njegova logaritma, a zatim njegovu *mantisu* iz tablica. Za troznamenkaste brojeve naći ćemo mantisu na presjecištu retka, u početku kojeg (rubrika N) su dvije prve znamenke zadanog broja, sa stupcem koji u glavi ima oznaku treće znamenke. Ako zadani broj ima više od tri značajne znamenke, moramo primijeniti linearnu interpolaciju (vidi str. 19). Pri tome interpolacijsku korekciju tražimo samo za četvrtu značajnu znamenku; korekcija pete znamenke ima smisla samo tada, kada je prva značajna znamenka zadanog broja 1 ili 2.

Primjer: $\lg 254{,}3 = 2{,}4053$ (k 4048 dodajemo $0{,}3 \cdot 17 = 5{,}1$).

Kada tražimo broj prema njegovom dekadskom logaritmu, služimo se tablicom 8 (str. 53 i 54) (antilogaritama*). U toj tablici argument je mantisa zadanog broja. Na presjecištu retka određenog sa dvije prve znamenke mantise (kolona m) i stupca u čijoj je glavi oznaka treće znamenke mantise, u tablici antilogaritama nađemo brojčani sastav traženog broja. Za četvrtu znamenku treba provesti interpolacijsku korekturu.

* Broj y kome je dekadski logaritam jednak x, nazivamo antilogaritmom x. Po definiciji logaritma (vidi str. 150) ta funkcija se podudara s eksponencijalnom funkcijom $y = 10^x$.

Karakteristika logaritma omogućava nam da u dobivenom rezultatu postavimo decimalni zarez na osnovu pravila sa str. 151.

Primjeri: $\lg x = 1,2763$; $x = 18,89$ (k 1888 iz tablice dodamo $0,3 \cdot 4 = 1,2$; u rezultatu decimalni zarez postavimo iza druge znamenke, jer je karakteristika jedinica). Ako je $\lg x = \bar{2},2763$, onda je $x = 0,01889$. Taj rezultat možemo napisati i ovako: $10^{1,2763} = 18,89$; $10^{-1,7237} = 0,01889$ (jer je $\bar{2},2736 = -1,7237$).

7. DEKADSKI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Objašnjenje tablice vidi na str. 49.

8. ANTILOGARITMI

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256
10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977

Objašnjenje tablice vidi na str. 49.

9. PRIRODNE VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Sinusi

Kut °	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0 ↓	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494	0,0523	87
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0610	0,0640	0,0669	0,0698	86
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	**85**
5	0,0872	0,0901	0,0929	0,0958	0,0987	0,1016	0,1045	84
6	0,1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190	0,1219	83
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363	0,1392	82
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536	0,1564	81
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1650	0,1679	0,1708	0,1736	**80**
10	0,1736	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880	0,1908	79
11	0,1908	0,1937	0,1965	0,1994	0,2022	0,2051	0,2079	78
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221	0,2250	77
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2334	0,2363	0,2391	0,2419	76
14	0,2419	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560	0,2588	**75**
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756	74
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896	0,2924	73
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3062	0,3090	72
18	0,3090	0,3118	0,3145	0,3173	0,3201	0,3228	0,3256	71
19	0.3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3365	0,3393	0,3420	**70**
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557	0,3584	69
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3746	68
22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881	0,3907	67
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3987	0,4014	0,4041	0,4067	66
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	**65**
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0 4384	64
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540	63
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669	0,4695	62
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823	0,4848	61
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	**60**
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	59
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275	0,5299	58
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422	0,5446	57
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568	0,5592	56
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	**55**
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854	0,5878	54
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995	0,6018	53
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134	0,6157	52
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271	0,6293	51
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	**50**
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	0,6517	0,6539	0,6561	49
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670	0,6691	48
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799	0,6820	47
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926	0,6947	46
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050	0,7071	**45**
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	↑ 44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Kut °

Kosinusi

Sinusi

Kut °	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45 ↓	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	44
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7314	43
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431	42
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547	41
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	**40**
50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753	0,7771	39
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862	0,7880	38
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7934	0,7951	0,7969	0,7986	37
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073	0,8090	36
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8192	**35**
55	0,8192	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274	0,8290	34
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371	0,8387	33
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465	0,8480	32
58	0,8480	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557	0,8572	31
59	0,8572	0,8587	0,8601	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	**30**
60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	29
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816	0,8829	28
62	0,8829	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897	0,8910	27
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8949	0,8962	0,8975	0,8988	26
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051	0,9063	**25**
65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124	0,9135	24
66	0,9135	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194	0,9205	23
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261	0,9272	22
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325	0,9336	21
69	0,9336	0,9346	0,9356	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	**20**
70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446	0,9455	19
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9502	0,9511	18
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555	0,9563	17
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605	0,9613	16
74	0,9613	0,9621	0,9628	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	**15**
75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	0,9689	0,9696	0,9703	14
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737	0,9744	13
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775	0 9781	12
78	0,9781	0,9787	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811	0,9816	11
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9833	0,9838	0,9843	0,9848	**10**
80	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872	0,9877	9
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	8
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922	0,9925	7
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9936	0,9939	0,9942	0,9945	6
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	**5**
85	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	↑ **0**
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Kut °

Kosinusi

Tangensi

Kut °	0′ ←	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0 ↓	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0437	0,0466	0,0495	0,0524	87
3	0,0524	0,0553	0,0582	0,0612	0,0641	0,0670	0,0699	86
4	0,0699	0,0729	0,0758	0,0787	0,0816	0,0846	0,0875	**85**
5	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022	0,1051	84
6	0,1051	0,1080	0,1110	0,1139	0,1169	0,1198	0,1228	83
7	0,1228	0,1257	0,1287	0,1317	0,1346	0,1376	0,1405	82
8	0,1405	0,1435	0,1465	0,1495	0,1524	0,1554	0,1584	81
9	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1733	0,1763	**80**
10	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	0,1883	0,1914	0,1944	79
11	0,1944	0,1974	0,2004	0,2035	0,2065	0,2095	0,2126	78
12	0,2126	0,2156	0,2186	0,2217	0,2247	0,2278	0,2309	77
13	0,2309	0,2339	0,2370	0,2401	0,2432	0,2462	0,2493	76
14	0,2493	0,2524	0,2555	0,2586	0,2617	0,2648	0,2679	**75**
15	0,2679	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836	0,2867	74
16	0,2867	0,2899	0,2931	0,2962	0,2994	0,3026	0,3057	73
17	0,3057	0,3089	0,3121	0,3153	0,3185	0,3217	0,3249	72
18	0,3249	0,3281	0,3314	0,3346	0,3378	0,3411	0,3443	71
19	0,3443	0,3476	0,3508	0,3541	0,3574	0,3607	0,3640	**70**
20	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	0,3772	0,3805	0,3839	69
21	0,3839	0,3872	0,3906	0,3939	0,3973	0,4006	0,4040	68
22	0,4040	0,4074	0,4108	0,4142	0,4176	0,4210	0,4245	67
23	0,4245	0,4279	0,4314	0,4348	0,4383	0,4417	0,4452	66
24	0,4452	0,4487	0,4522	0,4557	0,4592	0,4628	0,4663	**65**
25	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	0,4806	0,4841	0,4877	64
26	0,4877	0,4913	0,4950	0,4986	0,5022	0,5059	0,5095	63
27	0,5095	0,5132	0,5169	0,5206	0,5243	0,5280	0,5317	62
28	0,5317	0,5354	0,5392	0,5430	0,5467	0,5505	0,5543	61
29	0,5543	0,5581	0,5619	0,5658	0,5696	0,5735	0,5774	**60**
30	0,5774	0,5812	0,5851	0,5890	0,5930	0,5969	0,6009	59
31	0,6009	0,6048	0,6088	0,6128	0,6168	0,6208	0,6249	58
32	0,6249	0,6289	0,6330	0,6371	0,6412	0,6453	0,6494	57
33	0,6494	0,6536	0,6577	0,6619	0,6661	0,6703	0,6745	56
34	0,6745	0,6787	0,6830	0,6873	0,6916	0,6959	0,7002	**55**
35	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	0,7177	0,7221	0,7265	54
36	0,7265	0,7310	0,7355	0,7400	0,7445	0,7490	0,7536	53
37	0,7536	0,7581	0,7627	0,7673	0,7720	0,7766	0,7813	52
38	0,7813	0,7860	0,7907	0,7954	0,8002	0,8050	0,8098	51
39	0,8098	0,8146	0,8195	0,8243	0,8292	0,8342	0,8391	**50**
40	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642	0,8693	49
41	0,8693	0,8744	0,8796	0,8847	0,8899	0,8952	0,9004	48
42	0,9004	0,9057	0,9110	0,9163	0,9217	0,9271	0,9325	47
43	0,9325	0,9380	0,9435	0,9490	0,9545	0,9601	0,9657	46
44	0,9657	0,9713	0,9770	0,9827	0,9884	0,9942	1,0000	**45**
45	1,0000	1,0058	1,0117	1,0176	1,0235	1,0295	1,0355	↑ 44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Kut °

Kotangensi

Tangensi

Kut °	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45 ↓	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030	1,036	44
46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066	1,072	43
47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104	1,111	42
48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144	1,150	41
49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185	1,192	**40**
50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228	1,235	39
51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272	1,280	38
52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319	1,327	37
53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368	1,376	36
54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419	1,428	**35**
55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473	1,483	34
56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530	1,540	33
57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590	1,600	32
58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653	1,664	31
59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720	1,732	**30**
60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792	1,804	29
61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868	1,881	28
62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949	1,963	27
63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035	2,050	26
64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128	2,145	**25**
65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229	2,246	24
66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337	2,356	23
67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455	2,475	22
68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583	2,605	21
69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723	2,747	**20**
70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877	2,904	19
71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047	3,078	18
72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237	3,271	17
73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450	3,487	16
74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689	3,732	**15**
75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962	4,011	14
76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275	4,331	13
77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638	4,705	12
78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066	5,145	11
79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576	5,671	**10**
80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197	6,314	9
81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968	7,115	8
82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953	8,144	7
83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255	9,514	6
84	9,514	9,788	10,078	10,385	10,712	11,059	11,430	**5**
85	11,430	11,826	12,251	12,706	13,197	13,727	14,301	4
86	14,301	14,924	15,605	16,350	17,169	18,075	19,081	3
87	19,081	20,206	21,470	22,904	24,542	26,432	28,636	2
88	28,636	31,242	34,368	38,188	42,964	49,104	57,290	1
89	57,290	68,750	85,940	114,59	171,89	343,77	∞	↑ **0**
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Kut °

Kotangensi

10. EKSPONENCIJALNE, HIPERBOLNE I TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

za x od 0 do 1,6 (argument u lučnoj mjeri)

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
01	1,0101	0,9900	0,0100	1,0001	0,0100	0,0100	1,0000	0,0100
02	1,0202	0,9802	0,0200	1,0002	0,0200	0,0200	0,9998	0,0200
03	1,0305	0,9704	0,0300	1,0005	0,0300	0,0300	0,9996	0,0300
04	1,0408	0,9608	0,0400	1,0008	0,0400	0,0400	0,9992	0,0400
0,05	1,0513	0,9512	0,0500	1,0013	0,0500	0,0500	0,9988	0,0500
06	1,0618	0,9418	0,0600	1,0018	0,0599	0,0600	0,9982	0,0601
07	1,0725	0,9324	0,0701	1,0025	0,0699	0,0699	0,9976	0,0701
08	1,0833	0,9231	0,0801	1,0032	0,0798	0,0799	0,9968	0,0802
09	1,0942	0,9139	0,0901	1,0041	0,0898	0,0899	0,9960	0,0902
0,10	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997	0,0998	0,9950	0,1003
11	1,1163	0,8958	0,1102	1,0061	0,1096	0,1098	0,9940	0,1104
12	1,1275	0,8869	0,1203	1,0072	0,1194	0,1197	0,9928	0,1206
13	1,1388	0,8781	0,1304	1,0085	0,1293	0,1296	0,9916	0,1307
14	1,1503	0,8694	0,1405	1,0098	0,1391	0,1395	0,9902	0,1409
0,15	1,1618	0,8607	0,1506	1,0113	0,1489	0,1494	0,9888	0,1511
16	1,1735	0,8521	0,1607	1,0128	0,1586	0,1593	0,9872	0,1614
17	1,1853	0,8437	0,1708	1,0145	0,1684	0,1692	0,9856	0,1717
18	1,1972	0,8353	0,1810	1,0162	0,1781	0,1790	0,9838	0,1820
19	1,2092	0,8270	0,1911	1,0181	0,1877	0,1889	0,9820	0,1923
0,20	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974	0,1987	0,9801	0,2027
21	1,2337	0,8106	0,2115	1,0221	0,2070	0,2085	0,9780	0,2131
22	1,2461	0,8025	0,2218	1,0243	0,2165	0,2182	0,9759	0,2236
23	1,2586	0,7945	0,2320	1,0266	0,2260	0,2280	0,9737	0,2341
24	1,2712	0,7866	0,2423	1,0289	0,2355	0,2377	0,9713	0,2447
0,25	1,2840	0,7788	0,2526	1,0314	0,2449	0,2474	0,9689	0,2553
26	1,2969	0,7711	0,2629	1,0340	0,2543	0,2571	0,9664	0,2660
27	1,3100	0,7634	0,2733	1,0367	0,2636	0,2667	0,9638	0,2768
28	1,3231	0,7558	0,2837	1,0395	0,2729	0,2764	0,9611	0,2876
29	1,3364	0,7483	0,2941	1,0423	0,2821	0,2860	0,9582	0,2984
0,30	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913	0,2955	0,9553	0,3093
31	1,3634	0,7334	0,3150	1,0484	0,3004	0,3051	0,9523	0,3203
32	1,3771	0,7261	0,3255	1,0516	0,3095	0,3146	0,9492	0,3314
33	1,3910	0,7189	0,3360	1,0549	0,3185	0,3240	0,9460	0,3425
34	1,4049	0,7118	0,3466	1,0584	0,3275	0,3335	0,9428	0,3537
0,35	1,4191	0,7047	0,3572	1,0619	0,3364	0,3429	0,9394	0,3650
36	1,4333	0,6977	0,3678	1,0655	0,3452	0,3523	0,9359	0,3764
37	1,4477	0,6907	0,3785	1,0692	0,3540	0,3616	0,9323	0,3879
38	1,4623	0,6839	0,3892	1,0731	0,3627	0,3709	0,9287	0,3994
39	1,4770	0,6771	0,4000	1,0770	0,3714	0,3802	0,9249	0,4111
0,40	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799	0,3894	0,9211	0,4228
41	1,5068	0,6637	0,4216	1,0852	0,3885	0,3986	0,9171	0,4346
42	1,5220	0,6570	0,4325	1,0895	0,3969	0,4078	0,9131	0,4466
43	1,5373	0,6505	0,4434	1,0939	0,4053	0,4169	0,9090	0,4586
44	1,5527	0,6440	0,4543	1,0984	0,4136	0,4259	0,9048	0,4708
0,45	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030	0,4219	0,4350	0,9004	0,4831

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,45	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030	0,4219	0,4350	0,9004	0,4831
46	1,5841	0,6313	0,4764	1,1077	0,4301	0,4439	0,8961	0,4954
47	1,6000	0,6250	0,4875	1,1125	0,4382	0,4529	0,8916	0,5080
48	1,6161	0,6188	0,4986	1,1174	0,4462	0,4618	0,8870	0,5206
49	1,6323	0,6126	0,5098	1,1225	0,4542	0,4706	0,8823	0,5334
0,50	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621	0,4794	0,8776	0,5463
51	1,6653	0,6005	0,5324	1,1329	0,4699	0,4882	0,8727	0,5594
52	1,6820	0,5945	0,5438	1,1383	0,4777	0,4969	0,8678	0,5726
53	1,6989	0,5886	0,5552	1,1438	0,4854	0,5055	0,8628	0,5859
54	1,7160	0,5827	0,5666	1,1494	0,4930	0,5141	0,8577	0,5994
0,55	1,7333	0,5769	0,5782	1,1551	0,5005	0,5227	0,8525	0,6131
56	1,7507	0,5712	0,5897	1,1609	0,5080	0,5312	0,8473	0,6269
57	1,7683	0,5655	0,6014	1,1669	0,5154	0,5396	0,8419	0,6410
58	1,7860	0,5599	0,6131	1,1730	0,5227	0,5480	0,8365	0,6552
59	1,8040	0,5543	0,6248	1,1792	0,5299	0,5564	0,8309	0,6696
0,60	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370	0,5646	0,8253	0,6841
61	1,8404	0,5434	0,6485	1,1919	0,5441	0,5729	0,8196	0,6989
62	1,8589	0,5379	0,6605	1,1984	0,5511	0,5810	0,8139	0,7139
63	1,8776	0,5326	0,6725	1,2051	0,5581	0,5891	0,8080	0,7291
64	1,8965	0,5273	0,6846	1,2119	0,5649	0,5972	0,8021	0,7445
0,65	1,9155	0,5220	0,6967	1,2188	0,5717	0,6052	0,7961	0,7602
66	1,9348	0,5169	0,7090	1,2258	0,5784	0,6131	0,7900	0,7761
67	1,9542	0,5117	0,7213	1,2330	0,5850	0,6210	0,7838	0,7923
68	1,9739	0,5066	0,7336	1,2402	0,5915	0,6288	0,7776	0,8087
69	1,9937	0,5016	0,7461	1,2476	0,5980	0,6365	0,7712	0,8253
0,70	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044	0,6442	0,7648	0,8423
71	2,0340	0,4916	0,7712	1,2628	0,6107	0,6518	0,7584	0,8595
72	2,0544	0,4868	0,7838	1,2706	0,6169	0,6594	0,7518	0,8771
73	2,0751	0,4819	0,7966	1,2785	0,6231	0,6669	0,7452	0,8949
74	2,0959	0,4771	0,8094	1,2865	0,6291	0,6743	0,7385	0,9131
0,75	2,1170	0,4724	0,8223	1,2947	0,6351	0,6816	0,7317	0,9316
76	2,1383	0,4677	0,8353	1,3030	0,6411	0,6889	0,7248	0,9505
77	2,1598	0,4630	0,8484	1,3114	0,6469	0,6961	0,7179	0,9697
78	2,1815	0,4584	0,8615	1,3199	0,6527	0,7033	0,7109	0,9893
79	2,2034	0,4538	0,8748	1,3286	0,6584	0,7104	0,7038	1,0092
0,80	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967	1,0296

Višekratnici od π i $\pi/2$ za računanje trigonometrijskih funkcija za $x > 1,6$

n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$	n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$
1	1,57080	3,14159	6	9,42478	18,84956
2	3,14159	6,28319	7	10,99557	21,99115
3	4,71239	9,42478	8	12,56637	25,13274
4	6,28319	12,56637	9	14,13717	28,27433
5	7,85398	15,70796	10	15,70796	31,41593

Primjeri:

1) $\sin 7,5 =$

$= \sin(5 \cdot \frac{\pi}{2} - 0,35398) =$

$= \cos 0,35398 = 0,9380$

(linearna interpolacija!)

2) $\sin 29 =$

$= \sin(9\pi + 0,72567) =$

$= -\sin 0,72567 =$

$= -0,6637$

(linearna interpolacija!)

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,80	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967	1,0296
81	2,2479	0,4449	0,9015	1,3464	0,6696	0,7243	0,6895	1,0505
82	2,2705	0,4404	0,9150	1,3555	0,6751	0,7311	0,6822	1,0717
83	2,2933	0,4360	0,9286	1,3647	0,6805	0,7379	0,6749	1,0934
84	2,3164	0,4317	0,9423	1,3740	0,6858	0,7446	0,6675	1,1156
0,85	2,3396	0,4274	0,9561	1,3835	0,6911	0,7513	0,6600	1,1383
86	2,3632	0,4232	0,9700	1,3932	0,6963	0,7578	0,6524	1,1616
87	2,3869	0,4190	0,9840	1,4029	0,7014	0,7643	0,6448	1,1853
88	2,4109	0,4148	0,9981	1,4128	0,7064	0,7707	0,6372	1,2097
89	2,4351	0,4107	1,0122	1,4229	0,7114	0,7771	0,6294	1,2346
0,90	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163	0,7833	0,6216	1,2602
91	2,4843	0,4025	1,0409	1,4434	0,7211	0,7895	0,6137	1,2864
92	2,5093	0,3985	1,0554	1,4539	0,7259	0,7956	0,6058	1,3133
93	2,5345	0,3946	1,0700	1,4645	0,7306	0,8016	0,5978	1,3409
94	2,5600	0,3906	1,0847	1,4753	0,7352	0,8076	0,5898	1,3692
0,95	2,5857	0,3867	1,0995	1,4862	0,7398	0,8134	0,5817	1,3984
96	2,6117	0,3829	1,1144	1,4973	0,7443	0,8192	0,5735	1,4284
97	2,6379	0,3791	1,1294	1,5085	0,7487	0,8249	0,5653	1,4592
98	2,6645	0,3753	1,1446	1,5199	0,7531	0,8305	0,5570	1,4910
99	2,6912	0,3716	1,1598	1,5314	0,7574	0,8360	0,5487	1,5237
1,00	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616	0,8415	0,5403	1,5574
01	2,7456	0,3642	1,1907	1,5549	0,7658	0,8468	0,5319	1,5922
02	2,7732	0,3606	1,2063	1,5669	0,7699	0,8521	0,5234	1,6281
03	2,8011	0,3570	1,2220	1,5790	0,7739	0,8573	0,5148	1,6652
04	2,8292	0,3535	1,2379	1,5913	0,7779	0,8624	0,5062	1,7036
1,05	2,8577	0,3499	1,2539	1,6038	0,7818	0,8674	0,4976	1,7433
06	2,8864	0,3465	1,2700	1,6164	0,7857	0,8724	0,4889	1,7844
07	2,9154	0,3430	1,2862	1,6292	0,7895	0,8772	0,4801	1,8270
08	2,9447	0,3396	1,3025	1,6421	0,7932	0,8820	0,4713	1,8712
09	2,9743	0,3362	1,3190	1,6552	0,7969	0,8866	0,4625	1,9171
1,10	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536	1,9648
11	3,0344	0,3296	1,3524	1,6820	0,8041	0,8957	0,4447	2,0143
12	3,0649	0,3263	1,3693	1,6956	0,8076	0,9001	0,4357	2,0660
13	3,0957	0,3230	1,3863	1,7093	0,8110	0,9044	0,4267	2,1198
14	3,1268	0,3198	1,4035	1,7233	0,8144	0,9086	0,4176	2,1759
1,15	3,1582	0,3166	1,4208	1,7374	0,8178	0,9128	0,4085	2,2345
16	3,1899	0,3135	1,4382	1,7517	0,8210	0,9168	0,3993	2,2958
17	3,2220	0,3104	1,4558	1,7662	0,8243	0,9208	0,3902	2,3600
18	3,2544	0,3073	1,4735	1,7808	0,8275	0,9246	0,3809	2,4273
19	3,2871	0,3042	1,4914	1,7957	0,8306	0,9284	0,3717	2,4979
1,20	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337	0,9320	0,3624	2,5722
21	3,3535	0,2982	1,5276	1,8258	0,8367	0,9356	0,3530	2,6503
22	3,3872	0,2952	1,5460	1,8412	0,8397	0,9391	0,3436	2,7328
23	3,4212	0,2923	1,5645	1,8568	0,8426	0,9425	0,3342	2,8198
24	3,4556	0,2894	1,5831	1,8725	0,8455	0,9458	0,3248	2,9119
1,25	3,4903	0,2865	1,6019	1,8884	0,8483	0,9490	0,3153	3,0096

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
1,25	3,4903	0,2865	1,6019	1,8884	0,8483	0,9490	0,3153	3,0096
26	3,5254	0,2837	1,6209	1 9045	0,8511	0,9521	0,3058	3,1133
27	3,5609	0,2808	1,6400	1,9208	0,8538	0,9551	0,2963	3,2236
28	3,5966	0,2780	1,6593	1,9373	0,8565	0,9580	2,2867	3 3413
29	3,6328	0,2753	1,6788	1,9540	0,8591	0,9608	0,2771	3,4672
1,30	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0.8617	0,9636	0,2675	3,6021
31	3,7062	0,2698	1,7182	1,9880	0,8643	0,9662	0,2579	3,7471
32	3,7434	0,2671	1,7381	2,0053	0,8668	0,9687	0,2482	3,9033
33	3,7810	0,2645	1,7583	2,0228	0,8692	0,9711	0,2385	4,0723
34	3,8190	0,2618	1,7786	2,0404	0,8717	0,9735	0,2288	4,2556
1,35	3,8574	0,2592	1,7991	2,0583	0,8741	0,9757	0,2190	4,4552
36	3,8962	0,2567	1,8198	2,0764	0,8764	0,9779	0,2092	4,6734
37	3,9354	0,2541	1,8406	2,0947	0,8787	0,9799	0,1994	4,9131
38	3,9749	0,2516	1,8617	2,1132	0,8810	0,9819	0,1896	5,1774
39	4,0149	0,2491	1,8829	2,1320	0,8832	0,9837	0,1798	5,4707
1,40	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0.8854	0,9854	0,1700	5,7979
41	4,0960	0,2441	1,9259	2,1700	0,8875	0,9871	0,1601	6,1654
42	4,1371	0,2417	1,9477	2,1894	0,8896	0,9887	0,1502	6,5811
43	4,1787	0,2393	1,9697	2,2090	0,8917	0,9901	0,1403	7,0555
44	4,2207	0,2369	1,9919	2,2288	0,8937	0,9915	0,1304	7,6018
1,45	4,2631	0,2346	2,0143	2,2488	0,8957	0,9927	0,1205	8,2381
46	4,3060	0,2322	2,0369	2,2691	0,8977	0,9939	0,1106	8,9886
47	4,3492	0,2299	2,0597	2,2896	0,8996	0,9949	0,1006	9,8874
48	4,3929	0,2276	2,0827	2,3103	0,9015	0,9959	0,0907	10,983
49	4,4371	0,2254	2,1059	2,3312	0,9033	0,9967	0,0807	12,350
1,50	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051	0,9975	0,0707	14,101
51	4,5267	0,2209	2,1529	2,3738	0,9069	0,9982	0,0608	16,428
52	4,5722	0,2187	2,1768	2,3955	0,9087	0,9987	0,0508	19,670
53	4,6182	0,2165	2,2008	2,4174	0,9104	0,9992	0,0408	24,498
54	4,6646	0,2144	2,2251	2,4395	0,9121	0,9995	0,0308	32,461
1,55	4,7115	0,2122	2,2496	2,4619	0,9138	0,9998	0,0208	48,078
56	4,7588	0,2101	2,2743	2,4845	0,9154	0,9999	0,0108	92,620
57	4,8066	0,2080	2,2993	2,5073	0,9170	1,0000	+0,0008	1255,8
58	4,8550	0,2060	2,3245	2,5305	0,9186	1,0000	—0,0092	—108,65
59	4,9037	0,2039	2,3499	2,5538	0,9201	0,9998	—0,0192	—52,067
1,60	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217	0,9996	—0,0292	—34,233

Višekratnici od π i $\pi/2$ za računanje trigonometrijskih funkcija za $x > 1,6$.

n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$	n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$
1	1,57080	3,14159	6	9,42478	18,84956
2	3,14159	6,28319	7	10,99557	21,99115
3	4,71239	9,42478	8	12,56637	25,13274
4	6,28319	12,56637	9	14,13717	28,27433
5	7,85398	15,70796	10	15,70796	31,41593

Za $x > 1,6$ vrijednosti e^x, e^{-x}, sh x, ch x i th x nalazimo u tablici 11; vrijednosti trigonometrijskih funkcija tražimo po formulama redukcije (vidi str. 207).

Primjere vidi na str. 60.

11. EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

(za x od 1,6 do 10,0)*

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
1,60	4,9530	0,2019	**2,00**	7,3891	0,1353	**2,40**	11,023	0,09072
1,61	5,0028	0,1999	2,01	7,4633	0,1340	2,41	11,134	0,08982
1,62	5,0531	0,1979	2,02	7,5383	0,1327	2,42	11,246	0,08892
1,63	5,1039	0,1959	2,03	7,6141	0,1313	2,43	11,359	0,08804
1,64	5,1552	0,1940	2,04	7,6906	0,1300	2,44	11,473	0,08716
1,65	5,2070	0,1920	**2,05**	7,7679	0,1287	**2,45**	11,588	0,08629
1,66	5,2593	0,1901	2,06	7,8460	0,1275	2,46	11,705	0,08543
1,67	5,3122	0,1882	2,07	7,9248	0,1262	2,47	11,822	0,08458
1,68	5,3656	0,1864	2,08	8,0045	0,1249	2,48	11,941	0,08374
1,69	5,4195	0,1845	2,09	8,0849	0,1237	2,49	12,061	0,08291
1,70	5,4739	0,1827	**2,10**	8,1162	0,1225	**2,50**	12,182	0,08208
1,71	5,5290	0,1809	2,11	8,2482	0,1212	2,51	12,305	0,08127
1,72	5,5845	0,1791	2,12	8,3311	0,1200	2,52	12,429	0,08046
1,73	5,6407	0,1773	2,13	8,4149	0,1188	2,53	12,554	0,07966
1,74	5,6973	0,1755	2,14	8,4994	0,1177	2,54	12,680	0,07887
1,75	5,7546	0,1738	**2,15**	8,5849	0,1165	**2,55**	12,807	0,07808
1,76	5,8124	0,1720	2,16	8,6711	0,1153	2,56	12,936	0,07730
1,77	5,8709	0,1703	2,17	8,7583	0,1142	2,57	13,066	0,07654
1,78	5,9299	0,1686	2,18	8,8463	0,1130	2,58	13,197	0,07577
1,79	5,9895	0,1670	2,19	8,9352	0,1119	2,59	13,330	0,07502
1,80	6,0496	0,1653	**2,20**	9,0250	0,1108	**2,60**	13,464	0,07427
1,81	6,1104	0,1637	2,21	9,1157	0,1097	2,61	13,599	0,07353
1,82	6,1719	0,1620	2,22	9 2073	0,1086	2,62	13,736	0,07280
1,83	6,2339	0,1604	2,23	9,2999	0,1075	2,63	13,874	0,07208
1,84	6,2965	0,1588	2,24	9,3933	c,1065	2,64	14,013	0,07136
1,85	6,3598	0,1572	**2,25**	9,4877	0,1054	**2,65**	14,154	0,07065
1,86	6,4237	0,1557	2,26	9,5831	0,1044	2,66	14,296	0,06995
1,87	6,4883	0,1541	2,27	9,6794	0,1033	2,67	14,440	0,06925
1,88	6,5535	0,1526	2,28	9,7767	0,1023	2,68	14,585	0,06856
1,89	6,6194	0,1511	2,29	9,8749	0,1013	2,69	14,732	0,06788
1,90	6,6859	0,1496	**2,30**	9,9742	0,10026	**2,70**	14,880	0,06721
1,91	6,7531	0,1481	2,31	10,074	0,09926	2,71	15,029	0,06654
1,92	6,8210	0,1466	2,32	10,176	0,09827	2,72	15,180	0,06587
1,93	6,8895	0,1451	2,33	10,278	0,09730	2,73	15,333	0,06522
1,94	6,9588	0,1437	2,34	10,381	0,09633	2,74	15,487	0,06457
1,95	7,0287	0,1423	**2,35**	10,486	0,09537	**2,75**	15,643	0,06393
1,96	7,0993	0,1409	2,36	10,591	0,09442	2,76	15,800	0,06329
1,97	7,1707	0,1395	2,37	10,697	0,09348	2,77	15,959	0,06266
1,98	7,2427	0,1381	2,38	10,805	0,09255	2,78	16,119	0,06204
1,99	7,3155	0,1367	2,39	10,913	0,09163	2,79	16,281	0,06142
2,00	7,3891	0,1353	**2,40**	11,023	0,09072	**2,80**	16,445	0,06081

* Za računanje hiperbolnih funkcija za $x > 1,6$ moramo se koristiti formulama

$$\mathrm{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \mathrm{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
2,80	16,445	0,06081	**3,25**	25,790	0,03877	**3,70**	40,447	0,02472
2,81	16,610	0,06020	3,26	26,050	0,03839	3,71	40,854	0,02448
2,82	16,777	0,05961	3,27	26,311	0,03801	3,72	41,264	0,02423
2,83	16,945	0,05901	3,28	26,576	0,03763	3,73	41,679	0,02399
2,84	17,116	0,05843	3,29	26,843	0,03725	3,74	42,098	0,02375
2,85	17,288	0,05784	**3,30**	27,113	0,03688	**3,75**	42,521	0,02352
2,86	17,462	0,05727	3,31	27,385	0,03652	3,76	42,948	0,02328
2,87	17,637	0,05670	3,32	27,660	0,03615	3,77	43,380	0,02305
2,88	17,814	0,05613	3,33	27,938	0,03579	3,78	43,816	0,02282
2,89	17,993	0,05558	3,34	28,219	0,03544	3,79	44,256	0,02260
2,90	18,174	0,05502	**3,35**	28,503	0,03508	**3,80**	44,701	0,02237
2,91	18,357	0,05448	3,36	28,789	0,03474	3,81	45,150	0,02215
2,92	18,541	0,05393	3,37	29,079	0,03439	3,82	45,604	0,02193
2,93	18,728	0,05340	3,38	29,371	0,03405	3,83	46,063	0,02171
2,94	18,916	0,05287	3,39	29,666	0,03371	3,84	46,525	0,02149
2,95	19,106	0,05234	**3,40**	29,964	0,03337	**3,85**	46,993	0,02128
2,96	19,298	0,05182	3,41	30,265	0,03304	3,86	47,465	0,02107
2,97	19,492	0,05130	3,42	30,569	0,03271	3,87	47,942	0,02086
2,98	19,688	0,05079	3,43	30,877	0,03239	3,88	48,424	0,02065
2,99	19,886	0,05029	3,44	31,187	0,03206	3,89	48,911	0,02045
3,00	20,086	0,04979	**3,45**	31,500	0,03175	**3,90**	49,402	0,02024
3,01	20,287	0,04929	3,46	31,817	0,03143	3,91	49,899	0,02004
3,02	20,491	0,04880	3,47	32,137	0,03112	3,92	50,400	0,01984
3,03	20,697	0,04832	3,48	32,460	0,03081	3,93	50,907	0,01964
3,04	20,905	0,04783	3,49	32,786	0,03050	3,94	51,419	0,01945
3,05	21,115	0,04736	**3,50**	33,115	0,03020	**3,95**	51,935	0,01925
3,06	21,328	0,04689	3,51	33,448	0,02990	3,96	52,457	0,01906
3,07	21,542	0,04642	3,52	33,784	0,02960	3,97	52,985	0,01887
3,08	21,758	0,04596	3,53	34,124	0,02930	3,98	53,517	0,01869
3,09	21,977	0,04550	3,54	34,467	0,02901	3,99	54,055	0,01850
3,10	22,198	0,04505	**3,55**	34,813	0,02872	**4,0**	54,598	0,01832
3,11	22,421	0,04460	3,56	35,163	0,02844	4,1	60,340	0,01657
3,12	22,646	0,04416	3,57	35,517	0,02816	4,2	66,686	0,01500
3,13	22,874	0,04372	3,58	35,874	0,02788	4,3	73,700	0,01357
3,14	23,104	0,04328	3,59	36,234	0,02760	4,4	81,451	0,01228
3,15	23,336	0,04285	**3,60**	36,598	0,02732	**4,5**	90,017	0,01111
3,16	23,571	0,04243	3,61	36,966	0,02705	4,6	99,484	0,01005
3,17	23,807	0,04200	3,62	37,338	0,02678	4,7	109,95	0,00910
3,18	24,047	0,04159	3,63	37,713	0,02652	4,8	121,51	0,00823
3,19	24,288	0,04117	3,64	38,092	0,02625	4,9	134,29	0,00745
3,20	24,533	0,04076	**3,65**	38,475	0,02599	**5,0**	148,41	0,00674
3,21	24,779	0,04036	3,66	38,861	0,02573	5,1	164,02	0,00610
3,22	25,028	0,03996	3,67	39,252	0,02548	5,2	181,27	0,00552
3,23	25,280	0,03956	3,68	39,646	0,02522	5,3	200,34	0,00499
3,24	25,534	0,03916	3,69	40,045	0,02497	5,4	221,41	0,00452
3,25	25,790	0,03877	**3,70**	40,447	0,02472	**5,5**	244,69	0,00409

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
5,5	244,69	0,00409	**7,0**	1096,6	0,000912	**8,5**	4914,8	0,000203
5,6	270,43	0,00370	7,1	1212,0	0,000825	8,6	5431,7	0,000184
5,7	298,87	0,00335	7,2	1339,4	0,000747	8,7	6002,9	0,000167
5,8	330,30	0,00303	7,3	1480,3	0,000676	8,8	6634,2	0,000151
5,9	365,04	0,00274	7,4	1636,0	0,000611	8,9	7332,0	0,000136
6,0	403,43	0,002479	**7,5**	1808,0	0,000553	**9,0**	8103,1	0,000123
6,1	445,86	0,002243	7,6	1998,2	0,000500	9,1	8955,3	0,000112
6,2	492,75	0,002029	7,7	2208,3	0,000453	9,2	9897,1	0,000101
6,3	544,57	0,001836	7,8	2440,6	0,000410	9,3	10938	0,000091
6,4	601,85	0,001662	7,9	2697,3	0,000371	9,4	12088	0,000083
6,5	665,14	0,001503	**8,0**	2981,0	0,000335	**9,5**	13360	0,000075
6,6	735,10	0,001360	8,1	3294,5	0,000304	9,6	14765	0,000068
6,7	812,41	0,001231	8,2	3641,0	0,000275	9,7	16318	0,000061
6,8	897,85	0,001114	8,3	4023,9	0,000249	9,8	18034	0,000055
6,9	992,27	0,001008	8,4	4447,1	0,000225	9,9	19930	0,000050
7,0	1096,6	0,000912	**8,5**	4914,8	0,000203	**10,0**	22026	0,000045

12. PRIRODNI LOGARITMI

Objašnjenja tablica vidi str. 68

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2698	1,2726	1,2754	1,2782
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8245	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8795	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2.0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2235	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016

m	$\ln 10^m$
1	2,3026
2	4,6052
3	6,9078
4	9,2103
5	11,5129

Primjeri:

$$\ln 862 = \ln 8{,}62 + \ln 10^2 = 2{,}1541 + 4{,}6052 = 6{,}7593;$$

$$\ln 0{,}0862 = \ln 8{,}62 - \ln 10^2 = 2{,}1541 - 4{,}6052 = -2{,}4511.$$

Objašnjenje tablice vidi na idućoj stranici.

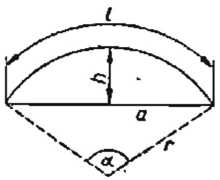
OBJAŠNJENJA TABLICE 12 PRIRODNIH LOGARITAMA

U tablici 12 (str. 65 do 67) dani su prirodni logaritmi. Za razliku od tablice dekadskih logaritama ovdje su pored mantisa dane i karakteristike. Logaritmi brojeva između 1 i 10 nalaze se neposredno u tablici; za treću i četvrtu decimalu treba provesti interpolacijsku korekciju (vidi str. 19). Za brojeve, koji ispred decimalnog zareza imaju više ili manje od jedne znamenke, prirodne logaritme nalazimo pomoću vrijednosti logaritama potencija broja 10 koje se nalaze na kraju tablice (vidi primjere na str. 67).

OBJAŠNJENJA TABLICA 13, 14 i 15

Tablice 13 i 14 (str. 69 do 72) daju nam s četiri značajne znamenke vrijednosti opsega i površine kruga za promjer d od $d = 1{,}00$ do $d = 9{,}99$. Ako je promjer izvan tih granica, površinu kruga ili opseg kruga tražimo za promjere veće ili manje 10^k puta od zadanog. Pri smanjenju ili povećanju promjera d 10^k puta, opseg kruga također se smanjuje ili povećava 10^k puta, a površina kruga 10^{2k} puta. Ako je broj značajnih znamenaka u d veći od tri, moramo izvršiti interpolaciju (vidi str. 19).

Primjeri: 1) za $d = 69{,}3$ opseg kruga je 217,7, a površina kruga 3772. 2) Za $d = 0{,}693$ opseg kruga je 2,177, a površina kruga je 0,3772.



Sl. 1

U tablici 15 (str. 73 do 77) dani su elementi segmenta kruga (slika 1). Tablica *a*) odnosi se na segmente krugova različitih polumjera s duljinom tetive jednakom jedinici. Ako je pri zadanom odnosu visine i tetive duljina tetive jednaka a, onda vrijednost duljine luka u tablicama moramo pomnožiti sa a, a površinu segmenta sa a^2.

Tablica *b*) sadrži podatke za različite segmente istog kruga s polumjerom 1. Ako je polumjer jednak r, onda tablične vrijednosti l, h i a moramo pomnožiti sa r, a površinu segmenta sa r^2. Kada je zadana duljina luka l (ili tetiva a) i visina h, tada je polumjer segmenta r jednak omjeru l (ili a) prema tabličnoj vrijednosti duljine luka (ili tetive) koji pripada zadanoj vrijednosti l/h (ili a/h).

Primjeri: Ako segment ima tetivu $a = 40$ cm, a visinu $h = 6$ cm, duljinu luka l dobivamo tako, da najprije izračunamo $h/a = 0{,}15$, a zatim sa 40 pomnožimo pripadnu tabličnu vrijednost l iz tablice *a*): $l = 40 \cdot 1{,}0590 = 42{,}36$ cm. Polumjer segmenta r i središnji kut α određujemo pomoću tablice *b*). Za $a/h = 6{,}67$ tablična vrijednost a jednaka je 1,1010, a $\alpha = 66{,}8°$ (linearna interpolacija!). Odatle je $r = 40 : 1{,}1010 = 36{,}33$ cm. Sada možemo naći duljinu luka l pomoću tablice *b*): $l = 36{,}33 \cdot 1{,}1661 = 42{,}36$ cm.

13. OPSEG KRUGA S PROMJEROM d

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	3,142	3,173	3,204	3,236	3,267	3,299	3,330	3,362	3,393	3,424
1,1	3,456	3,487	3,519	3,550	3,581	3,613	3,644	3,676	3,707	3,738
1,2	3,770	3,801	3,833	3,864	3,896	3,927	3,958	3,990	4,021	4,053
1,3	4,084	4,115	4,147	4,178	4,210	4,241	4,273	4,304	4,335	4,367
1,4	4,398	4,430	4,461	4,492	4,524	4,555	4,587	4,618	4,650	4,681
1,5	4,712	4,744	4,775	4,807	4,838	4,869	4,901	4,932	4,964	4,995
1,6	5,027	5,058	5,089	5,121	5,152	5,184	5,215	5,246	5,278	5,309
1,7	5,341	5,372	5,404	5,435	5,466	5,498	5,529	5,561	5,592	5,623
1,8	5,655	5,686	5,718	5,749	5,781	5,812	5,843	5,875	5,906	5,938
1,9	5,969	6,000	6,032	6,063	6,095	6,126	6,158	6,189	6,220	6,252
2,0	6,283	6,315	6,346	6,377	6,409	6,440	6,472	6,503	6,535	6,566
2,1	6,597	6,629	6,660	6,692	6,723	6,754	6,786	6,817	6,849	6,880
2,2	6,912	6,943	6,974	7,006	7,037	7,069	7,100	7,131	7,163	7,194
2,3	7,226	7,257	7,288	7,320	7,351	7,383	7,414	7,446	7,477	7,508
2,4	7,540	7,571	7,603	7,634	7,665	7,697	7,728	7,760	7,791	7,823
2,5	7,854	7,885	7,917	7,948	7,980	8,011	8,042	8,074	8,105	8,137
2,6	8,168	8,200	8,231	8,262	8,294	8,325	8,357	8,388	8,419	8,451
2,7	8,482	8,514	8,545	8,577	8,608	8,639	8,671	8,702	8,734	8,765
2,8	8,796	8,828	8,859	8,891	8,922	8,954	8,985	9,016	9,048	9,079
2,9	9,111	9,142	9,173	9,205	9,236	9,268	9,299	9,331	9,362	9,393
3,0	9,425	9,456	9,488	9,519	9,550	9,582	9,613	9,645	9,676	9,708
3,1	9,739	9,770	9,802	9,833	9,865	9,896	9,927	9,959	9,990	10,02
3,2	10,05	10,08	10,12	10,15	10,18	10,21	10,24	10,27	10,30	10,34
3,3	10,37	10,40	10,43	10,46	10,49	10,52	10,56	10,59	10,62	10,65
3,4	10,68	10,71	10,74	10,78	10,81	10,84	10,87	10,90	10,93	10,96
3,5	11,00	11,03	11,06	11,09	11,12	11,15	11,18	11,22	11,25	11,28
3,6	11,31	11,34	11,37	11,40	11,44	11,47	11,50	11,53	11,56	11,59
3,7	11,62	11,66	11,69	11,72	11,75	11,78	11,81	11,84	11,88	11,91
3,8	11,94	11,97	12,00	12,03	12,06	12,10	12,13	12,16	12,19	12,22
3,9	12,25	12,28	12,32	12,35	12,38	12,41	12,44	12,47	12,50	12,53
4,0	12,57	12,60	12,63	12,66	12,69	12,72	12,75	12,79	12,82	12,85
4,1	12,88	12,91	12,94	12,97	13,01	13,04	13,07	13,10	13,13	13,16
4,2	13,19	13,23	13,26	13,29	13,32	13,35	13,38	13,41	13,45	13,48
4,3	13,51	13,54	13,57	13,60	13,63	13,67	13,70	13,73	13,76	13,79
4,4	13,82	13,85	13,89	13,92	13,95	13,98	14,01	14,04	14,07	14,11
4,5	14,14	14,17	14,20	14,23	14,26	14,29	14,33	14,36	14,39	14,42
4,6	14,45	14,48	14,51	14,55	14,58	14,61	14,64	14,67	14,70	14,73
4,7	14,77	14,80	14,83	14,86	14,89	14,92	14,95	14,99	15,02	15,05
4,8	15,08	15,11	15,14	15,17	15,21	15,24	15,27	15,30	15,33	15,36
4,9	15,39	15,43	15,46	15,49	15,52	15,55	15,58	15,61	15,65	15,68
5,0	15,71	15,74	15,77	15,80	15,83	15,87	15,90	15,93	15,96	15,99
5,1	16,02	16,05	16,08	16,12	16,15	16,18	16,21	16,24	16,27	16,30
5,2	16,34	16,37	16,40	16,43	16,46	16,49	16,52	16,56	16,59	16,62
5,3	16,65	16,68	16,71	16,74	16,78	16,81	16,84	16,87	16,90	16,93
5,4	16,96	17,00	17,03	17,06	17,09	17,12	17,15	17,18	17,22	17,25

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	17,28	17,31	17,34	17,37	17,40	17,44	17,47	17,50	17,53	17,56
5,6	17,59	17,62	17,66	17,69	17,72	17,75	17,78	17,81	17,84	17,88
5,7	17,91	17,94	17,97	18,00	18,03	18,06	18,10	18,13	18,16	18,19
5,8	18,22	18,25	18,28	18,32	18,35	18,38	18,41	18,44	18,47	18,50
5,9	18,54	18,57	18,60	18,63	18,66	18,69	18,72	18,76	18,79	18,82
6,0	18,85	18,88	18,91	18,94	18,98	19,01	19,04	19,07	19,10	19,13
6,1	19,16	19,20	19,23	19,26	19,29	19,32	19,35	19,38	19,42	19,45
6,2	19,48	19,51	19,54	19,57	19,60	19,63	19,67	19,70	19,73	19,76
6,3	19,79	19,82	19,85	19,89	19,92	19,95	19,98	20,01	20,04	20,07
6,4	20,11	20,14	20,17	20,20	20,23	20,26	20,29	20,33	20,36	20,39
6,5	20,42	20,45	20,48	20,51	20,55	20,58	20,61	20,64	20,67	20,70
6,6	20,73	20,77	20,80	20,83	20,86	20,89	20,92	20,95	20,99	21,02
6,7	21,05	21,08	21,11	21,14	21,17	21,21	21,24	21,27	21,30	21,33
6,8	21,36	21,39	21,43	21,46	21,49	21,52	21,55	21,58	21,61	21,65
6,9	21,68	21,71	21,74	21,77	21,80	21,83	21,87	21,90	21,93	21,96
7,0	21,99	22,02	22,05	22,09	22,12	22,15	22,18	22,21	22,24	22,27
7,1	22,31	22,34	22,37	22,40	22,43	22,46	22,49	22,53	22,56	22,59
7,2	22,62	22,65	22,68	22,71	22,75	22,78	22,81	22,84	22,87	22,90
7,3	22,93	22,97	23,00	23,03	23,06	23,09	23,12	23,15	23,19	23,22
7,4	23,25	23,28	23,31	23,34	23,37	23,40	23,44	23,47	23,50	23,53
7,5	23,56	23,59	23,62	23,66	23,69	23,72	23,75	23,78	23,81	23,84
7,6	23,88	23,91	23,94	23,97	24,00	24,03	24,06	24,10	24,13	24,16
7,7	24,19	24,22	24,25	24,28	24,32	24,35	24,38	24,41	24,44	24,47
7,8	24,50	24,54	24,57	24,60	24,63	24,66	24,69	24,72	24,76	24,79
7,9	24,82	24,85	24,88	24,91	24,94	24,98	25,01	25,04	25,07	25,10
8,0	25,13	25,16	25,20	25,23	25,26	25,29	25,32	25,35	25,38	25,42
8,1	25,45	25,48	25,51	25,54	25,57	25,60	25,64	25,67	25,70	25,73
8,2	25,76	25,79	25,82	25,86	25,89	25,92	25,95	25,98	26,01	26,04
8,3	26,08	26,11	26,14	26,17	26,20	26,23	26,26	26,30	26,33	26,36
8,4	26,39	26,42	26,45	26,48	26,52	26,55	26,58	26,61	26,64	26,67
8,5	26,70	26,73	26,77	26,80	26,83	26,86	26,89	26,92	26,95	26,99
8,6	27,02	27,05	27,08	27,11	27,14	27,17	27,21	27,24	27,27	27,30
8,7	27,33	27,36	27,39	27,43	27,46	27,49	27,52	27,55	27,58	27,61
8,8	27,65	27,68	27,71	27,74	27,77	27,80	27,83	27,87	27,90	27,93
8,9	27,96	27,99	28,02	28,05	28,09	28,12	28,15	28,18	28,21	28,24
9,0	28,27	28,31	28,34	28,37	28,40	28,43	28,46	28,49	28,53	28,56
9,1	28,59	28,62	28,65	28,68	28,71	28,75	28,78	28,81	28,84	28,87
9,2	28,90	28,93	28,97	29,00	29,03	29,06	29,09	29,12	29,15	29,19
9,3	29,22	29,25	29,28	29,31	29,34	29,37	29,41	29,44	29,47	29,50
9,4	29,53	29,56	29,59	29,63	29,66	29,69	29,72	29,75	29,78	29,81
9,5	29,85	29,88	29,91	29,94	29,97	30,00	30,03	30,07	30,10	30,13
9,6	30,16	30,19	30,22	30,25	30,28	30,32	30,35	30,38	30,41	30,44
9,7	30,47	30,50	30,54	30,57	30,60	30,63	30,66	30,69	30,72	30,76
9,8	30,79	30,82	30,85	30,88	30,91	30,94	30,98	31,01	31,04	31,07
9,9	31,10	31,13	31,16	31,20	31,23	31,26	31,29	31,32	31,35	31,38
10,0	31,42									

Objašnjenje tablice vidi na str. 68

14. POVRŠINA KRUGA S PROMJEROM *d*

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,7854	0,8012	0,8171	0,8332	0,8495	0,8659	0,8825	0,8992	0,9161	0,9331
1,1	0,9503	0,9677	0,9852	1,003	1,021	1,039	1,057	1,075	1,094	1,112
1,2	1,131	1,150	1,169	1,188	1,208	1,227	1,247	1,267	1,287	1,307
1,3	1,327	1,348	1,368	1,389	1,410	1,431	1,453	1,474	1,496	1,517
1,4	1,539	1,561	1,584	1,606	1,629	1,651	1,674	1,697	1,720	1,744
1,5	1,767	1,791	1,815	1,839	1,863	1,887	1,911	1,936	1,961	1,986
1,6	2,011	2,036	2,061	2,087	2,112	2,138	2,164	2,190	2,217	2,243
1,7	2,270	2,297	2,324	2,351	2,378	2,405	2,433	2,461	2,488	2,516
1,8	2,545	2,573	2,602	2,630	2,659	2,688	2,717	2,746	2,776	2,806
1,9	2,835	2,865	2,895	2,926	2,956	2,986	3,017	3,048	3,079	3,110
2,0	3,142	3,173	3,205	3,237	3,269	3,301	3,333	3,365	3,398	3,431
2,1	3,464	3,497	3,530	3,563	3,597	3,631	3,664	3,698	3,733	3,767
2,2	3,801	3,836	3,871	3,906	3,941	3,976	4,011	4,047	4,083	4,119
2,3	4,155	4,191	4,227	4,264	4,301	4,337	4,374	4,412	4,449	4,486
2,4	4,524	4,562	4,600	4,638	4,676	4,714	4,753	4,792	4,831	4,870
2,5	4,909	4,948	4,988	5,027	5,067	5,107	5,147	5,187	5,228	5,269
2,6	5,309	5,350	5,391	5,433	5,474	5,515	5,557	5,599	5,641	5,683
2,7	5,726	5,768	5,811	5,853	5,896	5,940	5,983	6,026	6,070	6,114
2,8	6,158	6,202	6,246	6,290	6,335	6,379	6,424	6,469	6,514	6,560
2,9	6,605	6,651	6,697	6,743	6,789	6,835	6,881	6,928	6,975	7,022
3,0	7,069	7,116	7,163	7,211	7,258	7,306	7,354	7,402	7,451	7,499
3,1	7,548	7,596	7,645	7,694	7,744	7,793	7,843	7,892	7,942	7,992
3,2	8,042	8,093	8,143	8,194	8,245	8,296	8,347	8,398	8,450	8,501
3,3	8,553	8,605	8,657	8,709	8,762	8,814	8,867	8,920	8,973	9,026
3,4	9,079	9,133	9,186	9,240	9,294	9,348	9,402	9,457	9,511	9,566
3,5	9,621	9,676	9,731	9,787	9,842	9,898	9,954	10,01	10,07	10,12
3,6	10,18	10,24	10,29	10,35	10,41	10,46	10,52	10,58	10,64	10,69
3,7	10,75	10,81	10,87	10,93	10,99	11,04	11,10	11,16	11,22	11,28
3,8	11,34	11,40	11,46	11,52	11,58	11,64	11,70	11,76	11,82	11,88
3,9	11,95	12,01	12,07	12,13	12,19	12,25	12,32	12,38	12,44	12,50
4,0	12,57	12,63	12,69	12,76	12,82	12,88	12,95	13,01	13,07	13,14
4,1	13,20	13,27	13,33	13,40	13,46	13,53	13,59	13,66	13,72	13,79
4,2	13,85	13,92	13,99	14,05	14,12	14,19	14,25	14,32	14,39	14,45
4,3	14,52	14,59	14,66	14,73	14,79	14,86	14,93	15,00	15,07	15,14
4,4	15,21	15,27	15,34	15,41	15,48	15,55	15,62	15,69	15,76	15,83
4,5	15,90	15,98	16,05	16,12	16,19	16,26	16,33	16,40	16,47	16,55
4,6	16,62	16,69	16,76	16,84	16,91	16,98	17,06	17,13	17,20	17,28
4,7	17,35	17,42	17,50	17,57	17,65	17,72	17,80	17,87	17,95	18,02
4,8	18,10	18,17	18,25	18,32	18,40	18,47	18,55	18,63	18,70	18,78
4,9	18,86	18,93	19,01	19,09	19,17	19,24	19,32	19,40	19,48	19,56
5,0	19,63	19,71	19,79	19,87	19,95	20,03	20,11	20,19	20,27	20,35
5,1	20,43	20,51	20,59	20,67	20,75	20,83	20,91	20,99	21,07	21,16
5,2	21,24	21,32	21,40	21,48	21,57	21,65	21,73	21,81	21,90	21,98
5,3	22,06	22,15	22,23	22,31	22,40	22,48	22,56	22,65	22,73	22,82
5,4	22,90	22,99	23,07	23,16	23,24	23,33	23,41	23,50	23,59	23,67

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54
5,6	24,63	24,72	24,81	24,89	24,98	25,07	25,16	25,25	25,34	25,43
5,7	25,52	25,61	25,70	25,79	25,88	25,97	26,06	26,15	26,24	26,33
5,8	26,42	26,51	26,60	26,69	26,79	26,88	26,97	27,06	27,15	27,25
5,9	27,34	27,43	27,53	27,62	27,71	27,81	27,90	27,99	28,09	28,18
6,0	28,27	28,37	28,46	28,56	28,65	28,75	28,84	28,94	29,03	29,13
6,1	29,22	29,32	29,42	29,51	29,61	29,71	29,80	29,90	30,00	30,09
6,2	30,19	30,29	30,39	30,48	30,58	30,68	30,78	30,88	30,97	31,07
6,3	31,17	31,27	31,37	31,47	31,57	31,67	31,77	31,87	31,97	32.07
6,4	32,17	32,27	32,37	32,47	32,57	32,67	32,78	32,88	32,98	33,08
6,5	33,18	33,29	33,39	33,49	33,59	33,70	33,80	33,90	34,00	34,11
6,6	34,21	34,32	34,42	34,52	34,63	34,73	34,84	34,94	35,05	35,15
6,7	35,26	35,36	35,47	35,57	35,68	35,78	35,89	36,00	36,10	36 21
6,8	36,32	36,42	36,53	36,64	36,75	36,85	36,96	37,07	37,18	37,28
6,9	37,39	37,50	37,61	37,72	37,83	37,94	38,05	38,16	38,26	38,37
7,0	38,48	38,59	38,70	38,82	38,93	39,04	39,15	39,26	39,37	39,48
7,1	39,59	39,70	39,82	39,93	40,04	40,15	40,26	40,38	40,49	40,60
7,2	40,72	40,83	40,94	41,06	41,17	41,28	41,40	41,51	41,62	41,74
7,3	41,85	41,97	42,08	42,20	42,31	42,43	42,54	42,66	42,78	42,89
7,4	43,01	43,12	43,24	43,36	43,47	43,59	43,71	43,83	43,94	44,06
7,5	44,18	44,30	44,41	44,53	44,65	44,77	44,89	45,01	45,13	45,25
7,6	45,36	45,48	45,60	45,72	45,84	45,96	46,08	46,20	46,32	46,45
7,7	46,57	46,69	46,81	46,93	47,05	47,17	47,29	47.42	47,54	47,66
7,8	47,78	47,91	48,03	48,15	48,27	48,40	48,52	48,65	48,77	48,89
7,9	49,02	49,14	49,27	49,39	49,51	49,64	49,76	49,89	50,01	50,14
8,0	50,27	50,39	50,52	50,64	50,77	50,90	51,02	51,15	51,28	51,40
8,1	51,53	51,66	51,78	51,91	52,04	52,17	52,30	52,42	52,55	52,68
8,2	52,81	52,94	53,07	53,20	53,33	53,46	53,59	53,72	53,85	53,98
8,3	54,11	54,24	54,37	54,50	54,63	54,76	54,89	55,02	55,15	55,29
8,4	55,42	55,55	55,68	55,81	55,95	56,08	56,21	56,35	56,48	56,61
8,5	56,75	56,88	57,01	57,15	57,28	57,41	57,55	57,68	57,82	57,95
8,6	58,09	58,22	58,36	58,49	58,63	58,77	58,90	59,04	59,17	59,31
8,7	59,45	59.58	59,72	59,86	59,99	60,13	60,27	60,41	60,55	60,68
8,8	60,82	60,96	61,10	61,24	61,38	61,51	61,65	61,79	61,93	62,07
8,9	62,21	62,35	62,49	62,63	62,77	62,91	63,05	63,19	63,33	63,48
9,0	63,62	63,76	63,90	64,04	64,18	64,33	64,47	64,61	64,75	64,90
9,1	65,04	65,18	65,33	65,47	65,61	65,76	65,90	66,04	66,19	66,33
9,2	66,48	66,62	66,77	66,91	67,06	67,20	67,35	67,49	67,64	67,78
9,3	67,93	68,08	68,22	68,37	68,51	68,66	68,81	68,96	69,10	69,25
9,4	69,40	69,55	69,69	69,84	69,99	70,14	70,29	70,44	70,58	70,73
9,5	70,88	71,03	71,18	71,33	71,48	71,63	71,78	71,93	72,08	72,23
9,6	72,38	72,53	72,68	72,84	72,99	73,14	73,29	73,44	73,59	73,75
9,7	73,90	74,05	74,20	74,36	74,51	74,66	74,82	74,97	75,12	75,28
9,8	75,43	75,58	75,74	75,89	76,05	76,20	76,36	76,51	76,67	76.82
9,9	76,98	77,13	77,29	77,44	77,60	77,76	77,91	78,07	78,23	78,38
10,0	78,54									

Objašnjenje tablice vidi na str. 68.

15. ELEMENTI KRUŽNOG SEGMENTA

a) Duljina luka i površina segmenta za tetivu jednaku jedan

Omjer visine i tetive $\frac{h}{a}$	Duljina luka l	Površina segmenta	Omjer visine i tetive $\frac{h}{a}$	Duljina luka l	Površina segmenta
—	—	—	**0,25**	1,1591	0,1747
0,01	1,0003	0,0067	0,26	1,1715	0,1824
0,02	1,0011	0,0133	0,27	1,1843	0,1901
0,03	1,0024	0,0200	0,28	1,1975	0,1979
0,04	1,0043	0,0267	0,29	1,2110	0,2058
0,05	1,0067	0,0334	**0,30**	1,2250	0,2137
0,06	1,0096	0,0401	0,31	1,2393	0,2218
0,07	1,0130	0,0468	0,32	1,2539	0,2299
0,08	1,0170	0,0536	0,33	1,2689	0,2381
0,09	1,0215	0,0604	0,34	1,2843	0,2464
0,10	1,0265	0,0672	**0,35**	1,3000	0,2548
0,11	1,0320	0,0740	0,36	1,3160	0,2633
0,12	1,0380	0,0809	0,37	1.3323	0,2719
0,13	1,0445	0,0878	0,38	1,3490	0,2806
0,14	1,0515	0,0948	0,39	1,3660	0,2893
0,15	1,0590	0,1018	**0,40**	1,3832	0,2982
0,16	1,0669	0,1088	0,41	1,4008	0,3072
0,17	1,0754	0,1159	0,42	1,4186	0,3162
0,18	1,0843	0,1231	0,43	1,4367	0,3254
0,19	1,0936	0,1303	0,44	1,4551	0,3347
0,20	1,1035	0,1375	**0,45**	1,4738	0,3441
0,21	1,1137	0,1448	0,46	1,4927	0,3536
0,22	1,1244	0,1522	0,47	1,5118	0,3632
0,23	1,1356	0,1596	0,48	1,5313	0,3729
0,24	1,1471	0,1671	0,49	1,5509	0,3828
0,25	1,1591	0,1747	**0,50**	1,5708	0,3927

Objašnjenje tablice vidi na str. 68.
Formule za segment na str. 193.

b) Duljina luka, visina, duljina tetive i površina segmenta s polumjerom jedan

Središ. kut $\alpha°$	Duljina luka l	Visina h	$\frac{l}{h}$	Duljina tetive a	$\frac{a}{h}$	Površina segmenta
1	0,0175	0,0000	458,37	0,0175	458,36	0,00000
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	229,18	0,00000
3	0,0524	0,0003	152,80	0,0524	152,78	0,00001
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	114,58	0,00003
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	91,66	0,00006
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	76,38	0,00010
7	0,1222	0,0019	65,50	0,1221	65,46	0,00015
8	0,1396	0,0024	57,32	0,1395	57,27	0,00023
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	50,90	0,00032
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	45,81	0,00044
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	41,64	0,00059
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	38,16	0,00076
13	0,2269	0,0064	35,30	0,2264	35,22	0,00097
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	32,70	0,00121
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	30,51	0,00149
16	0,2793	0,0097	28,69	0,2783	28,60	0,00181
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	26,91	0,00217
18	0,3142	0,0123	25,52	0,3129	25,41	0,00257
19	0,3316	0,0137	24,18	0,3301	24,07	0,00302
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	22,86	0,00352
21	0,3665	0,0167	21,89	0,3645	21,77	0,00408
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	20,77	0,00468
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	19,86	0,00535
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	19,03	0,00607
25	0,4363	0,0237	18,41	0,4329	18,26	0,00686
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	17,55	0,00771
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	16,90	0,00862
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	16,29	0,00961
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	15,72	0,01067
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	15,19	0,01180
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	14,70	0,01301
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5513	14,23	0,01429
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	13,79	0,01566
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	13,38	0,01711
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	12,99	0,01864
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	12,63	0,02027
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	12,28	0,02198
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	11,95	0,02378
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	11,64	0,02568
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	11,34	0,02767
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	11,06	0,02976
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	10,79	0,03195
43	0,7505	0,0696	10,79	0,7330	10,53	0,03425
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	10,29	0,03664
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	10,05	0,03915

Objašnjenje tablice vidi na str. 68. Formule za segment vidi na str. 193.

Središ. kut $\alpha°$	Duljina luka l	Visina h	$\frac{l}{h}$	Duljina tetive a	$\frac{a}{h}$	Površina segmenta
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	10,05	0,03915
46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	9,83	0,04176
47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	9,62	0,04448
48	0,8378	0,0865	9,69	0,8135	9,41	0,04731
49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	9,21	0,05025
50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	9,02	0,05331
51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	8,84	0,05649
52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	8,66	0,05978
53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	8,49	0,06319
54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	8,33	0,06673
55	0,9599	0,1130	8,50	0,9235	8,17	0,07039
56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	8,02	0,07417
57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	7,88	0,07808
58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	7,73	0,08212
59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	7,60	0,08629
60	1,0472	0,1340	7,82	1,0000	7,46	0,09059
61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	7,34	0,09502
62	1,0821	0,1428	7,58	1,0301	7,21	0,09958
63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	7,09	0,10428
64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	6,97	0,10911
65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	6,86	0,11408
66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	6,75	0,11919
67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	6,65	0,12443
68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	6,54	0,12982
69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	6,44	0,13535
70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	6,34	0,14102
71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	6,25	0,14683
72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	6,16	0,15279
73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	6,07	0,15889
74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	5,98	0,16514
75	1,3090	0,2066	6,33	1,2175	5,89	0,17154
76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	5,81	0,17808
77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	5,73	0,18477
78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	5,65	0,19160
79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	5,57	0,19859
80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	5,49	0,20573
81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	5,42	0,21301
82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	5,35	0,22045
83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	5,28	0,22804
84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	5,21	0,23578
85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	5,14	0,24367
86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	5,08	0,25171
87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	5,01	0,25990
88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	4,95	0,26825
89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	4,89	0,27675
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	4,83	0,28540

Središ. kut $\alpha°$	Duljina luka l	Visina h	$\frac{l}{h}$	Duljina tetive a	$\frac{a}{h}$	Površina segmenta
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	4,83	0,28540
91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	4,77	0,29420
92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	4,71	0,30316
93	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	4,66	0,31226
94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	4,60	0,32152
95	1,6581	0,3244	5,11	1,4746	4,55	0,33093
96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	4,49	0,34050
97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	4,44	0,35021
98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	4,39	0,36008
99	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	4,34	0,37009
100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	4,29	0,38026
101	1,7628	0,3639	4,84	1,5432	4,24	0,39058
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	4,19	0,40104
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	4,15	0,41166
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	4,10	0,42242
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	4,06	0,43333
106	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	4,01	0,44439
107	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	3,97	0,45560
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	3,93	0,46695
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	3,88	0,47845
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	3,84	0,49008
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	3,80	0,50187
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	3,76	0,51379
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	3,72	0,52586
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	3,68	0,53806
115	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	3,65	0,55041
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	3,61	0,56289
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	3,57	0,57551
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	3,53	0,58827
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	3,50	0,60116
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	3,46	0,61418
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	3,43	0,62734
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	3,40	0,64063
123	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	3,36	0,65404
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	3,33	0,66759
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	3,30	0,68125
126	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	3,26	0,69505
127	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	3,23	0,70897
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	3,20	0,72301
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	3,17	0,73716
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	3,14	0,75144
131	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	3,11	0,76584
132	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	3,08	0,78034
133	2,3213	0,6013	3,86	1,8341	3,05	0,79497
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	3,02	0,80970
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	2,99	0,82454

Objašnjenje tablice vidi na str. 68.

Središ. kut $\alpha°$	Duljina luka l	Visina h	$\frac{l}{h}$	Duljina tetive a	$\frac{a}{h}$	Površina segmenta
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	2,99	0,82454
136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	2,97	0,83949
137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	2,94	0,85455
138	2,4086	0,6416	3,75	1,8672	2,91	0,86971
139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	2,88	0,88497
140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	2,86	0,90034
141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	2,83	0,91580
142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	2,80	0,93135
143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	2,78	0,94700
144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	2,75	0,96274
145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	2,73	0,97858
146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	2,70	0,99449
147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	2,68	1,01050
148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	2,65	1,02658
149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	2,63	1,04275
150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	2,61	1,05900
151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	2,58	1,07532
152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	2,56	1,09171
153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	2,54	1,10818
154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	2,51	1,12472
155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	2,49	1,14132
156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	2,47	1,15799
157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	2,45	1,17472
158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	2,43	1,19151
159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	2,40	1,20835
160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	2,38	1,22525
161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	2,36	1,24221
162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	2,34	1,25921
163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	2,32	1,27626
164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	2,30	1,29335
165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	2,28	1,31049
166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	2,26	1,32766
167	2,9147	0,8868	3,29	1,9871	2,24	1,34487
168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	2,22	1,36212
169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	2,20	1,37940
170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	2,18	1,39671
171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	2,16	1,41404
172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	2,14	1,43140
173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	2,13	1,44878
174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	2,11	1,46617
175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	2,09	1,48359
176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	2,07	1,50101
177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	2,05	1,51845
178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	2,04	1,53589
179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	2,02	1,55334
180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	2,00	1,57080

16. PRERAČUNAVANJE STUPANJA U RADIJANE

Duljine lukova kružnice s polumjerom 1

Kut	Luk	Kut	Luk	Kut	Luk
1''	0,000005	1°	0,017453	31°	0,541052
2	0,000010	2	0,034907	32	0,558505
3	0,000015	3	0,052360	33	0,575959
4	0,000019	4	0,069813	34	0,593412
5	0,000024	5	0,087266	35	0,610865
6	0,000029	6	0,104720	36	0,628319
7	0,000034	7	0,122173	37	0,645772
8	0,000039	8	0,139626	38	0,663225
9	0,000044	9	0,157080	39	0,680678
10	0,000048	10	0,174533	40	0,698132
20	0,000097	11	0,191986	45	0,785398
30	0,000145	12	0,209440	50	0,872665
40	0,000194	13	0,226893	55	0,959931
50	0,000242	14	0,244346	60	1,047198
		15	0,261799	65	1,134464
1'	0,000291	16	0,279253	70	1,221730
2	0,000582	17	0,296706	75	1,308997
3	0,000873	18	0,314159	80	1,396263
4	0,001164	19	0,331613	85	1,483530
5	0,001454	20	0,349066	90	1,570796
6	0,001745	21	0,366519	100	1,745329
7	0,002036	22	0,383972	120	2,094395
8	0,002327	23	0,401426	150	2,617994
9	0,002618	24	0,418879	180	3,141593
10	0,002909	25	0,436332	200	3,490659
20	0,005818	26	0,453786	250	4,363323
30	0,008727	27	0,471239	270	4,712389
40	0,011636	28	0,488692	300	5,235988
50	0,014544	29	0,506145	360	6,283185
		30	0,523599	400	6,981317

Primjer:

1. 52°37'23''

50°	= 0,872665
2°	= 0,034907
30'	= 0,008727
7'	= 0,002036
20''	= 0,000097
3''	= 0,000015
	0,918447

52°37'23'' = 0,91845 rad.

2. 5,645 rad.

5,235988	=	300°
0,409012		
0,401426	=	23°
0,007586		
0,005818	=	20'
0,001768		
0,001745	=	6'
0,000023	=	5''

5,645 rad. = 323°26'5''

Luk koji je jednak polumjeru ima 57°17'44'',8 (= 1 radijan).

17. PROPORCIONALNI DIJELOVI

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	1
2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	2
3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	3
4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	4
5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	5
6	6,6	7,2	7,8	8,4	9,0	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0	6
7	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14,0	7
8	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6	14,4	15,2	16,0	8
9	9,9	10,8	11,7	12,6	13,5	14,4	15,3	16,2	17,1	18,0	9
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	1
2	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	2
3	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	7,8	8,1	8,4	8,7	9,0	3
4	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12,0	4
5	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	5
6	12,6	13,2	13,8	14,4	15,0	15,6	16,2	16,8	17,4	18,0	6
7	14,7	15,4	16,1	16,8	17,5	18,2	18,9	19,6	20,3	21,0	7
8	16,8	17,6	18,4	19,2	20,0	10,8	21,6	22,4	23,2	24,0	8
9	18,9	19,8	20,7	21,6	22,5	23,4	24,3	25,2	26,1	27,0	9
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	1
2	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	2
3	9,3	9,6	9,9	10,2	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	12,0	3
4	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2	15,6	16,0	4
5	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	5
6	18,6	19,2	19,8	20,4	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0	6
7	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3	28,0	7
8	24,8	25,6	26,4	27,2	28,0	28,8	29,6	30,4	31,2	32,0	8
9	27,9	28,8	29,7	30,6	31,5	32,4	33,3	34,2	35,1	36,0	9
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	1
2	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	2
3	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1	14,4	14,7	15,0	3
4	16,4	16,8	17,2	17,6	18,0	18,4	18,8	19,2	19,6	20,0	4
5	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5	25,0	5
6	24,6	25,2	25,8	26,4	27,0	27,6	28,2	28,8	29,4	30,0	6
7	28,7	29,4	30,1	30,8	31,5	32,2	32,9	33,6	34,3	35,0	7
8	32,8	33,6	34,4	35,2	36,0	36,8	37,6	38,4	39,2	40,0	8
9	36,9	37,8	38,7	39,6	40,5	41,4	42,3	43,2	44,1	45,0	9

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
1	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	1
2	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	2
3	15,3	15,6	15,9	16,2	16,5	16,8	17,1	17,4	17,7	18,0	3
4	20,4	20,8	21,2	21,6	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	4
5	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30,0	5
6	30,6	31,2	31,8	32,4	33,0	33,6	34,2	34,8	35,4	36,0	6
7	35,7	36,4	37,1	37,8	38,5	39,2	39,9	40,6	41,3	42,0	7
8	40,8	41,6	42,4	43,2	44,0	44,8	45,6	46,4	47,2	48,0	8
9	45,9	46,8	47,7	48,6	49,5	50,4	51,3	52,2	53,1	54,0	9

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	1
2	12,2	12,4	12,6	12,8	13,0	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	2
3	18,3	18,6	18,9	19,2	19,5	19,8	20,1	20,4	20,7	21,0	3
4	24,4	24,8	25,2	25,6	26,0	26,4	26,8	27,2	27,6	28,0	4
5	30,5	31,0	31,5	32,0	32,5	33,0	33,5	34,0	34,5	35,0	5
6	36,6	37,2	37,8	38,4	39,0	39,6	40,2	40,8	41,4	42,0	6
7	42,7	43,4	44,1	44,8	45,5	46,2	46,9	47,7	48,3	49,0	7
8	48,8	49,6	50,4	51,2	52,0	52,8	53,6	54,4	55,2	56,0	8
9	54,9	55,8	56,7	57,6	58,5	59,4	60,3	61,2	62,1	63,0	9

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
1	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	1
3	14,2	14,4	14,6	14,8	15,0	15,2	15,4	15,6	15,8	16,0	2
3	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1	23,4	23,7	24,0	3
4	28,4	28,8	29,2	29,6	30,0	30,4	30,8	31,2	31,6	32,0	4
5	35,5	36,0	36,5	37,0	37,5	38,0	38,5	39,0	39,5	40,0	5
6	42,6	43,2	43,8	44,4	45,0	45,6	46,2	46,8	47,4	48,0	6
7	49,7	50,4	51,1	51,8	52,5	53,2	53,9	54,6	55,3	56,0	7
8	56,8	57,6	58,4	59,2	60,0	60,8	61,6	62,4	63,2	64,0	8
9	63,9	64,8	65,7	66,6	67,5	68,4	69,3	70,2	71,1	72,0	9

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
1	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	1
2	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18,0	2
3	24,3	24,6	24,9	25,2	25,5	25,8	26,1	26,4	26,7	27,0	3
4	32,4	32,8	33,2	33,6	34,0	34,4	34,8	35,2	35,6	36,0	4
5	40,5	41,0	41,5	42,0	42,5	43,0	43,5	44,0	44,5	45,0	5
6	48,6	49,2	49,8	50,4	51,0	51,6	52,2	52,8	53,4	54,0	6
7	56,7	57,4	58,1	58,8	59,5	60,2	60,9	61,6	62,3	63,0	7
8	64,8	65,6	66,4	67,2	68,0	68,8	69,6	70,4	71,2	72,0	8
9	72,9	73,8	74,7	75,6	76,5	77,4	78,3	79,2	80,1	81,0	9

18. TABLICA ZA KVADRATNU INTERPOLACIJU

k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k
0,000		1,000	0,066		0,934	0,147		0,853	0,255		0,745
	0,000			0,016			0,032			0,048	
0,002		0,998	0,071		0,929	0,153		0,847	0,263		0,737
	0,001			0,017			0,033			0,049	
0,006		0,994	0,075		0,925	0,159		0,841	0,271		0,729
	0,002			0,018			0,034			0,050	
0,010		0,990	0,080		0,920	0,165		0,835	0,280		0,720
	0,003			0,019			0,035			0,051	
0,014		0,986	0,085		0,915	0,171		0,829	0,290		0,710
	0,004			0,020			0,036			0,052	
0,018		0,982	0,090		0,910	0,177		0,823	0,300		0,700
	0,005			0,021			0,037			0,053	
0,022		0,978	0,095		0,905	0,183		0,817	0,310		0,690
	0,006			0,022			0,038			0,054	
0,026		0,974	0,100		0,900	0,190		0,810	0,321		0,679
	0,007			0,023			0,039			0,055	
0,030		0,970	0,105		0,895	0,196		0,804	0,332		0,668
	0,008			0,024			0,040			0,056	
0,035		0,965	0,110		0,890	0,203		0,797	0,345		0,655
	0,009			0,025			0,041			0,057	
0,039		0,961	0,115		0,885	0,210		0,790	0,358		0,642
	0,010			0,026			0,042			0,058	
0,043		0,957	0,120		0,880	0,217		0,783	0,373		0,627
	0,011			0,027			0,043			0,059	
0,048		0,952	0,125		0,875	0,224		0,776	0,390		0,610
	0,012			0,028			0,044			0,060	
0,052		0,948	0,131		0,869	0,231		0,769	0,410		0,590
	0,013			0,029			0,045			0,061	
0,057		0,943	0,136		0,864	0,239		0,761	0,436		0,564
	0,014			0,030			0,046			0,062	
0,061		0,939	0,142		0,858	0,247		0,753	0,500		0,500
	0,015			0,031			0,047				
0,066		0,934	0,147		0,853	0,255		0,745			

O kvadratnoj interpolaciji vidi str. 19.

Svim vrijednostima k među susjednim brojevima stupca k (kako lijevo, tako i desno), odgovaraju jedne te iste vrijednosti k_1, koje su među tim susjednim vrijednostima k. »Kritičkim« (tabličnim) vrijednostima k odgovaraju gornje vrijednosti k_1.

Primjeri:

1) za $k = 0{,}8$ $k_1 = 0{,}040$ (isto kao i za sve druge k, između 0,797 i 0,804 ili između 0,196 i 0,203);

2) za $k = 0{,}3$ (ili za $k = 0{,}7$) $k_1 = 0{,}052$.

B. TABLICE SPECIJALNIH FUNKCIJA

19. GAMA-FUNKCIJA*

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	**1,25**	0,90640	**1,50**	0,88623	**1,75**	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	**1,30**	0,89747	**1,55**	0,88887	**1,80**	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	**1,35**	0,89115	**1,60**	0,89352	**1,85**	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	**1,40**	0,88726	**1,65**	0,90012	**1,90**	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	**1,45**	0,88566	**1,70**	0,90864	**1,95**	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88595	74	0,91683	99	0,99581
1,25	0,90640	**1,50**	0,88623	**1,75**	0,91906	**2,00**	1,00000

Vrijednosti gama-funkcije za $x < 1$ i $x > 2$ možemo računati pomoću formula

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \qquad \Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1).$$

Primjeri: 1) $\Gamma(0{,}7) = \dfrac{\Gamma(1{,}7)}{0{,}7} = \dfrac{0{,}90864}{0{,}7} = 1{,}2981,$

2) $\Gamma(3{,}5) = 2{,}5 \cdot \Gamma(2{,}5) = 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot \Gamma(1{,}5) =$
$= 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}88623 = 3{,}32336.$

* Definiciju, formule i grafove vidi na str. 184.

20. BESSELOVE (CILINDRIČNE) FUNKCIJE*

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,0	+1,0000	+0,0000	$-\infty$	$-\infty$	+1,000	0,0000	∞	∞
0,1	0,9975	0,0499	−1,5342	−6,4590	1,003	+0,0501	2,4271	9,8538
0,2	0,9900	0,0995	1,0811	3,3238	1,010	0,1005	1,7527	4,7760
0,3	0,9776	0,1483	0,8073	2,2931	1,023	0,1517	1,3725	3,0560
0,4	0,9604	0,1960	0,6060	1,7809	1,040	0,2040	1,1145	2,1844
0,5	+0,9385	+0,2423	−0,4445	−1,4715	1,063	0,2579	0,9244	1,6564
0,6	0,9120	0,2867	0,3085	1,2604	1,092	0,3137	0,7775	1,3028
0,7	0,8812	0,3290	0,1907	1,1032	1,126	0,3719	0,6605	1,0503
0,8	0,8463	0,3688	−0,0868	0,9781	1,167	0,4329	0,5653	0,8618
0,9	0,8075	0,4059	+0,0056	0,8731	1,213	0,4971	0,4867	0,7165
1,0	+0,7652	+0,4401	+0,0883	−0,7812	1,266	0,5652	0,4210	0,6019
1,1	0,7196	0,4709	0,1622	0,6981	1,326	0,6375	0,3656	0,5098
1,2	0,6711	0,4983	0,2281	0,6211	1,394	0,7147	0,3185	0,4346
1,3	0,6201	0,5220	0,2865	0,5485	1,469	0,7973	0,2782	0,3725
1,4	0,5669	0,5419	0,3379	0,4791	1,553	0,8861	0,2437	0,3208
1,5	+0,5118	+0,5579	+0,3824	−0,4123	1,647	0,9817	0,2138	0,2774
1,6	0,4554	0,5699	0,4204	0,3476	1,750	1,085	0,1880	0,2406
1,7	0,3980	0,5778	0,4520	0,2847	1,864	1,196	0,1655	0,2094
1,8	0,3400	0,5815	0,4774	0,2237	1,990	1,317	0,1459	0,1826
1,9	0,2818	0,5812	0,4968	0,1644	2,128	1,448	0,1288	0,1597
2,0	+0,2239	+0,5767	+0,5104	−0,1070	2,280	1,591	0,1139	0,1399
2,1	0,1666	0,5683	0,5183	−0,0517	2,446	1,745	0,1008	0,1227
2,2	0,1104	0,5560	0,5208	+0,0015	2,629	1,914	0,08927	0,1079
2,3	0,0555	0,5399	0,5181	0,0523	2,830	2,098	0,07914	0,09498
2,4	0,0025	0,5202	0,5104	0,1005	3,049	2,298	0,07022	0,08372
2,5	−0,0484	+0,4971	+0,4981	+0,1459	3,290	2,517	0,06235	0,07389
2,6	0,0968	0,4708	0,4813	0,1884	3,553	2,755	0,05540	0,06528
2,7	0,1424	0,4416	0,4605	0,2276	3,842	3,016	0,04926	0,05774
2,8	0,1850	0,4097	0,4359	0,2635	4,157	3,301	0,04382	0,05111
2,9	0,2243	0,3754	0,4079	0,2959	4,503	3,613	0,03901	0,04529
3,0	−0,2601	+0,3391	+0,3769	+0,3247	4,881	3,953	0,03474	0,04016
3,1	0,2921	0,3009	0,3431	0,3496	5,294	4,326	0,03095	0,03563
3,2	0,3202	0,2613	0,3070	0,3707	5,747	4,734	0,02759	0,03164
3,3	0,3443	0,2207	0,2691	0,3879	6,243	5,181	0,02461	0,02812
3,4	0,3643	0,1792	0,2296	0,4010	6,785	5,670	0,02196	0,02500
3,5	−0,3801	+0,1374	+0,1890	+0,4102	7,378	6,206	0,01960	0,02224
3,6	0,3918	0,0955	0,1477	0,4154	8,028	6,793	0,01750	0,01979
3,7	0,3992	0,0538	0,1061	0,4167	8,739	7,436	0,01563	0,01763
3,8	0,4026	+0,0128	0,0645	0,4141	9,517	8,140	0,01397	0,01571
3,9	0,4018	−0,0272	+0,0234	0,4078	10,37	8,913	0,01248	0,01400
4,0	−0,3971	−0,0660	−0,0169	+0,3979	11,30	9,759	0,01116	0,01248
4,1	0,3887	0,1033	0,0561	0,3846	12,32	10,69	0,009980	0,01114
4,2	0,3766	0,1386	0,0938	0,3680	13,44	11,71	0,008927	0,009938
4,3	0,3610	0,1719	0,1296	0,3484	14,67	12,82	0,007988	0,008872
4,4	0,3423	0,2028	0,1633	0,3260	16,01	14,05	0,007149	0 007923
4,5	−0,3205	−0,2311	−0,1947	+0,3010	17,48	15,39	0,006400	0,007078
4,6	0,2961	0,2566	0,2235	0,2737	19,09	16,86	0,005730	0,006325
4,7	0,2693	0,2791	0,2494	0,2445	20,86	18,48	0,005132	0,005654
4,8	0,2404	0,2985	0,2723	0,2136	22,79	20,25	0,004597	0,005055
4,9	0,2097	0,3147	0,2921	0,1812	24,91	22,20	0,004119	0,004521

* Definiciju, formule i grafove vidi na str. 541 do 543.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
							0,0 0	0,0 0
5,0	—0,1776	—0,3276	—0,3085	+0,1479	27,24	24,34	349 1	404 5
5,1	0,1443	0,3371	0,3216	0,1137	29,79	26,68	330 8	361 9
5,2	0,1103	0,3432	0,3313	0,0792	32,58	29,25	296 6	323 9
5,3	0,0758	0,3460	0,3374	0,0445	35,65	32,08	265 9	290 0
5,4	0,0412	0,3453	0,3402	+0,0101	39,01	35,18	238 5	259 7
5,5	—0,0068	—0,3414	—0,3395	—0,0238	42,69	38,59	213 9	232 6
5,6	+0,0270	0,3343	0,3354	0,0568	46,74	42,33	191 8	208 3
5,7	0,0599	0,3241	0,3282	0,0887	51,17	46,44	172 1	186 6
5,8	0,0917	0,3110	0,3177	0,1192	56,04	50,95	154 4	167 3
5,9	0,1220	0,2951	0,3044	0,1481	61,38	55,90	138 6	149 9
6,0	+0,1506	—0,2767	—0,2882	—0,1750	67,23	61,34	124 4	134 4
6,1	0,1773	0,2559	0,2694	0,1998	73,66	67,32	111 7	120 5
6,2	0,2017	0,2329	0,2483	0,2223	80,72	73,89	100 3	108 1
6,3	0,2238	0,2081	0,2251	0,2422	88,46	81,10	090 01	096 91
6,4	0,2433	0,1816	0,1999	0,2596	96,96	89,03	080 83	086 93
6,5	+0,2601	—0,1538	—0,1732	—0,2741	106,3	97,74	072 59	077 99
6,6	0,2740	0,1250	0,1452	0,2857	116,5	107,3	065 20	069 98
6,7	0,2851	0,0953	0,1162	0,2945	127,8	117,8	058 57	062 80
6,8	0,2931	0,0652	0,0864	0,3002	140,1	129,4	052 62	056 36
6,9	0,2981	0,0349	0,0569	0,3029	153,7	142,1	047 28	050 59
7,0	+0,3001	—0,0047	—0,0259	—0,3027	168,6	156,0	042 48	045 42
7,1	0,2991	+0,0252	+0,0042	0,2995	185,0	171,4	038 17	040 78
7,2	0,2951	0,0543	0,0339	0,2934	202,9	188,3	034 31	036 62
7,3	0,2882	0,0826	0,0628	0,2846	222,7	206,8	030 84	032 88
7,4	0,2786	0,1096	0,0907	0,2731	244,3	227,2	027 72	029 53
7,5	+0,2663	+0,1352	+0,1173	—0,2591	268,2	249,6	024 92	026 53
7,6	0,2516	0,1592	0,1424	0,2428	294,3	274,2	022 40	023 83
7,7	0,2346	0,1813	0,1658	0,2243	323,1	301,3	020 14	021 41
7,8	0,2154	0,2014	0,1872	0,2039	354,7	331,1	018 11	019 24
7,9	0,1944	0,2192	0,2065	0,1817	389,4	363,9	016 29	017 29
8,0	+0,1717	+0,2346	+0,2235	—0,1581	427,6	399,9	014 65	015 54
8,1	0,1475	0,2476	0,2381	0,1331	469,5	439,5	013 17	013 96
8,2	0,1222	0,2580	0,2501	0,1072	515,6	483,0	011 85	012 55
8,3	0,0960	0,2657	0,2595	0,0806	566,3	531,0	010 66	011 28
8,4	0,0692	0,2708	0,2662	0,0535	621,9	583,7	009 588	010 14
8,5	+0,0419	+0,2731	+0,2702	—0,0262	683,2	641,6	008 626	009 120
8,6	+0,0146	0,2728	0,2715	+0,0011	750,5	705,4	007 761	008 200
8,7	—0,0125	0,2697	0,2700	0,0280	824,4	775,5	006 983	007 374
8,8	0,0392	0,2641	0,2659	0,0544	905,8	852,7	006 283	006 631
8,9	0,0653	0,2559	0,2592	0,0799	995,2	937,5	005 654	005 964
9,0	—0,0903	+0,2453	+0,2499	+0,1043	1094	1031	005 088	005 364
9,1	0,1142	0,2324	0,2383	0,1275	1202	1134	004 579	004 825
9,2	0,1367	0,2174	0,2245	0,1491	1321	1247	004 121	004 340
9,3	0,1577	0,2004	0,2086	0,1691	1451	1371	003 710	003 904
9,4	0,1768	0,1816	0,1907	0,1871	1595	1508	003 339	003 512
9,5	—0,1939	+0,1613	+0,1712	+0,2032	1735	1658	003 006	003 160
9,6	0,2090	0,1395	0,1502	0,2171	1927	1824	002 706	002 843
9,7	0,2218	0,1166	0,1279	0,2287	2119	2006	002 436	002 559
9,8	0,2323	0,0928	0,1045	0.2379	2329	2207	002 193	002 302
9,9	0,2403	0,0684	0,0804	0,2447	2561	2428	001 975	002 072
10,0	—0,2459	+0,0435	+0,0557	+0,2490	2816	2761	001 778	001 865

21. LEGENDREOVI POLINOMI (KUGLINE FUNKCIJE)*

$x = P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,00	—0,5000	0,0000	0,3750	0,0000	—0,3125	0,0000
0,05	—0,4962	—0,0747	0,3657	0,0927	—0,2962	—0,1069
0,10	—0,4850	—0,1475	0,3379	0,1788	—0,2488	—0,1995
0,15	—0,4662	—0,2166	0,2928	0,2523	—0,1746	—0,2649
0,20	—0,4400	—0,2800	0,2320	0,3075	—0,0806	—0,2935
0,25	—0,4062	—0,3359	0,1577	0,3397	+0,0243	—0,2799
0,30	—0,3650	—0,3825	+0,0729	0,3454	0,1292	—0,2241
0,35	—0,3162	—0,4178	—0,0187	0,3225	0,2225	—0,1318
0,40	—0,2600	—0,4400	—0,1130	0,2706	0,2926	—0,0146
0,45	—0,1962	—0,4472	—0,2050	0,1917	0,3290	+0,1106
0,50	—0,1250	—0,4375	—0,2891	+0,0898	0,3232	0,2231
0,55	—0,0462	—0,4091	—0,3590	—0,0282	0,2708	0,3007
0,60	+0,0400	—0,3600	—0,4080	—0,1526	0,1721	0,3226
0,65	0,1338	—0,2884	—0,4284	—0,2705	+0,0347	0,2737
0,70	0,2350	—0,1925	—0,4121	—0,3652	—0,1253	+0,1502
0,75	0,3438	—0,0703	—0,3501	—0,4164	—0,2808	—0,0342
0,80	0,4600	+0,0800	—0,2330	—0,3995	—0,3918	—0,2397
0,85	0,5838	0,2603	—0,0506	—0,2857	—0,4030	—0,3913
0,90	0,7150	0,4725	+0,2079	—0,0411	—0,2412	—0,3678
0,95	0,8538	0,7184	0,5541	+0,3727	+0,1875	+0,0112
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$P_0(x) = 1;\quad P_1(x) = x;$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x);$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5);$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x).$$

* Definiciju i grafove vidi na str. 544.

22. ELIPTIČKI INTEGRALI*

a) Eliptički integrali prve vrste: $F(k, \varphi)$, $k = \sin\alpha$

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3555	0,3561	0,3564
30	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
40	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226	1,1643	1,2126	1,2619	1,3014	1,3170
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞

b) Eliptički integrali druge vrste: $E(k, \varphi)$, $k = \sin\alpha$

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1736
20	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
30	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
50	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

* Definiciju vidi na idućoj stranici i na str. 397 i 398.

c) Potpuni eliptički integrali, $k = \sin\alpha$

α°	K	E	α°	K	E	α°	K	E
0	1,5708	1,5708	30	1,6858	1,4675	60	2,1565	1,2111
1	1,5709	1,5707	31	1,6941	1,4608	61	2,1842	1,2015
2	1,5713	1,5703	32	1,7028	1,4539	62	2,2132	1,1920
3	1,5719	1,5697	33	1,7119	1,4469	63	2,2435	1,1826
4	1,5727	1,5689	34	1,7214	1,4397	64	2,2754	1,1732
5	1,5738	1,5678	35	1,7312	1,4323	65	2,3088	1,1638
6	1,5751	1,5665	36	1,7415	1,4248	66	2,3439	1,1545
7	1,5767	1,5649	37	1,7522	1,4171	67	2,3809	1,1453
8	1,5785	1,5632	38	1,7633	1,4092	68	2,4198	1,1362
9	1,5805	1,5611	39	1,7748	1,4013	69	2,4610	1,1272
10	1,5828	1,5589	40	1,7868	1,3931	70	2,5046	1,1184
11	1,5854	1,5564	41	1,7992	1,3849	71	2,5507	1,1096
12	1,5882	1,5537	42	1,8122	1,3765	72	2,5998	1,1011
13	1,5913	1,5507	43	1,8256	1,3680	73	2,6521	1,0927
14	1,5946	1,5476	44	1,8396	1,3594	74	2,7081	1,0844
15	1,5981	1,5442	45	1,8541	1,3506	75	2,7681	1,0764
16	1,6020	1,5405	46	1,8691	1,3418	76	2,8327	1,0686
17	1,6061	1,5367	47	1,8848	1,3329	77	2,9026	1,0611
18	1,6105	1,5326	48	1,9011	1,3238	78	2,9786	1,0538
19	1,6151	1,5283	49	1,9180	1,3147	79	3,0617	1,0468
20	1,6200	1,5238	50	1,9356	1,3055	80	3,1534	1,0401
21	1,6252	1,5191	51	1,9539	1,2963	81	3,2553	1,0338
22	1,6307	1,5141	52	1,9729	1,2870	82	3,3699	1,0278
23	1,6365	1,5090	53	1,9927	1,2776	83	3,5004	1,0223
24	1,6426	1,5037	54	2,0133	1,2681	84	3,6519	1,0172
25	1,6490	1,4981	55	2,0347	1,2587	85	3,8317	1,0127
26	1,6557	1,4924	56	2,0571	1,2492	86	4,0528	1,0086
27	1,6627	1,4864	57	2,0804	1,2397	87	4,3387	1,0053
28	1,6701	1,4803	58	2,1047	1,2301	88	4,7427	1,0026
29	1,6777	1,4740	59	2,1300	1,2206	89	5,4349	1,0008
30	1,6858	1,4675	60	2,1565	1,2111	90	∞	1,0000

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},$$

$$E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\, d\psi = \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt,$$

$$\mathbf{K} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},$$

$$\mathbf{E} = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\, d\psi = \int_0^{1} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt.$$

23. INTEGRAL VJEROJATNOSTI

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt^*$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	**0,30**	0,2358	**0,60**	0,4515	**0,90**	0,6319
01	0,0080	31	0,2434	61	0,4581	91	0,6372
02	0,0160	32	0,2510	62	0,4647	92	0,6424
03	0,0239	33	0,2586	63	0,4713	93	0,6476
04	0,0319	34	0,2661	64	0,4778	94	0,6528
0,05	0,0399	**0,35**	0,2737	**0,65**	0,4843	**0,95**	0,6579
06	0,0478	36	0,2812	66	0,4907	96	0,6629
07	0,0558	37	0,2886	67	0,4971	97	0,6680
08	0,0638	38	0,2961	68	0,5035	98	0,6729
09	0,0717	39	0,3035	69	0,5098	99	0,6778
0,10	0,0797	**0,40**	0,3108	**0,70**	0,5161	**1,00**	0,6827
11	0,0876	41	0,3182	71	0,5223	01	0,6875
12	0,0955	42	0,3255	72	0,5285	02	0,6923
13	0,1034	43	0,3328	73	0,5346	03	0,6970
14	0,1113	44	0,3401	74	0,5407	04	0,7017
0,15	0,1192	**0,45**	0,3473	**0,75**	0,5467	**1,05**	0,7063
16	0,1271	46	0,3545	76	0,5527	06	0,7109
17	0,1350	47	0,3616	77	0,5587	07	0,7154
18	0,1428	48	0,3688	78	0,5646	08	0,7199
19	0,1507	49	0,3759	79	0,5705	09	0,7243
0,20	0,1585	**0,50**	0,3829	**0,80**	0,5763	**1,10**	0,7287
21	0,1663	51	0,3899	81	0,5821	11	0,7330
22	0,1741	52	0,3969	82	0,5878	12	0,7373
23	0,1819	53	0,4039	83	0,5935	13	0,7415
24	0,1897	54	0,4108	84	0,5991	14	0,7457
0,25	0,1974	**0,55**	0,4177	**0,85**	0,6047	**1,15**	0,7499
26	0,2051	56	0,4245	86	0,6102	16	0,7540
27	0,2128	57	0,4313	87	0,6157	17	0,7580
28	0,2205	58	0,4381	88	0,6211	18	0,7620
29	0,2282	59	0,4448	89	0,6265	19	0,7660
0,30	0,2358	**0,60**	0,4515	**0,90**	0,6319	**1,20**	0,7699

* Graf funkcije i njegove jednostavnije primjene vidi na str. 654. Ponekad integralom vjerojatnosti nazivamo funkciju

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \Phi\left(x\sqrt{2}\right).$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,20	0,7699	**1,50**	0,8664	**1,80**	0,9281	**2,50**	0,9876
21	0,7737	51	0,8690	81	0,9297	55	0,9892
22	0,7775	52	0,8715	82	0,9312	60	0,9907
23	0,7813	53	0,8740	83	0,9328	65	0,9920
24	0,7850	54	0,8764	84	0,9342	70	0,9931
1,25	0,7887	**1,55**	0,8789	**1,85**	0,9357	**2,75**	0,9940
26	0,7923	56	0,8812	86	0,9371	80	0,9949
27	0,7959	57	0,8836	87	0,9385	85	0,9956
28	0,7995	58	0,8859	88	0,9399	90	0,9963
29	0,8029	59	0,8882	89	0,9412	95	0,9968
1,30	0,8064	**1,60**	0,8904	**1,90**	0,9426	**3,00**	0,99730
31	0,8098	61	0,8926	91	0,9439	10	0,99806
32	0,8132	62	0,8948	92	0,9451	20	0,99863
33	0,8165	63	0,8969	93	0,9464	30	0,99903
34	0,8198	64	0,8990	94	0,9476	40	0,99933
1,35	0,8230	**1,65**	0,9011	**1,95**	0,9488	**3,50**	0,99953
36	0,8262	66	0,9031	96	0,9500	60	0,99968
37	0,8293	67	0,9051	97	0,9512	70	0,99978
38	0,8324	68	0,9070	98	0,9523	80	0,99986
39	0,8355	69	0,9090	99	0,9534	90	0,99990
1,40	0,8385	**1,70**	0,9109	**2,00**	0,9545	**4,00**	0,99994
41	0,8415	71	0,9127	05	0,9596		
42	0,8444	72	0,9146	10	0,9643	**4,417**	$1-10^{-5}$
43	0,8473	73	0,9164	15	0,9684		
44	0,8501	74	0,9181	20	0,9722	**4,892**	$1-10^{-6}$
1,45	0,8529	**1,75**	0,9199	**2,25**	0,9756	**5,327**	$1-10^{-7}$
46	0,8557	76	0,9216	30	0,9786		
47	0,8584	77	0,9233	35	0,9812		
48	0,8611	78	0,9249	40	0,9836		
49	0,8638	79	0,9265	45	0,9857		
1,50	0,8664	**1,80**	0,9281	**2,50**	0,9876		

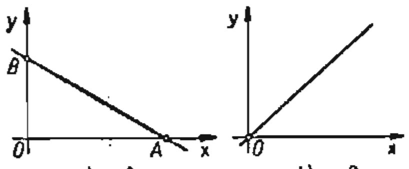
II. GRAFOVI

A. ELEMENTARNE FUNKCIJE

1. POLINOMI

Linearna funkcija: $y = ax + b$ (sl. 2, *a*).

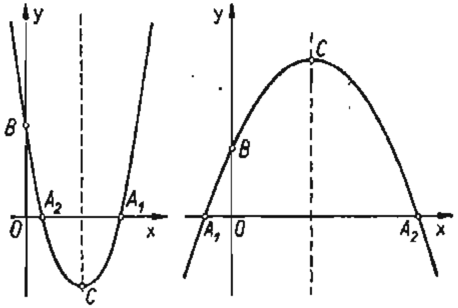
Graf je *pravac*. Funkcija monotono raste za $a > 0$, monotono pada za $a < 0$, a za $a = 0$ je konstantna. Sjecišta s osima: $A(-b/a, 0)$, $B(0, b)$. Detaljnije vidi na str. 230. Za $b = 0$ *upravna proporcionalnost*: $y = ax$; graf je pravac koji prolazi kroz ishodište koordinatnog sistema (sl. 2, *b*).



a) $a<0$ b) $a>0$

Sl. 2

Kvadratni trinom: $y = ax^2 + bx + c$ (sl. 3).



a) $a>0$ b) $a<0$

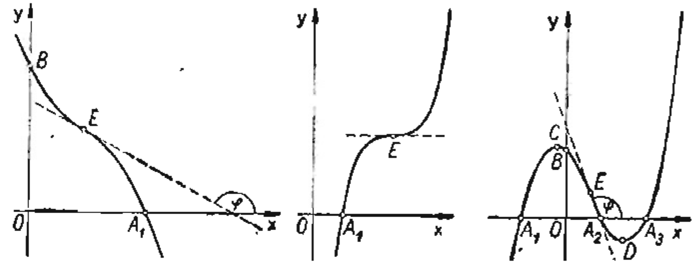
Sl. 3

Graf je *parabola* s vertikalnom osi simetrije $x = -b/2a$. Za $a > 0$ funkcija u početku pada, dostiže minimum, zatim raste; pri $a < 0$ raste, dostiže maksimum i pada.

Sjecište s osi Ox: $A_1, A_2 \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$, s osi Oy: $B(0, c)$. Ekstrem je u tački $C\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. O paraboli vidi str. 240 do 242.

Polinom trećeg stupnja: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (sl. 4).

Graf je *kubna parabola*. Tok funkcije zavisi od predznaka a i $\Delta = 3ac - b^2$. Ako je $\Delta \geqslant a$ (sl. 4, *a* i *b*), funkcija za $a > 0$ monotono raste, a za $a < 0$ monotono pada. Ako je $\Delta < 0$, funkcija ima jedan maksimum i jedan minimum (sl. 4, *c*); za $a > 0$ ona u početku raste od $-\infty$ do maksimuma, zatim pada do minimuma i ponovo



a) $\Delta>0,\ a<0$ b) $\Delta=0,\ a>0$ c) $\Delta<0,\ a>0$

Sl. 4

raste do $+\infty$; za $a < 0$ pada od $+\infty$ do minimuma, raste do maksimuma i ponovo pada do $-\infty$. Sjecišta s osi Ox određuju realni korijeni jednadžbe $y = 0$*. Korijen može biti jedan, može ih biti dva (u tom slučaju je u jednoj tački dodir) ili tri: A_1, A_2 i A_3.

Sjecište s osi y: $B(0, d)$. Ekstremi C, D: $\left(-\frac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{3a}, d + \frac{2b^3 - 9abc \mp (6ac - 2b^2)\sqrt{-\Delta}}{27a^2}\right)$.

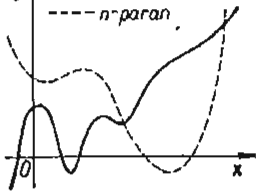
Tačka infleksije jest centar simetrije krivulje:

$E\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d\right)$; tangenta u toj tački ima koeficijent smjera $\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_E = \frac{\Delta}{3a}$.

* Za rješavanje kubne jednadžbe vidi str. 155 do 157.

Polinom n**-tog stupnja** (sl. 5).

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$



Sl. 5

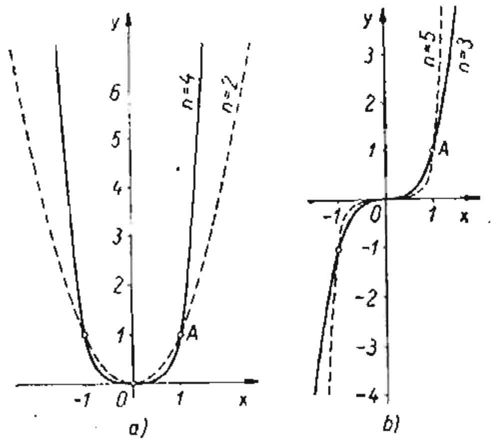
Graf je *krivulja n-tog reda**, parabolnog tipa.

a) n neparan, y se neprekinuto mijenja za $a_0 > 0$ od $-\infty$ do $+\infty$, a za $a_0 < 0$ od $+\infty$ do $-\infty$; krivulja može sjeći os x (ili je dira) od 1 do n puta**. Ekstrema ova funkcija ili uopće nema ili ih ima paran broj (od 2 do $n-1$), maksimumi i minimumi međusobno se izmjenjuju; tačaka infleksije ima neparan broj (od 1 do $n-2$).

b) n paran, y se neprekinuto mijenja za $a_0 > 0$, od $+\infty$ do $+\infty$, za $a_0 < 0$ od $-\infty$ do $-\infty$; os x ili uopće ne siječe, ili je siječe (ili dira) od 1 do n puta. Funkcija ima neparan broj ekstrema (od 1 do $n-1$), maksimumi i minimumi se međusobno izmjenjuju; tačaka infleksije ima paran broj (od 0 do $n-2$).

Asimptota i singularnih tačaka takve krivulje nemaju.

Za crtanje grafa preporučuje se naći najprije ekstreme i tačke infleksije (a također i vrijednost derivacije u tim tačkama), ucrtati te tačke i u njima tangente na krivulju, a zatim još nacrtati neprekinutu glatku krivulju.



Sl. 5

* Za red krivulje vidi str. 230.
** Za rješavanje algebarske jednadžbe n-tog stupnja vidi str. 158...161 i 163...165.

Kod česte upotrebe grafova polinoma 4. stupnja $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, uz zadani a, podesno je nacrtati graf funkcije $y = ax^4$ (vidi niže) i zatim prenijeti ishodište koordinatnog sistema u tačku $\left(-\frac{b}{4a}, 0\right)$, svesti jednadžbu na oblik $Y = aX^4 + a'X^2 + b'X + c'$ i načiniti geometrijski zbroj ordinata krivulje $Y = aX^4$ i parabole $Y = a'X^2 + b'X + c'$.

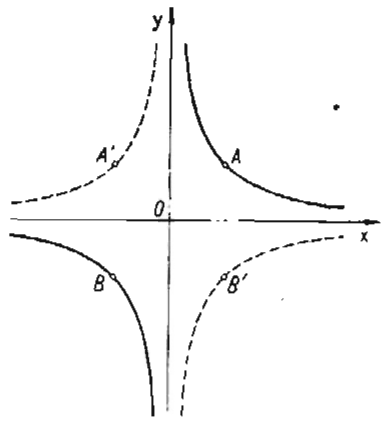
Potencija: $y = ax^n$ (n = cio broj > 1) (sl. 6).

Graf je *parabola n-tog reda.* 1) $a = 1$; krivulja $y = x^n$ prolazi kroz tačke $O(0, 0)$ i $A(1, 1)$, i dira os x u ishodištu. Ako je n paran (sl. 6, a), krivulja je simetrična s obzirom na os y i ima minimum u ishodištu; ako je pak n neparan (sl. 6, b) tada je krivulja simetrična s obzirom na ishodište, koje je tačka infleksije. Asimptota nema. 2) Opći slučaj. Krivulju $y = ax^n$ dobijemo iz krivulje $y = x^n$ sa $|a|$-strukim rastezanjem u smjeru osi y; ako je $a < 0$, tada je ona zrcalna slika krivulje $y = |a| x^n$ s obzirom na os x.

2. RAZLOMLJENE RACIONALNE FUNKCIJE

Obrnuta proporcionalnost: $y = \frac{a}{x}$ (sl. 7).

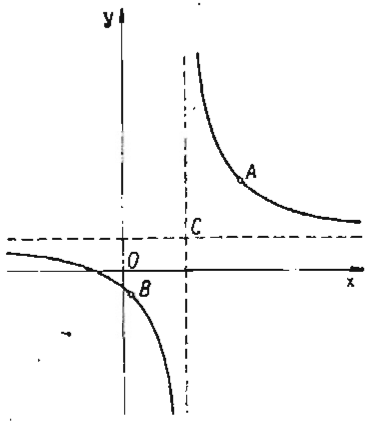
Graf je *istostrana hiperbola* kojoj su asimptote koordinatne osi. Prekinutost pri $x = 0$ $(y = \pm\infty)$. Ako je $a > 0$, funkcija pada od 0 do $-\infty$ i od $+\infty$ do 0 (puna krivulja u 1. i 3. kvadrantu); ako je $a < 0$, funkcija raste od 0 do $+\infty$ i od $-\infty$ do 0 (crtkana krivulja u 2. i 4. kvadrantu). Tjemena hiperbole A, B $(\pm\sqrt{|a|}, \pm\sqrt{|a|})$; predznaci su isti pri $a > 0$ i suprotni pri $a < 0$. Ekstrema nema. O hiperboli vidi stranice 237...240.



Sl. 7

Razlomljena linearna funkcija: $y = \frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}$ (sl. 8).

Graf je *istostrana hiperbola* s asimptotama koje su paralelne s koordinatnim osima; središte je $C\left(-\frac{b_2}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}\right)$. Parametar koji odgovara a u jednadžbi obrnute proporcionalnosti jest $-\frac{D}{a_2^2}$, gdje je $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, i tjemena hiperbole su A, B $\left(-\frac{b_2 \pm \sqrt{|D|}}{a_2}, \frac{a_1 \pm \sqrt{|D|}}{a_2}\right)$; predznaci su isti za $D < 0$ i različiti za $D > 0$. Prekinutost funkcije je kod $x = -\frac{b_2}{a_2}$. Ako je $D < 0$, onda funkcija pada od $\frac{a_1}{a_2}$ do $-\infty$ i od $+\infty$ do $\frac{a_1}{a_2}$; ako je $D > 0$, funkcija raste od $\frac{a_1}{a_2}$ do $+\infty$ i od $-\infty$ do $\frac{a_1}{a_2}$. Ekstrema nema.



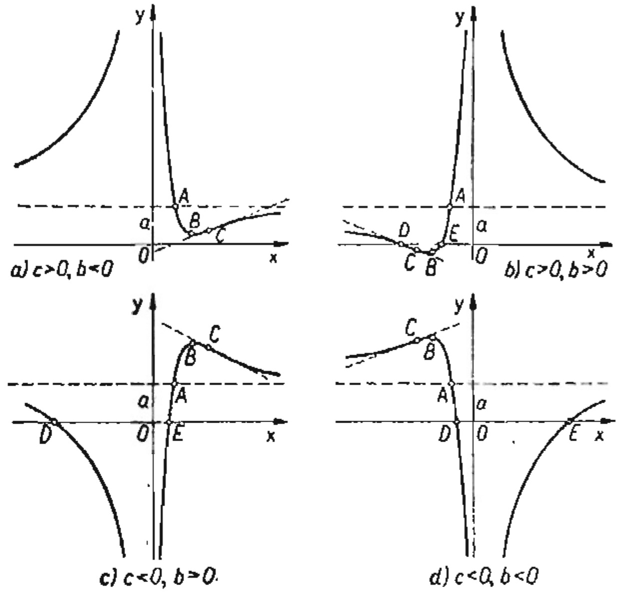
Sl. 8

Funkcija $y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = \left(\frac{ax^2 + bx + c}{x^2}\right)$ (sl. 9). [$b \neq 0$, $c \neq 0$. Za $b = 0$ vidi str. 98 (potencija), za $c = 0$ vidi naprijed (razlomljenu linearnu funkciju)].

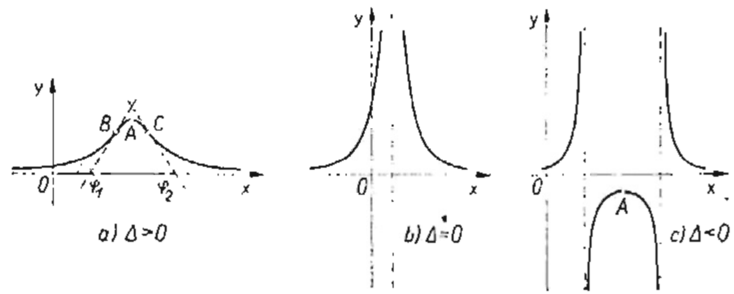
Graf je *krivulja 3. reda* sa dvije asimptote: $x = 0$ i $y = a$; sastoji se od dviju grana: jedne na kojoj se y monotono mijenja od a do $+\infty$ (ili $-\infty$) i druge koja prolazi kroz tri karakteristične tačke: sjecište s asimptotom $A\left(-\frac{c}{b}, a\right)$, ekstrem $B\left(-\frac{2c}{b}, a - \frac{b^2}{4c}\right)$ i tačku infleksije $C\left(-\frac{3c}{b}, a - \frac{2b^2}{9c}\right)$. Četiri slučaja mogućeg položaja tih grana zavisna su od predznaka b i c (sl. 9). Sjecišta s osi x: D, E $\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$; može ih biti dva, jedno (dodir) ili nijedno, što ovisi o predznaku $b^2 - 4ac$.

Funkcija $y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ (sl. 10).

Graf je *krivulja 3. reda*, simetrična s obzirom na vertikalni pravac $x = -\frac{b}{2a}$, os x je asimptota. Tok funkcije ovisi o predznacima a i $\Delta = 4ac - b^2$. Razmotren je samo slučaj $a > 0$; za $a < 0$ treba razmotriti krivulju $y = \frac{1}{(-a)x^2 - bx - c}$ i njenu simetričnu sliku s obzirom na os x.



Sl. 9



Sl. 10

a) $\Delta > 0$. Funkcija je neprekinuta i pozitivna za svaki x. Raste od 0 do maksimuma i pada do 0. Maksimum je $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4a}{\Delta}\right)$, tačke infleksije su $B, C\left(-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}}, \frac{3a}{\Delta}\right)$, koeficijent smjera tangenata u njima je $\operatorname{tg}\varphi = \mp a^2\left(\frac{3}{\Delta}\right)^{3/2}$ (sl. 10, *a*).

b) $\Delta = 0$. Funkcija je pozitivna za svaki x. Raste od 0 do $+\infty$, ima beskonačnu prekinutost pri $x = -\frac{b}{2a}$ i pada od $+\infty$ do 0 (sl. 10, *b*).

c) $\Delta < 0$. Funkcija raste od 0 do $+\infty$, zatim ima beskonačnu prekinutost, prelazi od $-\infty$ k $-\infty$ kroz tačku maksimuma, ima drugu prekinutost i pada od $+\infty$ do 0. Maksimum je $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4a}{\Delta}\right)$, tačke prekinutosti: $x = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}$ (sl. 10, *c*).

Funkcija $y = \frac{x}{ax^2 + bx + c}$ (sl. 11).

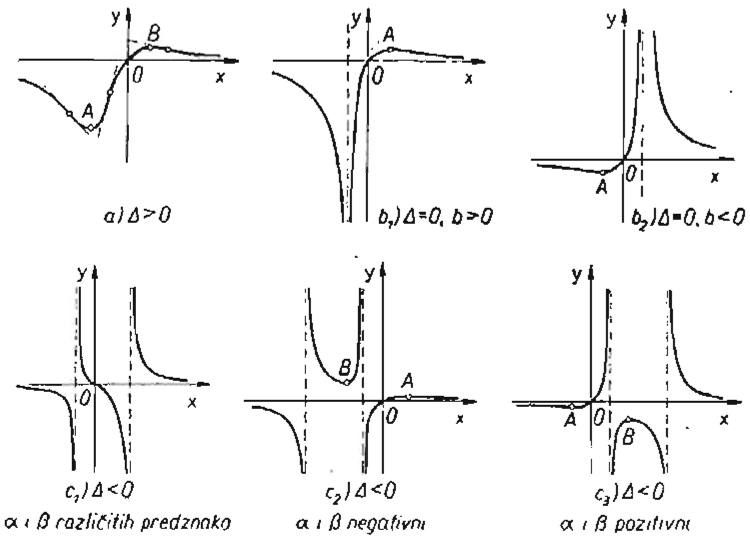
Graf je *krivulja 3. reda*, koja prolazi kroz ishodište, asimptota je os x. Tok funkcije ovisi o predznacima a i $\Delta = 4ac - b^2$, a također i od predznaka korjenova α i β jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ (ako je $\Delta < 0$) i od predznaka b, ako je $\Delta = 0$. Razmotren je samo slučaj $a > 0$; za $a < 0$ treba razmotriti krivulju $y = \frac{x}{(-a)x^2 - bx - c}$ i njenu simetričnu sliku s obzirom na os x.

a) $\Delta > 0$. Funkcija je neprekinuta, pada od 0 do minimuma, raste do maksimuma i ponovno pada do 0. Minimum i maksimum jesu $A, B\left(\mp\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{-b \mp 2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$, krivulja ima tri tačke infleksije (sl. 11, *a*).

b) $\Delta = 0$. Tok funkcije zavisi od predznaka b: 1) $b > 0$; funkcija pada od 0 do $-\infty$, ima prekinutost, raste od $-\infty$ do maksimuma i pada do nule (sl. 11, b_1), maksimum je $A\left(+\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{1}{2\sqrt{ac} + b}\right)$; 2) $b < 0$; funkcija pada od 0 do minimuma, prolazi kroz 0 i raste do $+\infty$, ima beskonačnu prekinutost i pada od $+\infty$ do 0 (sl. 11, b_2); minimum je $A\left(-\sqrt{\frac{c}{a}}, -\frac{1}{2\sqrt{ac} - b}\right)$. U oba slučaja graf ima prekinutost kod $x = -\frac{b}{2a}$ i jednu tačku infleksije.

c) $\Delta < 0$. Dvije tačke prekinutosti: $x = \alpha$ i $x = \beta$; tok funkcije zavisi od predznaka α i β.

1) α i β imaju različite predznake; funkcija pada od 0 do $-\infty$ i od $+\infty$ do $-\infty$ i od $+\infty$ do 0; ekstrema nema (sl. 11, c_1).



Sl. 11

2) α i β su negativni; funkcija pada od 0 do $-\infty$, zatim se mijenja od $+\infty$ do $+\infty$ prolazeći kroz tačku minimuma i na kraju raste od $-\infty$ do maksimuma i pada do nule; tačke maksimuma i minimuma A, B dobivamo prema istim formulama kao i u slučaju a) (sl. 11, c_2).

3) α i β su pozitivni; funkcija pada od 0 do minimuma i raste do $+\infty$, zatim se mijenja od $-\infty$ do $-\infty$ prolazeći kroz tačku maksimuma i na kraju pada od $+\infty$ do 0; tačke maksimuma i minimuma A, B dobivamo prema istim formulama kao i u slučaju a) (sl. 11, c_3).

U sva tri slučaja graf ima po jednu tačku infleksije.

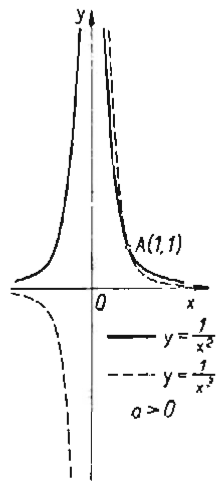
Potencija: $y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n}$ (n je cio pozitivan broj) (sl. 12).

Graf je *krivulja hiperbolnog tipa*, kojoj su asimptote koordinatne osi. Prekinutost kod $x = 0$.

Ako je $a > 0$, funkcija za paran n raste od 0 do $+\infty$ i pada od $+\infty$ do 0, pri čemu je stalno pozitivna, a za neparan n pada od 0 do $-\infty$ i od $+\infty$ do 0.

Ako je $a < 0$, funkcija za paran n pada od 0 do $-\infty$ i raste od $-\infty$ do 0, pri čemu je stalno negativna, a za neparan n raste od 0 do $+\infty$ i od $-\infty$ do 0.

Ekstrema nema. Krivulja se asimptotički približava osi x to brže, a osi y to sporije, što je veći n. Za paran n krivulja je simetrična s obzirom na os y, a za neparan n s obzirom na ishodište koordinata. Na sl. 12 predočena su dva slučaja: $n = 2$ i $n = 3$.

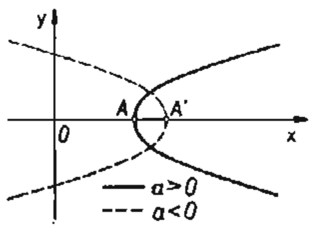


Sl. 12

3. IRACIONALNE FUNKCIJE

Kvadratni korijen linearnog binoma:

$$y = \pm\sqrt{ax + b} \quad \text{(sl. 13).}$$

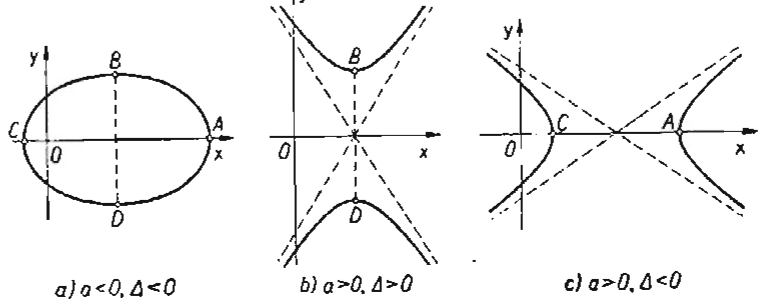


Sl. 13

Graf je *parabola*, njena os je os x, a tjeme: $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, parametar $p = \frac{a}{2}$. Područje definicije i tok funkcije su ovisni od predznaka a (vidi sl. 13). Funkcija je dvoznačna, ekstrema nema. Detaljno o paraboli vidi na str. 240...242.

Kvadratni korijen kvadratnog trinoma: $y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}$ (sl. 14). Graf je *elipsa* za $a < 0$ i *hiperbola* za $a > 0$; jedna os je os x, a druga pravac $x = -\frac{b}{2a}$; tjemena su $A, C\left(-\frac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}, 0\right)$

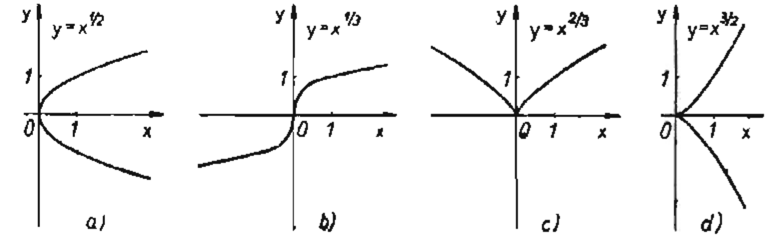
i $B, D\left(-\frac{b}{2a}, \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a}}\right)$, gdje je $\Delta = 4ac - b^2$. Područje definicije i tok funkcije ovise o predznacima a i Δ (vidi sl. 14). Funkcija je dvoznačna, ima ekstrem ako su Δ i a istog predznaka (tačke B i D).



Sl. 14

Pri $a < 0$ i $\Delta > 0$ funkcija prima samo imaginarne vrijednosti, krivulja ne postoji. Detaljnije o elipsi i hiperboli vidi str. 235...240.

Potencija: $y = ax^k = ax^{\pm m/n}$ (m i n su cijeli pozitivni prosti brojevi). Razmotren je slučaj $a = 1$ (pri $a \neq 1$ krivulja je u usporedbi sa $y = x^k$ rastegnuta u smjeru osi y $|a|$ puta i za negativan a zrcaljena na os x).

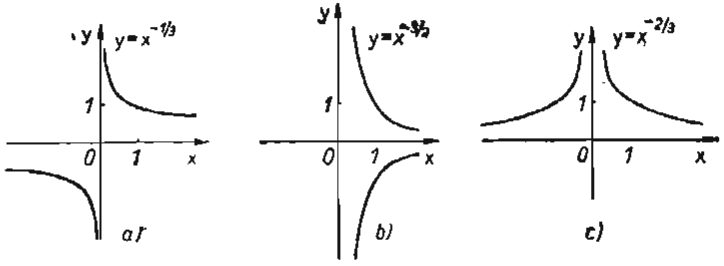


Sl. 15

1) $k > 0$, $y = x^{m/n}$. Graf (sl. 15) prolazi kroz tačke (0,0) i (1, 1). Za $k > 1$ dira (u ishodištu) os x (sl. 15, *d*), za $k < 1$ dira (u ishodištu) os y (slika 15 *a*, *b*, *c*). Za paran n krivulja je simetrična s obzirom na os x (funkcija je dvoznačna, sl. 15, *a*, *d*), za paran m je simetrična s obzirom na os y (sl. 15, *c*), za neparan m i n je simetrična s obzirom na ishodište (sl. 15, *b*). S tim u vezi krivulja

može imati **u ishodištu tjeme**, tačku infleksije ili šiljak (vidi sl. 15); asimptota **nema**.

2) $k < 0$, $y = x^{-m/n}$. Graf je *krivulja hiperbolnog tipa* s asimptotama koje su koordinatne osi (sl. 16). Prekinutost kod $x = 0$. Krivulja se asimptotički približava osi x to brže, a osi y to sporije,



Sl. 16

što je veći $|k|$. Simetrija s obzirom na osi i ishodište zavisi od pariteta brojeva m i n jednako kao u slučaju $k > 0$ (vidi gore), time se određuje tok funkcije (vidi sl. 16); ekstrema nema.

4. EKSPONENCIJALNE I LOGARITAMSKE FUNKCIJE

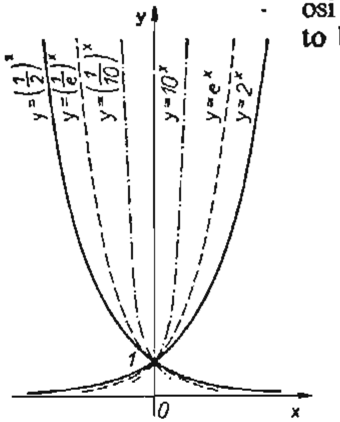
Eksponencijalna funkcija: $y = a^x = e^{bx}$ $(a > 0, \quad b = \ln a)$ (sl. 17).

Graf je *eksponencijalna krivulja* (za $a = e$ je prirodna eksponencijalna krivulja $y = e^x$). Funkcija prima samo pozitivne vrijednosti. Za $a > 1$ (tj. $b > 0$) monotono raste od 0 do ∞; za $a < 1$ (tj. $b < 0$) monotono pada od ∞ do 0, to brže, što je veći $|b|$. Krivulja prolazi kroz tačku $A(0, 1)$ i asimptotički se približava k osi x (za $b > 0$ s lijeve strane, za $b < 0$ s desne strane) to brže, što je veći $|b|$. Funkcija $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ raste ako je $a < 1$ i pada ako je $a > 1$.

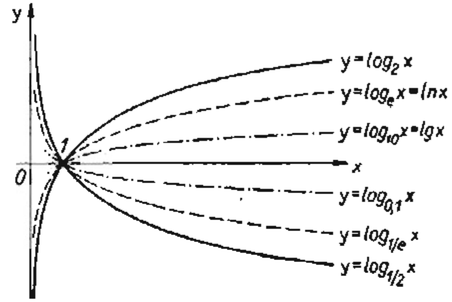
Logaritamska funkcija: $y = \log_a x$ $(a > 0)$ (sl. 18).

Graf je *logaritamska krivulja* (zrcalna slika eksponencijalne krivulje s obzirom na simetralu prvog kvadranta $y = x$); za $a = e$ je *prirodna* logaritamska krivulja $y = \ln x$. Funkcija postoji samo za $x > 0$. Za $a > 1$ monotono raste od $-\infty$ do $+\infty$, za $a < 1$

monotono pada od $+\infty$ do $-\infty$ to sporije, što je veći $|\ln a|$. Krivulja prolazi kroz tačku $A(1, 0)$ i asimpotički se približava osi y (pri $a > 1$ odozdo, pri $a < 1$ odozgo) to brže, što je veći $|\ln a|$.



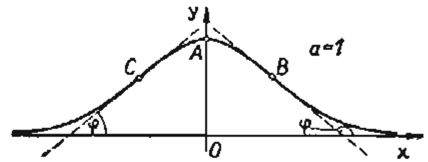
Sl. 17



Sl. 18

Funkcija $y = e^{-(ax)^2}$ (sl. 19).

Funkcija raste od 0 do 1 i pada od 1 do 0; krivulja je simetrična s obzirom na os y i asimptotički se približava osi x to brže, što je

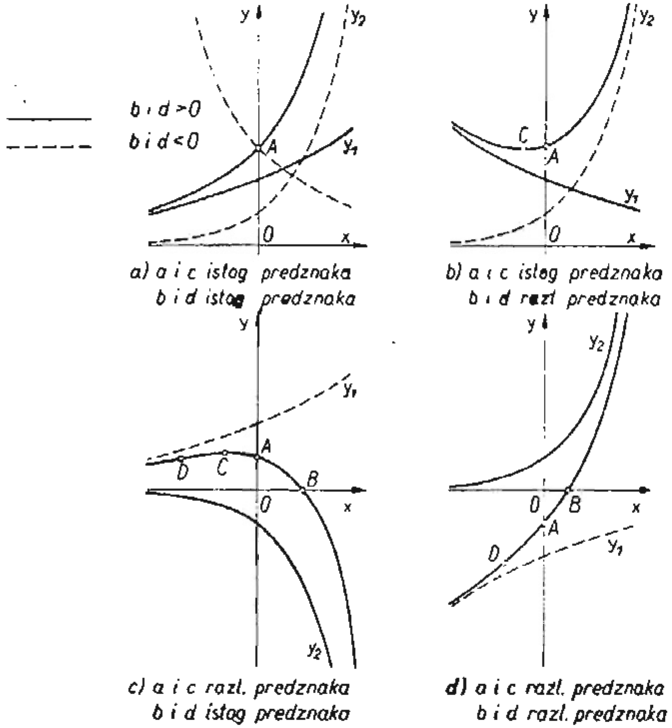


Sl. 19

veći a. Maksimum je u tački $A(0,1)$, tačke infleksije su $B, C\left(\pm\frac{1}{a\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, tangensi smjera tangenata u tim tačkama: $\operatorname{tg}\varphi = \mp a\sqrt{\frac{2}{e}}$. Važnu primjenu ima kao *krivulja normalne razdiobe pogrešaka* (*Gaussova krivulja*): $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ (njen graf i primjenu u teoriji vjerojatnosti vidi na str. 657).

Funkcija $y = ae^{bx} + ce^{dx}$ (sl. 20).

Krivulju je najbolje crtati tako da se grafički zbroje ordinate krivulja $y_1 = ae^{bx}$ i $y_2 = ce^{dx}$ (vidi str. 100), koje su tanko nacrtane (jedna izvučeno, druga crtkano). Funkcija je neprekinuta. U slučajevima kada niti jedan broj a, b, c i d nije jednak nuli, krivulja ima jedan od ova četiri oblika (pri čemu grafovi prikazani na sl. 20 u ovisnosti o predznacima parametara mogu biti zrcaljeni na koordinatnim osima):



a) a i c istog predznaka, b i d istog predznaka
b) a i c istog predznaka, b i d razl. predznaka
c) a i c razl. predznaka, b i d istog predznaka
d) a i c razl. predznaka, b i d razl. predznaka

Sl. 20

a) a i c imaju iste predznake, b i d imaju iste predznake. Funkcija se monotono mijenja ne mijenjajući predznak, od 0 do $+\infty$ (ili $-\infty$) ili od $+\infty$ ($-\infty$) do 0; tačaka infleksije nema, a os x je asimptota (sl. 20, a).

b) a i c imaju iste predznake, b i d imaju različite predznake. Funkcija se mijenja od $+\infty$ do $+\infty$ ili od $-\infty$ do $-\infty$ ne mijenjajući predznak i prolazi kroz ekstrem; tačaka infleksije nema (sl. 20, b).

c) a i c imaju različite predznake, b i d imaju iste predznake. Funkcija se mijenja od 0 do $+\infty$ ($-\infty$) ili od $+\infty$ ($-\infty$) do nule, jedanput mijenja predznak i prolazi kroz jedan ekstrem C i jednu tačku infleksije D; os x je asimptota (sl. 20, c).

d) a i c imaju različite predznake, b i d imaju različite predznake. Funkcija se monotono mijenja od $-\infty$ do $+\infty$ ili od $+\infty$ do $-\infty$, nema ekstrema, no prolazi kroz jednu tačku infleksije D (sl. 20, d).

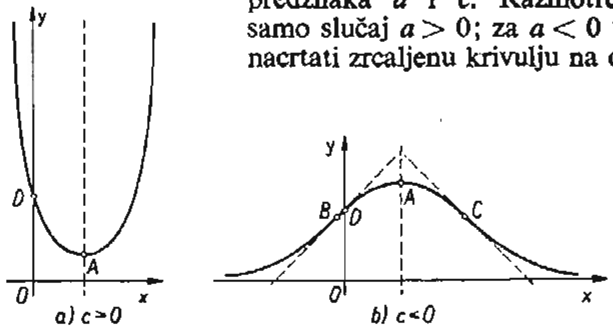
Sjecište s osi y: $A\,(0,\ a+c)$, sjecište s osi x:

$$B\left[x=\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{a}{c}\right)\right],\ \text{ekstrem: } C\left[x=\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{ab}{cd}\right)\right],$$

tačka infleksije $D\left[x=\dfrac{1}{d-b}\ln\left(-\dfrac{ab^2}{cd^2}\right)\right]$.

Funkcija $y = ae^{bx+cx^2}$ (sl. 21).

Krivulja je simetrična s obzirom na vertikalni pravac $x = -\dfrac{b}{2c}$; os x ne siječe, os y siječe u tački $D\,(0,\ a)$. Tok funkcije zavisi od predznaka a i c. Razmotren je samo slučaj $a > 0$; za $a < 0$ treba nacrtati zrcaljenu krivulju na osi x.



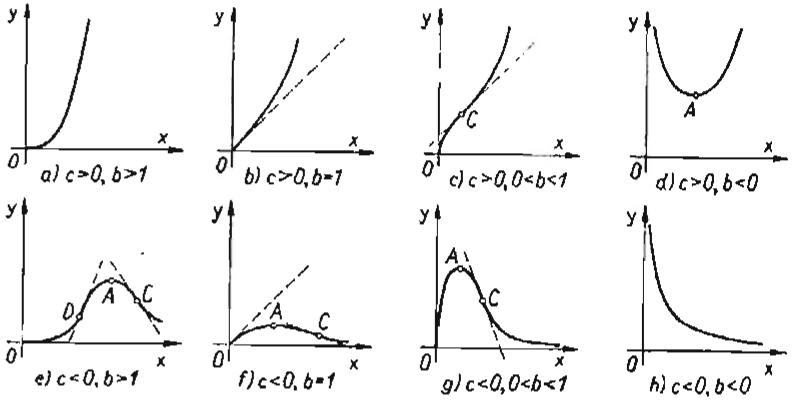
Sl. 21

a) $c > 0$. Funkcija pada od $+\infty$ do minimuma i raste do $+\infty$, ostaje stalno pozitivna. Minimum: $A\left(-\dfrac{b}{2c},\ ae^{-b^2/4c}\right)$, tačaka infleksije i asimptota nema (sl. 21, a).

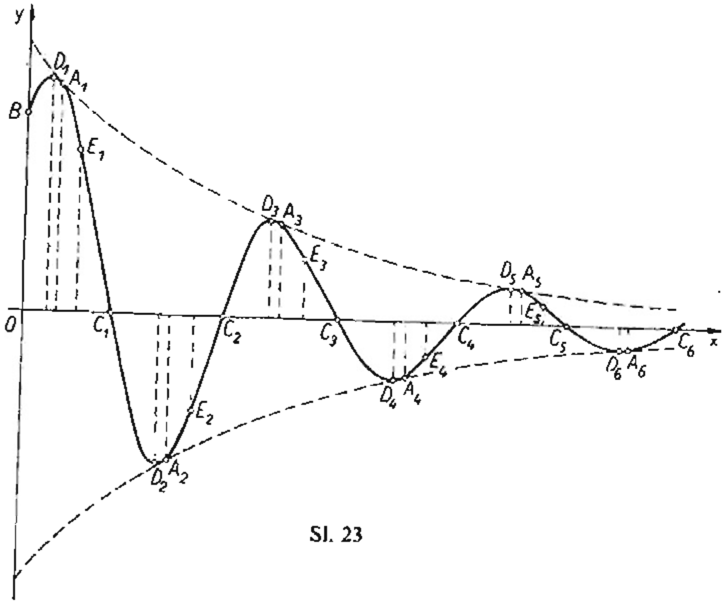
b) $c < 0$. Funkcija raste od 0 do maksimuma i pada do nule. Asimptota je os x. Maksimum je $A\left(-\dfrac{b}{2c},\ ae^{-b^2/4c}\right)$, tačke infleksije su B, $C\left(\dfrac{-b\pm\sqrt{-2c}}{2c},\ ae^{-(b^2+2c)/4c}\right)$ (sl. 21, b).

Funkcija $y = ax^be^{cx}$ (sl. 22).

Razmotren je slučaj $a > 0$ (za $a < 0$ treba nacrtati krivulju zrcaljenu na osi x) a razmotrene su samo pozitivne vrijednosti x. Funkcija prima samo pozitivne vrijednosti. Za $b > 0$ krivulja prolazi kroz ishodište; tangenta u ishodištu je: os x ako je $b > 1$, simetrala prvoga kvadranta $y = x$ ako je $b = 1$, os y ako je $b < 1$. Za $b < 0$ os y je asimptota. Za $c > 0$ funkcija beskonačno raste kada x raste, za $c < 0$ asimptotički se približava nuli. Ako b i c imaju



Sl. 22



Sl. 23

različite predznake, funkcija ima ekstrem $A\left(x = -\frac{b}{c}\right)$. Krivulja može imati 0, 1 ili 2 tačke infleksije: C, $D\left(x = -\frac{b \pm \sqrt{b}}{c}\right)$ (sl. 22, c, d, e, f).

Funkcija $y = Ae^{-ax} \sin(\omega x + \varphi_0)$ (sl. 23).

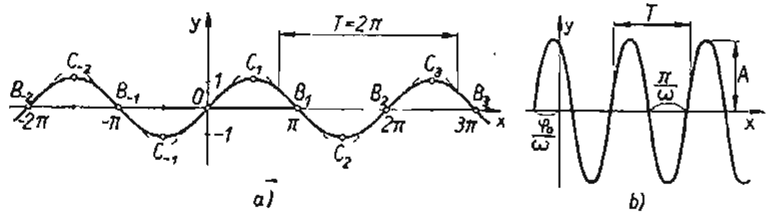
Graf je *krivulja prigušenog titranja.* Krivulja oscilira oko osi Ox i asimptotički joj se približava, pri čemu dvije eksponencijalne krivulje $y = \pm Ae^{-ax}$ tu krivulju obuhvaćaju i dotiču u tačkama $A_1, A_2, \ldots \left(\frac{(k + 1/2)\pi - \varphi_0}{\omega}, (-1)^k Ae^{-ax}\right)$. Sjecišta s osima: B $(0, A \sin \varphi_0)$, $C_1, C_2, \ldots \left(\frac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0\right)$; ekstremi $D_1, D_2, \ldots$ kod $x = \frac{k\pi - \varphi_0 + \alpha}{\omega}$; tačke infleksije: $E_1, E_2, \ldots$ kod $x = \frac{k\pi - \varphi_0 + 2\alpha}{\omega}$, gdje je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega}{a}$.

Veličinu $\delta = \ln \left|\frac{y_i}{y_{i+1}}\right| = a \frac{\pi}{\omega}$ (gdje su y_i i y_{i+1} ordinate dvaju susjednih ekstrema) nazivamo *logaritamskim dekrementom prigušenja.*

5. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE*

Sinus: $y = A \sin(\omega x + \varphi_0)$ (sl. 24).

Graf je *sinusoida.* Pri $A = \omega = 1$ i $\varphi_0 = 0$ je *obična sinusoida* $y = \sin x$ (slika 24, a), neprekinuta krivulja s periodom $T = 2\pi$.



Sl. 24

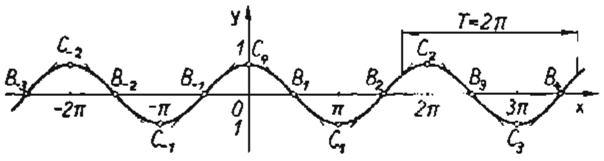
Sjecišta s osi x: $B_1, B_2, \ldots (k\pi, 0)$, ujedno su tačke infleksije s kutom $\pm \pi/4$ prema osi x. Ekstremi $C_1, C_2, \ldots [(k + 1/2)\pi, (-1)^k]$.

Opća sinusoida (slika 24, b) je u odnosu na običnu rastegnuta duž osi y $|A|$ puta ($|A|$ je *amplituda*), duž osi x je stisnuta ω puta (ω — *frekvencija*) i pomaknuta ulijevo za $\frac{\varphi_0}{\omega}$ (φ_0 je *početna faza*).

* Trigonometrijske formule vidi na str. 207...210; tablice vidi na str. 55.

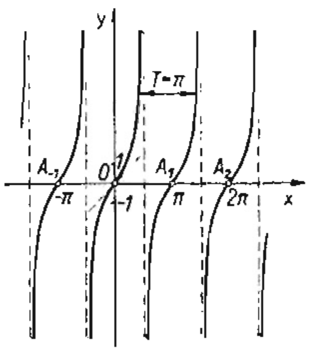
Period je $T = \frac{2\pi}{\omega}$; sjecišta s osi x: $B_1, B_2, \ldots \left(\frac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0\right)$, ekstremi $C_1, C_2, \ldots \left(\frac{(k + {}^1/_2)\pi - \varphi_0}{\omega}, (-1)^k A\right)$ (vidi također str. 210).

Kosinus: $y = A \cos(\omega x + \varphi_0)$; ovu jednadžbu možemo napisati i ovako: $y = A \sin\left(\omega x + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$. Graf je *sinusoida.*

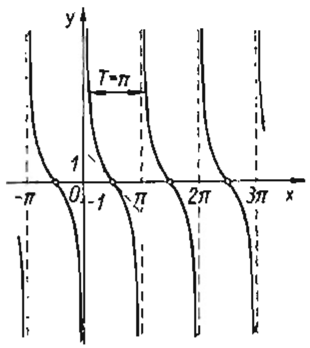


Sl. 25

Kosinusoida $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (sl. 25). Sjecišta s osi x: $B_1, B_2, \ldots [(k + {}^1/_2)\pi, 0]$ ujedno su tačke infleksije s kutom $\pm \pi/4$ prema osi x. Ekstremi: $C_1, C_2, \ldots [(k\pi, (-1)^k]$.



Sl. 26



Sl. 27

Tangens: $y = \operatorname{tg} x$ (sl. 26).

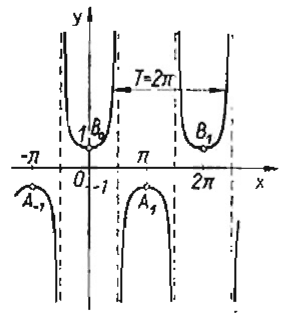
Graf je *tangentoida*, periodička krivulja s periodom $T = \pi$ i s asimptotama $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$. Kada se x mijenja od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$, y monotono raste od $-\infty$ do $+\infty$, zatim se vrijednosti y ponavljaju. Sjecišta s osi x: $0, A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, \ldots (k\pi, 0)$ ujedno su tačke infleksije s kutom $\pi/4$ prema osi x.

Kotangens: $y = \operatorname{ctg} x$ (sl. 27), ili $y = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

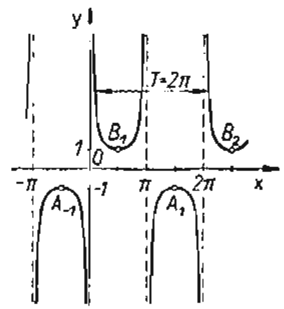
Graf je *tangentoida*, zrcaljena na osi x i pomaknuta ulijevo za $\pi/2$. Asimptote su $x = k\pi$. Kada se x mijenja od 0 do π, y monotono pada od $+\infty$ do $-\infty$, zatim se vrijednosti y ponavljaju. Sjecišta s osi x: $A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, \ldots [(k + \frac{1}{2})\pi, 0]$, ujedno su tačke infleksije s kutom $-\pi/4$ prema osi x.

Sekans: $y = \operatorname{sc} x = \frac{1}{\cos x}$ (sl. 28).

Graf je periodička krivulja s periodom $T = 2\pi$ i asimptotama $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$; $|y| \geqslant 1$. Maksimumi $A_1, A_2, \ldots [(2k + 1)\pi, -1]$, minimumi $B_1, B_2, \ldots (2k\pi, +1)$.



Sl. 28



Sl. 29

Kosekans: $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$ (sl. 29), ili $y = \operatorname{sc}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Graf je ista krivulja kao i za sc x, pomaknuta udesno za $\frac{\pi}{2}$. Asimptote su $x = k\pi$. Maksimumi $A_1, A_2, \ldots \left(\frac{4k + 3}{2}\pi, -1\right)$, minimumi $B_1, B_2, \ldots \left(\frac{4k + 1}{2}\pi, 1\right)$.

6. CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE*

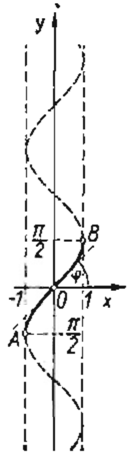
Grafovi tih funkcija se dobiju iz grafova trigonometrijskih funkcija zrcaljenjem na simetrali prvog kvadranta $y = x$.

Arkus-sinus: $y = \text{Arc} \sin x$ (sl. 30).

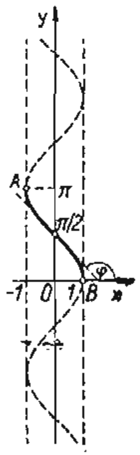
Funkcija je definirana samo za $|x| \leqslant 1$, i višeznačna je. Glavni njen dio $y = \arcsin x$ (izvučeno na slici) monotono raste od $A\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$ do $B\left(+1, +\frac{\pi}{2}\right)$; u ishodištu je tačka infleksije $\left(\text{s priklonim kutom } \frac{\pi}{4}\right)$ i središte simetrije krivulje.

Arkus-kosinus: $y = \text{Arc} \cos x$ (sl. 31).

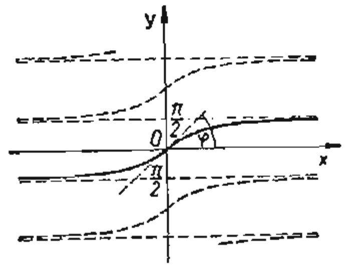
Ista krivulja kao i $\text{Arc} \sin x$, spuštena za $\frac{\pi}{2}$. Funkcija je definirana samo za $|x| \leqslant 1$, i višeznačna je. Glavni njen dio $y = \arccos x$ (izvučeno na slici) monotono pada od $A(-1, +\pi)$ do $B(+1, 0)$. Tačka $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ je središte simetrije i tačka infleksije krivulje (s priklonim kutom $3\pi/4$ prema osi x).



Sl. 30



Sl. 31

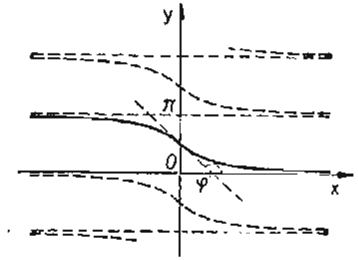


Sl. 32

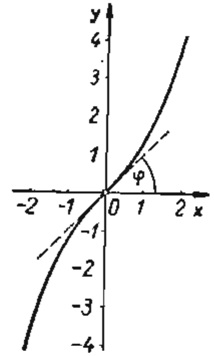
* Određivanje i formule vidi na str. 214 i 215.

Arkus-tangens: $y = \text{Arc} \operatorname{tg} x$ (sl. 32).

Funkcija je višeznačna. Glavni njen dio $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ monotono raste od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$; ishodište je tačka infleksije (s priklonim kutom $\frac{\pi}{4}$), a također je središte simetrije krivulje. Ostale vrijednosti y dobivamo iz glavnog dijela ako ovome pribrojimo $\pm k\pi$. Asimptote su: $y = \pm (2k + 1)\frac{\pi}{2}$.



Sl. 33



Sl. 34

Arkus-kotangens: $y = \text{Arc} \operatorname{ctg} x$ (sl. 33).

Funkcija je višeznačna. Glavni njen dio $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ monotono pada od π do 0; tačka infleksije (središte simetrije) je $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ s priklonim kutom $\frac{3\pi}{4}$. Ostale vrijednosti y dobivamo iz glavnog dijela oko ovome pribrojimo $\pm k\pi$. Asimptote su: $y = \pm k\pi$.

7. HIPERBOLNE FUNKCIJE*

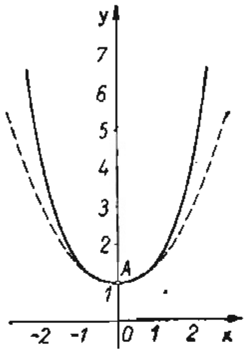
Sinus hiperbolni: $y = \operatorname{sh} x$ (sl. 34).

Funkcija je neparna, monotono raste od $-\infty$ do $+\infty$, ishodište je tačka infleksije $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ i središte simetrije krivulje. Asimptota nema.

* Teoretska objašnjenja vidi na str. 221 i 222. Tablice vidi na str. 59...62.

Kosinus hiperbolni: $y = \text{ch}\, x$ (sl. 35).

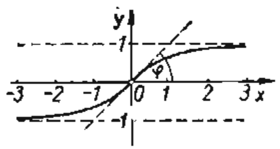
Graf je *lančanica* (vidi str. 126). Funkcija je parna. Za $x < 0$ pada od $+\infty$ do 1, za $x > 0$ raste od 1 do $+\infty$. Minimum je u tački $A\,(0, 1)$, asimptota nema. Krivulja leži simetrično prema osi y i iznad parabole $y = 1 + \frac{x^2}{2}$ (crtkano nacrtano).



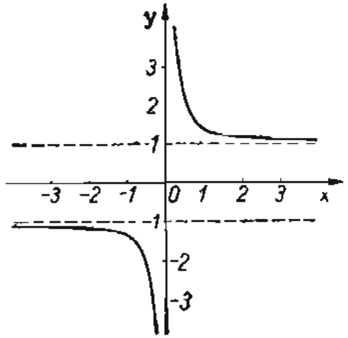
Sl. 35

Tangens hiperbolni: $y = \text{th}\, x$ (sl. 36).

Funkcija je neparna, monotono raste od -1 do $+1$. Ishodište je tačka infleksije $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ i središte simetrije krivulje. Ima dvije asimptote: $y = \pm 1$.



Sl. 36



Sl. 37

Kotangens hiperbolni: $y = \text{cth}\, x$ (sl. 37).

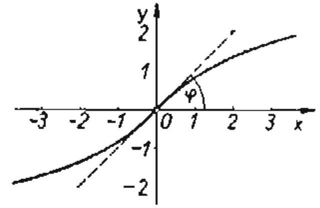
Funkcija je neparna, prekinutost pri $x = 0$. Za $x < 0$ pada od -1 do $-\infty$, za $x > 0$ pada od $+\infty$ do $+1$, Ekstrema i tačaka infleksije nema. Ima tri asimptote: $x = 0$, $y = \pm 1$.

8. AREA-FUNKCIJE*

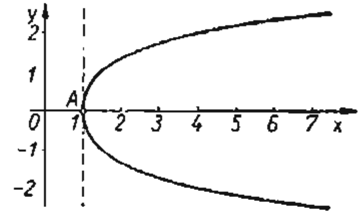
Grafovi se dobiju iz grafova hiperbolnih funkcija zrcaljenjem na simetrali kuta xOy.

Area-sinus: $y = \text{Ar sh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ (sl. 38).

Funkcija je neparna; monotono raste od $-\infty$ do $+\infty$. Ishodište je tačka infleksije ($\varphi = \pi/4$) i središte simetrije krivulje. Asimptota nema.



Sl. 38



Sl. 39

Area-kosinus: $y = \text{Ar ch}\, x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$ (sl. 39).

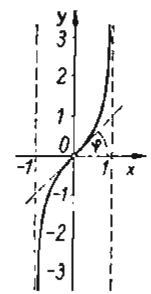
Funkcija je dvoznačna: definirana je samo za $x \geqslant 1$. Krivulja je simetrična s obzirom na os x; u tački $A\,(1, 0)$ dira vertikalni pravac $x = 1$, a zatim y po apsolutnoj vrijednosti raste.

Area-tangens:

$$y = \text{Ar th}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \quad \text{(sl. 40).}$$

Funkcija je neparna, definirana je samo za $|x| < 1$; monotono raste od $-\infty$ do $+\infty$. Ishodište je tačka infleksije $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ i središte simetrije krivulje. Ima dvije asimptote:

$$x = \pm 1.$$



Sl. 40

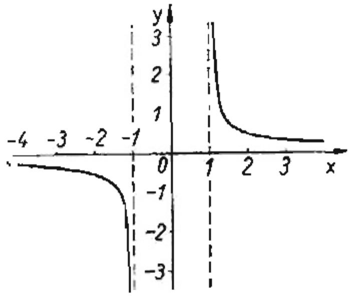
* Teoretska objašnjenja vidi na str. 224.

Area-kotangens:

$$y = \operatorname{Ar cth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad \text{(sl. 41).}$$

Funkcija je neparna, definirana je samo za $|x| > 1$. Za $-\infty < x < < -1$ pada od 0 do $-\infty$, za $+1 < x < \infty$ pada od $+\infty$ do 0. Ekstrema i tačaka infleksije nema. Ima tri asimptote:

$$y = 0, \quad x = \pm 1.$$



Sl. 41

B. VAŽNIJE KRIVULJE

Ovdje navodimo neke podatke o važnijim krivuljama koje susrećemo u praksi (pored onih koje su prije navedene u vezi s grafovima važnijih funkcija). U te podatke spada: određivanje krivulje kao geometrijskog mjesta te koordinata karakterističnih tačaka, duljina krivulje ili njenog dijela, površina koja omeđuje krivulju ili njen dio, te polumjer zakrivljenosti u karakterističnim tačkama.

Opće podatke o tome kako se crtaju krivulje po jednadžbama vidi na str. 280 i 281.

O krivuljama drugog reda (elipse, hiperbole i parabole) vidi na str. 235 do 241.

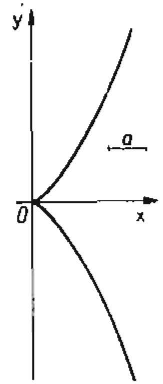
9. KRIVULJE TREĆEG REDA

Semikubna parabola (sl. 42).

Jednadžba: $y = ax^{3/2}$*, u parametarskom obliku: $x = t^2$, $y = at^3$.

U ishodištu je šiljak. Asimptota nema. Zakrivljenost $K = \dfrac{6a}{\sqrt{x}\,(4 + 9a^2x)^{3/2}}$ prima sve vrijednosti od ∞ do 0. Duljina krivulje od ishodišta do tačke M**:

$$L = \frac{1}{27a^2} \left[(4 + 9a^2x)^{3/2} - 8\right].$$



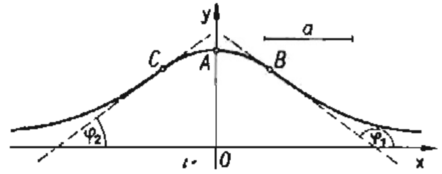
Sl. 42

* Ovdje i dalje $a > 0$.

** Ovdje i dalje M je pomična tačka krivulje s koordinatama x, y.

»Versiera« Marije Agnesi (sl. 43).

Jednadžba: $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$. Asimptota $y = 0$. Maksimum: $A\,(0, a)$; polumjer zakrivljenosti u njemu je $r = \dfrac{a}{2}$. Tačke infleksije: $B, C \left(\pm \dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{3a}{4}\right)$, tangens smjera krivulje u tim tačkama: $\operatorname{tg} \varphi = \mp \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.



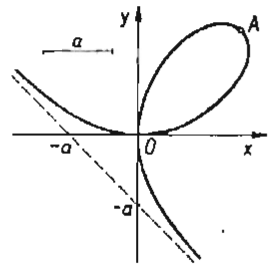
Sl. 43

Površina između krivulje i asimptote $S = \pi a^2$.

Descartesov list (sl. 44).

Jednadžba: $x^3 + y^3 = 3axy$; u parametarskom obliku: $x = \dfrac{3at}{1 + t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}$ $(t = \operatorname{tg} MOx)$.

Ishodište je čvorna tačka, koja za tangente ima koordinatne osi, polumjer zakrivljenosti za obje grane u ishodištu: $r = \dfrac{3a}{2}$. Asimptota $x + y + a = 0$. Tjeme je $A\left(\dfrac{3}{2}a, \dfrac{3}{2}a\right)$. Površina petlje $S_1 = \dfrac{3}{2}a^2$; površina između krivulje i asimptote $S_2 = \dfrac{3}{2}a^2$.

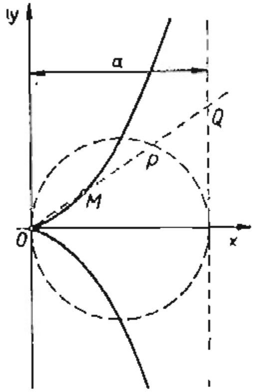


Sl. 44

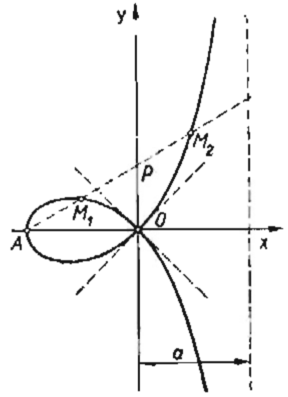
Cisoida (sl. 45). Geometrijsko mjesto tačaka M, za koje je $OM = PQ$ (P — po volji odabrana tačka *kružnice izvodnice* s promjerom a).

Jednadžba: $y^2 = \dfrac{x^3}{a - x}$; u parametarskom obliku: $x = \dfrac{at^2}{1 + t^2}$,

$y = \frac{at^3}{1+t^2}$ $(t = \operatorname{tg} MOx)$; u polarnim koordinatama: $\rho = \frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$.
U ishodištu je šiljak. Asimptota je $x = a$. Površina između krivulje i asimptote $S = {}^3/_4\pi a^2$.



Sl. 45



Sl. 46

Strofoida (sl. 46). Geometrijsko mjesto tačaka M_1 i M_2 (koje leže na bilo kojim zrakama kroz tačku A), za koje je $PM_1 = PM_2 = OP$ (P je bilo koja tačka osi Oy).

Jednadžba: $y^2 = x^2\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$; u parametarskom obliku: $x = a\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y = at\frac{t^2-1}{t^2+1}$ $(t = \operatorname{tg} MOx)$; u polarnim koordinatama: $\rho = -a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$. Ishodište je čvorna tačka (tangente: $y = \pm x$). Asimptota je $x = a$. Tjeme $A\,(-a, 0)$. Površina petlje: $S_1 = 2a^2 - {}^1/_2\pi a^2$, površina između krivulje i asimptote: $S_2 = 2a^2 + {}^1/_2\pi a^2$.

10. KRIVULJE ČETVRTOG REDA

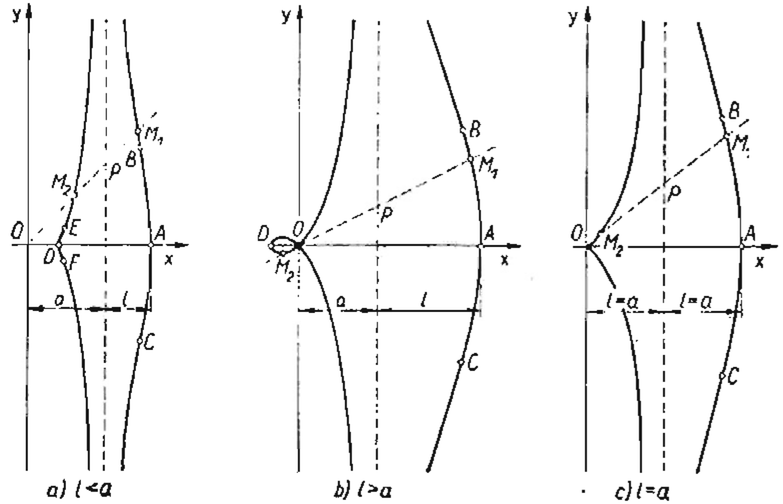
Nikomedova konhoida (sl. 47). Geometrijsko mjesto tačaka M, za koje je $OM = OP \pm l$ (predznaku »+« odgovara vanjska grana, a predznaku »—« unutarnja)*.

* Općenito konhoidom dane krivulje nazivamo krivulju koju dobivamo tako da povećamo ili smanjimo radijvektor svake tačke dane krivulje za konstantni odsječak l. Ako je jednadžba krivulje u polarnim koordinatama $\rho = f(\varphi)$, tada je jednadžba njene konhoide $\rho = f(\varphi) \pm l$. Nikomedova konhoida je konhoida pravca.

Jednadžba: $(x-a)^2(x^2+y^2) - l^2x^2 = 0$; u parametarskom obliku: $x = a + l\cos\varphi$, $y = a\operatorname{tg}\varphi + l\sin\varphi$; u polarnim koordinatama: $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm l$.

Vanjska grana: Asimptota: $x = a$. Tjeme: $A\,(a + l, 0)$. Ima dvije tačke infleksije B, C [njihova apscisa x jednaka je najvećem korijenu jednadžbe $x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0$*]. Površina između grane i asimptote $S = \infty$.

Unutarnja grana: Asimptota: $x = a$. Tjeme: $D\,(a - l, 0)$. U ishodištu je dvostruka tačka čiji karakter ovisi o veličinama a i l:



Sl. 47

a) Za $l < a$ to je izolirana tačka (sl. 47, *a*). Krivulja ima i dvije tačke infleksije E, F [apscisa x po veličini je jednaka drugom pozitivnom korijenu jednadžbe: $x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0$].

b) Za $l > a$ nastaje čvorna tačka (sl. 47, *b*). Krivulja ima maksimum i minimum pri $x = a - \sqrt[3]{al^2}$. Tangensi smjera tangenata u ishodištu: $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{a}$; polumjer zakrivljenosti:

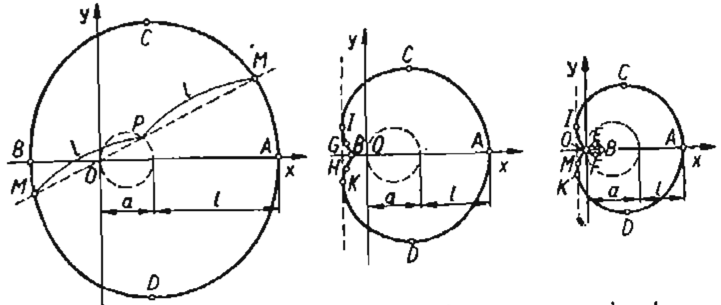
$$r_0 = \frac{l\sqrt{l^2 - a^2}}{2}.$$

c) Za $l = a$ dvostruka tačka je šiljak (sl. 47, *c*).

* Za način rješavanja takvih jednadžbi vidi str. 154...158.

Pascalov puž (sl. 48). Konhoida kružnice*; $OM = OP \pm l$ (pol je na kružnici).

Jednadžba: $(x^2 + y^2 - ax)^2 = l^2(x^2 + y^2)$; u parametarskom obliku: $x = a\cos^2\varphi + l\cos\varphi$, $y = a\cos\varphi\sin\varphi + l\sin\varphi$; u polarnim koordinatama: $\rho = a\cos\varphi + l$ (a je promjer kružnice). Tjemena A, $B\,(a \pm l,\ 0)$. Oblik krivulje ovisi o veličinama a i l, kako je to vidljivo na sl. 48 i 49. Četiri su ekstrema, ako je $a > l$,



a) $l \geq 2a$ b) $a < l < 2a$ c) $a > l$

Sl. 48

i dva, ako je $a \leqslant l$: $C, D, E, F\left(\cos\varphi = \dfrac{-l \pm \sqrt{l^2 + 8a^2}}{4a}\right)$.

Tačke infleksije: $G, H\left(\cos\varphi = -\dfrac{2a^2 + l^2}{3al}\right)$ postoje, ako je $a < l < 2a$. Dvojna tangenta u tačkama: $I, K\left(-\dfrac{l^2}{4a}, \pm\dfrac{l\sqrt{4a^2 - l^2}}{4a}\right)$ postoji ako je $l < 2a$. Ishodište je dvostruka tačka: izolirana pri $a < l$, čvorna pri $a > l$ (tangensi smjera tangenata u toj tački: $\operatorname{tg}\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{a^2 - l^2}}{l}$, polumjer zakrivljenosti $r_0 = {}^1/_2\sqrt{a^2 - l^2}$); šiljak za $a = l$. U posljednjem slučaju nazivamo krivulju *kardioidom* (vidi dalje).

Površina puža: $S = \dfrac{\pi a^2}{2} + \pi l^2$ [u slučaju $a > l$ (sl. 48, *c*) površina unutarnje petlje, ako je računamo prema toj formuli, računana je dvaput].

---

* Vidi str. 154...158.

Kardioida (sl. 49). Može se odrediti dvojako: 1) Posebni slučaj Pascalovog puža: $OM = OP \pm a$ (a je promjer kruga). 2) Epicikloida (vidi str. 120), kod koje je promjer pomičnog i nepomičnog kruga jednak ($= a$).

Jednadžba: $(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2$; u parametarskom obliku: $x = a\cos\varphi\,(1 + \cos\varphi)$, $y = a\sin\varphi\,(1 + \cos\varphi)$; u polarnim koordinatama:

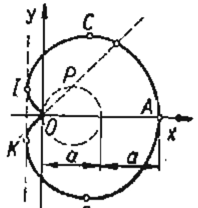
$$\rho = a(1 + \cos\varphi).$$

Ishodište je šiljak. Tjeme: $A\,(2a, 0)$. Maksimum i minimum $\left(\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\right)$:

$$C, D\left(\frac{3}{4}a,\ \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}a\right).$$

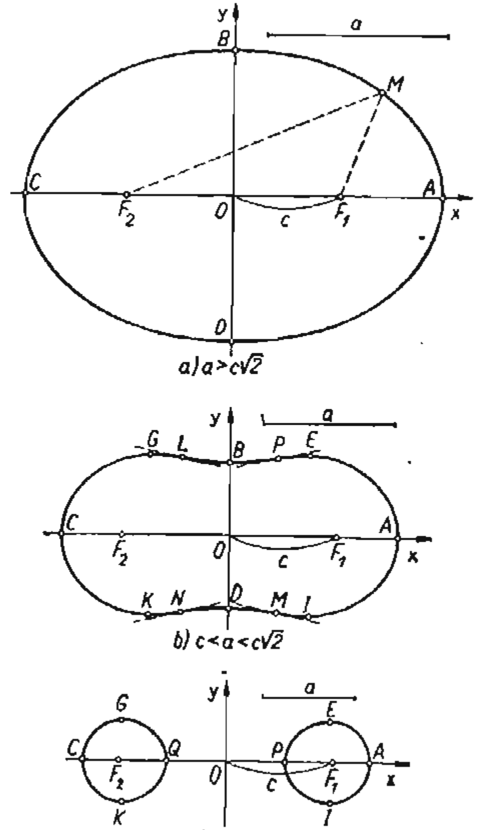
Površina: $S = \dfrac{3}{2}\pi a^2$

(šestorostruka površina kruga s promjerom a). Duljina krivulje: $L = 8a$.



$a = l$

Sl. 49



a) $a > c\sqrt{2}$ b) $c < a < c\sqrt{2}$ c) $a < c$

Sl. 50

Cassinijevi ovali (sl. 50). Geometrijsko mjesto tačaka M, za koje je produkt udaljenosti $F_1M \cdot F_2M = a^2$ (F_1, F_2 su čvrsti fokusi, a je konstanta).

Jednadžba: $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$, gdje je F_1, $F_2\,(\pm c, 0)$; u polarnim koordinatama:

$\rho^2 = c^2\cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4\cos^2 2\varphi + (a^4 - c^4)}$. Oblik krivulje ovisi o omjeru između a i c:

a) $a > c\sqrt{2}$; *elipsi slični oval* (sl. 50, *a*). Sjecišta s osi x: $A, C(\pm\sqrt{a^2+c^2}\ 0)$; sjecišta s osi y: $B, D\,(0, \pm\sqrt{a^2-c^2})$. Ako je $a = c\sqrt{2}$, *oval je istog tipa*; u tom slučaju $A, C(\pm c\sqrt{3}, 0)$, $B, D\,(0, \pm c)$; u tačkama B i D zakrivljenost je jednaka nuli (tijesan dodir s pravcima $y = \pm c$).

b) $c < a < c\sqrt{2}$; *oval sa suženjem* (sl. 50, *b*). Sjecišta s osima su ista kao i u slučaju a); maksimumi i minimumi: B, D (za koordinate vidi naprijed), E, G, K, J $\left(\pm\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}, \pm\frac{a^2}{2c}\right)$; četiri su tačke infleksije; P, L, M, N $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}(m-n)}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}(m+n)}\right)$, gdje je $n = \frac{a^4-c^4}{3c^2}$, $m = \sqrt{\frac{a^4-c^4}{3}}$.

c) $a = c$; *lemniskata* (vidi niže).

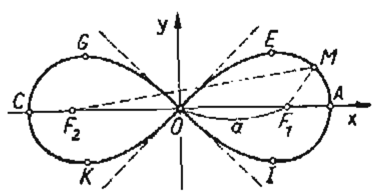
d) $a < c$; *dva ovala* (sl. 50, *c*). Sjecišta s osi x: $A, C(\pm\sqrt{a^2+c^2}, 0)$ i $P, Q(\pm\sqrt{c^2-a^2}, 0)$; maksimumi i minimumi:

E, G, K, I $\left(\pm\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}, \pm\frac{a^2}{2c}\right)$.

Polumjer zakrivljenosti

$$r = \frac{2a^2\rho^3}{c^4 - a^4 + 3\rho^4}$$

(ρ — radijvektor).



Sl. 51

Lemniskata (sl. 51).

Poseban slučaj Cassinijevih ovala ($a = c$): $F_1M \cdot F_2M = \left(\frac{F_1F_2}{2}\right)^2$, gdje je F_1, F_2 $(\pm a, 0)$.

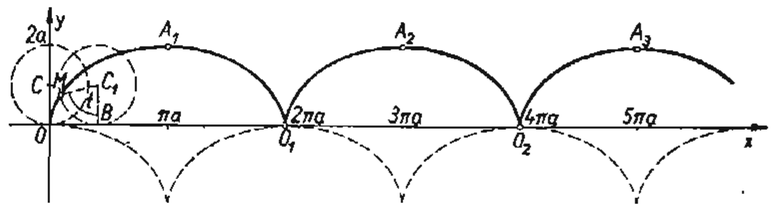
Jednadžba: $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$; u polarnim koordinatama: $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Ishodište je čvorna tačka s tan-

gentama $y = \pm x$; ono je uz to tačka infleksije. Sjecište krivulje s osi x: A, C $(\pm a\sqrt{2}, 0)$; maksimumi i minimumi: E, G, K, I $\left(\pm\frac{a\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{a}{2}\right)$; polarni kut u tim tačkama: $\varphi = \pm\pi/6$. Polumjer zakrivljenosti: $r = \frac{2a^2}{3\rho}$. Površina svake petlje $S = a^2$.

11. CIKLOIDE

Cikloida (sl. 52). Krivulja koju opisuje tačka kružnice kada se kružnica kotrlja bez klizanja po pravcu.

Jednadžba u parametarskom obliku: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (a je polumjer kružnice, $t = \sphericalangle MC_1B$); u Descartesovim koordinatama: $x + \sqrt{y(2a-y)} = a\,\mathrm{Arccos}\frac{a-y}{a}$. Krivulja



Sl. 52

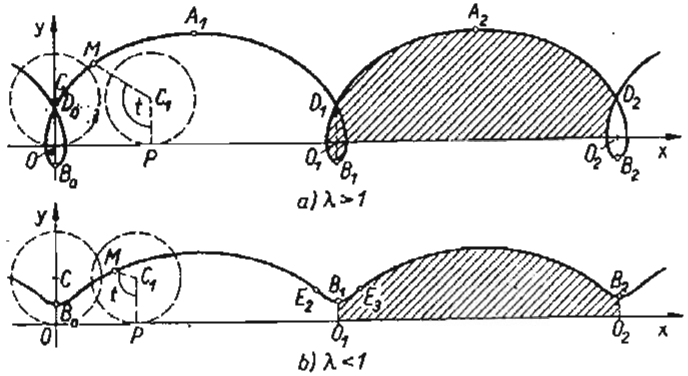
je periodična: period (*baza* cikloide) $OO_1 = 2\pi a$. Šiljci $O, O_1, O_2, \ldots$ $(2k\pi a, 0)$; tjemena $A_1, A_2, \ldots$ $[(2k+1)\pi a, 2a]$. Duljina OM: $L = 8a\sin^2 {}^1/_4 t$; duljina jedne grane $L_{OA_1O_1} = 8a$, površina OA_1O_1O: $S = 3\pi a^2$. Polumjer zakrivljenosti $r = 4a\sin {}^1/_2 t$, u tjemenima $r_A = 4a$. Evoluta (str. 282) cikloide je isto takva cikloida (crtkano prikazana).

Rastegnuta (sl. 53, *a*) **i stegnuta** (sl. 53, *b*) **cikloida** (»*trohoida*«). Krivulje opisane tačkom koja leži *a*) izvan i *b*) unutar kružnice, koja se kotrlja bez klizanja po pravcu.

Jednadžba u parametarskom obliku: $x = a(t - \lambda\sin t)$, $y = a(1 - \lambda\cos t)$, gdje je a polumjer kružnice, $t = \sphericalangle MC_1P$, $\lambda a = C_1M$ (za rastegnutu cikloidu $\lambda > 1$, za stegnutu $\lambda < 1$). Krivulje su periodične: period $OO_1 = 2\pi a$; maksimumi $A_1, A_2, \ldots$ $[(2k+1)\pi a, (1+\lambda)a]$, minimumi $B_0, B_1, B_2, \ldots$ $[2k\pi a, (1-\lambda)a]$. Za rastegnutu cikloidu čvorne su tačke $D_0, D_1, D_2, \ldots$ $[2k\pi a, a(1 - \sqrt{\lambda^2 - t_0^2})]$, gdje je t_0 najmanji pozitivni korijen jednadžbe $t = \lambda \sin t^*$. Za stegnutu cikloidu su tačke infleksije E_1, E_2, ... $[a(\arccos \lambda - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}),\ a(1-\lambda^2)]$. Duljina jednog cikla $L = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos t}\,dt$; površina, šrafirana na sl. 53, je $S = \pi a^2(2+\lambda^2)$. Polumjer zakrivljenosti:

$$r = a\frac{(1+\lambda^2-2\lambda\cos t)^{3/2}}{\lambda(\cos t-\lambda)}, \text{ u tačkama maksimuma:}$$

$$r_A = -a\cdot\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}, \text{ u tačkama minimuma: } r_B = a\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}.$$



Sl. 53

Epicikloida (sl. 54). Krivulja koju opisuje tačka kružnice ako se kružnica kotrlja bez klizanja po drugoj kružnici izvan nje.

Jednadžba u parametarskom obliku:

$$x = (A+a)\cos\varphi - a\cos\frac{A+a}{a}\varphi,$$

$$y = (A+a)\sin\varphi - a\sin\frac{A+a}{a}\varphi$$

[A polumjer nepomičnog, a polumjer pomičnog kruga, $\varphi = \sphericalangle\, COx$]. Oblik krivulje ovisi o omjeru $\frac{A}{a} = m$. Za $m = 1$ izlazi *kardioida* (vidi str. 116).

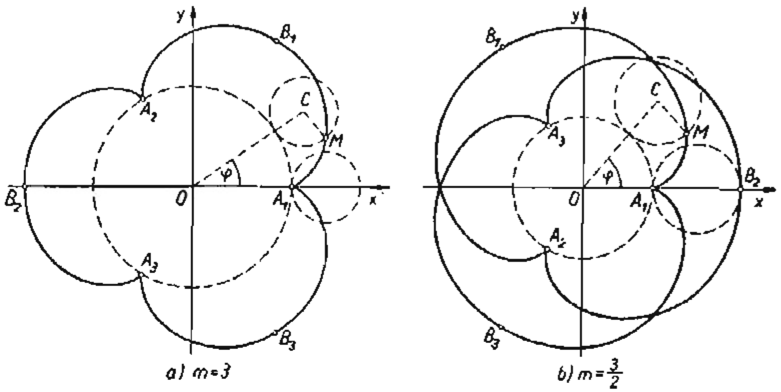
a) Ako je m cio broj, krivulja se sastoji od m grana (sl. 54, *a*), koje obuhvaćaju nepomični krug; tačke infleksije jesu:

$$A_1, A_2, \dots A_m \left[\rho = A,\ \varphi = \frac{2k\pi}{m}\quad (k = 0, 1, \dots, m-1)\right];$$

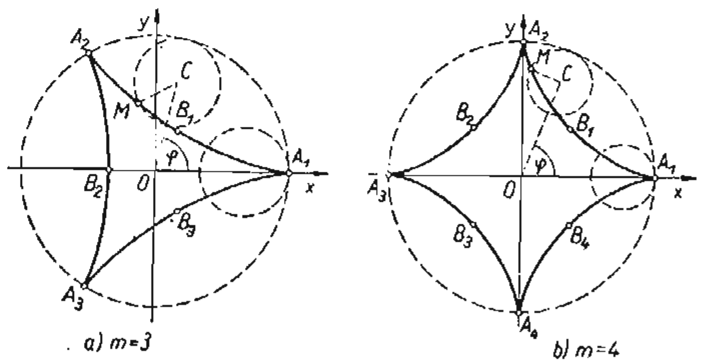
* Za rješavanje takvih jednadžbi vidi str. 164 i 165.

$$\text{tjemena } B_1, B_2, \dots B_m \left[\rho = A + 2a,\ \varphi = \frac{2\pi}{m}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right].$$

b) Ako je m racionalan razlomak, grane se prekrivaju (sl. 54, *b*), ali se pomična tačka M, kada je opisala konačan broj grana, vraća u početni položaj. Ako je m iracionalan broj, tada je broj grana beskonačan, tačka M se ne vraća u početni položaj.



Sl. 54

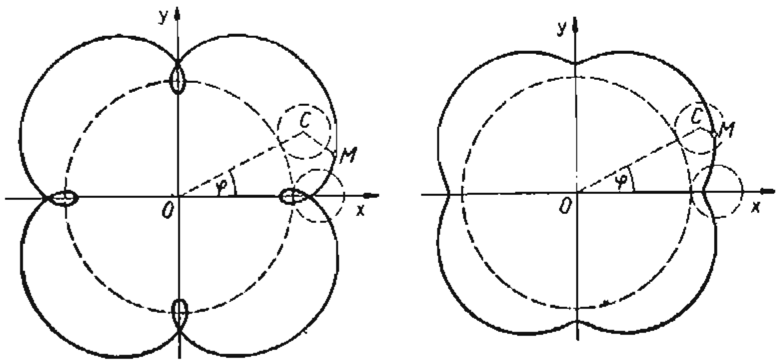


Sl. 55

Duljina jedne grane je $L_{A_1B_1A_2} = \frac{8(A+a)}{m}$, ako je m cio broj, duljina čitave krivulje je $L = 8(A+a)$. Površina sektora $A_1B_1A_2A_1$ (bez sektora nepomičnog kruga): $S = \pi a^2\left(\frac{3A+2a}{A}\right)$. Polumjer zakrivljenosti $r = \frac{4a(A+a)}{2a+A}\sin\frac{A\varphi}{2a}$; u tjemenima $r_B = \frac{4a(A+a)}{2a+A}$.

Hipocikloida (sl. 55). Krivulja koju opisuje tačka kružnice kada se kružnica kotrlja bez klizanja po drugoj kružnici unutar nje.

Jednadžbe hipocikloide, koordinate tjemena i tačaka infleksije, formule za duljinu luka, površinu i polumjer zakrivljenosti iste su kao i za epicikloidu, samo treba zamijeniti »$+a$« sa »$-a$«; broj šiljaka, ako je m cio broj, racionalan ili iracionalan (m je uvijek > 1) isti je kao kod epicikloide. Za $m = 2$ krivulja prelazi u promjer nepomičnog kruga. Za $m = 3$ ima hipocikloida tri grane (sl. 55, *a*): $x = a(2\cos\varphi + \cos 2\varphi)$, $y = a(2\sin\varphi - \sin 2\varphi)$; $L = 16a$, $S_{\text{polna}} = 2\pi a^2$. Za $m = 4$ (sl. 55, *b*) hipocikloida ima četiri grane (*astroida*): $x = A\cos^3\varphi$, $y = A\sin^3\varphi$; u Descartesovim koordinatama $x^{2/3} + y^{2/3} = A^{2/3}$; $L = 24a = 6A$; $S = \frac{3}{8}\pi A^2$.



a) λ>1, a>0 b) λ<1, a>0

Sl. 56

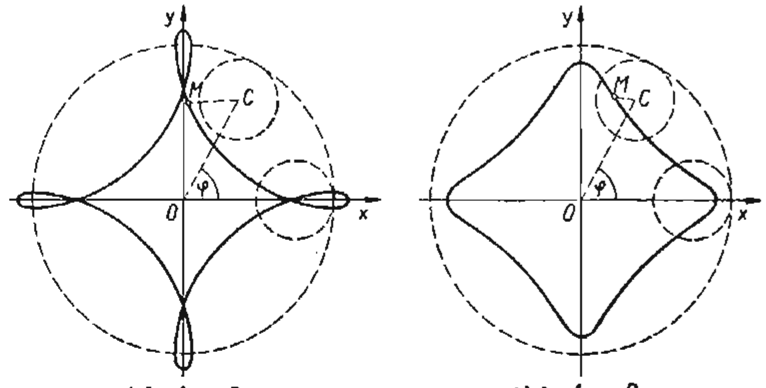
Rastegnuta i stegnuta epi- i hipocikloida (»*epi-* i *hipotrohoida*«) (sl. 56 i 57). Krivulja koju opisuje tačka koja leži izvan ili unutar kružnice, kada se kružnica kotrlja bez klizanja po drugoj kružnici izvan nje (epicikloida, sl. 56) ili unutar nje (hipocikloida, sl. 57).

Jednadžba (u parametarskom obliku):

$$x = (A+a)\cos\varphi - \lambda a\cos\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right),$$

$$y = (A+a)\sin\varphi - \lambda a\sin\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right).$$

A je polumjer nepomičnog kruga, a je polumjer pomičnog kruga (pri čemu u slučaju hipocikloide »$+a$« u jednadžbi zamijenimo sa »$-a$«), $\lambda a = CM$ (za rastegnutu je $\lambda > 1$, za stegnutu



a) λ>1, a<0 b) λ<1, a<0

Sl. 57

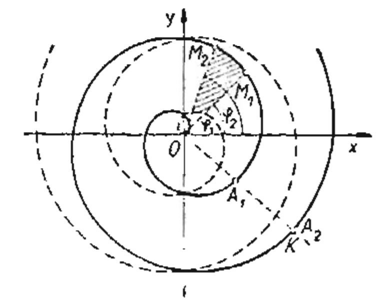
$\lambda < 1$). Za $A = 2a$ (λ bilo koji broj) postaje hipocikloida: $x = a(1+\lambda)\cos\varphi$, $y = a(1-\lambda)\sin\varphi$ elipsa s poluosima $a(1+\lambda)$ i $a(1-\lambda)$. Za $A = a$ izlazi Pascalov puž (vidi str. 115)*: $x = a(2\cos\varphi - \lambda\cos 2\varphi)$, $y = a(2\sin\varphi - \lambda\sin 2\varphi)$.

12. ZAVOJNICE (SPIRALE)

Arhimedova zavojnica (sl. 58). Krivulja koju opisuje tačka koja se giba konstantnom brzinom v po zraci koja se vrti oko pola O konstantnom kutnom brzinom ω.

Jednadžba u polarnim koordinatama: $\rho = a\varphi$; $a = \frac{v}{\omega}$. Krivulja se sastoji od dvije grane, koje leže simetrično prema osi Oy. Svaka zraka OK siječe krivulju u tačkama $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$, koje su međusobno udaljene za $A_i A_{i+1} = 2\pi a$. Duljina luka OM je:

$$L = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \operatorname{Ar\,sh}\varphi\right),$$



Sl. 58

* Na str. 116 sa a je označena veličina koja je ovdje označena sa $2\lambda a$, a sa l promjer $2a$. Izmijenjen je također i koordinatni sistem.

$\frac{2L}{a\varphi^2} \to 1$ za velike φ. Površina sektora M_1OM_2:

$$S = \frac{a^2}{6}(\varphi_2^3 - \varphi_1^3).$$

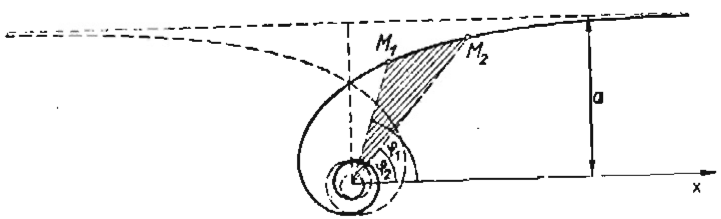
Polumjer zakrivljenosti: $r = a\frac{(\varphi^2+1)^{3/2}}{\varphi^2+2}$, u ishodištu: $r_0 = \frac{a}{2}$.

Hiperbolna zavojnica (sl. 59).

Jednadžba u polarnim koordinatama: $\rho = \frac{a}{\varphi}$. Krivulja se sastoji od dvije grane, koje leže simetrično prema osi y; svaka grana ima pravac $y = a$ za asimptotu, a ishodište O je asimptotična tačka.

Površina sektora M_1OM_2: $S = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2}\right)$; $\lim\limits_{\varphi_2 \to \infty} S = \frac{a^2}{2\varphi}$.

Polumjer zakrivljenosti: $r = \frac{a}{\varphi}\left(\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\right)^3$.

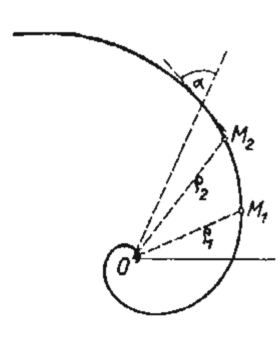


Sl. 59

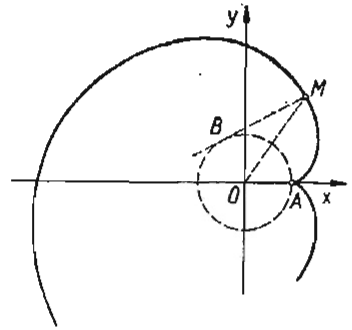
Logaritamska zavojnica (sl. 60). Krivulja koja siječe pod istim kutom α sve zrake koje izlaze iz tačke O.

Jednadžba (u polarnim koordinatama): $\rho = ae^{k\varphi}$ [$k = \operatorname{ctg}\alpha$; ako je $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tada je $k = 0$ i krivulja je kružnica]. Krivulja ima pol O za asimptotičnu tačku. Duljina luka M_1M_2:

$L = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}(\rho_2 - \rho_1)$, limes duljine luka OM od ishodišta: $L_0 = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\rho$. Polumjer zakrivljenosti: $r = \sqrt{1+k^2}\,\rho = L_0 k$.



Sl. 60



Sl. 61

Evolventa* kružnice (sl. 61). Krivulja opisana krajem napete niti koja se odmata s kružnice ($\widehat{AB} = BM$).

Jednadžba u parametarskom obliku:

$$x = a\cos\varphi + a\varphi\sin\varphi,$$
$$y = a\sin\varphi - a\varphi\cos\varphi$$

(a polumjer kruga, $\varphi = \sphericalangle BOx$). Krivulja ima dvije grane simetrično smještene prema osi x; šiljak je $A\,(a, 0)$; sjecište s osi Ox: $x = \frac{a}{\cos\varphi_0}$, gdje je φ_0 korijen jednadžbe: $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$**. Duljina luka AM: $L = \frac{1}{2}a\varphi^2$. Polumjer zakrivljenosti: $r = a\varphi = \sqrt{2aL}$; središte zakrivljenosti B leži na kružnici.

---

* O evolventi vidi str. 282.

** O rješavanju takvih jednadžbi vidi str. 164 i 165.

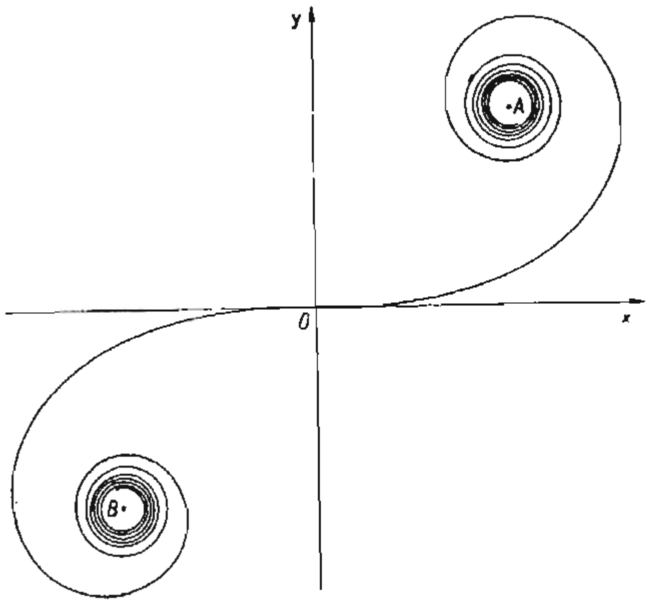
Klotoida (sl. 62). Krivulja za koju je polumjer zakrivljenosti obrnuto proporcionalan duljini luka: $r = a^2 : s$.

Jednadžba u parametarskom obliku: $x = a\sqrt{\pi}\int_0^t \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt$,

$y = a\sqrt{\pi}\int_0^t \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt$*, gdje je $t = \frac{s}{a\sqrt{\pi}}$, $s = \overset{\frown}{OM}$.

Krivulja je simetrična s obzirom na ishodište, koje je tačka infleksije (tangenta je os x); ima dvije asimptotične tačke:

$$A\left(+\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, +\frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right) \quad \text{i} \quad B\left(-\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right).$$



Sl. 62

13. NEKE DRUGE KRIVULJE

Lančanica (sl. 63). Oblik lančanice prima gipka, teška, nerastezljiva nit, ovješena u dvije tačke.

Jednadžba: $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a} = a\,\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$.

* Ovi se integrali ne mogu izraziti pomoću elementarnih funkcija.

Krivulja je simetrična s obzirom na os y i leži iznad parabole $y = a + \frac{x^2}{2a}$ (crtkana linija). Tjeme A (0, a). Duljina luka AM:

$L = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a} = a\,\frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$; površina $OAMP$ je

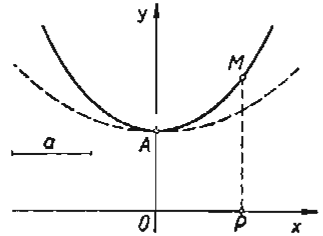
$S = aL = a^2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$; polumjer zakrivljenosti $r = \frac{y^2}{a} = a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}$.

Traktrisa (sl. 64). Krivulja za koju je duljina dijela tangente od dirališta M do sjecišta s danim pravcem (na sl. 64 s osi apscisa) konstanta*.

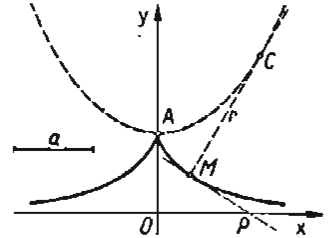
Traktrisa je evolventa (str. 282) lančanice, sa šiljkom u tjemenu A.

Jednadžba:

$$x = a\,\mathrm{Ar\,ch}\,\frac{a}{y} \pm \sqrt{a^2 - y^2}\left(= a\ln\frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2}\right).$$



Sl. 63



Sl. 64

Asimptota je os x, šiljak (s vertikalnom tangentom): A (0, a). Krivulja je simetrična s obzirom na os y. Duljina luka AM: $L = a\ln\frac{a}{y}$; kada duljina luka L raste, tada je razlika $L - x$ (gdje je x apscisa tačke M) $\approx a(1 - \ln 2) \approx 0{,}307a$. Polumjer zakrivljenosti: $r = a\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{y}$.

* Drugim riječima: ako je na jednom kraju nerastežljive niti određene duljine (a) pričvršćena materijalna tačka (M), a drugi se kraj (P) giba po pravcu (Ox), tada ova tačka (M) opisuje traktrisu (odavde naziv: traktrisa — povlačna krivulja).

DRUGI DIO

ELEMENTARNA MATEMATIKA

I. PRIBLIŽNO RAČUNANJE

1. PRAVILA PRIBLIŽNOG RAČUNANJA

Približno računanje. Pri računanju potrebno je stalno misliti na tačnost koja nam treba ili se može postići. Potpuno je nedopustivo računati s većom tačnošću, ako to zadatak ne dopušta ili ne zahtijeva (npr. ne treba upotrebljavati sedmeroznamenkaste logaritme pri računanju s brojevima koji su dani na 5 decimala tačno). Pouzdano poznavanje pravila približnog računanja neophodno je svakome tko mora računati.

Pogreške. Razliku između tačnog broja x i njegove približne vrijednosti a nazivamo *pogreškom* tog približnog broja. Ako znamo da je $|x - a| < \Delta_a$, veličinu Δ_a nazivamo *krajnjom apsolutnom pogreškom* približne veličine a; odnos $\Delta_a : a = \delta_a$ nazivamo *krajnjom relativnom pogreškom,* koju često izražavamo u postocima.

Primjer: 3,14 je približna vrijednost broja π, njegova pogreška je 0,00159..., krajnja apsolutna pogreška je 0,0016, a krajnja relativna pogreška je $\frac{0,0016}{3,14} = 0,00051 = 0,051\%$.

Zbog kratkoće obično riječ »krajnja« izostavljamo.

O pogreškama opažanja vidi str. 659.

Značajne brojke. Ako apsolutna pogreška veličine a ne prelazi jedinicu vrijednosti posljednje znamenke broja a, kažemo da su u broju a sve znamenke *tačne**. Približne brojeve treba da pišemo tako, da zadržimo samo tačne znamenke. Ako je npr. apsolutna pogreška broja 52400 jednaka 100, onda taj broj moramo pisati u obliku $524 \cdot 10^2$ ili $5,24 \cdot 10^4$. Pogrešku približnog broja lako ćemo ocijeniti tako da kažemo koliko ima značajnih tačnih znamenaka. Pri brojanju značajnih znamenaka ne brojimo nule s lijeve strane.

* U toj definiciji se često zahtijeva da pogreška ne prelazi polovinu jedinice posljednje mjesne vrijednosti približnog broja. U vezi s time vidi str. 129 (»Zaokruženje«).

Primjeri: 1) 1 kubna stopa = 0,0283 m³ — tri tačne značajne znamenke; 2) 1 palac = 2,5400 cm — pet tačnih značajnih znamenaka.

Ako broj a ima n tačnih značajnih znamenaka, onda je njegova relativna pogreška $\delta_a < \frac{1}{z \cdot 10^{n-1}}$, gdje je z prva značajna znamenka broja a. U broju a s relativnom pogreškom δ_a ima n značajnih znamenaka, gdje je n najveći cijeli broj koji zadovoljava nejednadžbu:

$$(1 + z)\,\delta_a < 10^{1-n}\text{*}.$$

Primjer: Ako smo broj $a = 47,542$ dobili kao rezultat računanja s približnim brojevima (vidi niže) i znamo da je $\delta_a = 0,1\%$ onda a ima tri tačne znamenke, jer je $(4 + 1) \cdot 0,001 < 10^{-2}$.

Zaokruženje. Ako približan broj sadrži suvišne (ili netačne) brojke, treba ga *zaokružiti.* Pri zaokruživanju zadržavamo samo tačne brojke; suvišne brojke izostavljamo, pri čemu posljednju zadržanu znamenku povećamo za jedinicu, ako je prva ispuštena brojka veća od 4. Ako se ispušteni dio sastoji samo od jedne brojke 5, zaokružimo obično tako, da je posljednja zadržana znamenka parna. Pri zaokružavanju javljaju se dopunske pogreške koje ne prelaze polovinu jedinice mjesne vrijednosti posljednje značajne znamenke zaokruženog broja. Da bi nakon zaokruženja sve znamenke bile tačne, prije zaokruženja ne smije pogreška biti veća od polovine jedinice one mjesne vrijednosti, do koje namjeravamo zaokružiti.

Računanje s približnim vrijednostima. Rezultat računanja s približnim brojevima opet je približan broj. Pogrešku rezultata možemo izraziti pogreškom prvotnih podataka pomoću ovih teorema:

1) Granična apsolutna pogreška algebarske sume jednaka je sumi graničnih apsolutnih pogrešaka komponenata.

2) Relativna pogreška sume zatvorena je između najveće i najmanje relativne pogreške komponenata.

3) Relativna pogreška produkta i kvocijenta jednaka je sumi relativnih pogrešaka faktora, odnosno dividenda i divizora.

4) Relativna pogreška n-te potencije približnog broja je n puta veća od relativne pogreške baze (kako za cijele, tako i za razlomljene n).

Služeći se tim teoremima možemo odrediti pogreške rezultata bilo koje kombinacije aritmetičkih operacija s približnim brojevima.

Primjeri: 1) $V = r^2 h$; $\Delta_V = V\delta_V = V(2\delta_r + \delta_h)$.

$$2)\ z = \sqrt{\frac{x}{1+y}};\quad \delta_z = \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_{1+y}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_x}{x} + \frac{\Delta_y}{1+y}\right).$$

* Ako uzimamo u obzir moguću pogrešku zaokruženja (vidi dalje), treba pretpostaviti da je $(1 + z)\,\delta_a \leqslant 0,5 \cdot 10^{1-n}$.

Pogreška funkcije. Pogreška pri računanju vrijednosti neke funkcije kojoj su argumenti približno zadani može se, pored po pravilima prije navedenim, ocijeniti i pomoću diferencijala te funkcije. Pogreška funkcije nije ništa drugo nego mogući prirast funkcije, koji funkcija dobije kada njenim argumentima damo priraste jednake njihovim pogreškama. Kako su pogreške obično dovoljno malene, praktički je sasvim dopustiva zamjena prirasta s diferencijalima (vidi str. 349). Ako su poznate samo krajnje apsolutne pogreške argumenata, onda pri računanju diferencijala treba za sve derivacije uzeti njihove apsolutne vrijednosti.

Primjeri: 1) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a}{b}$; $\quad d\varphi = \dfrac{b\,da - a\,db}{a^2 + b^2}, \quad \Delta\varphi = \dfrac{b\Delta_a + a\Delta_b}{a^2 + b^2}$.

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\quad \dfrac{dz}{z} = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}, \quad \delta_z = \dfrac{\Delta_z}{z} = \dfrac{x\Delta_x + y\Delta_y}{x^2 + y^2}$.

Za funkciju kojoj vrijednosti uzimamo iz tablica, možemo veoma jednostavno ocijeniti pogrešku. Ako je argument zadan s pogreškom Δ_x, za određivanje pogreške $f(x)$ pomoću linearne interpolacije (vidi str. 19) potražit ćemo prirast funkcije, koji pripada $\pm\Delta_x$. Apsolutna vrijednost tog prirasta i daje krajnju apsolutnu pogrešku $f(x)$.

Primjeri: 1) Ako promjer kruga $D = 5{,}92$ cm ima pogrešku $\Delta_D = 0{,}005$, onda su pripadne pogreške za opseg kruga i površinu kruga jednake (vidi str. 70 i 72) 0,015 cm i 0,05 cm². 2) Ako je $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}818 \pm 0{,}002$, onda je $\alpha = 39°17' \pm 0°4'$ (vidi str. 57).

Obrnuti zadatak. Kada nam treba rezultat s određenom tačnošću, najprije uvodimo formule za pogreške rezultata po jednom od gore navedenih načina; tako možemo odrediti dopustive pogreške početnih podataka.

Primjer: S kolikom tačnošću moramo izmjeriti katete pravokutnog trokuta, od kojih je jedna približno tri puta kraća od druge, a da pogreška kuta određenog njihovim tangensom nije veća od jedne minute? Iz $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a}{b}$ dobivamo (vidi gore): $\Delta\varphi = \dfrac{b\Delta_a + a\Delta_b}{a^2 + b^2}$, odakle, ako uzmemo da je $b = 3a$ i $\Delta_a = \Delta_b$ dobivamo $1' = 0{,}00029 = 0{,}4 \cdot \dfrac{\Delta_a}{a}$ ili $\delta_a = 0{,}0007$. Tako dopustiva jednaka apsolutna pogreška mjerenja kateta daje za manju katetu relativnu pogrešku 0,07%.

Računi bez tačnog obzira na pogreške. Gore opisanim načinom možemo ocijeniti krajnju apsolutnu pogrešku, tj. veličinu koja nesumnjivo prelazi apsolutnu veličinu stvarne pogreške. Pri tom čitavo vrijeme pretpostavljamo da različite pogreške jedna drugu pojačavaju, što se u praksi veoma rijetko događa. Pri opsežnim računima, kada ne uzimamo u obzir pogreške svakog pojedinačnog rezultata, služimo se niže navedenim *pravilima za broj znamenaka.* Pri poštivanju tih pravila možemo smatrati da prosječni postignuti rezultati imaju sve znamenke tačne, premda je u pojedinim slučajevima moguća pogreška od nekoliko jedinica posljednje znamenke*.

1) Pri *zbrajanju i oduzimanju* približnih brojeva u rezultatu treba zadržati toliko *decimala*, koliko ih ima približni broj s najmanje decimala.

2) Pri *množenju i dijeljenju* u rezultatu treba zadržati toliko značajnih znamenaka, koliko ih uz približne podatke ima broj s najmanjim brojem značajnih znamenaka.

3) Pri *kvadriranju i kubiranju* u rezultatu treba zadržati toliko značajnih znamenaka, koliko ih ima približni broj koji potenciramo. (Posljednja znamenka kvadrata, a naročito kuba, pri tom je manje pouzdana od posljednje znamenke baze).

4) Pri *vađenju kvadratnog i kubnog korijena* u rezultatu treba zadržati toliko značajnih znamenaka, koliko ih ima približna vrijednost broja pod korijenom. (Posljednja znamenka kvadratnog, a naročito kubnog korijena je pri tome pouzdanija od posljednje znamenke radikanda).

5) U svim međurezultatima treba zadržati jednu znamenku više nego što preporučuju prethodna pravila. U konačnom rezultatu tu »rezervnu znamenku« odbacujemo.

6) Ako poneki podaci imaju više decimala (pri zbrajanju i oduzimanju) ili više značajnih znamenaka (pri množenju, dijeljenju, potenciranju, korjenovanju) od drugih, te podatke prethodno zaokružimo tako da zadržimo samo jednu suvišnu znamenku.

7) Ako podatke možemo odabrati s po volji velikom tačnošću, a u rezultatu želimo imati k znamenaka, onda podatke treba odabrati s toliko znamenaka, koliko ih je po pravilima 1 do 4 potrebno za $(k + 1)$ znamenku u rezultatu.

8) Pri računanju jednočlanog izraza pomoću logaritama treba odrediti broj značajnih znamenaka približnog broja s najmanjim brojem značajnih znamenaka i upotrijebiti tablice logaritama koje su računane na jednu decimalu više. U konačnom rezultatu posljednju značajnu znamenku odbacujemo.

Množenje i dijeljenje približnih brojeva. Da ne bismo dobili nepotrebnih znamenaka, množenje i dijeljenje približnih brojeva obavljamo na ovaj način.

* Pravila su dana u obliku koji im je dao V. M. Bradys.

Pri množenju odabiremo kao multiplikator manje tačan broj od oba faktora. Množenje započinjemo od strane viših mjesnih vrijednosti, a nakon svakog djelomičnog produkta precrtamo posljednju znamenku desne strane multiplikanda. Poželjno je pri tome da za posljednju precrtanu znamenku izvršimo popravak.

Pri dijeljenju, u suglasnosti s pravilom 6, ako je moguće zadržimo dividendu jednu znamenku više nego što ih ima divizor. Umjesto da ostacima pri dijeljenju pripisujemo nule, odjeljujemo po jednu znamenku divizora. Pri množenju treba za odbačenu znamenku izvršiti popravak.

Primjeri: 1) Pomnožimo 4,128 sa 2,953. 2) Razdijelimo 12,189 sa 4,128. Konačni je oblik računa ovaj:

$$1)\quad 4{,}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{8}\times 2{,}953 \qquad\qquad 2)\quad 12{,}189:4{,}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{8}=2{,}953$$

$$\begin{array}{r}
8{,}256\\
3{,}715\\
206\\
12\\
\hline
12{,}189 \approx 12{,}19
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
-8{,}256\\
\hline
3{,}933\\
-3{,}715\\
\hline
218\\
-\ 206\\
\hline
12\\
-\ 12\\
\hline
\end{array}$$

2. PRIBLIŽNE FORMULE

U mnogo slučajeva složenije funkcije možemo približno zamijeniti jednostavnijim funkcijama, koje daju rezultat s dopustivom pogreškom. U tu svrhu možemo se koristiti s nekoliko prvih članova razvoja tih funkcija u Taylorov red (vidi str. 371) ili upotrijebiti metodu najmanjih kvadrata (vidi str. 665). U posljednjem slučaju formula će bitno ovisiti o intervalu za koji je ona unaprijed određena. Na str. 133 navedeno je nekoliko najčešće upotrebljavanih formula, dobivenih iz Taylorova reda, s oznakom njihove tačnosti.

3. LOGARITAMSKO RAČUNALO

Namjena logaritamskog računala. Jednostavnija računanja, sastavljena od množenja, dijeljenja, vađenja drugog i trećeg korijena, potenciranja zadanih brojeva i računanja s trigonometrijskim funkcijama zadanih brojeva, mogu se približno obaviti logaritamskim računalom. Tačnost računanja različita je u raznim slučajevima, ali u prosjeku, računanje logaritamskim računalom duljine 25 cm odgovara računanju s tri značajne znamenke, tj. s relativnom pogreškom od 0,1% do 1%. U slučajevima kada nas takva tačnost zadovoljava, treba računati logaritamskim računalom.

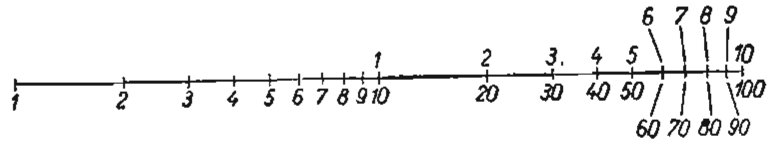
Logaritamska skala. Osnova konstrukcije logaritamskog računala jest logaritamska skala, konstruirana kako slijedi. Po osi

Formula	Pogreška formule ne prelazi 0,1% ako se x mijenja od	do	Pogreška formule ne prelazi 1,0% ako se x mijenja od	do	Pogreška formule ne prelazi 10% ako se x mijenja od	do
$\sin x = x$	$-0{,}077 = -4^\circ{,}4$	$0{,}077 = 4^\circ{,}4$	$-0{,}245 = -14^\circ{,}0$	$0{,}245 = 14^\circ{,}0$	$-0{,}786 = -45^\circ{,}0$	$0{,}786 = 45^\circ{,}0$
$\sin x = x - \frac{x^3}{6}$	$-0{,}580 = -33^\circ{,}2$	$0{,}580 = 33^\circ{,}2$	$-1{,}005 = -57^\circ{,}6$	$1{,}005 = 57^\circ{,}6$	$-1{,}632 = -93^\circ{,}5$	$1{,}632 = 93^\circ{,}5$
$\cos x = 1$	$-0{,}045 = -2^\circ{,}6$	$0{,}045 = 2^\circ{,}6$	$-0{,}141 = -8^\circ{,}1$	$0{,}141 = 8^\circ{,}1$	$-0{,}451 = -25^\circ{,}8$	$0{,}451 = 25^\circ{,}8$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$	$-0{,}386 = -22^\circ{,}1$	$0{,}386 = 22^\circ{,}1$	$-0{,}662 = -37^\circ{,}9$	$0{,}662 = 37^\circ{,}9$	$-1{,}036 = -59^\circ{,}3$	$1{,}036 = 59^\circ{,}3$
$\operatorname{tg} x = x$	$-0{,}054 = -3^\circ{,}1$	$0{,}054 = 3^\circ{,}1$	$-0{,}172 = -9^\circ{,}8$	$0{,}172 = 9^\circ{,}8$	$-0{,}517 = -29^\circ{,}6$	$0{,}517 = 29^\circ{,}6$
$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3}$	$-0{,}293 = -16^\circ{,}8$	$0{,}293 = 16^\circ{,}8$	$-0{,}519 = -29^\circ{,}7$	$0{,}519 = 29^\circ{,}7$	$-0{,}895 = -51^\circ{,}3$	$0{,}895 = 51^\circ{,}3$
$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a}$ *	$-0{,}085\,a^2$	$0{,}093\,a^2$	$-0{,}247\,a^2$	$0{,}328\,a^2$	$-0{,}607\,a^2$	$1{,}545\,a^2$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x}} = \frac{1}{a} - \frac{x}{2a^3}$	$-0{,}051\,a^2$	$0{,}052\,a^2$	$-0{,}157\,a^2$	$0{,}166\,a^2$	$-0{,}448\,a^2$	$0{,}530\,a^2$
$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}$	$-0{,}031\,a$	$0{,}031\,a$	$-0{,}099\,a$	$0{,}099\,a$	$-0{,}301\,a$	$0{,}301\,a$
$e^x = 1 + x$	$-0{,}045$	$0{,}045$	$-0{,}134$	$0{,}148$	$-0{,}375$	$0{,}502$
$\ln(1 + x) = x$	$-0{,}002$	$0{,}002$	$-0{,}020$	$0{,}020$	$-0{,}176$	$0{,}230$

* Formulu možemo napisati u obliku $\sqrt{a^2 + x} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 + x}{a}\right)$. U tom se obliku ona obično i upotrebljava u praksi. Kako je a približna vrijednost korijena (»prvo približenje«), iz te formule izlazi pravilo: da postignemo tačniju vrijednost korijena treba uzeti aritmetičku sredinu prvog približenja i kvocijenta iz radikanda i prvog približenja; pri tome možemo smatrati da je broj tačnih znamenaka dobivenog rezultata dvostruko veći od broja tačnih znamenaka prvog približenja.

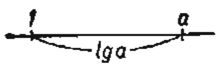
Također treba primijetiti da formula $\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}960\ a + 0{,}398\ b$, gdje je $a > b$, dobivena po principu jednolike aproksimacije (vidi str. 664), daje pogrešku koja nije veća od 4%.

nanosimo od početne tačke dužine, koje u nekom mjerilu odgovaraju dekadskim logaritmima niza brojeva (sl. 65). Ako smo nanijeli lg *a*, pripadnu tačku označimo sa *a* (sl. 66). Početnu tačku treba označiti sa 1 (lg 1 = 0). Tako je na logaritamskoj skali razmak

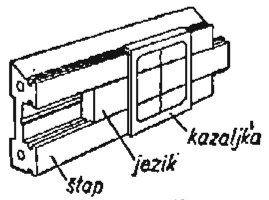


Sl. 65

od oznake 1 do oznake *a* u odabranom mjerilu jednak lg *a*. Kako je lg (10*a*) = 1 + lg *a*, to će i oznake na logaritamskoj skali za dio od 10 do 100 potpuno odgovarati oznakama za dio od 1 do 10 za 10 puta manje brojeve. Isto rasuđivanje možemo provesti



Sl. 66



Sl. 67

i za druge dijelove skale. Zbog toga dio skale dug jednu jedinicu mjerila može poslužiti za predočivanje čitave beskonačne logaritamske skale. Brojevima s istim rasporedom brojaka, tj. onih koji se razlikuju za faktor 10^n (npr. 7,15; 0,0715; 71500), odgovarat će na tom dijelu skale jedna te ista oznaka.

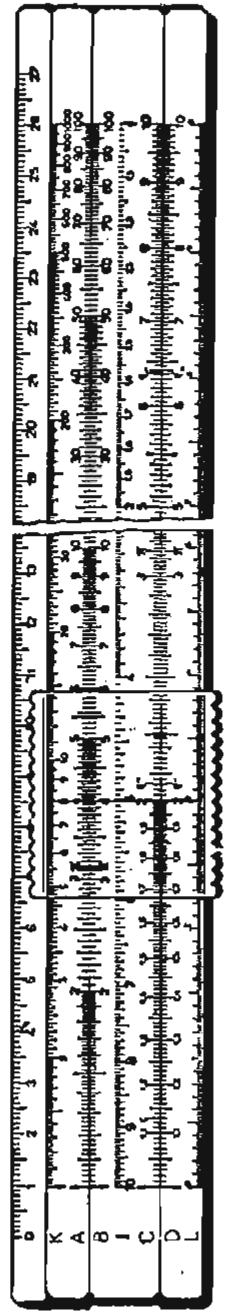
Skale računala. Logaritamsko računalo sastavljeno je od *štapa*, *jezika*, koji klizi po utorima štapa, i *kazaljke* — okvira sa staklom na kojem je urezana jedna, ili tri usporedne indeksne crte (sl. 67). Na štapu i na obje strane jezika nanesene su skale. Te skale nazivat ćemo: *A, B, C, D, I, K, L* (sl. 68); neki tipovi računala nemaju skale *I* i *K*, a skala *L* smještena je na poleđini jezika. Prije no što počnemo računati s logaritamskim računalom *treba da proučimo njegove skale.*

Skale *A, B, C, D, I, K* su logaritamske. Skalama *C, D* i *I* jedinica mjerila je 25 cm. Suprotno svim drugim skalama pozitivni smjer skale *I* izabran je ulijevo. Za skale *A* i *B* jedinica mjerila je 12,5 cm, a za skalu *K* — 8 $^1/_3$ cm; u vezi s time te skale imaju na računalu dva (*A* i *B*) odnosno tri (*K*) potpuno jednaka dijela. Razdiobe su na svim logaritamskim skalama nejednolike i na raznim

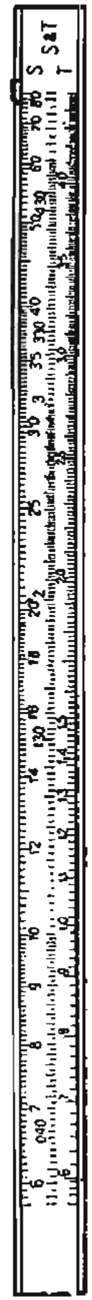
mjestima nejednako fine. Ako na računalu tražimo broj za koji nema oznake, smatramo da je između dvije susjedne oznake logaritamska skala jednolika, tj. da npr. oznaka za broj 235 leži u sredini između oznaka 234 i 236.

Skala *L* jednoliko je raspodijeljena, a razmak između dvije susjedne oznake iznosi 0,002 jedinice (za jedinicu je uzeta duljina 25 cm).

Na poleđini jezika (sl. 69) nanesene su logaritamske skale trigonometrijskih funkcija: *T* ili *Tg* (tangens), *S* ili *Sin* (sinus) i *S & T* (sinus et tangens). Na skali *T* je razmak od početne tačke do oznake $T°$ jednak lg tg $T°$, pri čemu je za jedinicu mjerila izabrano 25 cm. U početnoj tački je oznaka 45° (lg tg 45° = 0). Kako je lg tg $T° < 0$ za $T° <$ $< 45°$, pripadne oznake moraju biti raspoređene lijevo od početne tačke (sl. 70). Dio skale *T* na jeziku odgovara vrijednostima lg tg $T°$, sadržani u intervalu od —1 do 0, što odgovara kuto-

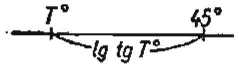


Sl. 68

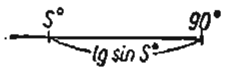


Sl. 69

vima koji leže između 5°43′ (tg 5°43′ = 0,1) i 45°. Analogno, na skali S razmak od početne tačke (s oznakom 90°) do oznake $S°$ jednak je lg sin $S°$. Za $S° < 90°$ pripadne oznake raspoređene su lijevo od početne tačke (sl. 71), jer je lg sin $S° < 0$. Dio skale $S°$



Sl. 70

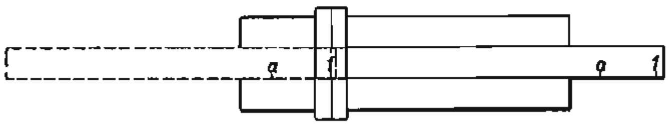


Sl. 71

na jeziku obuhvaća kutove od 5°44′ do 90° (sin 5°44′ = 0,1). Za kutove manje od 5°44′ u granicama tačnosti računala, vrijednosti sinusa i tangensa se podudaraju, pa je skala $S \& T$ zajednička za skale lg tg $T°$ i lg sin $S°$ za kutove između 0°35′ i 5°44′. Za te kutove se sinus i tangens mijenjaju od 0,01 do 0,1 (na nekim tipovima računala skala S nanesena je u mjerilu s jedinicom 12,5 cm; tada ta skala obuhvaća kutove od 0°35′ do 90°; niže navedene sheme za računanje skalom S treba u tom slučaju preraditi).

Pravila računanja. Proces računanja sastoji se u postavljanju dvaju brojeva raznih skala štapa i jezika jedan nasuprot drugom, a rezultat očitavamo na jednoj skali nasuprot nekom broju na drugoj skali. Ta operacija izvodi se pomoću kazaljke. Niže su dane sheme po kojima na logaritamskom računalu izvodimo jednostavne račune.

Opća pravila. 1) Logaritamsko računalo daje samo brojevne vrijednosti rezultata, za koji treba odrediti decimale (mjesto decimalnog zareza). Stoga je najbolje napamet izvesti grub račun i ocijeniti red veličine rezultata. 2) Pri kombiniranim računima međurezultate ne očitavamo, nego samo na njih postavljamo indeksnu crtu kazaljke. Zbog toga treba izabrati takvu shemu ra-

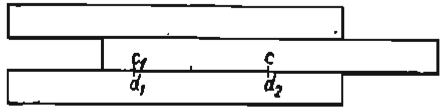


Sl. 72

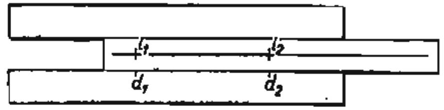
čunanja, da rezultat svake operacije ili skupine operacija očitamo na štapu, a ne na jeziku. 3) Ako rezultat računanja moramo očitati na štapu, nasuprot oznaci a na jeziku, a oznaka je izvan štapa, onda moramo prebaciti jezik: indeksnu crtu kazaljke postavimo na onu krajnju oznaku jezika koja leži unutar štapa, a zatim jezik pomaknemo tako, da na indeksnu crtu kazaljke dođe druga krajnja oznaka iste skale na jeziku (sl. 72). Tada je oznaka a unutar štapa, i rezultat možemo očitati.

Sheme. U shemama je važan samo međusobni raspored oznaka, a ne i relativni raspored raznih parova oznaka. Jezik možemo pomicati i ulijevo i udesno.

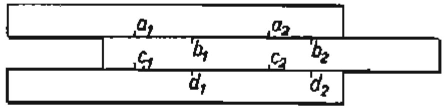
Množenje, dijeljenje, razmjeri.

I


$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}$.
Ako je $c_1 = 1$, onda je $d_1 = \frac{d_2}{c_2}$.

II


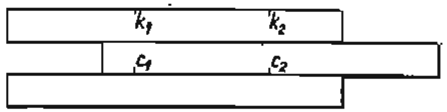
$i_1 d_1 = i_2 d_2$.
Ako je $i_1 = 1$, onda je $d_1 = i_2 d_2$.

III


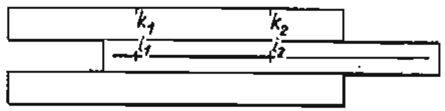
$\frac{a_1}{c_1^2} = \frac{a_2}{c_2^2} = \frac{d_1^2}{b_1} = \frac{d_2^2}{b_2}$.

IV

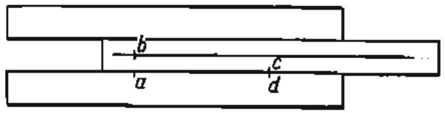

$a_1 i_1^2 = a_2 i_2^2$

V


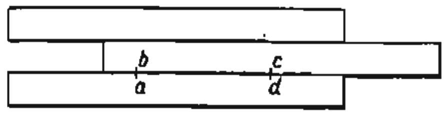
$\frac{k_1}{c_1^3} = \frac{k_2}{c_2^3}$.

VI


$k_1 i_1^3 = k_2 i_2^3$.

VII


$d = abc; \quad a = \frac{d}{bc}$.

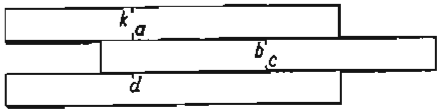
VIII


$d = \frac{ac}{b}$.

Za množenje i dijeljenje obično se koristimo shemama I i II. Sheme III do VI omogućavaju istovremeno množenje i dijeljenje s kvadratom ili kubom zadanog broja. Za kombinirane operacije primjenjujemo sheme VII i VIII. Npr. računanje po formuli: $\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot e\cdot f\cdot g}$ izvodimo u tri postupka — dva puta po shemi VIII i jedanput po shemi VII: $\frac{a\cdot b}{d}\cdot\frac{c}{e}\cdot\frac{1}{f\cdot g}$.

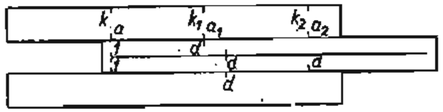
Potenciranje i korjenovanje.

IX



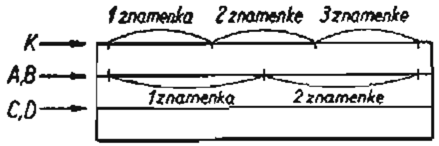
$$a = d^2;\quad b = c^2;\quad k = d^3.$$
$$d = \sqrt{a};\quad d = \sqrt[3]{k};\quad k = \sqrt{a^3}.$$

X



$$a = d^4;\quad a_1 = d^5;\quad k = d^6;$$
$$a_2 = d^6;\quad k_1 = d^{7,5};\quad k_2 = d^9.$$

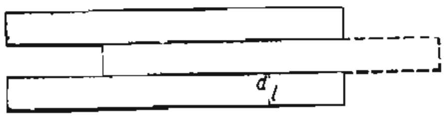
Računanje po shemi IX izvodimo samo pomoću indeksne crte. Po istoj shemi računamo kvadratni i kubni korijen. Pri tome radikand moramo odijeliti u grupe po dvije ili tri znamenke od decimalnog zareza (vidi str. 22), a u ovisnosti o broju značajnih znamenaka u prvoj grupi na lijevoj strani odredimo položaj radikanda na skali A ili K (sl. 73). Npr. pri računanju $\sqrt{3|75}$ broj 3|75 postavimo na prvu polovinu skale A; pri računanju $\sqrt[3]{0{,}000|05}$ broj 0,000|050 postavimo na drugom dijelu skale K.



Sl. 73

Logaritmiranje.

XI

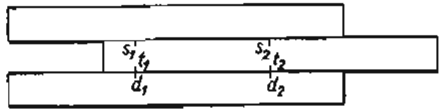


$$l = \lg d.$$

Računanja po shemi XI izvodimo samo pomoću indeksne crte; jezikom se ne služimo. Karakteristiku nalazimo po uobičajenim pravilima (vidi str. 151).

Trigonometrijsko računanje.

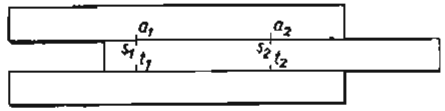
XII



a) $\frac{\operatorname{tg} t_1^\circ}{d_1} = \frac{\operatorname{tg} t_2^\circ}{d_2}$;

b) $\frac{\sin s_1^\circ}{d_1} = \frac{\sin s_2^\circ}{d_2}$*.

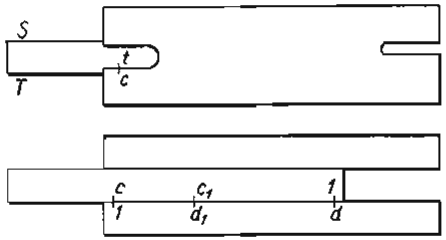
XIII



a) $\frac{a_1}{\operatorname{tg}^2 t_1^\circ} = \frac{a_2}{\operatorname{tg}^2 t_2^\circ}$;

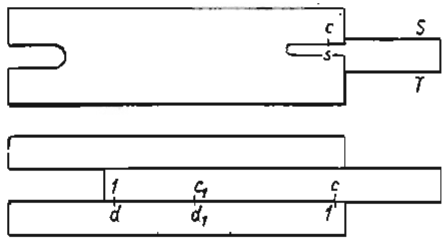
b) $\frac{a_1}{\sin^2 s_1^\circ} = \frac{a_2}{\sin^2 s_2^\circ}$*.

XIV



$$\begin{cases} c = \operatorname{tg} t^\circ;\ d = \operatorname{ctg} t^\circ; \\ \frac{c_1}{d_1} = \operatorname{tg} t^\circ. \end{cases}$$

XV



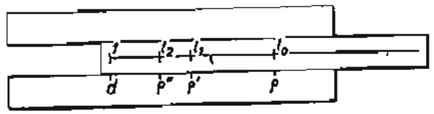
$$\begin{cases} c = \sin s^\circ;\ d = \frac{1}{\sin s^\circ}*; \\ \frac{c_1}{d_1} = \sin s^\circ *. \end{cases}$$

Računanja po shemama XII i XIII izvode se jezikom koji smo prethodno okrenuli poleđinom prema gore. Neka računanja s trigonometrijskim veličinama možemo izvoditi i neobrnutim jezikom. Pri tome oznake na skalama S i T očitavamo pomoću crtica urezanih na poleđini štapa (sheme XIV i XV).

* Ta shema ne vrijedi za logaritamska računala kojima je skala S izvedena u mjerilu 12,5 cm. Vidi str. 136.

Posebne oznake.

Preračunavanje stupanja u radijane i obrnuto:

XVI


$$\rho^\circ = 57{,}30;\quad \rho' = 3438;\quad \rho'' = 206265.$$

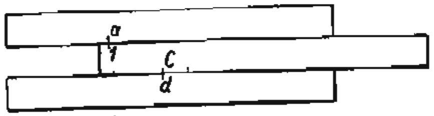
$$d^\circ = i_0 \,\text{rad}\ \left(= \frac{d^\circ}{\rho^\circ}\,\text{rad}\right);\quad d' = i_1\,\text{rad}\ \left(= \frac{d'}{\rho'}\,\text{rad}\right);$$

$$d'' = i_2\,\text{rad}\ \left(= \frac{d''}{\rho''}\,\text{rad}\right);$$

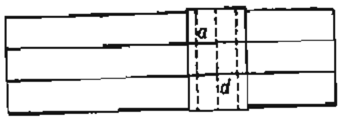
(npr. $15^\circ = 0{,}262$ rad, $15' = 0{,}00436$ rad, $15'' = 0{,}0000727$ rad)

Umjesto sheme XVI možemo također upotrijebiti shemu I.

Površina kruga (shema XVII):

XVII


$$C = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}1248;\quad a = \left(\frac{d}{C}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

XVIII


Ako su na kazaljki ucrtane tri indeksne crte, površinu kruga možemo naći i bez pomoći jezika, prema shemi XVIII.

II. ALGEBRA

A. IDENTIČKE PRETVORBE

1. OSNOVNI POJMOVI

Definicije. *Algebarskim izrazom* nazivamo jednu ili više algebarskih veličina (brojeva ili slova), povezanih međusobno znakovima algebarskih operacija (+, —, :, $\sqrt{\ }$ itd.) i znakovima poređaja tih operacija (različnim zagradama). *Identitetom* nazivamo takvu jednakost dvaju algebarskih izraza, koja ostaje tačna ako umjesto slova u nju uvrstimo ma koje veličine; ako je jednakost tačna samo pri uvrštenju nekih određenih vrijednosti, nazivamo je *jednadžbom*[+].

Identičku pretvorbu kojom dobivamo iz jednog algebarskog izraza drugi, njemu identički jednak možemo izvesti na razne načine, u ovisnosti o namjeni zbog koje pretvaramo i koju uvijek moramo imati u vidu. Npr. dovođenje izraza u sažetiji oblik prikladan za supstituciju brojevnih vrijednosti umjesto slova ili za daljnje pretvaranje: svođenje izraza na oblik prikladan za rješavanje jednadžbi, za logaritmiranje, za diferenciranje, za integriranje itd.

Klasifikacija algebarskih izraza. U svakom pojedinom slučaju u algebarskom izrazu određuju se *osnovne veličine* po kojima klasificiramo; neosnovne veličine (ostala slova) nazivamo *parametrima* izraza. Izraz pripada jednoj ili drugoj klasi, prema tome kakve se operacije vrše na njegovim osnovnim veličinama. U *cijelim racionalnim* izrazima na osnovnim veličinama izvodi se samo zbrajanje, oduzimanje i množenje (uključujući u to i potenciranje s cijelim pozitivnim eksponentom), u *razlomljene* racionalne izraze ulazi (pored spomenutih operacija) dijeljenje s osnovnom veličinom* (ili potenciranje s negativnim eksponentom), u *iracionalnim izrazima* pridružuje mu se korjenovanje osnovnih veličina+* (potenciranje s razlomljenim eksponentom), u *eksponencijalnim izrazima* potenciranje eksponentom koji sadrži osnovne veličine**, u *logaritamskim* logaritmiranje osnovnih veličina**.

+ O jednadžbama vidi str. 152 do 157.
* A također dijeljenje sa cijelim racionalnim izrazom iz osnovnih veličina.
+* A također iz cijelih ili razlomljenih racionalnih izraza iz osnovnih veličina.
** A također racionalni ili iracionalni izrazi osnovnih veličina.

U svim narednim primjerima osnovne veličine označene su posljednjim slovima abecede (x, y, z, ...), a parametri početnim (a, b, c...) ili srednjim, gdje srednja slova (m, n, p...) primaju samo cijele pozitivne vrijednosti.

2. CIJELI RACIONALNI IZRAZI

Predočenje u obliku polinoma. Svaki cio racionalan izraz možemo predočiti u obliku polinoma pomoću elementarnih pretvorbi (stezanje istovrsnih članova, zbrajanje, oduzimanje i množenje monoma i polinoma).

Primjer:

$$(-a^3 + 2a^2x - x^3)\ (4a^2 + 8ax) + (a^3x^2 + 2a^2x^3 - 4ax^4) -$$
$$- (a^5 + 4a^3x^2 - 4ax^4) = -4a^5 + 8a^4x - 4a^3x^3 - 8a^4x + 16a^3x^2 -$$
$$- 8ax^4 + a^3x^2 + 2a^2x^3 - 4ax^4 - a^5 - 4a^3x^2 + 4ax^4 =$$
$$= -5a^5 + 13a^3x^2 - 2a^2x^3 - 8ax^4.$$

Rastavljanje polinoma na faktore. U mnogo slučajeva polinom možemo izraziti u obliku faktora (monoma i polinoma) pomoću izlučivanja iz zagrada, načina grupiranja, primjene formule za skraćeno množenje i dijeljenje i korištenja svojstava jednadžbi.

Primjeri:

1) Izlučivanje:

$$8ax^2y - 6bx^3y^2 + 4cx^5 = 2x^2(4ay - 3bxy^2 + 2cx^3).$$

2) Razvrstavanje u skupine:

$$6x^2 + xy - y^2 - 10xz - 5yz = 6x^2 + 3xy - 2xy - y^2 -$$
$$- 10xz - 5yz = 3x(2x + y) - y(2x + y) - 5z(2x + y) =$$
$$= (2x + y)\ (3x - y - 5z).$$

3) Upotreba svojstava algebarskih jednadžbi*:

$P(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2$. a) Izlučimo x^2, b) Ustanovimo da su brojevi $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = -1$ korijeni jednadžbe $P(x) = 0$. Dijelimo li $P(x)$ sa $x^2(x - 1)(x + 1) = x^4 - x^2$, dobijemo kvocijent $x^2 - 2x + 5$. U tome izrazu je $p = -2$, $q = 5$, $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$: i taj se izraz ne može dalje rastaviti na realne faktore.

* Vidi str. 158.

Prema tome:

$$x^6 - 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 = x^2(x - 1)(x + 1)(x^2 - 2x + 5).$$

Formule skraćenog množenja i dijeljenja:

$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2,$

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$

$(x + y + z + \ldots + t + u)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + t^2 + u^2 +$
$+ 2xy + 2xz + \ldots + 2xu + 2yz + \ldots + 2yu + \ldots + 2tu,$

$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3,$

$(x + y)^n$ računa se po formuli Newtona (binomni teorem, vidi na str. 186),

$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2,$

$(x^n - y^n) : (x - y) = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$

$(x^n + y^n) : (x + y) = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - yx^{n-2} + y^{n-1}$ (samo za neparan n!),

$(x^n - y^n) : (x + y) = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + xy^{n-2} - y^{n-1}$ (samo za paran n!).

Određivanje najveće zajedničke mjere dvaju polinoma. Dva polinoma $P(x)$ (n-tog stupnja) i $Q(x)$ (m-tog stupnja) ($n \geqslant m$) mogu imati zajedničke faktore, u kojima se javlja x; produkt svih tih faktora nazivamo *najvećom zajedničkom mjerom* tih polinoma. Ako $P(x)$ i $Q(k)$ nemaju takve zajedničke faktore, nazivamo ih *relativno prostim* (njihova najveća zajednička mjera = const).

Najveću zajedničku mjeru polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ možemo, ne rastavljajući ga na faktore, naći na ovaj način (*Euklidov algoritam*):

1) $P(x)$ dijelimo sa $Q(k)$: kvocijent je $T_1(x)$, ostatak $R_1(x)$:

$$P(x) = Q(x) \cdot T_1(x) + R_1(x).$$

2) $Q(x)$ dijelimo sa $R_1(x)$: kvocijent je $T_2(x)$, ostatak $R_2(x)$:

$$Q(x) = R_1(x) \cdot T_2(x) + R_2(x) \quad \text{itd.}$$

Posljednji ostatak $R_k(x)$ različit od nule najveća je zajednička mjera polinoma $P(x)$ i $Q(x)$.

Najveću zajedničku mjeru tražimo pri rješavanju jednadžbi (odvajanje višestrukih korijena — vidi str. 159, upotreba Sturmove metode — str. 160, pri integriranju po metodi Ostrogradskog — str. 392 i 393, i u drugim problemima).

3. RAZLOMLJENI RACIONALNI IZRAZI

Svođenje na jednostavniji oblik. Svaki razlomljeni racionalni izraz možemo dovesti u oblik kvocijenta dvaju polinoma bez zajedničkih faktora, pomoću elementarnih pretvorbi (zbrajanja, odbijanja, množenja i dijeljenja polinoma i razlomaka i skraćivanja razlomaka).

Primjer: Pretvori u jednostavniji oblik:

$$\frac{3x + \dfrac{2x+y}{z}}{x\left(x^2 + \dfrac{1}{z^2}\right)} - y^2 + \frac{x+z}{z} =$$

$$= \frac{(3xz + 2x + y)\,z^2}{(x^3z^2 + x)\,z} + \frac{-y^2z + x + z}{z} =$$

$$= \frac{3xz^3 + 2xz^2 + yz^2 + (x^3z^2 + x)\,(-y^2z + x + z)}{x^3z^3 + xz} =$$

$$= \frac{3xz^3 + 2xz^2 + yz^2 - x^3y^2z^3 - xy^2z + x^4z^2 + x^2 + x^3z^3 + xz}{x^3z^3 + xz}.$$

Odvajanja cijelog racionalnog dijela. Kvocijent dvaju polinoma sa zajedničkom osnovnom veličinom x nazivamo algebarskim *pravim razlomkom* tada, kada je eksponent m najvišeg člana* brojnika manji od eksponenta n najvišeg člana nazivnika; *nepravim* ako je $m \geqslant n$. Svaki nepravi razlomak možemo pretvoriti u sumu polinoma i pravog razlomka odvajanjem *cijelog racionalnog dijela* (dijelimo polinom s polinomom).

Primjer: Odvoji cijeli racionalni dio u:

$$R(x) = \frac{3x^4 - 10ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 10a^4}{x^2 - 2ax + 3a^2}$$

$$\begin{array}{rrrrrl}
(3x^4 & - 10ax^3 & + 22a^2x^2 & - 24a^3x & + 10a^4) & : (x^2 - 2ax + 3a^2) = \\
-\;3x^4 & \mp 6ax^3 & \pm 9a^2x^2 & & & = 3x^2 - 4ax + 5a^2 \\ \hline
 & - 4ax^3 & + 13a^2x^2 & - 24a^3x & & \\
 & \mp 4ax^3 & \pm 8a^2x^2 & \mp 12a^3x & & \\ \hline
 & & 5a^2x^2 & - 12a^3x & + 10a^4 & \\
 & & -\;5a^2x^2 & \mp 10a^3x & \pm 15a^4 & \\ \hline
 & & & - 2a^3x & - 5a^4 &
\end{array}$$

$$R(x) = 3x^2 - 4ax + 5a^2 + \frac{-2a^3x - 5a^4}{x^2 - 2ax + 3a^2}.$$

---

* Tj. člana koji sadrži x sa najvišom potencijom.

Rastavljanje na parcijalne razlomke. Svaki pravi *neskrativi** razlomak

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n},$$

gdje su koeficijenti $b_0, b_1, \ldots, b_m, a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi (koeficijent najvišeg člana nazivnika učinimo jednakim 1, podijelivši s njime brojnik i nazivnik) možemo jednoznačno rastaviti u sumu parcijalnih razlomaka oblika $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$ ili $\dfrac{Dx+E}{(x^2+px+q)^l}$ gdje je $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q < 0$. Pri tome su moguća četiri slučaja**.

1) Nazivnik $P(x)$ je takav da jednadžba $P(x) = 0$ ima samo realne jednostruke*** korijene $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Rastavljanje vršimo po formuli:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + \ldots + b_m}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)} =$$

$$= \frac{A}{x-\alpha_1} + \frac{B}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{C}{x-\alpha_n},$$

gdje su koeficijenti $A, B, \ldots, C$ određeni formulama

$$A = \frac{Q(\alpha_1)}{P'(\alpha_1)}, \quad B = \frac{Q(\alpha_2)}{P'(\alpha_2)}, \quad \ldots, \quad C = \frac{Q(\alpha_n)}{P'(\alpha_n)}$$

(u nazivnicima su vrijednosti derivacije $\dfrac{dP}{dx}$ za $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, ...).

Primjer: $\dfrac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+1}$;

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = +1, \quad \alpha_3 = -1; \quad Q(x) = 6x^2 - x + 1;$$

$$P'(x) = 3x^2 - 1; \quad A = \frac{Q(0)}{P'(0)} = -1, \quad B = \frac{Q(1)}{P'(+1)} = 3$$

$$\text{i } C = \frac{Q(-1)}{P'(-1)} = 4; \quad \frac{Q(x)}{P(x)} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1}.$$

---

* Tj. takav kojemu brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih faktora koji sadrže x.

** Ako se ne ograničavamo samo na realne brojeve, onda se slučaj 3) ne razlikuje od slučaja 1), a slučaj 4) od slučaja 2). S toga gledišta svaki razlomak $R(x)$ možemo rastaviti u sumu samo parcijalnih razlomaka oblika $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$, gdje su A i α kompleksni brojevi. Tim se koristimo pri rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi (vidi str. 535).

*** O višestrukosti korijena vidi na str. 158.

Drugi način određivanja $A, B, \ldots, C$ je metoda neodređenih koeficijenata (primjenjuje se u sva četiri slučaja).

Primjer:
$$\frac{6x^2-x+1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=$$
$$=\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x^2-1)}.$$

Izjednačenjem koeficijenata pri jednakim potencijama x brojnika lijeve i desne strane jednadžbe dobivamo sistem jednadžbi: $6=A+B+C,\ -1=B-C,\ 1=-A$; rješenjem dobivamo da A, B i C imaju iste vrijednosti kao gore.

2) Korijeni nazivnika su realni, ali među njima ima višestrukih. Rastavljanje se provodi po formuli:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_l)^{k_l}}=$$
$$=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-\alpha_2}+\frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2}+$$
$$+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}}+\ldots+\frac{L_{k_l}}{(x-\alpha_l)^{k_l}}.$$

Primjer:
$$\frac{x+1}{x(x-1)^3}=\frac{A_1}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3};$$

koeficijente A, B_1, B_2 i B_3 dobivamo metodom neodređenih koeficijenata.

3) Među korijenima nazivnika ima jednostrukih kompleksnih korijena. Rastavljanje se provodi po formuli:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\ldots}=$$
$$=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{Dx+E}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{Fx+G}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots$$

Primjer:
$$\frac{3x^2-2}{(x^2+x+1)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Koeficijente A, D, E računamo metodom neodređenih koeficijenata.

4) Među korijenima nazivnika ima višestrukih kompleksnih korijena. Rastavljanje se provodi po formuli:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots}=$$
$$=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{D_1x+E_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{D_2x+E_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+$$
$$+\ldots+\frac{D_{l_1}x+E_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\frac{F_1x+G_1}{x^2+p_2x+q_2}+$$
$$+\ldots+\frac{F_{l_2}x+G_{l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}}+\ldots$$

Primjer:
$$\frac{5x^2-4x+16}{(x-3)(x^2-x+1)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{D_1x+E_1}{x^2-x+1}+\frac{D_2x+E_2}{(x^2-x+1)^2}.$$

A, D_1, E_1, D_2, E_2 izračunavamo metodom neodređenih koeficijenata.

Pretvaranje razmjera. Iz razmjera $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ izlazi jednadžba $ad=bc$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, te također *izvedeni razmjeri:*

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},\quad \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c},\quad \frac{a\pm c}{c}=\frac{b\pm d}{d},\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Iz jednakosti nekoliko omjera $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ izlazi:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}.$$

4. IRACIONALNI IZRAZI; PRETVARANJE POTENCIJA I KORIJENA

Svođenje na normalni oblik. Svaki iracionalni izraz možemo pretvoriti u tzv. normalni oblik pomoću; 1) skraćivanja eksponenta 2) izlučivanja iz korijena, 3) uklanjanja iracionalnosti nazivnika.

Skraćivanje eksponenta provodimo s najvećom zajedničkom mjerom eksponenta korijena i eksponenata svih faktora pod korijenom (izraz pod korijenom prethodno rastavimo na faktore).

Primjer:

$$\sqrt[6]{16(x^{12}-2x^{11}+x^{10})}=\sqrt[6]{4^2\cdot x^{5\cdot 2}(x-1)^2}=\sqrt[3]{4x^5(x-1)}.$$

Pred korijen možemo staviti takve faktore X kojima je eksponent potencije m veći ili jednak eksponentu korijena n. Tada m dijelimo sa n, i X stavimo ispred korijena s eksponentom potencije kvocijenta, a pod korijenom ostaje X s eksponentom ostatka tog dijeljenja.

Primjer: $\sqrt[3]{32x^4y^6z^{10}u^2}=2xy^2z^3\sqrt[3]{4xzu^2}.$

Uklanjanje iracionalnosti nazivnika provodimo na razne načine.

Primjeri:

1) $\sqrt{\dfrac{x}{2y}}=\sqrt{\dfrac{2xy}{4y^2}}=\dfrac{\sqrt{2xy}}{2y};$

2) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{4yz^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{2xy^2z}{8y^3z^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{2xy^2z}}{2yz};$

3) $\dfrac{1}{x+\sqrt{y}}=\dfrac{x-\sqrt{y}}{(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})}=\dfrac{x-\sqrt{y}}{x^2-y};$

4) $\dfrac{1}{x+\sqrt[3]{y}}=\dfrac{x^2-x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}{(x+\sqrt[3]{y})(x^2-x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2})}=\dfrac{x^2-x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}{x^3+y}.$

Primjer: Svedimo na normalni oblik

$$\sqrt[4]{\frac{81x^6}{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^4}}=\sqrt{\frac{9x^3}{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^2}}=\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{3x\sqrt{x}(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{2-x}=\frac{3x\sqrt{2x}+3x^2}{2-x}.$$

Pretvaranje potencija i korijena

$$x^m x^n=x^{m+n};\quad \frac{x^m}{x^n}=x^{m-n};\quad (xy)^n=x^n y^n;\quad \left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n};\quad (x^m)^n=x^{mn}. \qquad (*)$$

$$\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y};\qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}};$$

$$\sqrt[n]{x^m}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^m;\qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[nm]{x}.$$

Poopćenje pojma eksponenta: Dogovorno uzimamo:

$$x^0=1,\ x^{-n}=\frac{1}{x^n},\ x^{1/n}=\sqrt[n]{x},\ x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m},\ x^{-m/n}=\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}.$$

U odnosu na nulte, negativne i razlomljene eksponente vrijede iste formule za pretvaranje (*) kao i za cijele pozitivne eksponente; to često pojednostavnjuje računanja.

Primjer:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[12]{x^7}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[12]{x^5}\right)=$$

$$=\left(x^{1/2}+x^{2/3}+x^{3/4}+x^{7/12}\right)\left(x^{1/2}-x^{1/3}+x^{1/4}-x^{5/12}\right)=$$

$$=x+x^{7/6}+x^{5/4}+x^{13/12}-x^{5/6}-x-x^{13/12}-x^{11/12}+$$

$$+x^{3/4}+x^{11/12}+x+x^{5/6}-x^{11/12}-x^{13/12}-x^{7/6}-x=$$

$$=x^{5/4}-x^{13/12}-x^{11/12}+x^{3/4}=\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[12]{x^{13}}-\sqrt[12]{x^{11}}+\sqrt[4]{x^3}.$$

5. EKSPONENCIJALNI I LOGARITAMSKI IZRAZI

Pretvaranje eksponencijalnih izraza oblika a^x provodi se po formulama analognim (*):

$$a^x a^y=a^{x+y};\qquad \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y};\qquad (a^x)^y=a^{xy};\qquad \sqrt[y]{a^x}=a^{x/y},$$

pri tom x i y mogu imati svaku brojevnu vrijednost. Eksponencijalne izraze, u kojima su različite baze a^x, b^y, c^z, …, možemo pretvarati u izraze sa zajedničkom bazom, ako upotrijebimo identitet $b=a^{\log_a b}$.

Primjer: Izrazi $(a^x b^y):c^z$ u obliku potencije s bazom a.

$$\frac{a^x b^y}{c^z}=\frac{a^x a^{y\log_a b}}{a^{z\log_a c}}=a^{x+y\log_a b-z\log_a c}.$$

Na sličan oblik možemo svesti svaki izraz u kojemu nema ni sume ni razlike potencija.

Izraz e^x, gdje je e baza prirodnih logaritama (vidi niže), ponekad se označava $\exp(x)$.

Logaritmi. Logaritmom A broja N za bazu a (oznaka: $A=\log_a N$) nazivamo eksponent, s kojim treba potencirati bazu a, da dobijemo N. Prema tome iz jednadžbe $a^A=N$ izlazi $\log_a N=A$, i obrnuto, iz druge jednadžbe izlazi prva.

Svaki *pozitivan* broj ima za svaku pozitivnu bazu (osim za jedinicu) svoj logaritam; logaritmi različnih brojeva za istu bazu a tvore *sistem logaritama* za tu bazu. Ako znamo logaritme brojeva za bazu a, možemo odrediti logaritme tih brojeva za drugu bazu b po formuli:

$$\log_b N = M \cdot \log_a N, \text{ gdje je } M = \frac{1}{\log_a b} \text{ (*modul pretvorbe**).}$$

Osnovna svojstva logaritama pri istoj bazi a ($a \neq 1$):

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a 0 = \begin{cases} -\infty \text{ pri } a > 1, \\ +\infty \text{ pri } a < 1; \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \log(N_1 \cdot N_2) = \log N_1 + \log N_2; \ \log \frac{N_1}{N_2} = \log N_1 - \log N_2; \\ \log(N^n) = n \log N; \ \log \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log N. \end{aligned}\right\} (**)$$

Logaritmiranjem neke veličine nazivamo traženje njenog logaritma**; traženje veličine po njenom logaritmu nazivamo *antilogaritmiranjem.*

Sistemi logaritama koji su u upotrebi: dekadski ili *Briggsovi* sa bazom 10, koje obično upotrebljavamo pri računanju (oznaka: $\log_{10} N = \lg N$), i *prirodni* ili *Neperovi* (*hiperbolni*) sa bazom $e = 2{,}71828\ldots$*** (oznaka $\log_e N = \ln N$).

Modul pretvorbe prirodnih logaritama u dekadske:

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}43429; \quad \log N = 0{,}43429 \ln N;$$

modul pretvorbe dekadskih logaritama u prirodne:

$$M_1 = \frac{1}{M} = \ln 10 = \frac{1}{\lg e} \approx 2{,}30259; \quad \ln N = 2{,}30259 \lg N.$$

Svojstva dekadskih logaritama. Dekadske logaritme pišemo u obliku decimalnog razlomka s tačnošću do određene decimale; njegov cijeli dio nazivamo *karakteristikom* logaritma, a razlomljeni dio *mantisom*, npr. $\lg 324 = 2{,}5105$; karakteristika je 2, mantisa 0,5105. Brojevi koje dobivamo iz zadanog broja množenjem ili dijeljenjem sa 10^n (npr. 3240; 324000; 3,24; 0,0324 iz 324) imaju dekadske logaritme s jednakom mantisom (0,5105). Mantisu tražimo u *logaritamskim tablicama**, pri čemu ne obraćamo pažnju na decimalni zarez niti na nule s lijeve i s desne strane broja. Karakteristiku određujemo po pravilu: 1) ako je broj > 1, karakteristika je za jedinicu manja od broja njegovih znamenaka ispred decimalnog zareza, 2) ako je broj < 1, karakteristika je negativna i po apsolutnoj vrijednosti jednaka broju nula na lijevoj strani, uključujući i nulu cijelog broja. *Npr.*: $\lg 3240 = 3{,}5105$; $\lg 324000 = 5{,}5105$; $\lg 3{,}24 = 0{,}5105$; $\lg 0{,}0324 = \bar{2}{,}5105$. Znak »—« postavljamo *iznad* karakteristike, tako da mantisa ostane pozitivna; takav »nepotpun« — *umjetan* oblik negativnog logaritma možemo pretvoriti u »potpun« po ovim pravilima: 1) apsolutna vrijednost karakteristike nepotpunog negativnog logaritma za jedinicu je veća od apsolutne veličine karakteristike potpunog negativnog logaritma; 2) znamenke mantise dopunjavaju se do 9, a njena posljednja značajna znamenka (koja nije nula) do 10; nule na kraju ostaju na svojim mjestima.

Primjeri: $\bar{2}{,}5105 = -1{,}4895$; $-3{,}2780 = \bar{4}{,}722$.

Često (naročito u tablicama) nepotpunom negativnom logaritmu dodajemo brojku 10, da bismo izbjegli postavljanje predznaka iznad brojke. Npr. umjesto $\bar{1}{,}324$ pišemo 9,324.

Pretvaranje logaritamskih izraza (logaritmiranje) izvodimo po formulama (**)**.

Primjer: Logaritmirajmo izraz $\frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}$.

$$\log \frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3} = \log(3x^2\sqrt[3]{y}) - \log(2zu^3) =$$

$$= \log 3 + 2\log x + \frac{1}{3}\log y - \log 2 - \log z - 3\log u.$$

Često upotrebljavamo obrnute pretvorbe, tj. prikazujemo izraz koji sadrži nekoliko logaritama različitih veličina u obliku logaritma samo jednog izraza.

* Podesno je upotrebljavati ovu formulu koju lako pamtimo: $\log_a N = \frac{\log N}{\log a}$, gdje su na desnoj strani logaritmi za bilo koju (jednu te istu) bazu.

** Logaritmiranjem nazivamo također pretvaranje logaritamskih izraza po formulama (**) — izražavanje logaritma složenog izraza logaritmima veličina koje u njega ulaze (vidi str. 151).

*** Definiciju broja e vidi na str. 317.

* Tablice dekadskih logaritama (tačnije — tablice mantisa) vidi na str. 51 i 52; tablice antilogaritama (tj. brojeva po zadanim mantisama) vidi na str. 53 i 54; tablice prirodnih logaritama vidi na str. 65 do 67.

** Za logaritmiranje izraza koji su suma ili razlika treba te izraze prethodno pretvoriti u izraze pogodne za logaritmiranje (tj. produkte i kvocijente).

Primjer:

$$\log 3 + 2\log x + \frac{1}{3}\log y - \log 2 - \log z - 3\log u =$$
$$= \log \frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}.$$

O logaritamskom računalu vidi str. 132 do 140.

B. JEDNADŽBE

6. PRETVARANJE ALGEBARSKIH JEDNADŽBI U NORMALNI OBLIK

Definicija. *Jednadžbom* s jednom nepoznanicom

$$F(x) = f(x)$$

nazivamo izjednačenje dviju funkcija jedne iste promjenljive veličine, tačne samo pri nekim određenim vrijednostima te promjenljive*. Promjenljivu (varijablu) u jednadžbi nazivamo *nepoznanicom*, a vrijednosti ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) koje jednadžbu zadovoljavaju *korijenima* ili *rješenjima* jednadžbe. Dvije jednadžbe nazivamo *ekvivalentnim* ako one imadu iste korijene.

Jednadžbu nazivamo *algebarskom* ako je svaka njena funkcija $F(x)$ i $f(x)$ algebarska (racionalna ili iracionalna). Jedna od tih funkcija može biti konstanta.

Iz svake algebarske jednadžbe možemo algebarskim pretvorbama dobiti jednadžbu u *normalnom obliku:*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0^{**}$$

(a_0 možemo učiniti jednakim 1) koja ima iste korijene kao zadana jednadžba (i, možda, neki korijen više — vidi dalje).

Eksponent n nazivamo *stupnjem jednadžbe.*

Primjer: Pretvorimo u normalni oblik jednadžbu:

$$\frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 6}}{3(x-2)} = 1 + \frac{x-3}{x}.$$

Postupne pretvorbe daju:

$$x(x - 1 + \sqrt{x^2 - 6}) = 3x(x-2) + 3(x-2)(x-3);$$
$$x^2 - x + x\sqrt{x^2 - 6} = 3x^2 - 6x + 3x^2 - 15x + 18;$$

* Ako je jednakost tačna za bilo koje vrijednosti promjenljive x, nazivamo je *identitetom.*

** Ovdje i dalje pretpostavljamo da su koeficijenti $a_0, a_1, \ldots$ realni, a gdje to nisu, posebno ćemo na to upozoriti.

$$x\sqrt{x^2 - 6} = 5x^2 - 20x + 18;$$
$$x^2(x^2 - 6) = 25x^4 - 200x^3 + 580x^2 - 720x + 324;$$
$$24x^4 - 200x^3 + 586x^2 - 720x + 324 = 0 \text{ (normalni oblik).}$$

Prema tome, dana je jednadžba 4. stupnja.

Sistem n algebarskih jednadžbi je skup n jednakosti ispravnih samo za određene skupine ($x_1, y_1, \ldots, z_1; x_2, y_2, \ldots z_2; \ldots$) vrijednosti nepoznanica ($x, y, \ldots, z$); svaku takvu skupinu nazivamo *rješenjem* tog sistema. Svaki sistem algebarskih jednadžbi može se pretvoriti u *normalni oblik:*

$$P_1(x, y, \ldots) = 0,$$
$$P_2(x, y, \ldots) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n(x, y, \ldots) = 0,$$

gdje je P_1 polinom u $x, y, z, \ldots$

Primjer: Pretvorimo u normalni oblik* sistem:

$$1)\ \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{z}, \quad 2)\ \frac{x-1}{y-1} = \sqrt{z}, \quad 3)\ xy = z.$$

Normalni oblik: 1) $x^2z^2 - y = 0$,

2) $x^2 - 2x + 1 - y^2z + 2yz - z = 0$, 3) $xy - z = 0$.

Prekobrojni korijeni. Pri pretvaranju algebarskih jednadžbi u normalni oblik $P(x) = 0$ može se dogoditi da $P(x) = 0$ ima rješenje koje ne zadovoljava prvotnu jednadžbu. Pri tom su moguća dva slučaja:

1. Iščezavanje nazivnika. Ako jednadžba ima oblik razlomka

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \tag{1}$$

gdje su P i Q polinomi, tada obje strane jednadžbe pomnožimo sa nazivnikom, pa dobijemo jednadžbu u normalnom obliku:

$$P(x) = 0, \tag{2}$$

koja ima iste korijene kao jednadžba (1), osim u slučaju kada je neki od korijena $x = \alpha$ jednadžbe $P(x)$ također korijen jednadžbe $Q(x) = 0$. Tada razlomak treba prethodno skratiti sa $x - \alpha$ [ili sa $(x-\alpha)^k$, ako je to moguće]; inače bi jednadžba $P(x) = 0$ sadržavala korijen $x = \alpha$ koji nije korijen jednadžbe (1) ili je njen korijen, ali manje višestrukosti*.

* O višestrukosti korijena vidi na str. 159.

Primjeri:

1) $$\frac{x^3}{x-1} = \frac{1}{x-1} \quad \text{ili} \quad \frac{x^3-1}{x-1} = 0; \qquad (1')$$

ako ne skratimo sa $x-1$ i ne odbacimo nazivnik, tada korijen $x_1 = 1$ jednadžbe $x^3-1=0$ ne zadovoljava jednadžbu (1'), jer se njen nazivnik poništava.

2) $$\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1} = 0; \qquad (2')$$

ako ne skratimo sa $(x-1)^2$ i ne odbacimo nazivnik dobivamo jednadžbu $(x-1)^3 = 0$ s trostrukim korijenom $x_1 = 1$, dok jednadžba (2') ima jednostruki korijen $x = 1$.

II. Iracionalne jednadžbe. Ako zadana jednadžba sadrži nepoznanice pod korijenom, onda svođenjem te jednadžbe na normalni oblik dobivamo drugu jednadžbu koja ponekad može imati korijene koji ne zadovoljavaju prvotnu jednadžbu. Zato nakon rješavanja druge jednadžbe treba provjeriti korijene uvrštavanjem u prvotnu jednadžbu.

Primjer:

$$\sqrt{x+7}+1 = 2x \quad \text{ili} \quad \sqrt{x+7} = 2x-1, \qquad (1'')$$

$$x+7 = (2x-1)^2 \quad \text{ili} \quad 4x^2-5x-6 = 0. \qquad (2'')$$

Korijeni jednadžbe (2'') jesu: $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{4}$; x_1 zadovoljava jednadžbu (1''), a x_2 ne zadovoljava [u jednadžbi (1'') radikal (korijen) se uzima u aritmetičkom smislu].

7. JEDNADŽBE PRVOG, DRUGOG, TREĆEG I ČETVRTOG STUPNJA

Jednadžba prvog stupnja (*linearna*). Normalni oblik:

$$ax + b = 0.$$

Broj rješenja: uvijek postoji jedno realno rješenje $x_1 = -\frac{b}{a}$.

Jednadžba drugog stupnja (*kvadratna*). Normalni oblik:

$ax^2+bx+c=0$ ili (poslije dijeljenja sa a): $x^2+px+q=0$.

Broj realnih rješenja ovisi o predznaku ***diskriminante D***, koja glasi $4ac-b^2$ ili $q-\frac{p^2}{4}$:

ako je $D < 0$, ima 2 rješenja (2 realna korijena),
ako je $D = 0$, ima 1 rješenje (2 podudarna korijena),
ako je $D > 0$, ima 0 rješenje (2 kompleksna korijena).

Rješenje kvadratnih jednadžbi. 1. *način* — rastavljanje (ako je moguće) lijevog dijela na faktore:

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) \text{ ili } x^2+px+q = (x-\alpha)(x-\beta);$$

tada su korijeni jednadžbe: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$.

Primjer: $x^2+x-6=0$, $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$;
$x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

2. *način* — primjenom formule:

a) za oblik $ax^2+bx+c=0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{ili} \quad x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

(posljednja formula je prikladna za paran b):

b) za oblik $x^2+px+q=0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Svojstva korijena kvadratne jednadžbe:

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q.$$

Jednadžba trećeg stupnja (*kubna*). Normalni oblik:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

ili $\left(\text{dijelimo sa } a \text{ i umjesto } x \text{ uvodimo novu varijablu } y = x+\frac{b}{3a}\right)$:

$$y^3+3py+2q=0, \qquad (*)$$

gdje je $$2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \quad \text{i} \quad 3p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}.$$

Broj realnih rješenja jednadžbe (*) ovisi o predznaku *diskriminante* $D = q^2+p^3$;

ako je $D > 0$, jednadžba ima 1 rješenje (jedno realno i dva kompleksna),
ako je $D < 0$, jednadžba ima 3 rješenja (tri realna različita korijena),
ako je $D = 0$, jednadžba ima 1 rješenje za $p = q = 0$ (tri podudarna korijena koji su nule), i 2 rješenja za $p^3 = -q^2 \neq 0$ (od 3 realna dva se podudaraju).

Rješenje kubnih jednadžbi. 1. *način* — rastavljanje (ako je moguće) lijevog dijela na faktore:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma);$$

korijeni jednadžbe su: $x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma$.

Primjer: $x^3 + x^2 - 6x = 0$;
$x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2); \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 2.$

2. *način* — primjena *Cardanove formule* [za oblik (*)]:

$y_1 = u + v, \quad y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \quad y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v,$ gdje je

$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$, a ε_1 i ε_2 su korijeni jednadžbe $x^2 + x + 1 = 0$, tj. $\varepsilon_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

U slučaju $D = q^2 + p^3 < 0$ tri su realna korijena jednadžbe izražena kompleksnim veličinama, a prikladnije je upotrijebiti *treći* način.

Primjer: $y^3 + 6y + 2 = 0$. Tu je $p = 2, \; q = 1, \; q^2 + p^3 = 9$;

$$u = \sqrt[3]{-1+3} = \sqrt[3]{2} = 1{,}2599, \quad v = \sqrt[3]{-1-3} = \sqrt[3]{-4} = -1{,}5874.$$

Realni korijeni: $y_1 = u + v = -0{,}3275$; kompleksni korijeni:

$$y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u+v) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) = 0{,}1638 \pm i \cdot 2{,}4659.$$

3. *način* — s *pomoćnim veličinama*, računanim pomoću tablica. U jednadžbi (*) označimo $r = \pm\sqrt{|p|}$; predznak od r mora se podudarati s predznakom od q. Tada pomoćnu veličinu φ i pomoću nje korijene y_1, y_2 i y_3 određujemo u ovisnosti o predznacima p i $D = q^2 + p^3$ iz ove tablice:

$p < 0$		$p > 0$
$q^2 + p^3 \leqslant 0$	$q^2 + p^3 > 0$	
$\cos\varphi = \frac{q}{r^3}$	$\operatorname{ch}\varphi = \frac{q}{r^3}$	$\operatorname{sh}\varphi = \frac{q}{r^3}$
$y_1 = -2r\cos\varphi/3$ $y_2 = +2r\cos(60° - \varphi/3)$ $y_3 = +2r\cos(60° + \varphi/3)$	$y_1 = -2r\operatorname{ch}\varphi/3$ $y_2 = r\operatorname{ch}\varphi/3 + i\sqrt{3}\,r\operatorname{sh}\varphi/3$ $y_3 = r\operatorname{ch}\varphi/3 - i\sqrt{3}\,r\operatorname{sh}\varphi/3$	$y_1 = -2r\operatorname{sh}\varphi/3$ $y_2 = r\operatorname{sh}\varphi/3 + i\sqrt{3}\,r\operatorname{ch}\varphi/3$ $y_3 = r\operatorname{sh}\varphi/3 - i\sqrt{3}\,r\operatorname{ch}\varphi/3$

Primjer: $y^3 - 9y + 4 = 0$.

$p = -3, \quad q = 2; \quad q^2 + p^3 < 0;$
$r = \sqrt{3} = 1{,}7321, \quad \cos\varphi = 2 : 3\sqrt{3} = 0{,}3849; \quad \varphi = 67°22',$
$y_1 = -2\sqrt{3}\cos 22°27' = -3{,}4641 \cdot 0{,}9242 = -3{,}201;$
$y_2 = 2\sqrt{3}\cos(60° - 22°27') = 3{,}4641 \cdot 0{,}7929 = 2{,}747;$
$y_3 = 2\sqrt{3}\cos(60° + 22°27') = 3{,}4641 \cdot 0{,}1314 = 0{,}455.$

Kontrola (vidi svojstva korijena):

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0{,}001 \text{ umjesto } 0.$$

4. *način* — približno rješenje jednadžbe — vidi dalje, str. 163 do 165.

Svojstva korijena kubne jednadžbe:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}, \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Jednadžba četvrtog stupnja. Normalni oblik:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Broj realnih rješenja (različitih): od 0 do 4.

Ako je $b = d = 0$, tada korijene (*bikvadratne*) jednadžbe $ax^4 + cx^2 + e = 0$ određujemo po formulama:

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{y}, \qquad y = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ae}}{2a}.$$

Ako je $a = e$ i $b = d$, tada korijene (recipročne) jednadžbe:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

određujemo po formulama:

$$x_{1,2,3,4} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}, \qquad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 8a^2}}{2a}.$$

Rješenje jednadžbe četvrtog stupnja u općem obliku. 1. *način* — rastavljanje (ako je moguće) lijeve strane na faktore:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta);$$

korijeni jednadžbe: $x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma, \quad x_4 = \delta$;

Primjer: $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$;

$$x(x^2 - 1)(x - 2) = x(x-1)(x+1)(x-2);$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 2.$$

2. *način.* Korijeni jednadžbe $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ se podudaraju s korijenima dviju kvadratnih jednadžbi:

$$x^2 + (b + A)\frac{x}{2} + \left(y + \frac{by - d}{A}\right) = 0,$$

gdje je $A = \pm\sqrt{8y + b^2 - 4c}$, a y bilo koji realan korijen kubne jednadžbe $\quad 8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)\,y + e\,(4c - b^2) - d^2 = 0.$

3. *način* — približno rješenje jednadžbe — vidi str. 163 do 165.

Jednadžbe petog stupnja i viših stupanja u općem slučaju ne možemo riješiti pomoću korijena.

8. JEDNADŽBE *n*-tog STUPNJA

Opća svojstva algebarskih jednadžbi. Lijevu stranu jednadžbe:

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a^n = 0^* \qquad (1)$$

označimo sa $P(x)$; korijen jednadžbe $P(x) = 0$ nazivamo *korijenom polinoma* $P(x)$. Ako je α korijen jednadžbe $P(x) = 0$, onda je $P(x)$ djeljiv sa $(x - \alpha)$ bez ostatka; u općem je slučaju ostatak pri dijeljenju $P(x)$ sa $(x - \alpha)$ jednak $P(\alpha)$. Ako je $P(x)$ djeljiv sa $(x - \alpha)^k$, ali nije djeljiv sa $(x - \alpha)^{k+1}$, onda α nazivamo *k-strukim* korijenom jednadžbe $P(x) = 0$; u tom je slučaju α zajednički korijen polinoma $P(x)$ i njegovih derivacija do uključivo $(k - 1)$-te. Jednostruki korijen jednadžbe nazivamo također *prostim* korijenom. *Osnovni teorem algebre:* svaka jednadžba *n*-tog stupnja, kojoj su koeficijenti realni ili kompleksni brojevi, ima *n* realnih ili kompleksnih korijena, ako *k*-struki korijen računamo kao *k* korijena. Ako su korijeni od $P(x)$ jednaki $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ s višestrukošću $k, l, m \ldots$, tada je:

$$P(x) = (x - \alpha)^k\,(x - \beta)^l\,(x - \gamma)^m \ldots \qquad (*)$$

Možemo pojednostavniti traženje korijena jednadžbe $P(x) = 0$ tako da tražimo korijene jednadžbe koja ima iste korijene kao dana jednadžba, ali sve jednostruke. To postižemo tako da rastavimo polinome $P(x)$ na dva faktora:

$$P(x) = Q(x)\,T(x),$$

gdje je $Q(x) = (x - \alpha)^{k-1}\,(x - \beta)^{l-1} \ldots,\ T(x) = (x - \alpha)\,(x - \beta) \ldots$; $Q(x)$ dobivamo kao najveću zajedničku mjeru (vidi str. 143) polinoma $P(x)$ i $P'(x)$ (derivacija), a $T(x)$ dijeljenjem $P(x)$ sa $Q(x)$.

Zavisnost među korijenima jednadžbe i njenim koeficijentima. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ svih *n* korijena jednadžbe (1), tada je

* Koeficijent a_0 najvišeg člana uzmimo jednak 1 (jednadžbu dijelimo s tim koeficijentom).

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = -a_1,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{n} x_ix_j = a_2,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i,j,k=1\\(i<j<k)}}^{n} x_ix_jx_k = -a_3,$$

. . . .

$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n a_n.$$

Jednadžba s realnim koeficijentima. Kompleksni korijeni jednadžbe s realnim koeficijentima mogu se pojaviti samo u parovima konjugirano kompleksnih*, tj. ako takva jednadžba ima korijen $\alpha = a + bi$, ona također ima i korijen $\beta = a - bi$, koji je iste višestrukosti. Produkt $(x - \alpha)(x - \beta)$ u tom slučaju daje:

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + px + q, \qquad (1)$$

gdje je $\quad p = -(\alpha + \beta) = -2a, \quad q = \alpha\beta = a^2 + b^2,\quad$ odatle izlazi da je $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0.$

Ako u formuli $(*)$ zamijenimo produkt svakog para takvih faktora po formuli (1), dobivamo rastav polinoma s realnim koeficijentima na realne faktore:

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}\,(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}\,(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \ldots, \qquad (**)$$

u kojima su svi brojevi α_i, p_i, q_i realni i $\left(\frac{p_i}{2}\right)^2 - q_i < 0.$

Broj korijena jednadžbe s realnim koeficijentima. Iz prethodnog izlazi da svaka jednadžba neparnog stupnja ima najmanje jedan realan korijen.

Broj realnih korijena jednadžbe $P(x) = 0$, što leže između bilo kojih brojeva a i b $(a < b)$ koji nisu korijeni zadane jednadžbe, možemo tačno ustanoviti na ovaj način:

1) Odvojimo višestruke korijene jednadžbe $P(x) = 0$, tj. odredimo jednadžbu koja ima iste korijene kao i zadana, ali proste**. U daljnjem ćemo sa $P(x)$ označavati jednadžbu **bez višestrukih korijena**.

* O konjugirano kompleksnim brojevima vidi na str. 577.

** Način dobivanja takove jednadžbe pokazan je gore. Praktički možemo početi ne s odjeljivanjem višekratnih korijena, nego odmah traženjem Sturmove funkcije: ako P_m nije konstanta, $P(k)$ ima višestruke korijene koje moramo odijeliti.

2) Tvorimo red *Sturmovih funkcija:*

$$P(x),\quad P'(x),\quad P_1(x),\quad P_2(x),\quad \ldots,\quad P_m = \text{const},$$

gdje je $P(x)$ lijeva strana zadane jednadžbe, $P'(x)$ derivacija, $P_1(x)$ ostatak diobe $P(x)$ sa $P'(x)$ uzet sa suprotnim predznakom, $P_2(x)$ ostatak diobe $P'(x)$ sa $P_1(x)$ uzet sa suprotnim predznakom itd., P_m je posljednji ostatak (= const)*.

3) Izračunajmo broj A *promjena predznaka* (tj. prelaza od »+« na »—« i obrnuto) u slogu brojeva:

$$P(a),\quad P'(a),\quad P_1(a),\quad P_2(a),\quad \ldots,\quad P_m$$

i broj B promjena predznaka u slogu brojeva:

$$P(b),\quad P'(b),\quad P_1(b),\quad P_2(b),\quad \ldots,\quad P_m{}^{**}.$$

Razlika $A—B$ jednaka je traženom broju realnih korijena jednadžbe $P(k) = 0$ u intervalu $[a, b]$ (*Sturmov teorem*).

Primjer: Odredi broj korijena jednadžbe

$x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$, koji leže između 0 i 2!

Određivanje Sturmovih funkcija daje nam:

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8; \quad P'(x) = 4x^3 - 10x + 8,$$

$$P_1(x) = 5x^2 - 12x + 16, \quad P_2(x) = -3x + 284; \quad P_3 = -1.$$

Supstitucija $x = 0$ daje slog brojeva: —8, +8, +16, +284, —1 (2 promjene); supstitucija $x = 2$ daje: +4, +20, +12, +278, —1 (1 promjena). $A - B = 2 - 1 = 1$. tj. između 0 i 2 ima 1 korijen.

B r o j   p o z i t i v n i h   k o r i j e n a jednadžbe $P(x) = 0$ nije veći od broja promjena predznaka u slogu koeficijenata polinoma $P(x)$ i od njega se može razlikovati za paran broj (*Descartesovo pravilo*).

Primjer: Jednadžba $x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 1 = 0$. Poređaj koeficijenata te jednadžbe ima predznake: + + — + —, tj. predznak se mijenja tri puta. Po Descartesovom pravilu ta jednadžba ima tri, ili jedan pozitivan korijen. Kako pri zamjeni x u $-x$ korijeni jednadžbe mijenjaju predznake, a pri zamjeni x u $x + h$ se umanjuju za h, pomoću Descartesova pravila možemo ocijeniti i broj negativnih korijena, a također i broj korijena većih od h. U našem primjeru zamjena x u $-x$ daje $x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x - 1 = 0$, tj. jednadžba ima jedan negativni korijen. Zamjena x u $x + 1$ daje $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 13x + 6 = 0$, tj. svi pozitivni korijeni naše jednadžbe (1 ili 3) manji su od jedinice.

---

* Da bismo pojednostavnili računanja, dobivene ostatke pomnožimo s konstantnim pozitivnim faktorima, što ne mijenja rezultate.

** Ako je neki od tih brojeva jednak nuli, onda ga pri računanju promjena predznaka preskočimo.

Rješenje jednadžbe n-tog stupnja, ako je $n > 4$, u općem slučaju možemo naći samo približno; približne metode praktički primjenjujemo i pri rješavanju jednadžbe 3-ćeg i naročito 4-tog stupnja. Za približno istovremeno određivanje svih korijena algebarske jednadžbe n-tog stupnja (uključujući i kompleksne) možemo primijeniti *metodu Lobačevskog.* Za računanje odvojenih realnih korijena algebarske jednadžbe možemo s uspjehom primijeniti opće metode za približno rješavanje transcendentnih jednadžbi (vidi dalje, str. 161 do 163).

9. TRANSCENDENTNE JEDNADŽBE

Definicija. Jednadžbu $F(x) = f(x)$ nazivamo *transcendentnom,* ako bar jedna od funkcija $F(x)$ ili $f(x)$ nije algebarska.

Primjeri:

1) $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$ 4) $\sin x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$,

2) $2^{x-1} = 8^{x-2} - 4^{x-2}$, 5) $3 \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + 9$,

3) $2 \lg_5 (3x - 1) - \lg_5 (12x + 1) = 0$, 6) $x \cos x = \sin x$.

U nekim slučajevima rješavanje transcendentnih jednadžbi svodimo na algebarske jednadžbe, uz upotrebu tablica. Općenito transcendentne jednadžbe možemo riješiti samo približno.

Neki slučajevi transcendentnih jednadžbi koje svodimo na algebarske.

E k s p o n e n c i j a l n e   j e d n a d ž b e. Nepoznanice x ili $P(x)$ (polinom) nalaze se samo u eksponentima potencija nekih baza $a, b, c\ldots$ Takve jednadžbe svodimo na algebarske u ovim slučajevima:

1) Ako potencije $a^{P_1(x)}, b^{P_2(x)}, \ldots$ ne zbrajamo niti oduzimamo, jednadžbu moramo logaritmirati s obzirom na bilo koju bazu.

Primjer: $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$; $\quad x \log 3 = (x - 2) \log 4 + x \log 2$;

$$x = \frac{2 \log 4}{\log 4 - \log 3 + \log 2}.$$

2) Ako su $a, b, c\ldots$ cijele ili razlomljene potencije jednog istog broja k ($a = k^\alpha$, $b = k^\beta$, $c = k^\gamma, \ldots$) tada, uz pretpostavku da je $y = k^x$, dobivamo u nekim slučajevima algebarsku jednadžbu s obzirom na y; kada tu jednadžbu riješimo dobivamo x iz tablica: $x = \frac{\lg y}{\lg k}$.

Primjer: $2^{x-1} = 8^{x-2} - 4^{x-2}$; $\quad \frac{2^x}{2} = \frac{2^{3x}}{64} - \frac{2^{2x}}{16}$; uz pretpostavku da je $2^x = y$, dobivamo $y^3 - 4y^2 - 32y = 0$ i $y_1 = 8$,

$y_2 = -4$, $y_3 = 0$; $2^{x_1} = 8$, $2^{x_2} = -4$, $2^{x_3} = 0$, odakle je $x_1 = 3$; druga realna rješenja ne postoje.

Logaritamske jednadžbe. Nepoznanica x ili $P(x)$ (polinom) nalazi se samo pod znakom logaritma. Takve jednadžbe svodimo na algebarske u ovim slučajevima:

1) Ako se u jednadžbi pojavljuje logaritam jednog te istog izraza; u tom slučaju uzmemo logaritam kao novu nepoznanicu, riješimo dobivenu algebarsku jednadžbu i potenciramo dobiveno rješenje.

Primjer: $m[\log_a P(x)]^2 + n = a\sqrt{[\log_a P(x)]^2 + b}$. Zamjena $\log_a P(x)$ s y daje jednadžbu $my^2 + n = a\sqrt{y^2 + b}$; iz nje izračunamo y i dobijemo jednadžbu za izračunavanje x: $P(x) = a^y$.

2) Ako se u jednadžbi pojavljuje linearna kombinacija (s cijelim koeficijentima) logaritama s istom bazom izraza, koji su polinomi od x:

$$m \log_a P_1(x) + n \log_a P_2(x) + \ldots = 0.$$

U tom slučaju izraze u oba dijela jednadžba svedemo (svaki) na logaritam jednog izraza; dobivenu jednadžbu potenciramo.

Primjer: $2\log_5(3x-1) - \log_5(12x+1) = 0$, $\log_5 \dfrac{(3x-1)^2}{12x+1} = \log_5 1$; $\dfrac{(3x-1)^2}{12x+1} = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; ako rješenje $x_1 = 0$ uvrstimo u zadanu jednadžbu, dobivamo logaritam negativnog broja (imaginaran) i zato to rješenje ne uzimamo u obzir.

Trigonometrijske jednadžbe (koje se svode na algebarske). Nepoznanica x ili $nx + a$ (n je cio broj) samo je pod znakom trigonometrijske funkcije. Tada pomoću trigonometrijskih formula svedemo taj izraz na samo jednu funkciju od x; zamjenom te funkcije sa y dobijemo algebarsku jednadžbu. Kada je riješimo, x odredimo iz tablica; pri tome treba imati u vidu mnogoznačnost rješenja.

Primjer: $\sin x = \cos^2 x - \dfrac{1}{4}$; ili druga mogućnost $\sin x = 1 - \sin^2 x - \dfrac{1}{4}$; stavimo da je $\sin x = y$, pa dobivamo $y^2 + y - \dfrac{3}{4} = 0$ i $y_1 = \dfrac{1}{2}$, $y_2 = -\dfrac{3}{2}$. Rješenje y_2 ne daje realno rješenje zadane jednadžbe ($|\sin x| \leqslant 1$); $y_1 = \dfrac{1}{2}$ daje $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ i $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ (k je cio broj).

Hiperbolne jednadžbe*. Nepoznanica x nalazi se samo pod znakom hiperbolnih funkcija. Izraz hiperbolne funkcije zamijenimo sa eksponencijalnim, stavimo $e^x = y$, $e^{-x} = 1/y$, i svedimo jednadžbu na algebarsku u odnosu na y; $x = \ln y$ odredimo iz tablica.

Primjer: $3 \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + 9$; $\dfrac{3(e^x + e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} + 9$;

$e^x + 2e^{-x} - 9 = 0$; $y + \dfrac{2}{y} - 9 = 0$, $y^2 - 9y + 2 = 0$; $y_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{73}}{2}$;

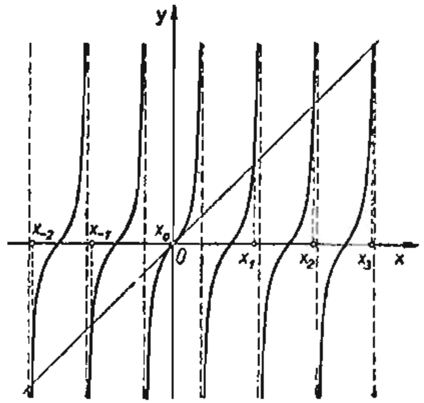
$x_1 = \ln \dfrac{9 + \sqrt{73}}{2} \approx 2{,}1716$, $x_2 = \ln \dfrac{9 - \sqrt{73}}{2} \approx -1{,}4784$.

* Taj naziv nije uobičajen.

Približno rješavanje jednadžbi. Ovdje prikazani način približnog rješavanja jednadžbi primjenjujemo kako za algebarske, tako i za transcendentne jednadžbe. Proces određivanja korijena rastavlja se u dva dijela: 1) grubo nalaženje približnih vrijednosti korijena i 2) tačnije određivanje tih vrijednosti.

Gruba ocjena korijena. Ako je $f(x)$ neprekinuta funkcija*, i ako $f(a)$ i $f(b)$ imaju različite predznake, tada između a i b leži bar jedan korijen jednadžbe $f(x) = 0$. Odaberemo li različite vrijednosti za a i b, uvijek možemo dobiti dovoljno uzak interval u kojem će ležati samo jedan korijen razmatrane jednadžbe. *Grafičku metodu* primjenjujemo onda kad jednadžbu možemo dovesti u oblik $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ pa graf funkcije $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ možemo lako konstruirati. Tada su korijeni jednadžbe jednaki apscisama presjecišta krivulja $y = \varphi_1(x)$ i $y = \varphi_2(x)$.

Primjer. Korijeni jednadžbe $x \cos x = \sin x$ (pored očiglednog korijena $x = 0$) su blizu brojeva $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ (gdje je $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Jednadžbu možemo napisati u obliku $x = \operatorname{tg} x$ i njeni korijeni odgovaraju presječnicama pravca $x = y$ i tangentoide $y = \operatorname{tg} x$ (sl. 74).



Sl. 74

Metode tačnijeg određivanja grubih približnih vrijednosti. 1) *Newtonova metoda.* Ako je x_0 približna vrijednost

* Vidi str. 321 i 322.

korijena jednadžbe $f(x) = 0$, onda kao tačniju približnu vrijednost izabiremo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

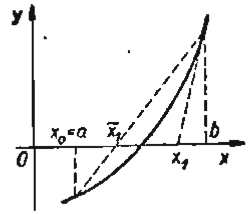
Zamjenom x_0 sa x_1 možemo dobiti iduću približnu vrijednost x_2 itd. Proces uzastopnih približnih vrijednosti uvijek konvergira ako korijen α nije višestruk (tj. $f'(\alpha) \neq 0$) i ako smo prvu približnu vrijednost uzeli dovoljno blizu. Prema tome korijen možemo naći sa željenom tačnošću. *Primjer:* vidi dolje.

2) *Linearna interpolacija* (regula falsi). Ako je korijen α jednadžbe $f(x) = 0$ zatvoren između a i b, onda kao približnu vrijednost možemo uzeti veličinu:

$$\tilde{x}_1 = a - f(a)\frac{a-b}{f(b)-f(a)}.$$

Ako $f''(x)$ u intervalu između a i b ne mijenja predznak, onda će približne vrijednosti dobivene tom metodom i Newtonovom metodom biti raspoređene na razne strane od korijena [za x_0 po Newtonovoj metodi moramo uzeti onu vrijednost (od a i b) za koju je $f(x)\cdot f''(x_0) > 0$]. Zbog toga uporedna primjena obiju metoda omogućava ocjenjivanje postignute tačnosti.

Geometrijski, Newtonova metoda znači zamjenu grafa funkcije $f(k)$ s tangentom u tački x_0, a metoda linearne interpolacije s tetivom koja spaja tačke $[a, f(a)]$ i $[b, f(b)]$ (sl. 75). *Primjer:* vidi niže.



Sl. 75

3) *Metoda iteracije.* Razmatranu jednadžbu stavimo u oblik $x = \varphi(x)$ i nađemo tačnije vrijednosti korijena x_1 iz prve približne vrijednosti x_0 pomoću formule $x_1 = \varphi(x_0)$. Ponavljamo li (»iteriramo«) taj proces nekoliko puta dobit ćemo vrijednost korijena sa željenom tačnošću, ako je u intervalu između korijena jednadžbe i prvog približenja $|\varphi'(x)| < 1$. Kada taj uvjet nije ispunjen, jednadžbu moramo preinačiti (možda prelazom na inverznu funkciju). *Na primjer:* na jednadžbu $x = \operatorname{tg} x$ ne možemo primijeniti metodu iteracije, ali je možemo primijeniti na jednadžbu $x = \operatorname{arc\,tg} x$.

Ako je $\varphi'(x) < 0$, tada će od dviju susjednih približnih vrijednosti korijena, dobivene iteracijom, biti jedna veća, a druga manja od korijena, što omogućava ocjenjivanje postignute tačnosti.

Primjer: Nađi najmanji pozitivni korijen jednadžbe $\sin x - x\cos x = 0$. Zamjenom te jednadžbe s njoj ekvivalentnom $x = \operatorname{tg} x$ dobivamo grafički (vidi str. 163) da je traženi korijen

približno $\frac{3\pi}{2} = 4{,}71\ldots$ Tačniju vrijednost naći ćemo postupno približenjima:

a) Newtonovom metodom i linearnom interpolacijom. Za funkciju $f(x) = \sin x - x\cos x$ imamo $f'(x) = x\sin x$. Ako uzmemo da je $x_0 = \frac{3\pi}{2}$, dobivamo da je $f(x_0) = -1, f'(x_0) = -4{,}71$ i $x_1 = 4{,}71 - \frac{1}{4{,}71} = 4{,}50$.

Kako je $f(x_1) = -0{,}029$ istog predznaka kao i $f(x_0)$, linearnu interpolaciju ne možemo primijeniti. Račun pokazuje da je $f(4{,}45) = 0{,}189$ i traženi korijen prema tome leži između 4,45 i 4,50. Primjenom linearne interpolacije dobivamo ovo približenje:

$$\tilde{x}_1 = 4{,}50 - \frac{-0{,}029}{-0{,}029 - 0{,}189}(4{,}50 - 4{,}45) = 4{,}4930.$$

Računanje približenja za x_1 po Newtonovoj metodi [predznak $f''(x_1)$ podudara se s predznakom $f(x_1)$] daje:

$$x_2 = 4{,}50 - \frac{-0{,}029}{-4{,}399} = 4{,}4934.$$

Kako približenja po Newtonovoj metodi i metodi linearne interpolacije leže na raznim stranama korijena, pogreška x_2 ne prelazi 0,0004.

b) Metodom iteracije: jednadžba $x = \operatorname{tg} x$ neprikladna je za iteraciju jer je $(\operatorname{tg} x)' > 1$; prelazom na inverznu funkciju dobivamo jednadžbu $x = \operatorname{Arc\,tg} x$ koju možemo iterirati. Uzmemo li da je $x_1 = \operatorname{Arc\,tg} x_0 = 258° = 4{,}503$; $x_2 = \operatorname{Arc\,tg} x_1 = 257°29' = 4{,}4942$ $x_3 = \operatorname{Arc\,tg} x_2 = 257°27{,}3' = 3{,}4934$; $x_4 = \operatorname{Arc\,tg} x_3 = 257°27{,}2' = 4{,}4934$. Očigledno je da su u x_4 sve znamenke tačne.

10. DETERMINANTE

Definicija. *Determinantom* n-tog reda nazivamo broj D, određen iz n^2 brojeva a_{ij} (*elemenata*) raspoređenih u kvadratnu tablicu od n redova i n stupaca na ovaj način*:

$$D = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma\,(-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{n\omega},$$

* Prvi indeks i elementa a_{ij} determinante pokazuje da je element uzet iz i-tog retka determinante; drugi indeks j, da je element uzet iz j-tog stupca (i je broj retka računajući odozgo; j je broj stupca računajući slijeva).

gdje $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ prolaze svih $n!$ mogućih permutacija* brojeva $1, 2, \ldots, n$; predznak »+« ili »—« ispred svakog *člana* determinante (tj. svakog sumanda) određujemo brojem k *inverzija* (»nereda«) u svakoj permutaciji. Na primjer član $a_{13}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{42}$ u determinanti 4-tog reda ima predznak »minus«, jer *razmještaj* $3, 1, 4, 2$ drugih indeksa ima tri inverzije, označene lukovima.

Minorom elementa a_{ij} nazivamo determinantu $(n-1)$-vog reda, dobivenu iz zadane determinante precrtavanjem i-tog retka i j-tog stupca. *Adjunktom* A_{ij} elementa a_{ij} nazivamo njegov minor s predznakom »plus« ili »minus« po formuli:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Linearnom kombinacijom nekoliko redaka (stupaca) determinante nazivamo redak (stupac) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ kojem su elementi linearne kombinacije pripadajućih elemenata tih redaka (stupaca); npr. linearna kombinacija $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ elemenata i-tog, j-tog i k-tog retka determinante tvori se ovako:

$$\bar{a}_1 = \alpha a_{i1} + \beta a_{j1} + \gamma a_{k1},$$
$$\bar{a}_2 = \alpha a_{i2} + \beta a_{j2} + \gamma a_{k2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\bar{a}_n = \alpha a_{in} + \beta a_{jn} + \gamma a_{kn};$$

brojevi α, β, γ su *koeficijenti* linearne kombinacije.

Svojstva determinanata:

1) Determinanta ne mijenja vrijednost ako njene retke zamijenimo stupcima, ili obrnuto (stoga sva dalje navedena svojstva za retke vrijede i za njene stupce).

2) Determinanta je jednaka nuli ako su *elementi* dvaju njenih redaka *jednaki* ili *proporcionalni* ili je jedan redak *linearna kombinacija* nekih drugih redaka.

* O permutacijama vidi na str. 185.

3) *Faktor*, zajednički svim elementima nekog retka, možemo staviti ispred determinante.

4) Treba li *zbrojiti* determinante koje se razlikuju samo u elementima nekog (i-tog) retka, njihova suma jednaka je takvoj determinanti kojoj su elementi i-tog retka sume pripadnih elemenata i-tih redaka determinanata, a ostali elementi isti kao i u sumandima.

5) Dodamo (oduzmemo) li nekom retku elemente drugog retka ili linearnu kombinaciju drugih redaka, *ne mijenjamo* vrijednost determinante.

6) Determinantu možemo razviti po elementima *nekog* (i-tog) *retka* po formuli $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$, gdje su A_{ij} adjunkti pripadnih elemenata.

7) Suma produkata svih elemenata a_{ik} nekog (i-tog) retka determinante s adjunktima A_{jk} pripadnih elemenata *drugog* (j-tog) retka jednaka je nuli: $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$.

Izračunavanje determinanata:

2. *reda* po formuli

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12} - a_{21};$$
$$-\qquad\qquad +$$

3. *reda po Sarrusovom pravilu* (pripišemo prva dva stupca):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33};$$
$$-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$$

n-tog reda: svedemo na $(n-1)$-vi red po svojstvu 6; prethodno pomoću ostalih svojstava preradimo determinantu tako da što veći broj elemenata postane jednak nuli.

Primjer:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 & 4 \\ 2 & -3 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \underset{\text{(svojstvo 5)}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & -7 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix}} = 3 \underset{\text{(svojstvo 3)}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}} =$$

$$= 3\left\{-5\begin{vmatrix}2&4&8\\4&1&-5\\1&2&4\end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix}2&3&4\\4&1&-5\\1&2&4\end{vmatrix} + 0\right\} =$$

(svojstvo 6)

$$= 0 - 21\begin{vmatrix}2&3&4\\4&1&-5\\1&2&4\end{vmatrix} = -21\begin{vmatrix}1&1&0\\4&1&-5\\1&2&4\end{vmatrix} =$$

(svojstvo 2) (svojstvo 5)

$$= -21\left\{\begin{vmatrix}1&-5\\2&4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}4&-5\\1&4\end{vmatrix}\right\} = -21\ \{(4+10) - (16+5)\} =$$

(svojstvo 6)

$$= +147.$$

11. RJEŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNADŽBI

Slučaj kada je broj nepoznanica jednak broju jednadžbi. *Normalni sistem*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Oznaka: $D = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$ (*determinanta sistema*), D_i je determinanta koju dobijemo iz D zamjenom stupca sastavljenog od koeficijenata a_{ki} nepoznanice x_i, sa stupcem sastavljenim od slobodnih članova b_k; npr.:

$D_1 = \begin{vmatrix} b_1\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_n\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$. Sistem $(*)$ nazivamo *homogenim* ako su svi $b_k = 0$ (a znači i svi $D_i = 0$), a *nehomogenim*, ako je barem jedan b_k različit od nule.

Rješenje sistema $(*)$. Ako je determinanta sistema $D \neq 0$, sistem $(*)$ je *određen*; on ima jedno rješenje: korijeni se x_i izražavaju po *Cramerovom pravilu:*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Ako je $D = 0$ i nisu svi $D_i = 0$, tada je sistem $(*)$ *nesnošljiv* (inkompatibilan): sistem nema ni jednog rješenja (za homogeni sistem ne može nastupiti takav slučaj).

Slučaj kada je $D = 0$ i svi $D_i = 0$ razmatran je niže (vidi opći slučaj, primjer 4, na str. 173 i primjer 2, na str. 175).

Primjeri:

1) $2x + y + 3z = 9,$
$x - 2y + z = -2,$
$3x + 2y + 2z = 7;$

$$D = \begin{vmatrix}2&1&3\\1&-2&1\\3&2&2\end{vmatrix} = 13, \qquad D_x = \begin{vmatrix}9&1&3\\-2&-2&1\\7&2&2\end{vmatrix} = -13,$$

$$D_y = \begin{vmatrix}2&9&3\\1&-2&1\\3&7&2\end{vmatrix} = 26, \qquad D_z = \begin{vmatrix}2&1&9\\1&-2&-2\\3&2&7\end{vmatrix} = 39,$$

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{13}{13} = -1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{26}{13} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{39}{13} = 3$$

[sistem je određen, nehomogen].

2) $2x + 3y - z = 1,$
$x - y + z = 2,$
$3x + 2y = 5;$

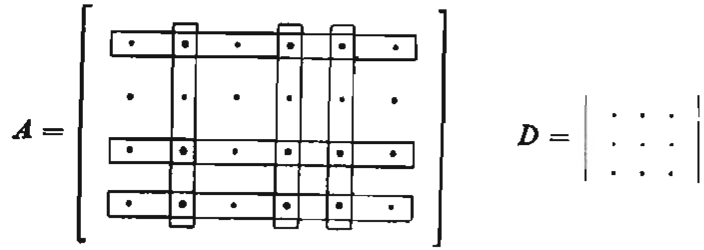
$$D = \begin{vmatrix}2&3&-1\\1&-1&1\\3&2&0\end{vmatrix} = 0, \qquad D_x = \begin{vmatrix}1&3&-1\\2&-1&1\\5&2&0\end{vmatrix} = 4$$

[sistem je nesnošljiv].

Matrica i njen rang. Sistem mn brojeva, raspoređenih u pravokutnoj tablici od m redaka i n stupaca, nazivamo *matricom.*

$$\text{Oznaka: } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Minorom k-tog reda matrice A ($k \leq m$, $k \leq n$) nazivamo determinantu D dobivenu (s održanjem reda) iz k^2 elemenata matrice, koji leže na presječnici nekih njenih k stupaca i k redaka (vidi shemu).



(minor trećeg reda)

Rangom matrice A nazivamo najveći red koji mogu imati njeni minori, a da nisu jednaki nuli. Da bismo odredili rang matrice, moramo razmotriti sve njene minore reda l (gdje je l najmanji između brojeva m, n ako je $m \neq n$ ili $l = m = n$); ako je makar jedan od njih $\neq 0$, tada je rang A jednak l; ako su svi oni $= 0$, onda treba razmotriti sve minore reda $l - 1$ itd. Praktički je korisno postupati obrnuto: prelaziti od minora nižeg reda na minor višeg reda, koristeći se ovim pravilom: Ako smo našli minor k-tog reda D_k, različit od nule, tada nam preostaje da izračunamo samo one minore $(k + 1)$-vog reda koji »obrubljuju« D_k, npr.:

$$|D_k\,|,\quad |\,D_k|,\quad |D_k\,|,\quad |\,D_k|.$$

Ako su svi takvi minori $(k + 1)$-vog reda jednaki nuli, rang matrice je k.

Primjer: odredimo rang matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Minor drugog reda je u gornjem lijevom uglu $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

Ali minor drugog reda u matrici A nije jednak nuli: $D'_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Obrubimo ga slijeva i ispod:

$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Kada obrubimo D_3 (to možemo načiniti samo na dva načina), dobijemo:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i} \quad D'_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Prema tome je rang $A = 3$.

Opći slučaj sistema linearnih jednadžbi.

Nehomogene jednadžbe. Sistem nehomogenih jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

nazivamo rješivim ako postoji barem jedno rješenje $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$*, koje pretvara sve jednadžbe (**) u identitet, i *nerješivim* ako ne postoji niti jedno takvo rješenje. *Obilježje rješivosti:* sistem (**) je rješiv onda i samo onda, ako je rang matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

jednak rangu »povećane« matrice:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Rješiv sistem jednadžbi nazivamo *određenim* ako ima jedno rješenje, i *neodređenim* ako ima beskonačno mnogo rješenja.

Rješiv sistem jednadžbi (**) rješavamo na ovaj način. Odredimo rang r matrice A, i preinačimo jednadžbe (**), a također i njihove nepoznanice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tako, da minor matrice A različit od nule, reda r, postavimo u gornji lijevi ugao matrice (ta preinaka nije potrebna ako je minor matrice reda r u lijevom gornjem uglu različit od nule).

Pri tome su moguća dva slučaja:

1) $r = n$, $r \leq m$. Rješenjem sistema prvih n jednadžbi sa n nepoznanica dobivamo jednoznačno rješenje $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, jer je determinanta tog sistema $\neq 0$ (vidi str. 168). Ako je $n < m$, tada to isto rješenje zadovoljava i ostalih $m - n$ jednadžbi, koje su proizašle iz prvih. Zadani sistem (**) je određen.

2) $r < n$, $r \leq m$. Rješavamo sistem prvih r jednadžbi s prvih r nepoznanica $x_1, x_2, \ldots x_r$ izrazivši te nepoznanice pomoću ostalih $n - r$ nepoznanica $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Dobivamo jednoznačno rješenje u obliku linearnih funkcija:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ x_2 &= x_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= x_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

jer je determinanta sistema jednadžbi $\neq 0$. Nepoznanicama $x_{r+1}, \ldots x_n$ možemo davati vrijednosti po volji; tada nepoznanice $x_1, \ldots, x_r$ određujemo po formulama (1). Ta rješenja zadovoljavaju i ostalih $m - r$ jednadžbi (ako je $r < m$), koje su posljedica prvih. Zadani sistem (**) je neodređen.

* U daljem tekstu ćemo u vitičastim zagradama pisati rješenja $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$.

Primjeri:

1)
$$\begin{aligned} x-2y+3z-u+2v&=2,\\ 3x-y+5z-3u-v&=6,\\ 2x+y+2z-2u-3v&=8. \end{aligned}$$

Rang matrice A je 2, rang matrice B je 3. Sistem je nesnošljiv, rješenja nema.

2)
$$\begin{aligned} x-y+2z&=1,\\ x-2y-z&=2,\\ 3x-y+5z&=3,\\ -2x+2y+3z&=-4. \end{aligned}$$

Rangovi matrica A i B su 3; sistem je snošljiv. Matrica lijevog gornjeg ugla je trećeg reda: $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix} \neq 0$; preinačivanje nije potrebno. $r=n$; sistem je određen. Rješavamo sistem prvih triju jednadžbi: $x=\frac{10}{7}$; $y=-\frac{1}{7}$; $z=-\frac{2}{7}$; to rješenje zadovoljava i četvrtu jednadžbu.

3)
$$\begin{aligned} x-y+z-u&=1,\\ x-y-z+u&=0,\\ x-y-2z+2u&=-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rangovi matrica A i B su 2; sistem je snošljiv. $r<n$; sistem je neodređen. Matrica gornjeg lijevog ugla je drugog reda: $D=0$; premjestimo stupac sa x na četvrto mjesto:

$$\begin{aligned} -y+z-u+x&=1,\\ -y-z+u+x&=0,\\ -y-2z+2u+x&=-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Riješimo sistem prvih dviju jednadžbi s nepoznanicama y i z:

$$\begin{aligned} -y+z&=1-x+u,\\ -y-z&=-x-u. \end{aligned}$$

Rješenja $y=x-\frac{1}{2}$, $z=u+\frac{1}{2}$ zadovoljavaju sve jednadžbe za bilo koje vrijednosti x i u.

4)
$$\begin{aligned} x+2y-z+u&=1,\\ 2x-y+2z+2u&=2,\\ 3x+y+z+3u&=3,\\ x-3y+3z+u&=0. \end{aligned}$$

U tom slučaju je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica, $D=0$, a također i $D_x=D_y=D_z=D_u=0$. Rang matrice A je 2, rang matrice B je 3. Sistem je nesnošljiv, rješenja nema.

Homogene jednadžbe. Sistem homogenih jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots&\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

uvijek ima *trivijalno rješenje* $x_1=x_2=\dots=x_n=0$. Ako sistem ima netrivijalno rješenje $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$*, tada on ima i beskonačno mnogo rješenja oblika $\{k\alpha_1,k\alpha_2,\dots,k\alpha_n\}$, gdje je k bilo koji broj. Ako sistem $(***)$ ima p netrivijalnih rješenja:

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\},\ \{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\},\ \dots,\ \{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n\}, \qquad (1)$$

onda on ima i beskonačno mnogo rješenja oblika:

$$\{k_1\alpha_1+k_2\beta_1+\dots+k_p\mu_1,\quad k_1\alpha_2+k_2\beta_2+\dots+k_p\mu_2,\ \dots$$
$$\dots,\ k_1\alpha_n+k_2\beta_n+\dots+k_p\mu_n\}, \qquad (2)$$

gdje su $k_1, k_2, \dots, k_p$ brojevi po volji (a nisu svi jednaki nuli). Rješenje (2) nazivamo *linearnom kombinacijom* rješenja (1).

Rješenja (1) sistema jednadžbi $(***)$ nazivamo *linearno nezavisnim*, ako ni jedno od njih nije linearna kombinacija ostalih; p linearno nezavisnih rješenja čini *fundamentalan sistem rješenja*, ako je bilo koje rješenje sistema jednadžbi $(***)$ linearna kombinacija tih p rješenja**.

Ako je rang r matrice A koeficijenata jednadžbi $(***)$ manji od broja n nepoznanica, tada jednadžbe $(***)$ imadu fundamentalan sistem rješenja; ako je $r=n$, nema fundamentalnog sistema i jednadžbe imaju samo trivijalno rješenje. Za $r<n$ fundamentalni sistem sastoji se od $n-r$ linearno nezavisnih rješenja. Da nađemo fundamentalni sistem poređamo u sistemu $(***)$ jednadžbe i nepoznanice tako, da u gornjem lijevom uglu matrice A bude minor r-tog reda, koji nije jednak nuli. (Ponekad je za to potrebno preinačiti jednadžbe i nepoznanice; vidi primjere). Zatim riješimo sistem

* Vidi napomenu na str. 170.

** Fundamentalnih sistema može biti beskonačno mnogo (vidi dalje).

(***) po prvih r nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_r$, izrazivši ih pomoću ostalih nepoznanica.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ x_2 &= x_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r &= x_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Nepoznanicama $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ možemo dati bilo koje vrijednosti i one zajedno s pripadnim vrijednostima $x_1, x_2, \ldots, x_r$, određenim po formulama (3), tvore jedno od rješenja sistema jednadžbi (***). Izaberemo li te vrijednosti $n-r$ puta:

	x_{r+1}	x_{r+2}	$\ldots$	x_n
1)	b_{11}	b_{12}	$\ldots$	$b_{1,n-r}$
2)	b_{21}	b_{22}	$\ldots$	$b_{2,n-r}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$n-r$)	$b_{n-r,1}$	$b_{n-r,2}$	$\ldots$	$b_{n-r,n-r}$

tako da determinanta $B = |b_{ik}|$ nije jednaka nuli, dobivamo jedan od fundamentalnih sistema rješenja jednadžbi (***). Posebno možemo pretpostaviti da je $b_{ik} = 1$ pri $i = k$ i $b_{ik} = 0$ pri $i \neq k$; tada je $B = 1$, pa rješenja:

	x_{r+1}	x_{r+2}	$\ldots$	x_n
1)	1	0	$\ldots$	0
2)	0	1	$\ldots$	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$n-r$)	0	0	$\ldots$	1

zajedno sa (3) određuju na najjednostavniji način fundamentalni sistem rješenja jednadžbi (***).

Primjeri: Naći fundamentalne sisteme rješenja jednadžbi:

1)
$$\begin{aligned} x - y + 5z - u &= 0, \\ x + y - 2z + 3u &= 0, \\ 3x - y + 8z + u &= 0, \\ x + 3y - 9z + 7u &= 0. \end{aligned}$$

Rang matrice A je 2; determinanta $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$; permutiranje nije potrebno. Riješimo sistem s obzirom na nepoznanice x i y. Stavimo $z = 1$, $u = 0$ pa dobivamo prvo fundamentalno rješenje:

$$x = -\frac{3}{2}, \quad y = \frac{7}{2}, \quad z = 1, \quad u = 0 \quad \text{ili} \quad \left\{-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0\right\}.$$

Uz pretpostavku da je $z = 0$ i $u = 1$, dobivamo drugo fundamentalno rješenje:

$$x = -1, \quad y = -2, \quad z = 0, \quad u = 1 \quad \text{ili} \quad \{-1, -2, 0, 1\}.$$

Prema tome, svako rješenje zadanog sistema možemo predočiti u obliku: $\left\{-\frac{3}{2}k_1 - k_2, \ \frac{7}{2}k_1 - 2k_2, \ k_1, \ k_2\right\}$.

2)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 0, \\ x - y + z &= 0, \\ 3x + 2y \quad\ &= 0. \end{aligned}$$

Broj jednadžbi jednak je broju nepoznanica, $D = D_x = D_y = D_z = 0$. Rang matrice A je 2; determinanta $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, permutiranje nije potrebno.

Riješimo sistem s obzirom na x i y. Stavimo da je $z = 1$, pa dobivamo jedino linearno nezavisno fundamentalno rješenje: $x = -\frac{2}{5}$, $y = \frac{3}{5}$. Prema tome svako rješenje zadanog sistema možemo predočiti u obliku

$$x = -\frac{2}{5}k, \quad y = \frac{3}{5}k, \quad z = k \quad \text{ili} \quad x = -2k, \quad y = 3k, \quad z = 5k.$$

12. SISTEMI JEDNADŽBI VIŠEGA STUPNJA

Uvjeti za nezavisnost jednadžbi. Dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice:

$$f(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad \varphi(x, y) = 0$$

bit će nezavisne, ako njihova jakobijana (vidi str. 331)

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

ne iščezava identički; u protivnom slučaju jedna jednadžba je posljedica druge, i one imaju beskonačno mnogo rješenja.

Za tri jednadžbe sa tri nepoznanice analogni su uvjeti nezavisnosti.

$$\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(x, y, z)} \neq 0$$

itd.

Ti uvjeti vrijede i za sisteme algebarskih i za sisteme transcendentnih jednadžbi.

Broj rješenja sistema dviju algebarskih jednadžbi $P_1(x, y) = 0$ i $P_2(x, y) = 0$. Ako je P_1 polinom m-tog stupnja, a P_2 n-tog stupnja s obzirom na x i y*, sistem ima $m \cdot n$ realnih ili kompleksnih parova rješenja. Sistem od tri jednadžbe m-tog, n-tog i p-tog stupnja ima $m \cdot n \cdot p$ trojki rješenja itd.

Određivanje rješenja sistema dviju algebarskih jednadžbi u općem slučaju svodimo na rješenje jednadžbe $m \cdot n$-tog stupnja — *resolvente* sistema — s jednom od nepoznanica (npr. x) pomoću eliminacije druge nepoznanice (y) iz sistema; dobivene korijene resolvente uvrstimo u jednu od jednadžbi sistema da bismo izračunali drugu nepoznanicu. Najjednostavnije možemo riješiti sistem jednadžbi od kojih je jedna linearna, a druga n-tog stupnja; riješimo linearnu jednadžbu po y i rješenje uvrstimo u drugu jednadžbu pa dobivamo resolventu n-tog stupnja u odnosu na x. U slučaju dviju jednadžbi drugog stupnja dobivamo resolventu četvrtog stupnja; ponekad takav sistem možemo riješiti *posebnim doskočicama.*

Primjer: $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$. Dobijemo $(x + y)^2 = a + 2b$; $(x - y)^2 = a - 2b$; $x + y = \pm\sqrt{a + 2b}$, $x - y = \pm\sqrt{a - 2b}$. odakle nalazimo 4 para vrijednosti x i y.

Grafička metoda rješavanja sistema dviju jednadžbi svodi se na traženje tačaka sjecišta krivulja koje imaju jednadžbe $f(x, y) = 0$ i $\varphi(x, y) = 0$.

C. DOPUNSKE GLAVE ALGEBRE

13. NEJEDNADŽBE

Definicije: *Nejednadžbom* nazivamo povezanost dvaju brojevnih ili slovnih izraza pomoću jednog od ovih znakova:

1) $>$ (»veće«)
2) $<$ (»manje«)
3) $\neq$ (»nejednako«)
3a) $\gtrless$ (»veće ili manje«)
4) $\geqslant$ (»veće ili jednako«)
4a) $\nless$ (»ne manje«)
5) $\leqslant$ (»manje ili jednako«)
5a) $\ngtr$ (»ne veće«)

* Stupanj polinoma dviju varijabli najveća je suma stupanja x i y u njegovim članovima. Npr. polinom $x^3 + x^2y^2 + y^3$ četvrtog je stupnja.

Znakovi 3) i 3a), 4) i 4a), 5) i 5a) imaju isto značenje i mogu se međusobno zamijeniti*.

Nejednadžbe tipova 1), 2) i 3) nazivamo *striktnim*, nejednadžbe tipova 4) i 5) nestriktnim.

Nejednadžbu nazivamo *identičnom*, ako je ona tačna za sve vrijednosti koje uvrštavamo za opće brojeve. Tačnu nejednadžbu, sastavljenu samo od brojeva, također nazivamo identičnom.

Kao i jednadžbe, i nejednadžbe mogu sadržavati nepoznanice (one se obično označavaju posljednjim slovima abecede). *Riješiti nejednadžbu* (ili sistem nejednadžbi) znači odrediti granice za vrijednosti nepoznanica, u kojima će nejednadžba (ili sve nejednadžbe u sistemu) biti tačna. Riješiti možemo nejednadžbe tipova 1) do 5); najčešće rješavamo čiste nejednadžbe tipova 1) i 2). Ako dvije nejednadžbe pripadaju obje tipu 1) ili obje tipu 2), nazivamo ih *nejednadžbama istoga smisla*; ako jedna jednadžba pripada tipu 1), a druga tipu 2), nazivamo ih *nejednadžbama suprotnog smisla*. Dvije nejednadžbe koje imaju iste nepoznanice nazivamo *ekvivalentnim*, ako su one tačne za jedne te iste vrijednosti nepoznanica.

Osnovna svojstva nejednadžbi tipova 1) i 2).

1) *Promjena znaka nejednakosti.* Ako je $a > b$, tada je $b < a$; ako je $a < b$, onda je $b > a$.

2) *Svojstva tranzitivnosti.* Ako je $a > b$ i $b > c$, onda je $a > c$; ako je $a < b$, $b < c$, tada je $a < c$.

3) *Zbrajanje i oduzimanje nejednadžbe i neke veličine.* Ako je $a > b$, tada je $a \pm c > b \pm c$, ako je $a < b$, tada je $a \pm c < b \pm c$: dodavanjem jedne te iste veličine na obje strane nejednadžbe njen smisao se ne mijenja.

4) *Zbrajanje nejednadžbi.* Ako je $a > b$, $c > d$, tada je $a + c > b + d$; ako je $a < b$, $c < d$, tada je $a + c < b + d$: dvije nejednadžbe istog smisla zbrajamo tako da zbrojimo desne strane i zbrojimo lijeve strane.

5) *Oduzimanje nejednadžbi.* Ako je $a > b$, $c < d$, tada je $a - c > b - d$; ako je $a < b$, $c > d$, tada je $a - c < b - d$; od nejednadžbe oduzimamo drugu nejednadžbu da od lijeve strane prve nejednadžbe oduzmemo lijevu stranu druge nejednadžbe, a od desne desnu, a rezultatu damo znak nejednakosti prve nejednadžbe. (Nejednadžbe istog smisla ne možemo oduzimati!).

6) *Množenje i dijeljenje nejednadžbi.*

$$\text{Ako je } a > b \text{ i } c > 0, \text{ tada je } ac > bc, \ \frac{a}{c} > \frac{b}{c},$$

* Ako se znak 3) odnosi na takve vrijednosti za koje pojam »veće« i »manje« nije definiran, npr. za kompleksne brojeve (str. 576) ili vektore (str. 603), onda taj znak ne možemo zamijeniti znakom 3a). Čitav ovaj paragraf odnosi se samo na realne brojeve.

ako je $a < b$ i $c > 0$, tada je $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$,

ako je $a > b$ i $c < 0$, tada je $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$,

ako je $a < b$ i $c < 0$, tada je $ac > bc$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

(ako oba dijela nejednadžbe pomnožimo ili podijelimo s istim pozitivnim brojem, dobivamo nejednadžbu istog smisla: ako oba dijela nejednadžbe pomnožimo ili podijelimo s istim negativnim brojem, dobivamo nejednadžbu suprotnog smisla).

Nekoliko važnijih nejednadžbi.

1) $|a + b| \leq |a| + |b|$,

$$|a + b + \ldots + k| \leq |a| + |b| + \ldots + |k|$$

(apsolutna vrijednost sume dvaju ili nekoliko brojeva manja je ili jednaka sumi apsolutnih vrijednosti tih brojeva).

Jednakost vrijedi samo tada, kada su svi brojevi istog predznaka.

2) $|a| + |b| \geq |a - b| \geq |a| - |b|$

(apsolutna vrijednost razlike dvaju brojeva manja je ili jednaka sumi i veća ili jednaka razlici apsolutnih vrijednosti tih brojeva).

3) $$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \quad \text{za } a_i > 0$$

(»*Cauchyjeva nejednadžba*«: aritmetička sredina n pozitivnih brojeva veća je ili jednaka korijenu n-tog stupnja produkta tih brojeva)*.

Jednakost vrijedi samo tada, kada je svih n brojeva međusobno jednako.

4) $$\left| \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \right| \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

(apsolutna vrijednost aritmetičke sredine nekoliko brojeva manja je ili jednaka drugom korijenu aritmetičke sredine kvadrata tih brojeva, vidi str. 183).

Jednakost vrijedi samo tada, kada je svih n brojeva međusobno jednako.

5) $$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$$

* Poseban slučaj te nejednadžbe za $n = 2$, vidi na str. 183.

ili

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

(»*nejednadžba Bunjakovski-Cauchyja*«): ako imamo dva sloga od n brojeva, onda je suma produkata parova s jednakim indeksom manja ili jednaka produktu drugih korijena sume kvadrata tih brojeva*. Jednakost vrijedi samo za $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$).

6) Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitivni brojevi, onda je:

6₁) $$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}$$

za $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$
ili $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$.

6₂) $$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \geq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}$$

za $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$

nejednadžba Čebiševa: ako imamo dva sloga od n pozitivnih brojeva, produkt aritmetičkih sredina tih slogova manji je ili jednak (odnosno veći ili jednak) aritmetičkoj sredini produkata, kada su oba sloga uzlazna ili silazna (odnosno kada je jedan slog uzlazan, a drugi silazan).

7) Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ pozitivni brojevi, onda je:

* Ako je $n = 3$, a $\{a_1, a_2, a_3\}$ i $\{b_1, b_2, b_3\}$ promatramo kao pravokutne Descartesove koordinate vektora, onda nejednadžba Bunjakovski-Cauchyja pokazuje da je skalarni produkt dvaju vektora manji ili jednak produktu njihovih modula (vidi str. 607). Pri $n > 3$ ta se formulacija proširuje na vektore u n-dimenzionalnom prostoru.

Analogija nejednadžbe Bunjakovski-Cauchyja za beskonačne konvergentne redove jest nejednadžba:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_nb_n)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2;$$

analogija je također nejednadžba za određene integrale:

$$\int_a^b [f(x) \cdot \varphi(x)]^2 \, dx \leq \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \cdot \int_a^b [\varphi(x)]^2 \, dx.$$

$$7_1)\ \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}} \cdot \sqrt[k]{\frac{b_1^k + b_2^k + \ldots + b_n^k}{n}} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt[k]{\frac{(a_1b_1)^k + (a_2b_2)^k + \ldots + (a_nb_n)^k}{n}}$$

za $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ i $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$
ili $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ i $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$.

$$7_2)\ \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}} \cdot \sqrt[k]{\frac{b_1^k + b_2^k + \ldots + b_n^k}{n}} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt[k]{\frac{(a_1b_1)^k + (a_2b_2)^k + \ldots + (a_nb_n)^k}{n}}$$

za $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ i $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$
(poopćenje jednadžbe Čebiševa).

Rješavanje nejednadžbe prvog i drugog stupnja. Rješavanje nejednadžbi svodimo na postupno zamjenjivanje nejednadžbe s njoj ekvivalentnim nejednadžbama. Kao i pri rješavanju jednadžbe, u nejednadžbi prenosimo sumande s jedne strane na drugu s obrnutim predznakom i množimo ili dijelimo obje strane nejednadžbe s jednim te istim brojem (različitim od nule; ako je množitelj pozitivan, znak nejednakosti nejednadžbe ostaje nepromijenjen, a ako je negativan, mijenja se u suprotni). Pomoću takvih pretvorbi možemo **uvijek nejednadžbu prvog stupnja dovesti u oblik $ax > b$, a nejednadžbu drugog stupnja u jednostavnijem slučaju u oblik $x^2 < m$ ili $x^2 > m$, a u općem slučaju u oblik $ax^2 + bx + c <$ ili $ax^2 + bx + c > 0$.**

Nejednadžba prvog stupnja $ax > b$ ima rješenje:

$$x > \frac{b}{a} \text{ za } a > 0 \quad \text{i} \quad x < \frac{b}{a} \text{ za } a < 0.$$

Primjer: $5x + 3 \leqslant 8x + 1$;

$5x - 8x < 1 - 3$; $\quad -3x < -2$, $\quad x > \frac{2}{3}$.

Jednostavnije nejednadžbe drugog stupnja $x^2 < m$ i $x^2 > m$ imaju rješenja:

a) $x^2 < m$. Za $m > 0$ rješenje je $-\sqrt{m} < x < +\sqrt{m}$ $(|x| < \sqrt{m})$;
za $m \leqslant 0$ rješenja nema;

b) $x^2 > m$. Za $m > 0$ rješenje je $x > \sqrt{m}$ i $x < -\sqrt{m}$ $(|x| > \sqrt{m})$;

za $m = 0$ rješenje je $x > 0$ i $x < 0$ $(x \neq 0)$;
za $m < 0$ nejednadžba vrijedi identički.

Opći slučaj nejednadžbe drugog stupnja $ax^2 + bx + c < 0$ ili $ax^2 + bx + c > 0$. Nejednadžbu podijelimo sa a (promijenimo znak nejednakosti u slučaju $a < 0$) i svedemo je na oblik $x^2 + px + q < 0$ ili $x^2 + px + q > 0$. Posljednju nejednadžbu pretvorimo u oblik:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

odnosno u oblik:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Označimo $x + \frac{p}{2}$ sa z, a $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ sa m, pa dobivamo jednadžbu $z^2 < m$ ili $z > m$; rješavanjem dobivamo x.

Primjeri: 1) $-2x^2 + 14x - 20 > 0$; $x^2 - 7x + 10 < 0$;

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 < \frac{9}{4};\ -\frac{3}{2} < x - \frac{7}{2} < \frac{3}{2};\ -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} < x < \frac{3}{2} + \frac{7}{2}.$$

Rješenje: $2 < x < 5$.

2) $x^2 + 6x + 15 > 0$; $(x + 3)^2 > -6$; nejednadžba je identička.

3) $-2x^2 + 14x - 20 < 0$; $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 > \frac{9}{4}$, $x - \frac{7}{2} > \frac{3}{2}$ i $x - \frac{7}{2} < -\frac{3}{2}$; rješenje: $x > 5$ i $x < 2$.

14. PROGRESIJE, KONAČNI REDOVI I SREDNJE VRIJEDNOSTI (sredine)

Aritmetičkom progresijom nazivamo takav niz brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (članova progresije) u kojem se svaki idući broj dobiva iz prethodnog, dodatkom određenog broja r (*razlike progresije*). Ako je $r > 0$ progresiju nazivamo *uzlaznom*, a ako je $r < 0$ *silaznom*.

Formule aritmetičke progresije:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \quad \text{i} \quad s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad (s_n \text{ je suma } n \text{ članova}).$$

Geometrijskom progresijom nazivamo takav niz brojeva a_1 $a_2, \ldots, a_n$ (*članova progresije*) u kojem svaki idući broj dobivamo iz prethodnog množenjem s određenim brojem q (*kvocijentom progresije*). Ako je $q > 1$, progresiju nazivamo *uzlaznom*, a ako je $|q| < 1$ *silaznom*.

Formule geometrijske progresije:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{i} \quad s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Za sumu silazne geometrijske progresije prikladnije je upotrijebiti formulu $s_n = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$. Ako broj članova silazne geometrijske progresije n neograničeno raste, tada $q^n \to 0$ i s_n teži ka graničnoj vrijednosti:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s = \frac{a_1}{1 - q}$$

(*suma beskonačne silazne geometrijske progresije*).

Primjer: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$

Neki konačni redovi brojeva (konačne sume*):

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$;

2) $p + (p + 1) + (p + 2) + \ldots + (q - 1) + q = \dfrac{(q + p)(q - p + 1)}{2}$;

3) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2$;

4) $2 + 4 + 6 + \ldots + (2n - 2) + 2n = n(n + 1)$;

5) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n - 1)^2 + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$;

6) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n - 1)^3 + n^3 = \dfrac{n^2(n + 1)^2}{4}$;

7) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(4n^2 - 1)}{3}$;

8) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$;

9) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}.$

* Tablicu beskonačnih redova brojeva vidi na str. 339 i 340.

Srednje vrijednosti (sredine). *Aritmetičkom sredinom* dviju veličina a i b nazivamo njihov poluzbroj $x = \dfrac{a + b}{2}$: veličine a, x i b tvore aritmetičku progresiju.

Aritmetička sredina n veličina $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ jest:

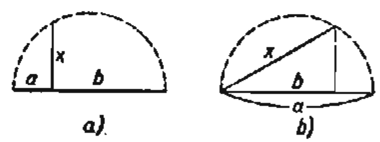
$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Kvadratnom sredinom n veličina $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (pozitivnih ili negativnih) nazivamo veličinu:

$$+\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)},$$

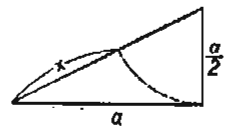
koja ima veliku važnost u teoriji pogrešaka (vidi str. 656).

Geometrijskom sredinom (*srednjom geometrijskom proporcionalom*) dviju pozitivnih veličina a i b nazivamo veličinu $x = \sqrt{ab}$; veličine a, x i b tvore geometrijsku progresiju. Geometrijska sredina dviju nejednakih veličina uvijek je manja od njihove aritmetičke sredine. Ako su a i b duljine odsječka, onda odsječak duljine $x = \sqrt{ab}$ određujemo konstrukcijom prikazanom na slici 76 (a ili b).



a) b)

Sl. 76



Sl. 77

Zlatnim rezom veličine a nazivamo razdiobu te veličine na dva takva dijela x i $a - x$, da x bude geometrijska sredina između a i $a - x$.

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a \approx 0{,}618\,a.$$

Ako je a duljina odsječka, onda odsječak duljine x određujemo konstrukcijom prikazanom na sl. 77. Veličina x je duljina stranice pravilnog deseterokuta upisanog u krug polumjera a.

15. FAKTORIJELA I GAMA-FUNKCIJA

Faktorijelom cijelog pozitivnog broja n [označavamo je sa $n!$ ili $\Pi(n)$] nazivamo produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$

Osnovno svojstvo faktorijele: $n! = n(n - 1)!$

Faktorijele prvih brojeva i njihove recipročne vrijednosti vidi na str. 48.

Faktorijele većih brojeva možemo približno izraziti *Stirlingovom formulom:*

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\dots\right),$$

$$\ln(n!) \approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi}.$$

Ta formula vrijedi i onda, ako n nije cio broj (vidi niže, Γ-funkcija).

Gama-funkcija. Pojam faktorijele proširujemo na bilo koji broj x* pomoću *gama-funkcije* $\Gamma(x)$, određene na dva načina:

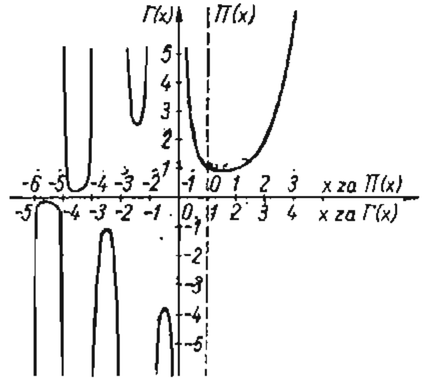
$$\Gamma(x)\begin{cases} = \int\limits_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\,dt \ (\textit{Eulerov integral}) \ (\text{samo za } x > 0^{**}) \\ = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\, n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} \ (\text{za bilo koji } x). \end{cases}$$

Osnovna svojstva gama-funkcija:

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ za cio, pozitivan n,

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\,\Gamma(2x).$$



Sl. 78

Poopćenje pojma faktorijele Π(x). Pojam faktorijele $n!$, definiran u početku za cijele pozitivne n, poopćujemo na bilo koji realni n u obliku funkcije $\Pi(x) \equiv \Gamma(x+1)$.

* U tom broju i na kompleksne.
** Za kompleksni x za Re $x > 0$.

Za cio, pozitivan x: $\Pi(x) = x! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot x$,
za $x = 0$: $\Pi(0) = \Gamma(1) = 1$,
za cio, negativan x: $\Pi(x) = \pm\infty$,

za $x = \frac{1}{2}$: $\quad \Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

za $x = -\frac{1}{2}$: $\quad \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

za $x = -\frac{3}{2}$: $\quad \Pi\left(-\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.

Grafove funkcija $\Gamma(x)$ i $\Pi(x)$ vidi na str. 78. Tablice funkcija $\Gamma(x)$ vidi na str. 82.

16. KOMPLEKSIJE

Varijacijama od n elemenata po k njih (varijacije k-toga razreda od n elemenata) nazivamo takve njihove kompleksije koje se međusobno razlikuju po elementima ili po njihovom rasporedu. Na primjer: varijacije od 3 elementa a, b, c po 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb. Broj svih varijacija od n različitih elemenata po k (označavamo $V_n^{(k)}$):

$$V_n^{(k)} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{\text{ukupno } k \text{ faktora}} = \frac{n!}{(n-k)!}{}^*.$$

Na primjer: $V_3^{(2)} = 3\cdot 2 = 6$.

Permutacijama od n elemenata nazivamo njihove kompleksije, koje se međusobno razlikuju samo po rasporedu elemenata. Na primjer: permutacija od tri elementa a, b i c: abc, bca, cab, cba, bac, acb. Broj svih permutacija od n različitih elemenata (označavamo sa P_n) jest:

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n! = V_n^{(n)}.$$

Ako među n elemenata a, b, c, ... ima jednakih (a se ponavlja α puta, b β puta, c γ puta itd.), onda je broj permutacija:

$$P_n = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\dots}.$$

Kombinacijama n elemenata po m (kombinacije m-toga razreda od n elemenata), nazivamo njihove kompleksije, koje se međusobno razlikuju samo po elementima. Na primjer: kombinacije triju elemenata a, b, c po 2 jesu: ab, ac, bc. Broj svih kombinacija od n različitih elemenata po k [označavamo sa $C_n^{(k)}$ ili $\binom{n}{k}$] jest:

* O simbolu »$n!$« vidi na str. 183.

$$\bar{C}_n^{(k)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} = \frac{V_n^{(k)}}{P_k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\bar{C}_n^{(1)} = n, \quad \bar{C}_n^{(n)} = C_n^{(0)} = 1.$$

Osnovna svojstva kombinacija:

$$\bar{C}_n^{(k)} = \bar{C}_n^{(n-k)}.$$

17. BINOMNI TEOREM

Newtonova formula:

$$(a+b)^n =$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \ldots + nab^{n-1} + b^n \quad (*)$$

ili

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Binomne koeficijente C_n^k možemo odrediti iz tzv. Pascalova trokuta:

n	koeficijenti
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
...	....

Svaki koeficijent tvorimo tako da zbrojimo dva koeficijenta iznad njega (s lijeve i s desne strane).

Svojstva binomnih koeficijenata:

1) Koeficijenti u Newtonovoj formuli rastu do sredine formule, a zatim se smanjuju.

2) Koeficijenti članova koji su jednako udaljeni od početka i od kraja međusobno su jednaki.

3) Suma binomnih koeficijenata u n-toj potenciji binoma jednaka je 2^n.

4) Suma koeficijenata neparnih mjesta jednaka je sumi koeficijenata parnih mjesta.

Potencija razlike:

$$(a-b)^n =$$

$$= a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \ldots + (-1)^n b^n.$$

Poopćenje na bilo koji eksponent. Formula $(*)$ se može proširiti na negativni i razlomljeni eksponent n: $(a+b)^n$ za $|b| < a$ izražavamo u tom slučaju u obliku beskonačnog reda (vidi str. 374 do 376):

$$(a+b)^n =$$

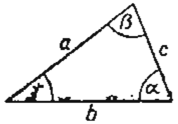
$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

III. GEOMETRIJA

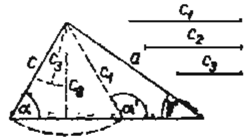
A. PLANIMETRIJA

1. LIKOVI

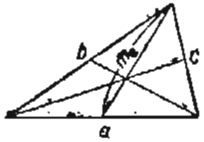
Trokut. Zbroj dviju stranica trokuta (sl. 79) uvijek je veći od treće stranice: $b + c > a$. Zbroj kutova u trokutu $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Trokut je potpuno određen ako je zadano: 1) sve tri stranice ili 2) dvije stranice i kut među njima ili 3) stranica i dva kuta koji njoj prileže. Ako su zadane dvije stranice i kut nasuprot jednoj od tih stranica, onda prema tim podacima možemo odrediti dva, jedan ili nijedan trokut (vidi sl. 80, podrobnije o tome vidi na str. 214).



Sl. 79



Sl. 80



Sl. 81

Težišnicom (*medijanom*) trokuta nazivamo pravac koji spaja vrh trokuta sa sredinom nasuprotne stranice. Težišnice trokuta sijeku se u jednoj tački — težištu trokuta (sl. 81); težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 (računajući od vrha). Duljina težišnice na stranicu a je $m_a = \dfrac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}$ (vidi također na str. 213).

Simetralom kuta trokuta nazivamo pravac koji raspolavlja unutarnji kut trokuta. Simetrale kutova sijeku se u jednoj tački koja je središte trokutu upisane kružnice (sl. 82); polumjer upisane kružnice r vidi na str. 213. Duljina simetrala kuta α (vidi također na str. 213) je: $l_\alpha = \dfrac{\sqrt{bc\,[(b+c)^2 - a^2]}}{b + c}$. Ako simetrala kuta α dijeli stranicu a na odsječke m i n, onda je $m : n = c : b$.

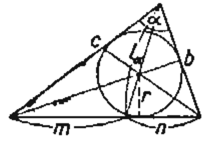
Središte opisane kružnice nalazi se u tački sjecišta okomica podignutih od sredine stranica trokuta (sl. 83). Polumjer opisane kružnice R vidi na str. 213.

Visinom trokuta nazivamo okomicu spuštenu iz vrha trokuta na nasuprotnu stranicu. Visine trokuta sijeku se u jednoj tački, koju nazivamo *ortocentrom*. Duljinu visine vidi na str. 213.

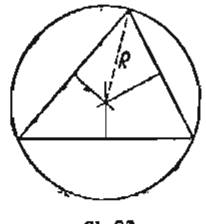
Visina, težišnica i simetrala kuta, spuštene na istu stranicu, podudaraju se ako su druge dvije stranice trokuta jednake (trokut je istokračan). Podudaranje dvaju od tih pravaca dovoljno je da ustanovimo istokračnost trokuta.

U *istostraničnom* trokutu ($a = b = c$) podudaraju se središte opisane i upisane kružnice, težište i ortocentar.

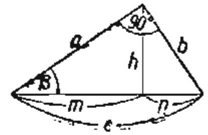
Središnjica je pravac koji spaja sredine dviju stranica trokuta; ona je paralelna sa trećom stranicom trokuta i jednaka polovini njene duljine.



Sl. 82



Sl. 83



Sl. 84

Površina trokuta: $S = {}^1/_2\, bh_b{}^* =$
$$= {}^1/_2\, ab \sin\gamma = {}^1/_2\, r\,(a + b + c) = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
gdje je $p = {}^1/_2\,(a + b + c)$.

Pravokutni trokut (sl. 84): c je hipotenuza, a i b su katete. $a^2 + b^2 = c^2$ (Pitagorin poučak). $h^2 = mn$, $a^2 = mc$, $b^2 = nc$. *Površina:* $S = {}^1/_2\, ab = {}^1/_2 a^2 \operatorname{tg}\beta = {}^1/_2\, c^2 \sin 2\beta$.

Trigonometrijske formule za trokut vidi na str. 212 do 214. Trokuti (a također i višekuti sa jednakim brojem stranica) su *slični*, ako su im odgovarajući kutovi jednaki i odgovarajuće stranice proporcionalne. Za sličnost trokuta dovoljno je da su ispunjena dva od ovih uvjeta: 1) tri stranice jednog trokuta proporcionalne su trima stranicama drugog trokuta; 2) dva kuta jednog trokuta jednaka su dvama kutovima drugog trokuta; 3) dvije stranice jednog trokuta proporcionalne su dvjema stranicama drugog trokuta, a kutovi među njima su jednaki.

Površine sličnih likova proporcionalne su kvadratima odgovarajućih linearnih elemenata (stranica, visina, dijagonala itd.).

Paralelogram (sl. 85). Osnovna svojstva: 1) nasuprotne stranice su jednake, 2) nasuprotne stranice su paralelne, 3) dijagonale se u sjecištu raspolavljaju, 4) nasuprotni kutovi su jednaki. Ako je u četverokutu ispunjeno jedno od tih svojstava ili ako su jednake i paralelne nasuprotne stranice, kao posljedica ispunjena su sva ostala svojstva.

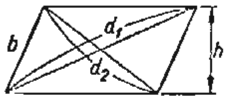
* Sa h_b označena je visina spuštena na stranicu b.

Veza među dijagonalama i stranicama: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. *Površina:* $S = ah$.

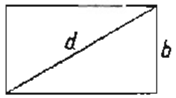
Pravokutnik i kvadrat. Paralelogram je *pravokutnik* (sl. 86) ako ima: 1) sve kutove jednake ili 2) jednake dijagonale (jedno od tih svojstava posljedica je drugog). *Površina:* $S = ab$.

Pravokutnik je *kvadrat* (sl. 87) ako je $a = b$; $d = \sqrt{2}a \approx$

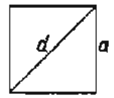
$\approx 1{,}414a$; $a = \frac{\sqrt{2}}{2} d \approx 0{,}707\, d$. *Površina:* $S = a^2 = {}^1/_2\, d^2$.



Sl. 85



Sl. 86



Sl. 87

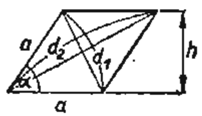
Romb. Paralelogram je *romb* (sl. 88) ako ima: 1) sve stranice jednake, 2) dijagonale međusobno okomite, 3) ako dijagonale raspolavljaju kutove (kada je ispunjeno jedno svojstvo onda su, kao posljedica, ispunjena i ostala dva svojstva).

$$d_1 = 2a \sin\frac{\alpha}{2}; \qquad d_2 = 2a\cos\frac{\alpha}{2}; \qquad d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

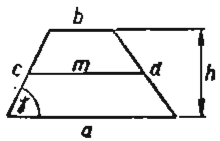
Površina: $S = ah = a^2 \sin\alpha = {}^1/_2\, d_1 d_2$.

Trapez je četverokut kome su dvije stranice paralelne (sl. 89), a i b su *osnovice* trapeza, h je *visina*, m je *središnjica* (pravac koji spaja sredine neparalelnih stranica; ona je paralelna s osnovicama): $m = {}^1/_2 (a + b)$.

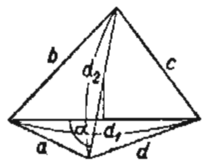
Površina: $S = {}^1/_2 (a + b)\, h = mh$. Trapez je *istokračan* ako je $d = c$. U tom slučaju je $S = (a - c\cos\gamma)\, c\sin\gamma = (b + c\cos\gamma)\, c\sin\gamma$.



Sl. 88



Sl. 89

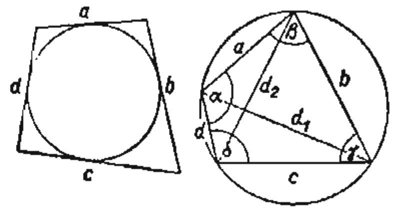


Sl. 90

Četverokut (sl. 90). Zbroj kutova svakog konveksnog četverokuta je 360°. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2$, m je odsječak koji spaja sredine dijagonala. *Površina:* $S = {}^1/_2\, d_1 d_2 \sin\alpha$.

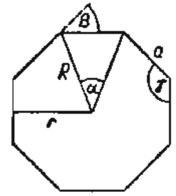
U četverokut možemo upisati kružnicu (sl. 91, *a*) tada i samo tada, kada je $a + c = b + d$. Oko četverokuta možemo opisati kružnicu (sl. 91, *b*) tada i samo tada, kada je $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Za upisani četverokut je $ac + bd = d_1 d_2$. Površina upisanog četverokuta je $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, gdje je $p = {}^1/_2 (a + b + c + d)$.

Poligon (višekut) (sl. 92). Ako je broj stranica n, suma unutarnjih kutova je $180°\,(n-2)$. Zbroj vanjskih kutova je 360°. *Površinu* određujemo tako da poligon rastavimo na trokute.



a Sl. 91 b


Sl. 92



Sl. 93

Poligon je *pravilan* ako su mu sve stranice i svi kutovi međusobno jednaki. Za pravilne poligone sa n stranica (sl. 93) jesu: središnji kut $\alpha = 360°{:}n$, vanjski kut $\beta = 360°{:}n$, unutarnji kut $\gamma = 180° - \beta$. Ako je R polumjer opisane, a r polumjer upisane kružnice (*apotema*), onda je stranica $a = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Površina: $S = {}^1/_2\, nar = nr^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = {}^1/_2\, n R^2 \sin\alpha = {}^1/_4\, na^2 \,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

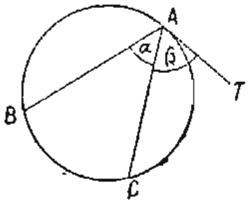
Podatke o pojedinim pravilnim poligonima vidi u donjoj tablici.

Elementi pravilnih poligona

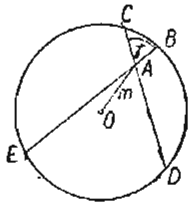
Oznake: n je broj stranica, a je stranica R, je polumjer opisane kružnice, r je apotema (polumjer upisane kružnice).

n	$\frac{S}{a^2}$	$\frac{S}{R^2}$	$\frac{S}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{r}{a}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000	1,7321	3,4641	0,5000	0,2887
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	1,4142	2,0000	0,7071	0,5000
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361	1,1756	1,4531	0,8090	0,6882
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,1547	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099	0,8678	0,9631	0,9010	1,0383
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824	0,7654	0,8284	0,9239	1,2071
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642	0,6840	0,7279	0,9397	1,3737
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515	0,6180	0,6498	0,9511	1,5388
12	11,196	3,0000	3,2154	1,9319	1,0353	0,5176	0,5359	0,9659	1,8660
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223	0,4158	0,4251	0,9781	2,3523
16	20,109	3,0615	3,1826	2,5629	1,0196	0,3902	0,3978	0,9808	2,5137
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1962	1,0125	0,3129	0,3168	0,9877	3,1569
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086	0,2611	0,2633	0,9914	3,7979
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1012	1,0048	0,1960	0,1970	0,9952	5,0766
48	183,08	3,1326	3,1461	7,6449	1,0021	0,1308	0,1311	0,9979	7,6285
64	325,69	3,1366	3,1441	10,190	1,0012	0,0981	0,0983	0,9988	10,178

Kružnica. Polumjer r, promjer d. *Kutovi u vezi s kružnicom** (sl. 94): obodni kut $\alpha = {}^1/_2\,\widehat{BC}$, kut između tetive i tangente $\beta = {}^1/_2\,\widehat{AC}$, kut između tetiva (sl. 95) $\gamma = {}^1/_2\,(\widehat{CB} + \widehat{ED})$, kut među sekantama (sl. 96) $\alpha = {}^1/_2\,(\widehat{DE} - \widehat{BC})$, kut među tangentom i sekantom $\beta = {}^1/_2\,(\widehat{TE} - \widehat{TB})$, kut među tangentama (sl. 97) $\alpha = {}^1/_2\,(\widehat{BDC} - \widehat{BEC})$.

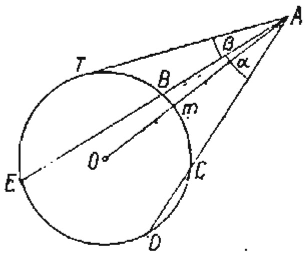


Sl. 94

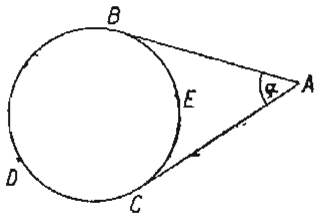


Sl. 95

Tetive koje se sijeku (sl. 95): $AC \cdot AD = AB \cdot AE = r^2 - m^2$.
Sekante (sl. 96): $AB \cdot AE = AC \cdot AD = AT^2 = m^2 - r^2$.



Sl. 96



Sl. 97

Opseg kružnice C i površina kruga S (r je polumjer, d je promjer):

$$\pi = \frac{C}{d} = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\ldots$$

$$C = 2\pi r \approx 6{,}283\,r, \quad C = \pi d \approx 3{,}142\,d, \quad C = 2\sqrt{\pi S} \approx 3{,}545\sqrt{S},$$

$$S = \pi r^2 \approx 3{,}142\,r^2, \quad S = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}785\,d^2, \quad S = \frac{Cd}{4} = 0{,}25\,Cd,$$

$$r = \frac{C}{2\pi} \approx 0{,}159\,C, \quad d = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 1{,}128\sqrt{S};$$

vidi također tablice na str. 69 do 72.

* U ovim jednadžbama su umjesto duljine lukova stavljene njihove kutne mjere, koje se podudaraju s mjerom pripadnog središnjeg kuta.

Odsječak (segment) i isječak (sektor) kruga (sl. 98). r je polumjer, l je duljina luka, a je tetiva, α je središnji kut (u stupnjevima), h je visina segmenta:

$$a = 2\sqrt{2hr - h^2} = 2r\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$h = r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4};$$

$$l = \frac{2\pi r\alpha}{360} \approx 0{,}01745\,r\alpha.$$

Približno:

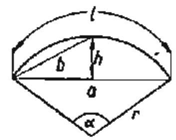
1) $l = \dfrac{8b - a}{3}$

ili:

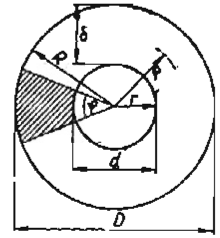
2) $l = \sqrt{a^2 + \dfrac{16}{3}h^2}$.

Površina isječka:

$$S = \frac{\pi r^2\alpha}{360} \approx 0{,}00873\,r^2\alpha.$$



Sl. 98



Sl. 99

Površina segmenta:

$$S_1 = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right) = \frac{1}{2}\,[lr - a(r - h)].$$

Približno je $S_1 = \dfrac{h}{15}(6a + 8b)$. Tablice sa S_1, l, h i a vidi na str. 73 do 77.

Kružni vijenac (sl. 99). $D = 2R$ je vanjski promjer, $d = 2r$ unutarnji promjer, $\rho = \dfrac{R + r}{2}$ je srednji polumjer, $\delta = R - r$ je širina vijenca.

Površina kružnog vijenca je

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi\rho\delta.$$

Površina dijela kružnog vijenca (šrafirano na sl. 99) sa središnjim kutom φ (u stupnjevima):

$$S = \frac{\varphi\pi}{360}(R^2 - r^2) = \frac{\varphi\pi}{1440}(D^2 - d^2) = \frac{\varphi\pi}{180}\rho\delta.$$

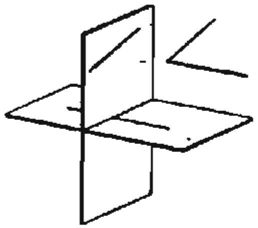
B. STEREOMETRIJA

2. PRAVCI I RAVNINE U PROSTORU

Dva pravca koja leže u istoj ravnini imaju ili jednu ili ni jednu zajedničku tačku. U drugom slučaju su *paralelni*. Ako kroz dva pravca ne možemo postaviti ravninu, pravce nazivamo *mimosmjernima.*

Kut među mimosmjernim pravcima mjerimo kutom među njima paralelnim pravcima koji izlaze iz zajedničke tačke (sl. 100). Udaljenost između mimosmjernih pravaca određujemo po odsječku zajedničke okomice.

Dvije ravnine se ili sijeku u pravcu ili nemaju zajedničkih tačaka. U drugom slučaju ravnine su *paralelne*. Ako su dvije ravnine okomite na jedan isti pravac, ili ako su na svakoj ravnini po dva pravca koji se sijeku, a odgovarajući pravci su međusobno paralelni, i te ravnine su paralelne.



Sl. 100

Sl. 101

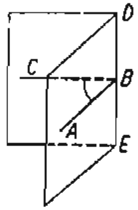
Pravac i ravnina. Pravac može ležati čitav u zadanoj ravnini, može s njom imati jednu zajedničku tačku ili s njom ne imati ni jedne zajedničke tačke. U posljednjem slučaju pravac je *paralelan* s ravninom. Kut između pravca i ravnine mjerimo kutom između pravca i njegove projekcije na ravninu (sl. 101). Ako je pravac okomit na dva pravca ravnine koji se sijeku, tada je okomit na svaki pravac u ravnini (*okomit je na ravninu*).

3. PROSTORNI UGLOVI

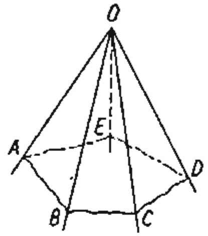
Dvostrani ugao je lik koji tvore dvije poluravnine što izlaze iz jednog pravca. Dvostrani ugao mjerimo njegovim *plošnim kutom ABC* (sl. 102), tj. kutom između okomica na *brid DE* dvostranog ugla, koje su postavljene u obje ravnine (*strane*) iz jedne tačke *B*.

Višestruki ugao (višebrid) *OABCDE* (sl. 103) tvoren je od nekoliko ravnina (*strana*) koje imaju zajedničku tačku (*vrh*) i sijeku se redom po pravcima *OA*, *OB*, ... (*bridovima*). Dva brida iste strane tvore *bridni kut* višestranog ugla, a dvije susjedne strane

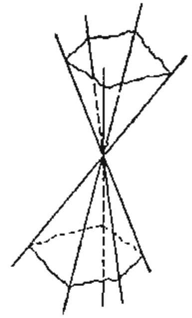
plošni kut. Višestrani uglovi su *jednaki* ako ih možemo postaviti jedan u drugi, tako da se podudaraju; za to moraju biti jednaki odgovarajući elementi (plošni kutovi i bridni kutovi) višestranih uglova. Ako su suglasno jednaki elementi višestranog ugla obrnuto raspoređeni, višestrani uglovi se ne podudaraju kada ih postavimo jednog u drugog; u tom slučaju su uglovi *simetrični*, tj. možemo ih postaviti u položaj prikazan na slici 104.



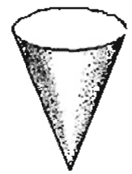
Sl. 102



Sl. 103



Sl. 104



Sl. 105

Konveksni višestrani ugao leži čitav s jedne strane svake svoje strane. *Zbroj bridnih kutova* $AOB + BOC + \ldots + EOA$ (sl. 103) svakog konveksnog višestranog ugla manji je od 360°.

Trostrani uglovi (trobridi) jednaki su ako se: 1) podudaraju u plošnom kutu zatvorenom među pripadno jednakim i jednako raspoređenim bridnim kutovima ili 2) podudaraju u bridnom kutu zatvorenom između dva pripadno jednaka i jednako raspoređena plošna kuta, ili 3) podudaraju se u tri pripadno jednaka i jednako raspoređena bridna kuta ili 4) podudaraju se u tri pripadno jednaka i jednako raspoređena plošna kuta.

Prostorni kut je dio prostora ograničenog pravcima koji izlaze iz jedne tačke (vrha) prema svim tačkama neke zatvorene krivulje (sl. 105). On karakterizira vidni kut pod kojim je iz vrha vidljiva zadana krivulja. Mjera prostornog kuta je površina izrezana prostornim kutom na kugli jediničnog polumjera sa središtem u vrhu kuta. Npr. za stožac s kutom na vrhu od 120° prostorni kut je jednak π (vidi formule na str. 202).

4. UGLASTA TIJELA ILI POLIEDRI

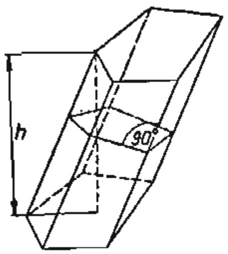
Oznake: V je volumen, S je ukupna površina, M je površina plašta, h je visina, F je površina osnovke (baze).

Poliedar je tijelo omeđeno ravnim plohama.

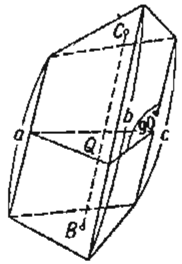
Prizma (sl. 106). Baza je ravni višekut; plašt je sastavljen od paralelograma. Prizma je *uspravna* ako su njeni bridovi okomiti na bazu. Prizma je *pravilna* ako je uspravna, a njena baza je pravilni višekut.

$M = pl$, gdje je l brid (strane), p je opseg presjeka prizme sa ravninom okomitom na brid. $S = M + 2F$; $V = F \cdot h$.

Za trostranu prizmu, presječenu neparalelno s bazom: $V = \frac{1}{3}(a + b + c)\,Q$ (sl. 107) gdje su a, b i c duljine paralelnih bri-

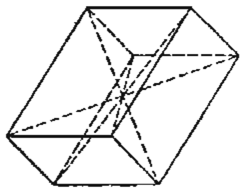


Sl. 106

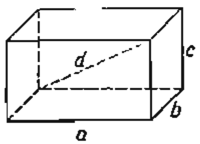


Sl. 107

dova, a Q je površina okomitog presjeka. Za n-stranu prizmu, presječenu neparalelno s bazom $V = l \cdot Q$, gdje je l duljina linije BC koja spaja težišta baza, a Q je površina presjeka, okomitog na tu liniju.



Sl. 108



Sl. 109

Paralelepiped (sl. 108) je prizma kojoj su baze paralelogrami. U paralelepipedu se sve četiri dijagonale sijeku u jednoj tački koja ih raspolavlja. Paralelepiped je *pravokutan* ako je uspravan, a njegove baze su pravokutnici. U pravokutnom paralelepipedu sve dijagonale su jednake. Ako su a, b i c bridovi pravokutnog paralelepipeda, a d njegova dijagonala, tada je $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $V = abc$, $S = 2(ab + bc + ca)$.

Kocka je pravokutni paralelepiped s jednakim bridovima:

$$a = b = c, \quad d^2 = 3a^2, \quad V = a^3, \quad S = 6a^2.$$

Piramida (sl. 110). Baza je neki poligon, stranice plašta su trokuti koji se sastaju u jednom vrhu. Piramidu nazivano n-stranom, ako ima n *pobočnih* ploha (zajedno s bazom $n + 1$ ploha). $V = \frac{1}{3}Fh$.

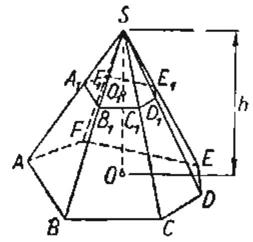
Ako je piramida presječena ravninom paralelnom s bazom, tada je:

$$\frac{SA_1}{A_1A} = \frac{SB_1}{B_1B} = \frac{SC_1}{C_1C} = \ldots = \frac{SO_1}{O_1O};$$

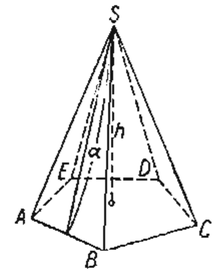
$$\frac{\text{površina } ABCDEF}{\text{površina } A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = \left(\frac{SO}{SO_1}\right)^2.$$

SO — *visina* piramide je okomica spuštena iz vrha na bazu.

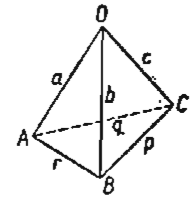
Piramida je pravilna (sl. 111) ako joj je baza pravilan poligon, a visina prolazi kroz središte baze.



Sl. 110



Sl. 111



Sl. 112

Za pravilnu piramidu je $M = \frac{1}{2}p\alpha$ [p je opseg baze, α je apotema pravilne piramide (visina bilo koje stranice njenog plašta)].

Tetraedar je trostrana piramida (sl. 112). Ako je $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = p$, $CA = q$, $AB = r$, je*

$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

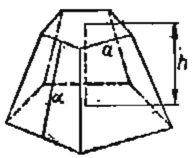
Krnja piramida (ravnina kojom je presječena paralelna je s bazom, sl. 113). Ako su F i f površine baza, h je visina (udaljenost baza), a i A su dvije odgovarajuće stranice baza, tada je:

$$V = \frac{1}{3}h\left[F + f + \sqrt{Ff}\right] = \frac{1}{3}hF\left[1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right].$$

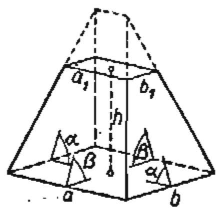
* O determinantama vidi str. 165.

Za pravilnu krnju piramidu je $M = \frac{P+p}{2}\alpha$, gdje su P i p opsezi baza, a α je apotema.

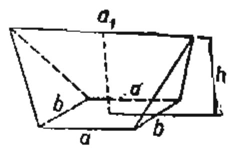
Obelisk. Baze su mu paralelni pravokutnici; nasuprotne plohe su jednako naklonjene na bazu, ali se ne sijeku u jednoj tački (sl. 114). Ako su a, b i a_1, b_1 stranice baza, a h je visina, onda je



Sl. 113



Sl. 114

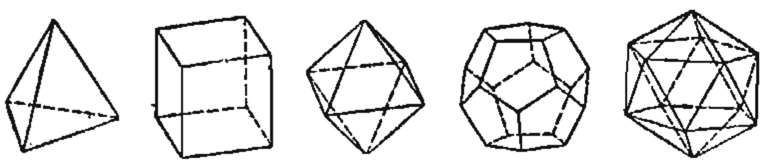


Sl. 115

$$V = \frac{h}{6}[(2a+a_1)b + (2a_1+a)b_1] = \frac{h}{6}[ab + (a+a_1)(b+b_1) + a_1b_1].$$

Klin. Baza mu je pravokutnik, stranice plašta su istokračni trokuti i istokračni trapezi (sl. 115).

$$V = \frac{1}{6}(2a+a_1)bh.$$


Sl. 116

Pravilnim poliedrima su sve strane jednaki pravilni poligoni i svi su višestrani uglovi jednaki. Imamo pet pravilnih poliedara (sl. 116), o kojima su podaci navedeni u tablici (str. 199).

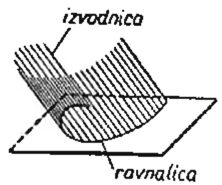
Elementi pravilnih poliedara (a je duljina brida)

Naziv	Broj strana i njihov oblik	Broj bridova	Broj vrhova	Ukupna površina	Volumen
tetraedar	4 trokuta	6	4	$1{,}7321 \cdot a^2$	$0{,}1179 \cdot a^3$
kocka	6 kvadrata	12	8	$6 \cdot a^2$	a^3
oktaedar	8 trokuta	12	6	$3{,}4641 \cdot a^2$	$0{,}4714 \cdot a^3$
dodekaedar	12 peterokuta	30	20	$20{,}6457 \cdot a^2$	$7{,}6631 \cdot a^3$
ikozaedar	20 trokuta	30	12	$8{,}6603 \cdot a^2$	$2{,}1817 \cdot a^3$

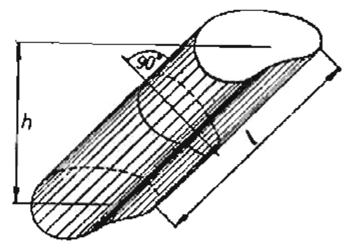
Eulerov teorem. Ako je e broj vrhova poliedra, f broj strana i k broj bridova, tada je $e - k + f = 2$ (pod uvjetom da je poliedar konveksan ili da se može napraviti konveksnim pomoću neprekinute deformacije). *Primjere* vidi u tablici pravilnih poliedara.

5. OBLA TIJELA

Oznake: V je volumen, S je ukupna površina, M je površina plašta, h je visina, F je površina baze.



Sl. 117



Sl. 118

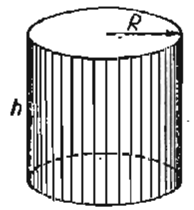
Valjkastu plohu (sl. 117) proizvodi pravac (*izvodnica*) koji pomičemo paralelno sa zadanim smjerom duž neke krivulje (*ravnalice*).

Valjak je tijelo omeđeno valjkastom plohom sa zatvorenom ravnalicom i sa dvije paralelne ravnine koje su baze valjka. Za valjak (sl. 118) (p je opseg baze, s je opseg presjeka okomitog na izvodnicu, Q je površina presjeka, l je duljina izvodnice) je:

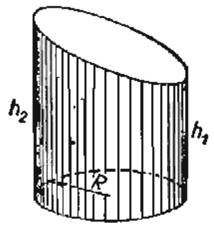
$$M = ph = sl; \quad V = Fh = Ql.$$

Kružni uspravni valjak ima za bazu krug, a izvodnice su mu okomite na ravninu baze (sl. 119); R je polumjer baze:

$$M = 2\pi Rh; \quad S = 2\pi R(R+h); \quad V = \pi R^2 h.$$



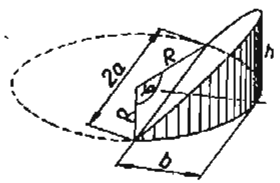
Sl. 119



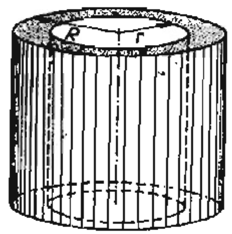
Sl. 120

Krnji kružni valjak (sl. 120): $M = \pi R(h_1 + h_2)$,

$$S = \pi R\left[h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}\right]; \quad V = \pi R^2 \frac{h_1 + h_2}{2}.$$



Sl. 121



Sl. 122

Odsječak (segment) valjka (oznake vidi na sl. 121; $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ u radijanima):

$$V = \frac{h}{3b}\left[a(3R^2 - a^2) + 3R^2(b - R)\alpha\right] =$$

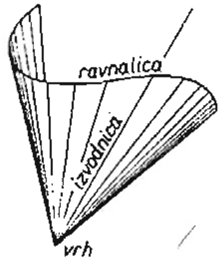
$$= \frac{hR^3}{b}\left(\sin\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{3} - \alpha\cos\alpha\right). \qquad M = \frac{2Rh}{a}\left[(b - R)\alpha + a\right]$$

(formule vrijede i za slučaj kada je $b > R$, $\varphi > \pi$).

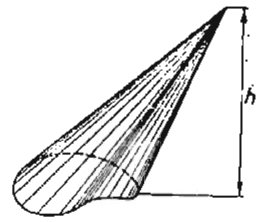
Valjkasta cijev (sl. 122). R i r su vanjski i unutarnji polumjeri $\delta = R - r$, $\rho = \frac{R + r}{2}$ (srednji polumjer):

$$V = \pi h(R^2 - r^2) = \pi h\delta(2R - \delta) = \pi h\delta(2r + \delta) = 2\pi h\delta\rho.$$

Čunjastu plohu (sl. 123) proizvodi pravac (*izvodnica*) koji prolazi nepomičnom tačkom (vrhom) i pomiče se duž krivulje (*ravnalice*).



Sl. 123

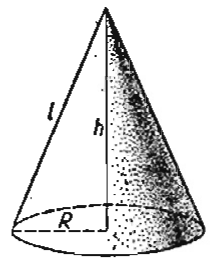


Sl. 124

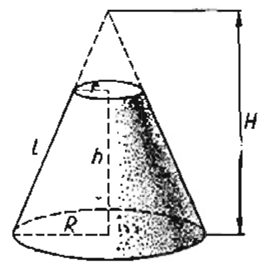
Čunj (stožac) (sl. 124) je omeđen čunjastom plohom sa zatvorenom ravnalicom i plohom baze. Za stožac je $V = \frac{1}{3} hF$.

Kružni uspravni čunj (sl. 125) ima za bazu krug, a visina mu prolazi kroz središte baze (l je duljina izvodnice, R je polumjer baze):

$$M = \pi Rl = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}; \qquad S = \pi R(R + l); \qquad V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$



Sl. 125



Sl. 126

Za uspravni krnji čunj (sl. 126) je:

$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}; \qquad M = \pi l(R + r);$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr); \qquad H = h + \frac{hr}{R - r}.$$

Čunjosječnice vidi na str. 242.

Kugla. R je polumjer kugle, $D = 2R$ je promjer kugle (sl. 127). Svaki presjek kugle s ravninom daje krug. *Glavna kružnica* je kružnica polumjera R, koju dobivamo presjekom kugle s ravninom kroz središte kugle. Kroz svake dvije tačke na kugli (koje ne leže dijametralno) uvijek možemo povući samo jednu glavnu kružnicu. Manji luk te glavne kružnice je najkraća udaljenost između te dvije tačke na kugli. O geometriji na kugli vidi str. 217 do 219.

Površina i volumen kugle:

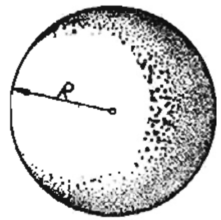
$$S = 4\pi R^2 \approx 12{,}57R^2, \quad S = \pi D^2 \approx 3{,}142D^2,$$

$$S = \sqrt[3]{36\pi V^2} \approx 4{,}836\sqrt[3]{V^2},$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4{,}189R^3, \quad V = \frac{\pi D^3}{6} \approx 0{,}5236D^3,$$

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{S^3}{\pi}} \approx 0{,}09403\sqrt{S^3};$$

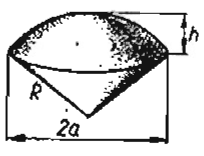
$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 0{,}2821\sqrt{S}; \qquad R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 0{,}6204\sqrt[3]{V}.$$



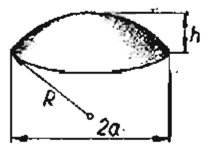
Sl. 127

Kuglin isječak (sektor) (sl. 128):

$$S = \pi R\,(2h + a); \quad V = \frac{2\pi R^2 h}{3}.$$



Sl. 128



Sl. 129

Kuglin odsječak (segment) (Sl. 129):

$$a^2 = h\,(2R - h); \qquad M = 2\pi Rh = \pi\,(a^2 + h^2);$$

$$S = \pi\,(2Rh + a^2) = \pi\,(h^2 + 2a^2);$$

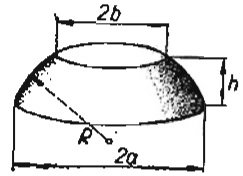
$$V = \frac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2\,(3R - h).$$

Kuglin sloj (sl. 130):

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2; \quad M = 2\pi Rh;$$

$$S = \pi\,(2Rh + a^2 + b^2); \qquad V = \frac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

Ako je V_1 volumen krnjeg stošca, upisanog u kuglin sloj (sl. 131) i l njegova izvodnica, tada je $V - V_1 = \frac{1}{6}\pi h l^2$.



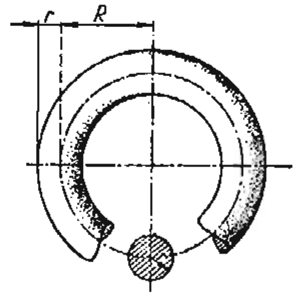
Sl. 130

Sl. 131

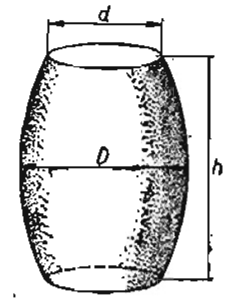
Torus (sl. 132) je ploha koju dobivamo vrtnjom kružnice oko osi koja leži u ravnini te kružnice i ne siječe je.

$$S = 4\pi^2 Rr \approx 39{,}48\,Rr, \quad S = \pi^2 Dd \approx 9{,}870\,Dd,$$

$$V = 2\pi^2 Rr^2 \approx 19{,}74Rr^2, \quad V = {}^1/_4\pi^2 Dd^2 \approx 2{,}467Dd^2.$$



Sl. 132



Sl. 133

Bačva (sl. 133). Za okruglu bačvu (izvodnica je kružni luk) približno je:

$$V = 0{,}262h\,(2D^2 + d^2) \quad \text{ili} \quad V = 0{,}0873h\,(2D + d)^2.$$

Za parabolnu bačvu je:

$$V = \frac{\pi h}{15}\left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2\right) = 0{,}05236h\,(8D^2 + 4Dd + 3d^2).$$

IV. TRIGONOMETRIJA

A. RAVNINSKA TRIGONOMETRIJA

1. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

Mjerenje kutova radijanima. Usporedo s mjerenjem kutova u *stupnjevima*, uobičajenim u praksi, u teoretske svrhe primjenjujemo mjerenje kutova u *radijanima:* veličina kuta α — središnjeg za neku kružnicu — mjeri se omjerom duljine luka l na koji se taj kut odnosi, prema polumjeru r te kružnice: $\alpha = \frac{l}{r}$.

Pri tom mjerenju za jedinicu uzimamo *radijan*, tj. kut koji je središnji za luk duljine jednake polumjeru kružnice. 1 radijan iznosi 57°17′44″,8 ili 57°,2958; 1° = 0,017453 radijana. Prelaz od jednog mjerenja na drugo provodi se po formulama:

$$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi}\,\alpha\,(\text{radijana})^*, \qquad \alpha\,(\text{radijana}) = \frac{\pi}{180}\,\alpha^\circ .$$

Posebno je $360^\circ = 2\pi$, $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ itd.
Tablicu za preračunavanje stupnjeva u radijane vidi na str. 78.

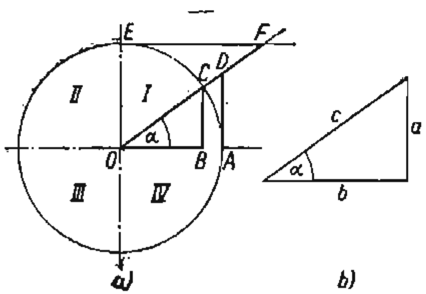
Definicije. *Trigonometrijske funkcije* kuta α određujemo pomoću trigonometrijskog kruga** (polumjer $R = 1$), te iz pravokutnog trokuta (za šiljaste kutove) (sl. 134 *a* i *b*).

sinus: $\sin\alpha = BC = \frac{a}{c}$,

kosinus: $\cos\alpha = OB = \frac{b}{c}$,

tangens: $\operatorname{tg}\alpha = AD = \frac{a}{b}$,

kotangens: $\operatorname{ctg}\alpha = EF = \frac{b}{a}$,



Sl. 134

* Radijan nema specijalnu oznaku; kut od α radijana označujemo sa »α«.
** Kut α mjerimo od *nepomičnog* polumjera OA do pomičnog polumjera OC suprotno gibanju kazaljke na satu (pozitivni smisao).

sekans: $\operatorname{sc}\alpha = OD = \frac{c}{b}$, *kosekans:* $\csc\alpha = OF = \frac{c}{b}$.

Predznaci. Funkcijama dajemo određeni predznak, zavisno o tome u kojem kvadrantu trigonometrijskog kruga (sl. 134 *a*) leži *pomični* polumjer *OC*, po ovoj tablici:

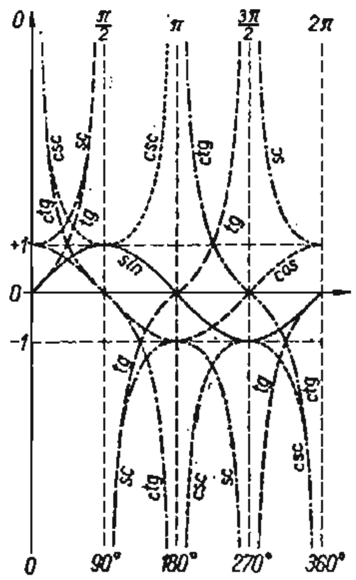
Kvadrant	Veličina kuta	sin	cos	tg	ctg	sc	csc
I	od 0° do 90°	+	+	+	+	+	+
II	od 90° do 180°	+	—	—	—	—	+
III	od 180° do 270°	—	—	+	+	—	—
IV	od 270° do 360°	—	+	—	—	+	—

Granice izmjena:

sinus i kosinus: od -1 do $+1$,
tangens i kotangens: od $-\infty$ do $+\infty$,
sekans i kosekans: od $-\infty$ do -1 i od $+1$ do $+\infty$.

Vrijednosti funkcija za kutove koji su višekratnici od 30° i 45° navedene su u tablici na str. 206.

Karakter mijenjanja trigonometrijske funkcije pri povećavanju kuta od 0° do 360° prikazuje graf na sl. 135*.



Sl. 135

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija *nekog* kuta nalazimo po ovim pravilima:

1) Ako je kut veći od 360°, onda funkciju svodimo na funkciju kuta između 0° i 360° (a tangens i kotangens na kutove između 0° i 180°) po formulama (n je cijeli broj):

$$\sin(360^\circ \cdot n + \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(360^\circ \cdot n + \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(180^\circ \cdot n + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(180^\circ \cdot n + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

* Graf sinusa je uobičajena sinusoida; o općenitijim sinusoidama vidi na str. 105.

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija za kutove višekratnike od 30° i 45° $\left(\frac{\pi}{6} \text{ i } \frac{\pi}{4}\right)$

Funkcija	Kutovi; I kvadrant					Kutovi; II kvadrant				Kutovi; III kvadrant				Kutovi; IV kvadrant			
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{5}{6}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$
sc	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\pm\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
csc	$\mp\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\mp\infty$

2) Ako je kut negativan, onda funkciju svodimo na funkciju pozitivnog kuta, po formulama:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

3) Ako je $90° < \alpha < 360°$, onda funkciju svodimo na funkciju šiljastog kuta po formulama za redukciju (vidi niže).

4) Ako je kut šiljast: $0° < \alpha < 90°$, vrijednost funkcije naći ćemo u tablicama (str. 55...58). Na primjer: $\sin(-1000°) = -\sin 1000° = -\sin(360° \cdot 2 + 280°) = -\sin 280° = +\cos 10° = +0{,}9848$*.

Formule za redukciju

Funkcija	$\beta = 90° \pm \alpha$	$\beta = 180° \pm \alpha$	$\beta = 270° \pm \alpha$	$\beta = 360° - \alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

2. OSNOVNE TRIGONOMETRIJSKE FORMULE

Funkcije jednog kuta:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1,$$
$$\operatorname{sc}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = 1, \qquad \cos\alpha \cdot \operatorname{sc}\alpha = 1,$$
$$\csc^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = 1, \qquad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Izražavanje jedne funkcije pomoću druge (istoga kuta)**:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{\operatorname{sc}^2\alpha - 1}}{\operatorname{sc}\alpha} = \frac{1}{\csc\alpha},$$

---

* Vrijednosti funkcija za kutove zadane u radijanima nalaze se u tablicama na str. 59 do 62, koje su sastavljene za vrijednosti argumenata od 0 do 1,60. Ako zadani kut prelazi granice tablica, onda ćemo se poslužiti istim pravilima i formulama za redukciju, kao kad je kut zadan u stupnjevima

[na primjer, $\sin(2\pi + x) = \sin x$, $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ itd.].

** U tim formulama ispred znaka korijena moramo postaviti predznak »plus« ili »minus«, prema tome u kome se kvadrantu kut nalazi.

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{sc}\alpha} = \frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \sqrt{\operatorname{sc}^2-1} = \frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sc}^2\alpha-1}} = \sqrt{\csc^2\alpha-1}.$$

Funkcije zbroja i razlike kutova:

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad \operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp 1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$
$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Funkcije višekratnih kutova:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$
$$\sin 4\alpha = 8\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha,$$
$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1};$$

$$\operatorname{tg}4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha - 6\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{4\operatorname{ctg}^3\alpha - 4\operatorname{ctg}\alpha};$$

$\sin n\alpha$ i $\cos n\alpha$ za veće n prikladnije određujemo pomoću Moivreove formule za kompleksne brojeve (str. 579)*:

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + in\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha - i\,C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha + \ldots,$$

* C_n^k je binomni koeficijent (vidi str. 186).

odakle je:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - C_n^6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha + \ldots,$$
$$\sin n\alpha = n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \ldots.$$

Funkcije polovičnog kuta*:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1/2\,(1-\cos\alpha)}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1/2\,(1+\cos\alpha)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Zbroj i razlika funkcija:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

Produkt funkcija:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)],$$

* Vidi opasku** na str. 207.

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{4}\,[\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+ \\ +\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}\,[\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+ \\ +\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}\,[-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+ \\ +\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}\,[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+ \\ +\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)].$$

Potencije funkcija:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \qquad \sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha),$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha); \qquad \cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha),$$

$$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}\,(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3),$$

$$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}\,(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3).$$

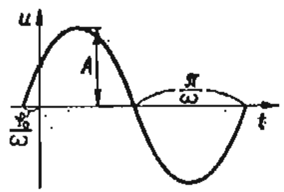
Za računanje $\sin^n\alpha$ i $\cos^n\alpha$ pri većim n možemo postupno upotrijebiti formule za $\cos n\alpha$ i $\sin n\alpha$ na str. 209.

3. SINUSNE VELIČINE

Definicije. U mnogim problemima mehanike i fizike razmatramo veličine koje su ovisne o vremenu t i izražavaju se formulom:

$$u = A\sin(\omega t+\varphi); \qquad (*)$$

takove veličine nazivamo *sinusnim*, a njihove vremenske promjene nazivamo *harmonijskim titranjem*. Graf funkcije $(*)$ jest *opća sinusoida* (sl. 136) koja se od obične ($y = \sin x$) razlikuje po ovome: 1) njena *amplituda* (širina njihaja), tj. najveći otklon od osi t, je A, 2) njen *period* T (»*duljina vala*«) je $\frac{2\pi}{\omega}$ (ω nazivamo *frekvencijom* titranja)*, 3) njena »*početna faza*« je kut φ.



Sl. 136

* U teoriji titranja tu veličinu obično nazivamo *cikličkom* ili *kružnom frekvencijom*.

Veličinu $(*)$ možemo predočiti u obliku:

$$r = a\sin\omega t + b\cos\omega t, \qquad (**)$$

pri čemu je $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$; veličine a, b, A i φ možemo predočiti elementima pravokutnog trokuta (sl. 137).

Matematičke operacije sa sinusnim veličinama

Zbroj dviju sinusnih veličina jednake frekvencije ω također je sinusna veličina iste frekvencije:

$$A_1\sin(\omega t+\varphi_1)+A_2\sin(\omega t+\varphi_2) = A\sin(\omega t+\varphi),$$

pri čemu je:

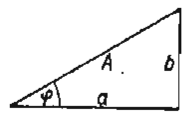
$$A = \sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2};$$

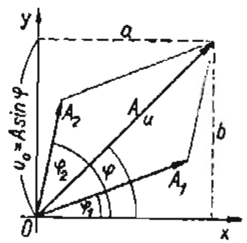
linearna kombinacija nekoliko sinusnih veličina s jednakom frekvencijom jest sinusna veličina iste frekvencije:

$$\Sigma\, c_i A_i \sin(\omega t+\varphi_i) = A\sin(\omega t+\varphi);$$

A i φ naći ćemo grafički u vektorskom dijagramu.



Sl. 137



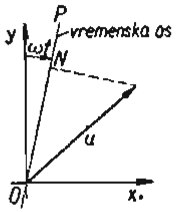
Sl. 138

Vektorski dijagram sinusnih veličina. Sinusnu veličinu $(*)$ ili $(**)$ prikladno je prikazati u ravnini u obliku radijvektora u s polarnim koordinatama $\rho = A$, φ i Descartesovim $x = a$, $y = b$

(vidi str. 226 i 227); zbroj dviju sinusnih veličina prikazujemo sumom vektora koji predstavljaju pojedine sumande (sl. 138), a linearnu kombinaciju nekoliko sinusnih veličina odgovarajućom linearnom kombinacijom vektora. Tako prikazane sinusne veličine obično nazivamo *vektorskim dijagramom.*

U vektorskom dijagramu veličinu u, koja odgovara zadanoj vrijednosti t, dobivamo na ovaj način:

Kroz ishodište O (sl. 139) povučemo »*vremensku os*« — os OP koja se okreće oko O u smjeru gibanja kazaljke na satu konstantnom kutnom brzinom ω; u početnom trenutku ($t = 0$) ta se os poklapa sa osi Oy. Tada je projekcija ON promatranog vektora $\mathbf{u}$ na vremensku os za svaki trenutak t jednaka vrijednosti sinusne veličine: $u = A \sin(\omega t + \varphi)$ (za $t = 0$, $u_0 = A \sin\varphi$ je projekcija $\mathbf{u}$ na os Oy, sl. 138).



Sl. 139

4. RJEŠAVANJE TROKUTA

Pravokutni trokut; a i b su katete, c je hipotenuza; A i B su kutovi nasuprot stranicama a i b.

Osnovni odnosi: $a = c \sin A = c \cos B$, $a = b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B$.

Zadano	Formule za računanje drugih elemenata		
c, A	$B = 90° - A$,	$a = c \sin A$,	$b = c \cos A$,
a, A	$B = 90° - A$,	$b = a \operatorname{ctg} A$,	$c = \dfrac{a}{\sin A}$,
a, c	$\sin A = \dfrac{a}{c}$,	$b = c \cos A$,	$B = 90° - A$,
a, b	$\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$,	$c = \dfrac{a}{\sin A}$,	$B = 90° - A$.

Kosokutni trokut: a, b i c su stranice, A, B i C su kutovi nasuprot stranicama, S je površina, R je polumjer opisane kružnice, r je polumjer upisane kružnice, p je polovina opsega

$$[p = {}^1/_2 (a + b + c)].$$

Osnovni odnosi:

1) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ (»sinusov poučak«)

2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (»kosinusov poučak«)

3) $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg} {}^1/_2 (A+B)}{\operatorname{tg} {}^1/_2 (A-B)}$ (»tangensov poučak«)

4) $S = {}^1/_2\, ab \sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C =$
$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

Dopunski odnosi:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \sin B}{c - a \cos B},$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos[{}^1/_2 (A-B)]}{\cos[{}^1/_2 (A+B)]} = \frac{\cos[{}^1/_2 (A-B)]}{\sin {}^1/_2\, C},$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin[{}^1/_2 (A-B)]}{\sin[{}^1/_2 (A+B)]} = \frac{\sin[{}^1/_2 (A-B)]}{\cos {}^1/_2\, C}.$$

Računanje duljina vezanih uz trokut:

Visina na stranicu a: $h_a = b \sin C = c \sin B$.

Težišnica na stranicu a: $m_a = \dfrac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}$.

Simetrala kuta A: $l_A = \dfrac{2bc \cos \dfrac{A}{2}}{b + c}$.

Polumjer opisane kružnice: $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$.

Polumjer upisane kružnice: $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} =$

$$= p \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Zadano	Formule za računanje ostalih elemenata
1) Stranica i 2 kuta (a, A, B)	$C = 180° - A - B$, $b = \frac{a\sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$, $S = \frac{1}{2}ab\sin C$
2) 2 stranice i kut među njima (a, b, C)	$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$, $\frac{A+B}{2} = 90° - {}^1/_2\, C$ Dobivši $A+B$ i $A-B$, naći ćemo A i B, $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$, $S = \frac{1}{2}ab\sin C$
3) 2 stranice i kut nasuprot jednoj stranici (a, b, A)	$\sin B = \frac{b\sin A}{a}$ Ako je $a \geqslant b$, onda je $B < 90°$ i ima samo jednu vrijednost; ako je $a < b$, onda: 1) B ima dvije vrijednosti za $b\sin A < a$ $(B_2 = 180° - B_1)$. 2) B ima jednu vrijednost (90°) za $b\sin A = a$. 3) Trokut je nemoguć za $b\sin A > a$; $C = 180° - (A+B)$, $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$, $S = \frac{1}{2}ab\sin C$
4) 3 stranice (a, b, c)	$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$, $S = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

5. CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE (INVERZNE TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE) ILI ARKUS-FUNKCIJE

Definicije. *Arkus*-funkcijama od x (»*inverznim trigonometrijskim*«) nazivamo veličine y, određene jednadžbama:

$$\left.\begin{array}{ll} y = \operatorname{Arc}\sin x \ (\textit{arkus-sinus}), & \text{ako je } x = \sin y, \\ y = \operatorname{Arc}\cos x \ (\textit{arkus-kosinus}), & \text{ako je } x = \cos y, \\ y = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x \ (\textit{arkus-tangens}), & \text{ako je } x = \operatorname{tg} y, \\ y = \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x \ (\textit{arkus-kotangens}), & \text{ako je } x = \operatorname{ctg} y. \end{array}\right\} \ y \text{ mjerimo u radijanima}$$

Primjeri:

$\operatorname{Arc}\sin 0 = 0$ ili π ili 2π, općenito $\operatorname{Arc}\sin 0 = k\pi$,

$\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ ili $-\frac{\pi}{3}$ ili $\frac{\pi}{3} + 2\pi$, općenito

$$\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} 1 = \frac{\pi}{4}$ ili $\frac{5\pi}{4}$, općenito $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

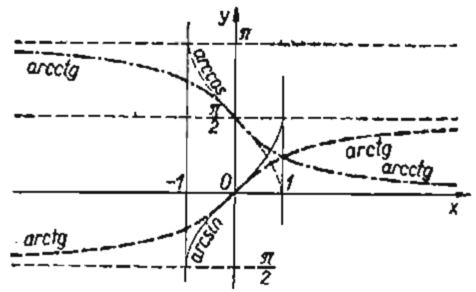
Glavne vrijednosti. Arkus-funkcije su *višeznačne*; njihove *glavne vrijednosti* (označujemo ih sa: $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$) ograđene su:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant +\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc}\operatorname{tg} x < +\frac{\pi}{2},$$

$$0 < \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x < \pi.$$



Sl. 140

Grafove arkus-funkcija vidi na str. 108 i 109; grafovi njihovih glavnih vrijednosti prikazani su na sl. 140.

Izražavanje jednih arkus-funkcija s drugima*

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \left[\arccos\sqrt{1-x^2}\right] =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right],$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \left[\arcsin\sqrt{1-x^2}\right] =$$

$$= \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right] = \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,tg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \left[\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right] = \left[\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}\right],$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \pi - \operatorname{arc\,ctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x =$$

$$= \left[\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right] = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right].$$

Osnovni odnosi među arkus-funkcijama:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \qquad [xy \leqslant 0 \quad \text{ili} \quad x^2+y^2 \leqslant 1]$$

$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \qquad [x > 0, \quad y > 0 \quad \text{i} \quad x^2+y^2 > 1]$$

$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \qquad [x < 0, y < 0 \quad \text{i} \quad x^2+y^2 > 1],$$

* Ove formule tačne su samo za glavne vrijednosti arkus-funkcija, a formule u uglatim zagradama samo za pozitivne vrijednosti x (jer su granice glavnih vrijednosti različito određene za razne funkcije).

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \qquad [xy \geqslant 0 \quad \text{ili} \quad x^2+y^2 \leqslant 1]$$

$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \qquad [x > 0, \quad y < 0 \quad \text{i} \quad x^2+y^2 > 1]$$

$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \qquad [x < 0, \quad y > 0 \quad \text{i} \quad x^2+y^2 > 1],$$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \qquad [x+y \geqslant 0]$$

$$= 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \qquad [x+y < 0],$$

$$\arccos x - \arccos y = -\arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \qquad [x \geqslant y]$$

$$= \arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \qquad [x < y],$$

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy} \qquad [xy < 1]$$

$$= \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy} \qquad [x > 0, \quad xy > 1]$$

$$= -\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy} \qquad [x < 0, \quad xy > 1],$$

$$\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy} \qquad [xy > -1]$$

$$= \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy} \qquad [x > 0, \quad xy < -1]$$

$$= -\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy} \qquad [x < 0, \quad xy < -1],$$

$$2\arcsin x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \qquad \left[|x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \qquad \left[\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leqslant 1\right]$$

$$= -\pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \qquad \left[-1 \leqslant x < -\frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

$$2 \operatorname{arc} \cos x = \operatorname{arc} \cos (2x^2 - 1) \qquad [0 \leqslant x \leqslant 1]$$
$$= 2\pi - \operatorname{arc} \cos (2x^2 - 1) \qquad [-1 \leqslant x < 0],$$
$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{1 - x^2} \qquad [|x| < 1]$$
$$= \pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{1 - x^2} \qquad [x > 1]$$
$$= -\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{1 - x^2} \qquad [x < -1]$$
$$\cos (n \operatorname{arc} \cos x) = 2^{n-1} T_n(x) \qquad (n \geqslant 1^*),$$

pri čemu se $T_n(x)$ određuje jednadžbom:

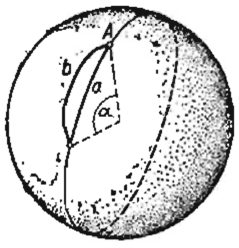
$$T_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n}{2^n}.$$

Ako je n cijeli broj, $T_n(x)$ je polinom od x (*polinom Čebiševa*).

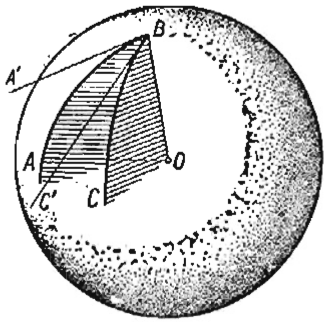
B. SFERNA TRIGONOMETRIJA

6. GEOMETRIJA NA KUGLI (SFERI)

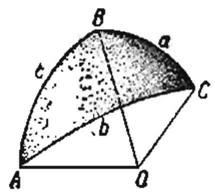
Geodetske linije na kugli. Presiječemo li kuglu ravninom kroz njeno središte, dobivamo na površini kugle (*sfere*) tzv. *glavnu kružnicu* kojoj je polumjer jednak polumjeru kugle. Kroz svake dvije tačke A i B na kugli (s izuzetkom dijametralnih) možemo



Sl. 141



Sl. 142



Sl. 143

povući jednu glavnu kružnicu; njezin manji luk AaB (sl. 141) je najkraća linija (npr. AbB) na kugli koja spaja te tačke (takozvana *geodetska linija*** na kugli) i na kugli igra istu ulogu kao i pravac u ravnini.

* Formula važi i za n koji nije cijeli broj.
** Vidi na str. 301.

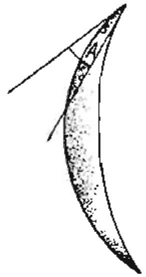
Mjerenje lukova i kutova na kugli. Duljina luka glavne kružnice, $\smile a$ sa središnjim kutom α (u radijanima), jednaka je $R\alpha$, gdje je R polumjer kugle. Za jednu istu kuglu prikladno je za jedinicu mjerenja luka uzeti polumjer R; tada je $\smile a = \alpha$. U narednim formulama primijenjena je ta jedinica za mjerenje.

Kut ABC što ga na kugli čine dva luka glavnog kruga (sl. 142) mjerimo kutom $A'BC'$ među tangentama na te lukove u tački B ili, što je isto, plošnim kutom koji tvore plohe OBA i OBC.

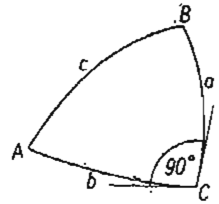
Sferni trokut. Tri glavne kružnice tvore na kugli nekoliko sfernih trokuta. Od njih ćemo promatrati onaj, kome su sve stranice i svi kutovi manji od 180°. Stranice trokuta a, b i c i kutove A, B i C mjerimo stranicama i kutovima pripadnog trobrida $OABC$ (sl. 143; O je središte kugle).

Osnovna svojstva sfernog trokuta: zbroj njegovih kutova $A + B + C$ uvijek je veći od 180°. Razliku $(A + B + C) - \pi = \delta$ izraženu u radijanima nazivamo *sfernim ekscesom* zadanog sfernog trokuta.

Površina sfernog trokuta: $S = R^2\delta$, gdje je R polumjer kugle, a δ je sferni eksces. *Površina sfernog dvokuta* koji čine dva luka glavnih kružnica (sl. 144) je $S = 2R^2A$ ($\sphericalangle A$ izražen u radijanima).



Sl. 144



Sl. 145

7. RJEŠAVANJE SFERNIH TROKUTA

Pravokutni trokuti (a i b su katete, c je hipotenuza, A i B su kutovi nasuprot stranica a i b, sl. 145).

Osnovni odnosi:

1) $\sin a = \sin c \sin A$,	6) $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos B$,
2) $\sin b = \sin c \sin B$,	7) $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A$,
3) $\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} A$,	8) $\cos B = \cos b \sin A$,
4) $\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} B$,	9) $\cos A = \cos a \sin B$,
5) $\cos c = \cos a \cos b$,	10) $\cos c = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B$.

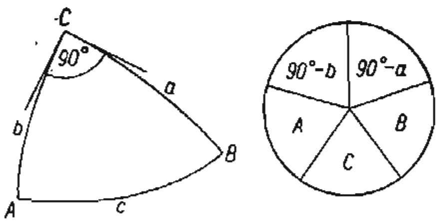
Zadano	Broj formule za računanje ostalih elemenata
Hipotenuza i kut: c, A	a (1), b (7), B (10)
Kateta i nasuprotni kut: a, A	b (3), c (1), B (9)
Kateta i susjedni kut: a, B	b (4), c (6), A (9)
Dvije katete: a, b	c (5), A (3), B (4)
Dva kuta: A, B	a (9), b (8), c (10)

Formule 1 do 10 možemo dobiti iz ovog *Neperovog pravila:* ako rasporedimo pet elemenata pravokutnog trokuta (bez pravog kuta) po kružnici redom kako se oni nalaze u trokutu i zamijenimo katete a i b s njihovim komplementarnim kutovima (sl. 146), tada je:

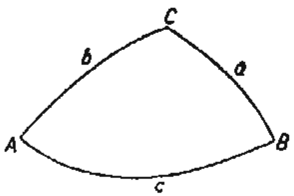
1) kosinus svakog elementa jednak produktu kotangensa dvaju susjednih mu elemenata.

2) kosinus svakog elementa jednak produktu sinusa dvaju suprotnih mu elemenata.

Npr.: $\cos A = \operatorname{ctg}(90° - b) \operatorname{ctg} c$, $\cos(90° - a) = \sin c \sin A$.



Sl. 146



Sl. 147

Kosokutni trokuti (A, B i C su kutovi trokuta; a, b i c su nasuprotne stranice, sl. 147).

Osnovni odnosi:

1) $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$ (»sinusov poučak«),

2) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$,

3) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

(2 i 3 su »kosinusovi poučci«),

4) $\sin a \operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} B \sin C + \cos a \cos C$,

5) $\sin A \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} b \sin c - \cos A \cos c$.

Zadano	Broj formule za računanje ostalih elemenata
Tri stranice: a, b, c	A (2), B i C (1)
Tri kuta: A, B, C	a (3), b i c (1)
Dvije stranice i kut među njima: a, b, C	B (4), A i c (1)
Dva kuta i stranica među njima: A, B, c	b (5), a i C (1)
Dvije stranice i kut nasuprot jednoj od stranica: a, b, B	A (1), c (5), C (1)
Dva kuta i stranica nasuprot jednom od kutova: A, B, b	a (1), C (4), c (1)

C. HIPERBOLNA TRIGONOMETRIJA*

8. HIPERBOLNE FUNKCIJE

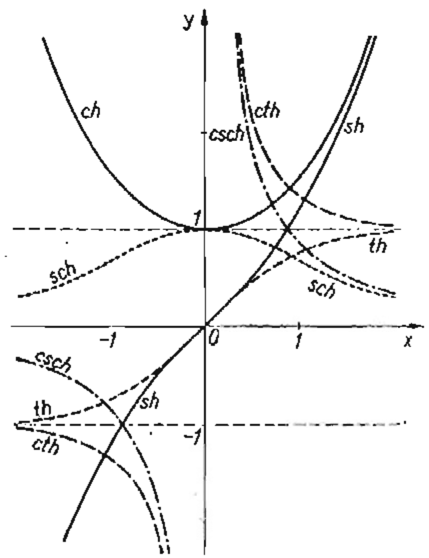
Određivanje hiperbolnih funkcija

Sinus hiperbolni (skraćeno sh), *kosinus hiperbolni* (ili ch) i *tangens hiperbolni* (ili th) određeni su formulama:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$



Sl. 148

Geometrijsko određivanje hiperbolnih funkcija analogno je određivanju trigonometrijskih funkcija (sinus, kosinus, tangens) vidi dalje (str. 224 i 225).

* Pod tim nazivom sabrani su elementarni podaci o hiperbolnim funkcijama, analogni podacima o trigonometrijskim funkcijama.

Hiperbolni kotangens, sekans i *kosekans* određeni su kao recipročne veličine:

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Tok hiperbolnih funkcija vidi se iz grafova prikazanih na sl. 148. Vidi također tekst na str. 109.

Tablice hiperbolnih funkcija vidi na str. 59 do 62.

9. OSNOVNE FORMULE HIPERBOLNE TRIGONOMETRIJE

Za hiperbolne funkcije vrijede formule analogne formulama za trigonometrijske funkcije (str. 207 i 208)*.

Funkcije jednog argumenta:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \qquad \operatorname{sch}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1, \qquad \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1,$$

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x, \qquad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x.$$

Izražavanje jedne funkcije pomoću druge (istog argumenta):

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sch}^2 x}}{\operatorname{sch} x} = \frac{1}{\operatorname{csch} x},$$

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{sch} x} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{csch}^2 x}}{\operatorname{csch} x},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{cth} x} = \sqrt{1 - \operatorname{sch}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{csch}^2 x}},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sch}^2 x}} = \sqrt{\operatorname{csch}^2 x + 1}.$$

* Te formule možemo dobiti iz odgovarajućih formula za trigonometrijske funkcije pomoću jednostavnog pravila, vidi dalje, str. 223.

Funkcije zbroja i razlike dvaju argumenata:

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \qquad \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}.$$

Funkcije dvostrukog argumenta:

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{th} 2x = 2 \operatorname{th} x : (1 + \operatorname{th}^2 x),$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x, \qquad \operatorname{cth} 2x = (1 + \operatorname{cth}^2 x) : 2 \operatorname{cth} x.$$

Moivreova formula (vidi str. 208):

$$(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx$$

Funkcije polovičnog argumenta:

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(\operatorname{ch} x - 1)}^{*}, \qquad \operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1},$$

$$\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\operatorname{ch} x + 1)}, \qquad \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x}.$$

Zbroj i razlika funkcija:

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \tfrac{1}{2}(x \pm y) \operatorname{ch} \tfrac{1}{2}(x \mp y),$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \tfrac{1}{2}(x + y) \operatorname{ch} \tfrac{1}{2}(x - y),$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \tfrac{1}{2}(x + y) \operatorname{sh} \tfrac{1}{2}(x - y),$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}.$$

Veza između hiperbolnih i trigonometrijskih funkcija:**

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \qquad \operatorname{sh} z = -i \sin iz,$$

$$\cos z = \operatorname{ch} iz, \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz,$$

$$\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, \qquad \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz,$$

$$\operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz, \qquad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz;$$

Svaku formulu koja međusobno povezuje hiperbolne funkcije od x ili ax (ali ne od $ax + b$) možemo dobiti iz odgovarajuće formule koja povezuje trigonometrijske funkcije od α (str. 207 i 208) zamjenom $\sin \alpha$ sa $i \operatorname{sh} x$ i $\cos \alpha$ sa $\operatorname{ch} x$. *Npr.:* $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$,

$$\operatorname{ch}^2 x + i^2 \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \text{ili} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$i \operatorname{sh} 2x = 2i \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \quad \text{ili} \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \text{ itd.}$$

* Predznak »+« za $x > 0$ i »—« za $x < 0$.

** O funkcijama kompleksnih varijabli vidi na str. 582.

10. INVERZNE HIPERBOLNE FUNKCIJE

Definicije: *Inverznim hiperbolnim funkcijama (»area-funkcijama«)* x nazivamo veličine određene jednadžbama:

$$
\begin{aligned}
y &= \operatorname{Arsh} x \quad (\textit{area-sinus}), && \text{ako je } x = \operatorname{sh} y,\\
y &= \operatorname{Arch} x \quad (\textit{area-kosinus}), && \text{ako je } x = \operatorname{ch} y,\\
y &= \operatorname{Ar th} x \quad (\textit{area-tangens}), && \text{ako je } x = \operatorname{th} y,\\
y &= \operatorname{Ar cth} x \quad (\textit{area-kotangens}), && \text{ako je } x = \operatorname{cth} y.
\end{aligned}
$$

Nazivi potječu od riječi area (površina), jer area-funkcije možemo predočiti površinom hiperbolnog sektora (vidi dalje).

Izražavanje logaritmima. U skladu s formulama na str. 221 i 222 imamo ove izraze area-funkcija pomoću logaritama:

$$\operatorname{Ar sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad \operatorname{Ar th} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (|x|<1),$$

$$\operatorname{Ar ch} x = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geqslant 1),$$

$$\operatorname{Ar cth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \quad (|x|>1).$$

Grafove area-funkcija vidi na str. 111.

Izražavanje jedne funkcije pomoću druge:

$$\operatorname{Ar sh} x = \pm \operatorname{Ar ch} \sqrt{x^2+1}^{\,*} = \operatorname{Ar th} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arcth} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x},$$

$$\operatorname{Ar ch} x = \pm \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2-1} = \pm \operatorname{Ar th} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \pm \operatorname{Ar cth} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$\operatorname{Ar th} x = \operatorname{Ar sh} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \operatorname{Ar ch} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}^{\,*} = \operatorname{Ar cth} \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{Ar cth} x = \operatorname{Ar sh} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \pm \operatorname{Ar ch} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}^{\,*} = \operatorname{Ar th} \frac{1}{x}.$$

Neki odnosi među inverznim hiperbolnim funkcijama:

$$\operatorname{Ar sh} x \pm \operatorname{Ar sh} y = \operatorname{Ar sh}\left(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}\right),$$

$$\operatorname{Ar ch} x \pm \operatorname{Ar ch} y = \operatorname{Ar ch}\left(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right),$$

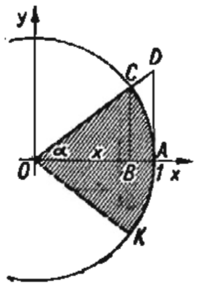
$$\operatorname{Ar th} x \pm \operatorname{Ar th} y = \operatorname{Ar th} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}.$$

* Predznak »+« za $x > 0$ i »—« za $x < 0$.

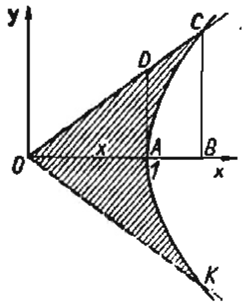
11. GEOMETRIJSKO ODREĐIVANJE HIPERBOLNIH FUNKCIJA

U trigonometrijskom krugu (str. 204) odredili smo funkcije $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ kao odsječke BC, OB, AD (pri $R = 1$), a argument α bio je središnji kut AOC. Za argument smo mogli uzeti veličinu x, jednaku površini (šrafiranoj na sl. 149) sektora COK sa središnjim kutom 2α, jer je $x = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\alpha = \alpha$ $[R = 1$, α mjeren u radijanima]. Time je: $\sin x = BC$, $\cos x = OB$, $\operatorname{tg} x = AD$.

Razmatrajući analogne funkcije površine, ali ne za kružnicu s jednadžbom $x^2 + y^2 = 1$ nego za istostranu hiperbolu s jednadžbom $x^2 - y^2 = 1$ (promatramo samo njenu desnu granu) i označujući sa x površinu analognog sektora COK (šrafiranog na sl. 150), definiramo hiperbolne funkcije: $\operatorname{sh} x = BC$; $\operatorname{ch} x = OB$; $\operatorname{th} x = AD$.



Sl. 149



Sl. 150

Ako površinu x* računamo metodom integralnog računa dobivamo izraze za BC, OB, AD:

$$x = \ln\left(BC + \sqrt{BC^2+1}\right) = \ln\left(OB + \sqrt{OB^2-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+AD}{1-AD},$$

odakle za hiperbolne funkcije dobivamo ove izraze s eksponentima (koje i upotrebljavamo za definiciju hiperbolnih funkcija):

$$BC = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \qquad OB = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$AD = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{th} x.$$

* Vidi na str. 461.

TREĆI DIO

ANALITIČKA I DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

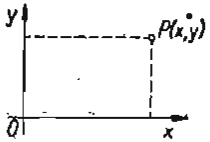
I. ANALITIČKA GEOMETRIJA

A. GEOMETRIJA U RAVNINI

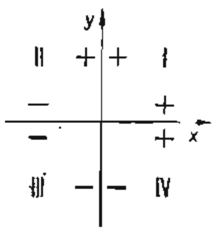
1. OSNOVNI POJMOVI I FORMULE

Koordinate. Položaj neke tačke P u ravnini možemo odrediti pomoću ovog ili onog *koordinatnog sistema.* Brojeve kojima je određen položaj tačke nazivamo njenim *koordinatama.* Najčešće upotrebljavamo Descartesov pravokutni i polarni koordinatni sistem.

Descartesovim (*kartezijevim*) *pravokutnim koordinatama* tačke P (sl. 151) nazivamo udaljenosti (izražene u određenom mjerilu i uzete s određenim predznakom) te tačke od dvaju međusobno okomitih pravaca — koordinatnih osi. Sjecište osi O nazivamo *početkom* (*ishodištem*) koordinata. Horizontalnu os obično nazivamo *apscisnom osi* (*os* Ox), a vertikalnu *ordinatnom osi* (*os* Oy). Na tim osima određujemo pozitivan smjer, za os Ox obično udesno, a za os Oy prema gore.



Sl. 151



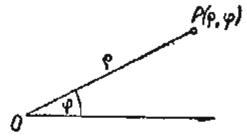
	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

Sl. 152

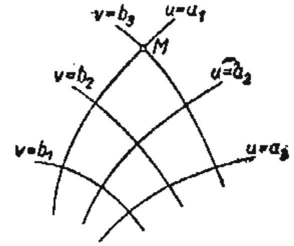
Koordinate tačke P smatramo pozitivnim ili negativnim, u ovisnosti o tome na koju poluos pada projekcija tačke P (vidi shemu na sl. 152).

Koordinate x i y nazivamo *apscisom* i *ordinatom* tačke P. Oznaka $P(a, b)$ pokazuje da tačka P ima apscisu a i ordinatu b.

Polarnim koordinatama tačke P (sl. 153) nazivamo *radijvektor* ρ — udaljenost od tačke P do zadane tačke O (*pola*) i *polarni kut* φ — kut između pravca OP i zadanog pravca koji prolazi kroz pol (*polarne osi*). Polarni kut smatramo pozitivnim kada ga brojimo od polarne osi suprotno gibanju kazaljke na satu, a negativnim kada ga brojimo u suprotnom smislu.



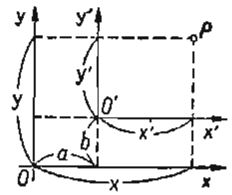
Sl. 153



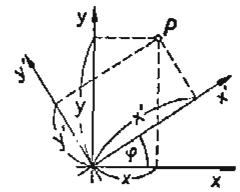
Sl. 154

Krivocrtne koordinate. Općenitiji sistem koordinata je krivocrtni, kada su u ravnini zadane dvije porodice krivulja (*koordinatnih linija*), svaka ovisna o jednom parametru, pri čemu kroz svaku tačku prolazi samo po jedna linija svake porodice. Vrijednosti parametara, koji pripadaju tim krivuljama, jesu *krivocrtne koordinate* tačke. Na sl. 154 tačka M ima krivocrtne koordinate $u = a_1$, $v = b_3$. U Descartesovom sistemu koordinata koordinatne linije su pravci paralelni osima, a u polarnom kružnice sa središtem u polu i zrake koje izlaze iz pola.

Transformacija koordinata. Pri prelazu s jednog sistema na drugi koordinate se mijenjaju na ovaj način.



Sl. 155



Sl. 156

Paralelni pomak osi Descartesovih koordinata (sl. 155) (x i y su stare koordinate, x' *i* y' su nove koordinate, a i b su koordinate novog ishodišta O' u starom koordinatnom sistemu):

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b,$$
$$x' = x - a, \qquad y' = y - b.$$

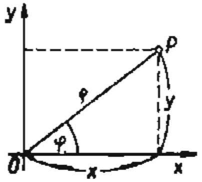
Vrtnja osi za kut φ* (vidi sl. 156):

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \qquad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi;$$
$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

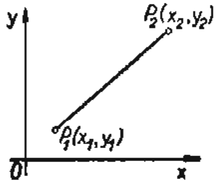
U općem slučaju transformaciju možemo rastaviti na paralelni pomak i zakret osi.

Prelaz s Descartesovih koordinata na polarne i obrnuto provodimo po ovim formulama, ako ishodište uzmemo za pol, a os apscisu za polarnu os (sl. 157):

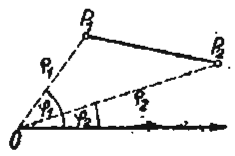
$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi;$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \arcsin\frac{y}{\rho}.$$



Sl. 157



Sl. 158



Sl. 159

Udaljenost dviju tačaka $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ (sl. 158): $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Ako su zadane polarne koordinate: $P_1(\rho_1, \varphi_1)$ i $P_2(\rho_2, \varphi_2)$ (sl. 159) tada je

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Dijeljenje dužine u danom omjeru. Koordinate tačke P, za koju je $\dfrac{P_1P}{PP_2} = \dfrac{m}{n} = \lambda$ (sl. 160), određujemo po formulama:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};$$
$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

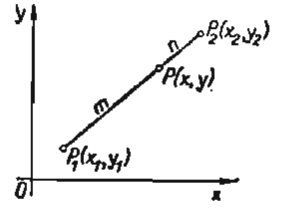
Središte odsječka P_1P_2: $\quad x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. Ako odsječcima P_1P i PP_2 damo pozitivan ili negativan predznak prema

* Kut φ smatramo pozitivnim ako se vrtnja vrši suprotno gibanju kazaljke na satu.

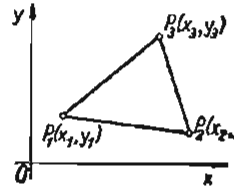
tome da li se njihovi smjerovi podudaraju sa smjerom P_1P_2 ili ne, tada gore navedene formule mogu poslužiti za $\lambda < 0$ za traženje tačke koja odsječak P_1P_2 dijeli *izvana* u zadanom omjeru. Na primjer za takvu tačku P, da P_2 bude raspolovnica odsječaka P_1P, je $\lambda = \dfrac{P_1P}{PP_2} = -2.$

Koordinate *težišta* sistema materijalnih tačaka $M_i(x_i, y_i)$ s masama m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ određujemo po formulama:

$$x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \qquad y = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}.$$



Sl. 160



Sl. 161

Površina trokuta (sl. 161) s vrhovima $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] =$$
$$= \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)].$$

Tri tačke leže na istom pravcu ako je: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Površina poligona s vrhovima $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$:

$$S = \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)].$$

Kada računamo po tim formulama dobivamo pozitivnu površinu ako obilazimo vrhove po poredaju numeracije suprotno smislu okretanja kazaljke na satu, a negativnu u obrnutom slučaju.

Jednadžba krivulje. Svakoj jednadžbi $F(x, y) = 0$ koja povezuje koordinate x i y odgovara neka krivulja sa svojstvom da koordinate svake tačke P na toj krivulji zadovoljavaju danu jednadžbu, i obrnuto, svaka tačka kojoj koordinate zadovoljavaju jednadžbu leži na krivulji. Jednadžbu $F(x, y) = 0$ nazivamo jednadžbom te krivulje*. Ako je $F(x, y)$ polinom, onda krivulju $F(x, y) = 0$ nazivamo *algebarskom;* u tom slučaju stupanj polinoma (vidi str. 176) nazivamo *redom* krivulje. Ako jednadžbu krivulje ne možemo svesti na oblik $F(x, y) = 0$, gdje je $F(x, y)$ polinom, onda krivulju nazivamo *transcendentnom.*

Analogno možemo razmatrati jednadžbe krivulje u drugim koordinatnim sistemima. U daljnjem izlaganju ako nije izrijekom drukčije rečeno, služit ćemo se Descartesovim pravokutnim koordinatama.

2. PRAVAC

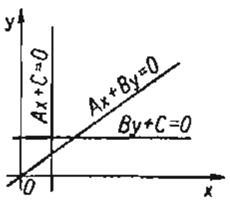
Jednadžba pravca. Svaka jednadžba, linearna s obzirom na koordinate, određuje pravac i obrnuto, jednadžba nekog pravca jest jednadžba prvog stupnja.

Opća jednadžba pravca:

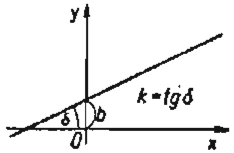
$$Ax + By + C = 0.$$

Ako je (sl. 162) $A = 0$, tada je pravac paralelan sa osi Ox; ako je $B = 0$, pravac je paralelan sa osi Oy; ako je $C = 0$, pravac prolazi kroz ishodište. Jednadžbu svakog pravca koji nije paralelan sa osi Oy (sl. 163) možemo predočiti u obliku:

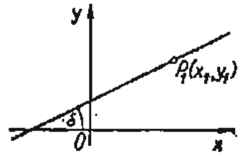
$$y = kx + b;$$



Sl. 162



Sl. 163



Sl. 164

k — koeficijent smjera pravca jednak je tg δ; δ je kut između pozitivnog smjera osi Ox i pravca; b je odsječak pravca na osi Oy (uz poštivanje predznaka).

Jednadžba pravca koji prolazi *kroz zadanu tačku* $P_1(x_1, y_1)$ *u zadanom smjeru* (sl. 164):

$$y - y_1 = k(x - x_1), \quad \text{gdje je} \quad k = \operatorname{tg}\delta.$$

* Može se dogoditi da zadanu jednadžbu $F(x, y) = 0$ ne zadovoljavaju koordinate ni jedne realne tačke u ravnini [npr. $x^2 + y^2 + 1 = 0$, $y = \ln(1 - x^2 - \operatorname{ch} x)$]. Tada *dogovorno* kažemo da zadana jednadžba određuje imaginarnu krivulju.

Jednadžba pravca *kroz dvije zadane tačke* (sl. 165) $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

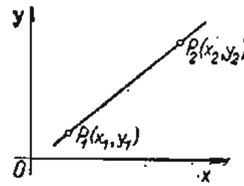
Segmentni oblik jednadžbe pravca. Ako pravac na koordinatnim osima siječe odsječke a i b (uz poštivanje predznaka sl. 166), tada je njegova jednadžba:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

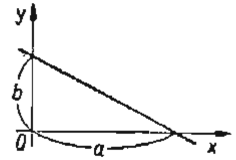
Normalna jednadžba pravca:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

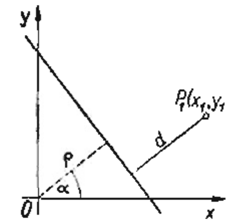
gdje je p udaljenost pravca od ishodišta, α *je* kut što ga sa osi Ox čini okomica spuštena iz ishodišta na pravac (sl. 167) ($p > 0$; $0 \leqslant \alpha < 2\pi$). Normalnu jednadžbu pravca možemo dobiti iz opće



Sl. 165



Sl. 166



Sl. 167

jednadžbe $Ax + By + C = 0$ tako da je pomnožimo s *normirajućim faktorom* $\mu = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Predznak od μ mora biti suprotan predznaku od C.

Udaljenost tačke $P_1(x_1, y_1)$ od pravca (sl. 167):

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p;$$

d je jednak rezultatu koji dobivamo kada koordinate zadane tačke uvrstimo u lijevu stranu normalne jednadžbe pravca. Po toj formuli je $d > 0$, ako P_1 i ishodište leže na raznim stranama zadanog pravca, i $d < 0$ u protivnom slučaju.

Sjecište pravaca. Koordinate (x_0, y_0) sjecišta dvaju pravaca dobivamo zajedničkim rješenjem obiju jednadžbi. Ako su ti pravci zadani jednadžbama $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, tada je:

$$x_0 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad y_0 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

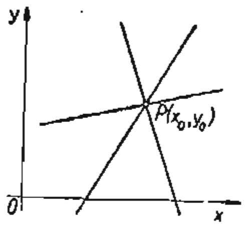
Ako je $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, onda su zadani pravci paralelni; u posebnom slučaju, za $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, pravci se podudaraju.

Treći pravac $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ prolazi kroz sjecište prvih dvaju (sl. 168), ako je:

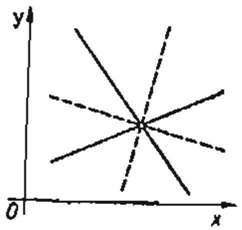
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Jednadžba svakog pravca koji prolazi kroz sjecišta dvaju pravaca (jednadžba *pramena pravaca*):

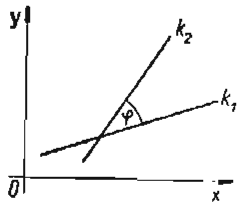
$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$



Sl. 168



Sl. 169



Sl. 170

Mijenjajući λ od $-\infty$ do $+\infty$ možemo dobiti bilo koji pravac pramena. Ako su jednadžbe dvaju pravaca zadane u normalnom obliku, onda pri $\lambda = \pm 1$ dobivamo *jednadžbe simetrala kutova* za kutove koje tvore ti pravci (sl. 169).

Kut φ između dva pravca (sl. 170) određujemo po ovim formulama:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{i} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2},$$

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

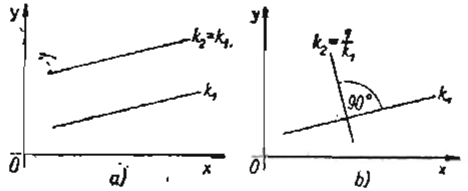
$$\sin \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Ako su poznati koeficijenti smjera k_1 i k_2 pravaca, onda je:

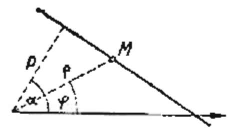
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

$$\cos \varphi = \frac{1 + k_1k_2}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}$$

(kut φ očitavamo od prvog pravca ka drugom, suprotno gibanju kazaljke na satu).



Sl. 171



Sl. 172

Pravci su *paralelni* (sl. 171, *a*) ako je $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ ili $k_1 = k_2$.

Pravci su međusobno *okomiti* (sl. 171, *b*) ako je

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad \text{ili} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Jednadžba pravca u polarnim koordinatama (p je udaljenost od pola do pravca, α je kut između polarne osi i okomice iz pola na pravac, sl. 172):

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}.$$

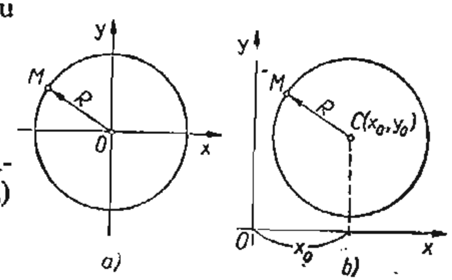
3. KRUŽNICA

Jednadžba u Descartesovim koordinatama. Jednadžba kružnice polumjera R sa središtem u ishodištu (sl. 173, *a*):

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Jednadžba kružnice polumjera R sa središtem $C(x_0, y_0)$ (sl. 173, *b*):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$



Sl. 173

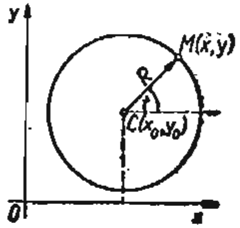
Opća jednadžba drugog reda

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

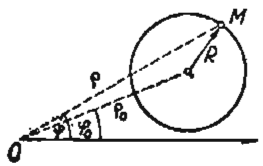
predstavlja kružnicu onda i samo onda, ako je $b = 0$ i $a = c$. U tom slučaju jednadžbu uvijek možemo svesti na oblik:

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + q = 0.$$

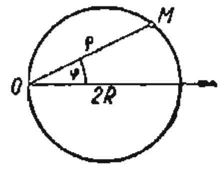
Tada je polumjer $R = \sqrt{m^2 + n^2 - q}$ i koordinate središta su: $x_0 = -m$, $y_0 = -n$. Ako je $q > m^2 + n^2$, onda jednadžba ne predočuje realnu krivulju; ako je $q = m^2 + n^2$, jednadžbu zadovoljava samo tačka $M(x_0, y_0)$.



Sl. 174



Sl. 175



Sl. 176

Jednadžba u parametarskom obliku:

$$x = x_0 + R\cos t, \qquad y = y_0 + R\sin t;$$

t je kut koji čini pomični polumjer sa pozitivnim smjerom osi Ox (sl. 174).

Jednadžba u polarnim koordinatama. Opća jednadžba (sl. 175) $\rho^2 + 2\rho\rho_0\cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 = R^2$. Ako središte leži na polarnoj osi i kružnica prolazi kroz pol (sl. 176), onda jednadžba kružnice ima oblik $\rho = 2R\cos\varphi$.

4. ELIPSA

Elementi elipse (sl. 177): AB je *velika os* $(= 2a)$, CD je *mala os* $(= 2b)$, A, B, C, D su *tjemena*, O je *središte*, F_1 i F_2 su *žarišta* (tačke koje leže na velikoj osi s obje strane središta na udaljenosti $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ od njega), $e = \frac{c}{a}$ $(e < 1)$ je *ekscentricitet*, p je *žarišni parametar* (polovica tetive kroz žarište paralelno s malom osi) $p = \frac{b^2}{a}$.

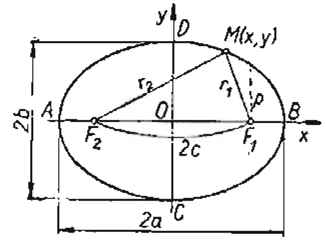
Jednadžba elipse: *normalna jednadžba* (ako se koordinatne osi podudaraju s osima elipse):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

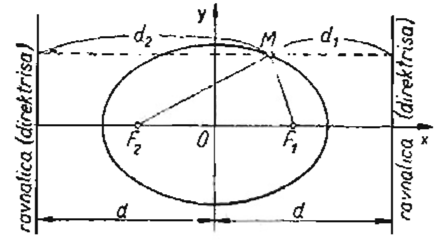
u parametarskom obliku:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t;$$

jednadžba u polarnim koordinatama, vidi str. 243.



Sl. 177



Sl. 178

Žarišna svojstva elipse (*definicija elipse*). Elipsa je geometrijsko mjesto tačaka za koje je zbroj udaljenosti od dviju zadanih tačaka (žarišta) konstantna veličina $(= 2a)$. Svaku od tih udaljenosti (žarišni radijvektor tačke elipse s apscisom x) izražavamo formulom*:

$$r_1 = MF_1 = a - ex, \qquad r_2 = MF_2 = a + ex, \qquad r_1 + r_2 = 2a.$$

Ravnalice (direktrise) su pravci paralelni s malom osi u udaljenosti $d = \frac{a}{e}$ od nje (sl. 178). Za neku tačku $M(x, y)$ elipse je $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$ (*svojstvo ravnalica elipse* vidi na str. 243.)

* Ovdje i dalje, u formulama koje sadrže koordinate podrazumijevamo da su elipse zadane normalnim jednadžbama.

Promjeri su tetive koje prolaze kroz središte elipse: one se u središtu raspolavljaju (sl. 179). Geometrijsko mjesto središta tetiva paralelnih s jednim promjerom elipse jest promjer *konjugiran* zadanom promjeru. Ako su k i k' koeficijenti smjera konjugiranih promjera, onda je $kk' = -\frac{b^2}{a^2}$. Ako su duljine konjugiranih promjera $2a_1$ i $2b_1$, a α i β šiljasti kutovi između promjera i velike osi:

$$(k = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad k' = \operatorname{tg}\beta),$$

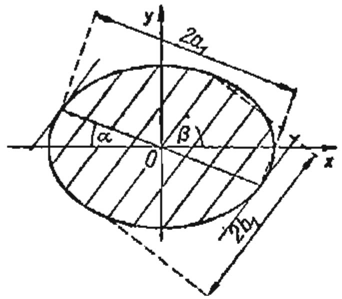
onda je:

$$a_1 b_1 \sin(\alpha + \beta) = ab$$

i:

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

(*Apolonijev teorem*).



Sl. 179

Tangenta u tački $M(x_0, y_0)$ ima jednadžbu

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Normala i tangenta na elipsu simetrale su unutarnjeg, odnosno vanjskog kuta među radijvektorima dirališta (sl. 180). Pravac $Ax + By + C = 0$ dira elipsu, ako je $A^2a^2 + B^2b^2 + C^2 = 0$.

Polumjer zakrivljenosti u tački $M(x_0, y_0)$ (vidi sl. 180):

$$R = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r_1r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 u},$$

gdje je u kut između tangente i radijvektora dirališta.

Za tjemena A i B (sl. 177): $R = \frac{b^2}{a} = p$. Za tjemena C i D: $R = \frac{a^2}{b}$.

Površina $S = \pi ab$. Površina isječka $BOM = \frac{ab}{2} \arccos\frac{x}{a}$ (sl. 181). Površina odsječka $MBN = ab \arccos\frac{x}{a} - xy$.

Opseg elipse je $L = 4a\,E(e) =$

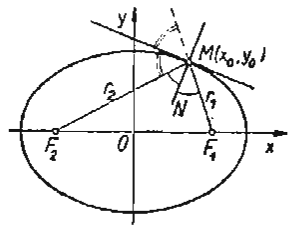
$$= 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \ldots\right],$$

gdje je $E(e) = E\left(e, \frac{\pi}{2}\right)$ potpuni eliptički integral druge vrste (vidi str. 398). Ako označimo $\frac{a-b}{a+b} = \lambda$, onda je:

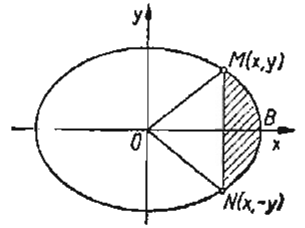
$$L = \pi(a+b)\left[1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{64} + \frac{\lambda^6}{256} + \frac{25\lambda^8}{16384} + \ldots\right].$$

Približne formule:

$$L = \pi\left[1{,}5\,(a+b) - \sqrt{ab}\right]; \qquad L = \pi(a+b)\frac{64 - 3\lambda^4}{64 - 16\lambda^2}.$$



Sl. 180



Sl. 181

5. HIPERBOLA

Elementi hiperbole (sl. 182); AB je *realna os* $(= 2a)$; A i B su *tjemena*, O je *središte*, F_1 i F_2 su *žarišta* — tačke koje leže na realnoj osi s obje strane od središta na udaljenosti c (većoj od a); CD je *imaginarna os* $(= 2b = 2\sqrt{c^2 - a^2})$; p je *žarišni parametar* (polovica tetive koja prolazi kroz fokus okomito na realnu os) $p = \frac{b^2}{a}$; $e = \frac{c}{a} > 1$ je *ekscentricitet*.

Jednadžba hiperbole: *normalna jednadžba* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ako se os Ox podudara s realnom osi hiperbole); *u parametarskom obliku:*

$$x = a \operatorname{ch} t, \qquad y = b \operatorname{sh} t$$

$$(\text{ili} \quad x = a \operatorname{sc} t, \qquad y = b \operatorname{tg} t);$$

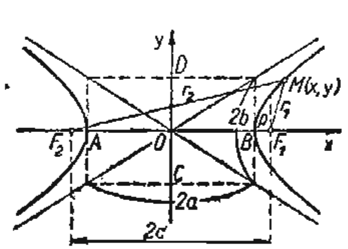
u polarnim koordinatama, vidi str. 243.

Žarišna svojstva hiperbole (*definicija hiperbole*). Hiperbola je geometrijsko mjesto tačaka, za koje je razlika udaljenosti od dviju zadanih tačaka (žarišta) konstantna veličina ($= 2a$). Tačke za koje je $r_1 - r_2 = 2a$ pripadaju jednoj *grani* hiperbole (na sl. 182 lijevoj); tačke za koje je $r_2 - r_1 = 2a$ pripadaju drugoj grani (desnoj). Svaka od tih udaljenosti (žarišni radijvektor tačke hiperbole s apscisom x) izražava se formulom*

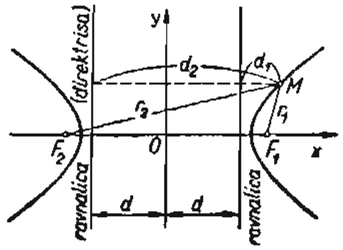
$$r_1 = \pm (ex - a), \qquad r_2 = \pm (ex + a)$$

(gornji predznak za tačke desne grane, a donji za lijeve); $r_2 - r_1 = \pm 2a$.

Ravnalice (direktrise) su pravci okomiti na realnu os i raspoređeni u udaljenosti $d = \frac{a}{e}$ od središta (sl. 183). Za neku tačku $M(x, y)$ hiperbole je $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$ (*svojstva hiperbole s obzirom na ravnalice* vidi na str. 243).



Sl. 182



Sl. 183

Tangenta u tački $M(x_0, y_0)$ ima jednadžbu $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Tangenta i normala na hiperbolu simetrale su unutrašnjeg, odnosno vanjskog kuta među radijvektorima dirališta (sl. 184). Pravac $Ax + By + C = 0$ dira hiperbolu ako je $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$.

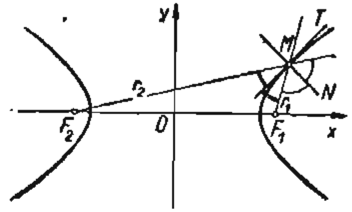
Asimptote hiperbole (sl. 185) su pravci kojima se grane hiperbole neograničeno približavaju pri udaljavanju u beskonačnost (opće određivanje asimptota vidi na str. 279). Koeficijent smjera asimptota $k = \pm \operatorname{tg} \delta = \pm \frac{b}{a}$. Jednadžba obiju asimptota $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Odsječak tangente TT_1 među asimptotama u diralištu se raspolavlja: $TM = TM_1$. Površina trokuta TOT_1 između tangente i

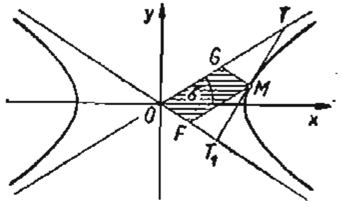
* Ovdje i dalje u formulama koje sadrže koordinate podrazumijevamo da je hiperbola zadana normalnom jednadžbom.

obiju asimptota je ab (za neku tačku M). Ako kroz tačku M hiperbole povučemo pravce MF i MG paralelne asimptotama, onda je površina $OFMG = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{c^2}{4}$.

Pridružene hiperbole (sl. 186) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ i $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (nacrtana na slici 186 crtkanom linijom) imaju zajedničke asimptote. Realna os svake od njih jednaka je imaginarnoj osi druge i obrnuto:



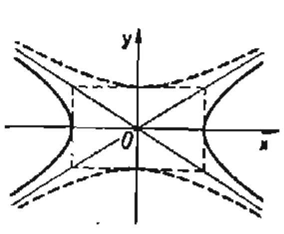
Sl. 184



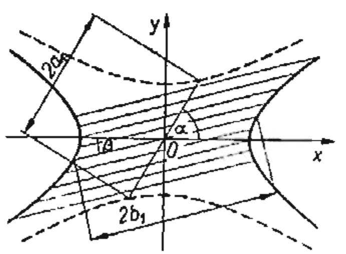
Sl. 185

Promjeri su tetive zadane i njoj pridružene hiperbole, koje prolaze kroz zajedničko središte hiperbola; u središtu se raspolavljaju.

Dva promjera s koeficijentima smjera k i k' nazivamo *konjugiranim*, ako je $kk' = \frac{b^2}{a^2}$. Svaki od konjugiranih promjera raspolavlja tetive (zadane hiperbole ili njoj pridružene) paralelne drugom promjeru* (sl. 187). Ako su duljine konjugiranih promjera $2a_1$ i $2b_1$, a α i β su šiljasti kutovi koje tvore promjeri s realnom osi ($\alpha > \beta$), onda je: $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$, $\quad ab = a_1 b_1 \sin(\alpha - \beta)$.



Sl. 186



Sl. 187

Polumjer zakrivljenosti R hiperbole u tački $M(x_0, y_0)$ (oznake vidi na str. 237):

$$R = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 u},$$

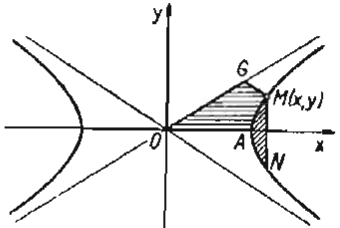
* Od dva konjugirana promjera samo jedan $\left(\text{onaj za koji je } |k| < \frac{b}{a}\right)$ presijeca hiperbolu. Pri tome dobivenu tetivu — promjer u užem smislu riječi — raspolavlja središte.

gdje je u kut između tangente i radijvektora dirališta. U tjemenima A i B (sl. 182): $R = p = b^2/a$.

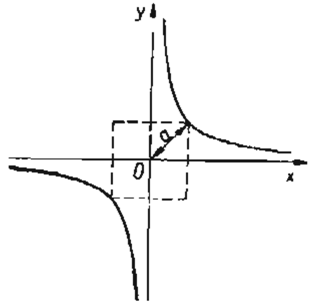
Površina odsječka hiperbole (sl. 188):

$$AMN = xy - ab\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = xy - ab\,\mathrm{Arch}\,\frac{x}{a}.$$

Površina $OAMG = \frac{ab}{4} + \frac{ab}{2}\ln\frac{2\,OG}{c}$ (MG je paralelno asimptoti).



Sl. 188



Sl. 189

Istostrana hiperbola je hiperbola s jednakim osima: $a = b$. Njena jednadžba je $x^2 - y^2 = a^2$. Asimptote istostrane hiperbole su međusobno okomite. **Ako asimptote uzmemo za koordinatne** osi (sl. 189), tada je **jednadžba istostrane hiperbole** $xy = a^2/2$.

6. PARABOLA

Elementi parabole (sl. 190): Ox je *os parabole*, O je *tjeme*, F je *žarište* (tačka koja leži na osi, na udaljenosti $p/2$ od tjemena), NN' je *ravnalica* (pravac okomit na os i udaljen za $p/2$ od tjemena, na suprotnu stranu od žarišta), p je *žarišni parametar* (udaljenost od žarišta do ravnalice ili polovina tetive koja prolazi kroz žarište okomito na os). Ekscentricitet parabole je jedan (vidi str. 243).

Jednadžba parabole: *normalna jednadžba* $y^2 = 2px$ (ako je ishodište u tjemenu parabole, os Ox podudara se s njenom osi, parabola je okrenuta tjemenom ulijevo*). *Jednadžbu u polarnim koordinatama* vidi na str. 243. *Jednadžba parabole s vertikalnom osi* (sl. 191):

$$y = ax^2 + bx + c,$$

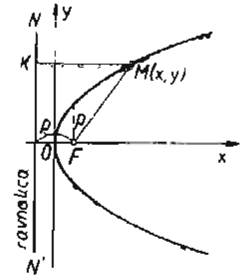
parametar parabole po toj jednadžbi:

$$p = \frac{1}{2|a|};$$

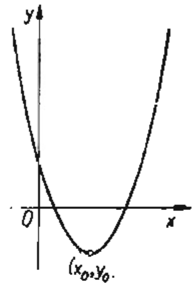
* Vidi na str. 241.

za $a > 0$ **parabola je okrenuta tjemenom prema dolje,*** pri $a < 0$ tjemenom prema gore*; koordinate tjemena: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

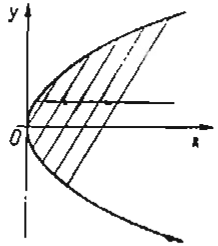
Osnovno svojstvo (*definicija parabole*): parabola je geometrijsko mjesto tačaka $M(x, y)$ jednako udaljenih (sl. 190) **od zadane** tačke (fokusa) i od zadanog pravca (ravnalice)**: $MF = MK = x + \frac{p}{2}$; MF je žarišni radijvektor tačke parabole.



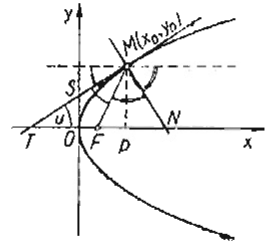
Sl. 190



Sl. 191



Sl. 192



Sl. 193

Promjer je pravac paralelan osi parabole. Promjer raspolavlja tetive paralelne **tangenti na kraju promjera (sl. 192).** Ako je koeficijent smjera tih tetiva k, onda je **jednadžba promjera**: $y = \frac{p}{k}$.

Tangenta na parabolu (sl. 193) u tački $M(x_0, y_0)$ ima jednadžbu $yy_0 = p(x + x_0)$. Tangenta i normala na parabolu simetrale su kutova između žarišnog radijvektora i promjera kroz diralište.

* **Pretpostavljamo da je pozitivni** smjer osi Ox udesno, a pozitivni smjer osi Oy prema gore.

** Ovdje i dalje u formulama s koordinatama podrazumijevamo da je parabola zadana **normalnom jednadžbom**.

Odsječak tangente na parabolu između dirališta i sjecišta s osi parabole (osi Ox) raspolavlja tangenta u tjemenu parabole (os Oy): $TS = MS$; $TF = FM$; $TO = OP = x_0$. Pravac $y = kx + b$ dira parabolu ako je $p = 2bk$.

Polumjer zakrivljenosti parabole u tački $M(x_1, y_1)$:

$R = \frac{(p + 2x_1)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sin^3 u} = \frac{n^3}{p^2}$, gdje je n duljina normale MN (sl. 193). U tjemenu O polumjer zakrivljenosti je $R = p$.

Površina odsječka parabole $MON = \frac{2}{3}$ površine $PQNM$ (sl. 194).

Površina $OMR = \frac{2}{3}xy$.

Duljina luka parabole od tjemena O do tačke $M(x, y)$:

$$\widehat{OM} = \frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1 + \frac{2x}{p}\right)} + \ln\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}}\right)\right] = \sqrt{x\left(x + \frac{p}{2}\right)} + \frac{p}{2}\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{2x}{p}}.$$

Približno za male $\frac{x}{y}$: $\widehat{OM} \approx y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right]$.

7. KRIVULJE DRUGOG REDA (ČUNJOSJEČNICE)

Opća jednadžba krivulje drugog reda:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

određuje elipsu (u posebnom slučaju kružnicu), hiperbolu, parabolu ili par pravaca (*degenerirana* krivulja drugog reda).

Invarijante krivulje drugog reda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2, \quad S = a + c.$$

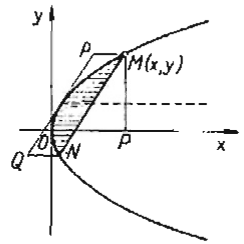
Te se veličine ne mijenjaju pri pomaku početka i pri vrtnji koordinatnih osi, tj. ako nakon transformacije koordinata jednadžba krivulje dobije oblik:

$$a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0:$$

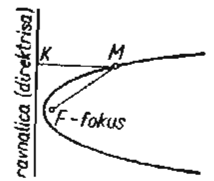
tada veličine Δ, δ i S, izračunate po novim koeficijentima, zadržavaju početne vrijednosti.

Određivanje oblika krivulje nacrtane prema zadanoj jednadžbi drugog stupnja i njena transformacija na normalni oblik vrši se prema tablici na str. 244 i 245.

Opća svojstva krivulja drugog reda. *Čunjosječnice.* Pravilan kružni čunj pri presijecanju s ravninom daje na njoj čunjosječnicu. Ako presječna ravnina ne prolazi kroz vrh čunja presjek će biti hiperbola, parabola ili elipsa, u ovisnosti o tome da li je presječna ravnina paralelna dvjema, samo jednoj ili nijednoj izvodnici čunja. Pri presijecanju čunja s ravninom koja prolazi kroz njegov vrh dobivamo degenerirane čunjosječnice ($\Delta = 0$, vidi tablicu na str. 244 i 245). Paralelne pravce dobivamo ako čunj degenerira u valjak (vrh čunja pomakne se u beskonačnost).



Sl. 194



Sl. 195

Svojstva s obzirom na ravnalicu. Geometrijsko mjesto tačaka M (sl. 195), za koje je omjer njihovih udaljenosti od zadane tačke (*žarište*) F i od zadanog pravca (*ravnalice*) konstanta jednaka e, krivulja je drugog reda s ekscentricitetom jednakim e. Za $e < 1$ dobivamo elipsu, za $e = 1$ parabolu, za $e > 1$ hiperbolu.

Krivulja određena sa 5 tačaka. Kroz zadanih 5 tačaka prolazi samo jedna krivulja drugog reda. Ako barem tri od zadanih tačaka leže na istome pravcu, dobivamo degeneriranu krivulju.

Jednadžba u polarnim koordinatama. U polarnim koordinatama krivulje drugog reda imaju jednadžbu $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$ (p je parametar, e je ekscentricitet zadane krivulje, pol je u žarištu, polarna os usmjerena je od žarišta prema bližem tjemenu*).

* Za hiperbole se s tom jednadžbom određuje samo jedna grana, ako se za ρ pripuštaju samo pozitivne vrijednosti.

Transformacija jednadžbi krivulja drugog reda na normalan oblik*

			Oblik krivulje	Potrebna transformacija koordinata	Normalna jednadžba nakon transformacije
Centralne krivulje $\delta \neq 0$	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	Elipsa a) $\Delta \cdot S < 0$ — realna b) $\Delta \cdot S > 0$ — imaginarna**	1) Pomak ishodišta u *središte* krivulje koja ima koordinate: $x_0 = \frac{be - cd}{\delta}$, $y_0 = \frac{bd - ae}{\delta}$. 2) Vrtnja osi za kut α, određen jednadžbom: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2b}{a - c}$. Predznak od sin 2α mora se podudarati s predznakom od $2b$. Pri tome je koeficijent smjera nove osi x': $k = \frac{c - a + \sqrt{(c-a)^2 + 4b^2}}{2b}$	$a'x'^2 + c'y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$; $a' = \frac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$, $c' = \frac{a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$, a' i c' su korijeni kvadratne jednadžbe $u^2 - Su + \delta = 0$
		$\Delta = 0$	Par imaginarnih** pravaca sa zajedničkom realnom tačkom		
	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	Hiperbola		
		$\Delta = 0$	Par pravaca koji se sijeku		
Parabolne krivulje $\delta = 0$***		$\Delta \neq 0$	Parabola	1) Pomak ishodišta u tjeme parabole koja ima koordinate x_0 i y_0 dobivene iz jednadžbi: $ax_0 + by_0 + \frac{ad + be}{S} = 0$, $\left(d + \frac{dc - be}{S}\right) x_0 +$ $+ \left(e + \frac{ae - bd}{S}\right) y_0 + f = 0$. 2) Vrtnja osi za kut α dobiven iz jednadžbe: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b}$; predznak od sin α mora biti suprotan predznaku od a.	$y'^2 = 2px'$; $p = \frac{ae - bd}{S\sqrt{a^2 + b^2}}$
		$\Delta = 0$	Par pravaca, paralelnih, ako je $d^2 - af > 0$; podudarnih, ako je $d^2 - af = 0$; imaginarnih**, ako je $d^2 - af < 0$.	Vrtnja osi za kut α dobiven iz jednadžbe: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b}$; predznak od sin α mora biti suprotan predznaku od a.	$Sy'^2 + 2\frac{ad + be}{\sqrt{a^2 + b^2}} y' + f = 0$, dovede se u oblik: $(y' - y'_0)(y' - y'_1) = 0$

* Oznake vidi na str. 242.

** Vidi napomenu na str. 230.

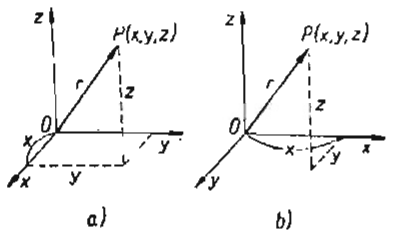
*** U slučaju $\delta = 0$ pretpostavljamo da ni jedan od koeficijenata a, b, c nije jednak nuli. Ako su dva koeficijenta (a i b ili b i c) jednaka nuli, onda se redukcija jednadžbe svodi na paralelan pomak osi; jednadžba $cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ dobiva oblik $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, a jednadžba $ax^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ oblik $(x - x_0)^2 = 2p(y - y')$.

B. GEOMETRIJA U PROSTORU

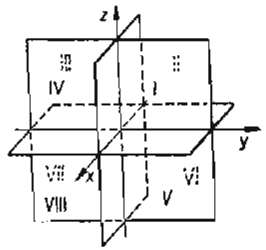
8. OSNOVNI POJMOVI I FORMULE

Koordinate. Položaj neke tačke P u prostoru možemo odrediti pomoću nekog *koordinatnog sistema*. Najčešće upotrebljavamo ove koordinatne sisteme: 1) Descartesov pravokutni, 2) cilindarski i 3) sferni (prostorni polarni).

Descartesovim pravokutnim koordinatama tačke P nazivamo udaljenosti* te tačke, uzete s određenim predznakom, od tri međusobno okomite koordinatne plohe ili, što je isto, projekcije radijvektora r tačke P (vidi str. 604) na tri međusobno okomite *koordinatne osi*. U ovisnosti o međusobnom rasporedu pozitivnih smjerova koordinatnih osi mogući su *desni* (sl. 196, *a*) i *lijevi* (sl. 196, b) koordinatni sistemi. U daljnjem je na crtežima primijenjen desni



Sl. 196



Sl. 197

sistem (formule ne ovise o obliku koordinatnog sistema). Sjecište koordinatnih osi nazivamo *ishodištem* koordinata. Koordinate x, y, z nazivamo po redu *apscisom*, *ordinatom* i *aplikatom*. Oznaka $P(a, b, c)$ označava da tačka P ima koordinate $x = a$, $y = b$ i $z = c$. Predznaci koordinata ovise o oktantu u kojem se tačka nalazi (sl. 197):

Oktant	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

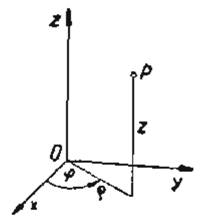
Koordinatne plohe za koje je jedna od koordinata konstantna, ovdje su ravnine paralelne koordinatnim ravninama, a *koordinatne linije*, duž kojih se mijenja samo jedna koordinata, jesu pravci paralelni koordinatnim osima. Koordinatne plohe sijeku se u koordinatnim linijama.

* Izraženo u jedinicama nekog mjerila.

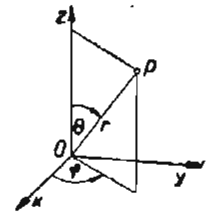
Općenitiji sistem *krivocrtnih koordinata* dobivamo tako da zadamo tri bilo koje porodice takvih koordinatnih ploha, da kroz svaku tačku prostora prolazi po jedna ploha svake porodice. Položaj tačke u takvom sistemu određujemo po vrijednostima parametara koordinatnih ploha, koje prolaze kroz tu tačku. Najčešće upotrebljavamo niže opisane cilindarske i sferne sisteme krivocrtnih koordinata.

Cilindarske koordinate (sl. 198): ρ i φ su polarne koordinate projekcije tačke P na osnovnu plohu (obično xOy), z je aplikata, tj. udaljenost od tačke P do osnovne plohe.

Za cilindarske koordinate koordinatne plohe su ravnine okomite na osi z (z = const), poluravnine omeđene sa osi z (φ = const)



Sl. 198



Sl. 199

i cilindarske plohe, kojima je os z os (ρ = const). Koordinatne linije su sjecišta tih ploha.

Formule za prelaz od cilindarskih koordinata na kartezijske i obrnuto:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x} = \mathrm{Arcsin}\,\frac{y}{\rho}.$$

Sferne (prostorne polarne) koordinate: r je duljina *radijvektora*, φ je *duljina*, Θ je *udaljenost od pola*. Pozitivni smjerovi pokazani su na sl. 199. Ako sfernim koordinatama damo vrijednosti u granicama: $0 \leqslant r < \infty$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \Theta \leqslant \pi$, dobivamo jednoznačno sve tačke prostora.

Koordinatne plohe su kugle sa središtem u ishodištu (r = const), poluravnine omeđene sa osi z (φ = const), čunjevi (s vrhom u ishodištu) za koje je os os z (Θ = const). Koordinatne linije su sjecišta tih ploha.

Formule za prelaz od sfernih koordinata na kartezijske i obrnuto:

$$x = r\sin\Theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\Theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\Theta;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \varphi = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}, \qquad \Theta = \operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

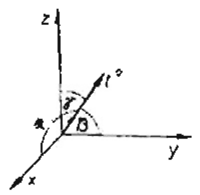
Smjer u prostoru označuje jedinični vektor t^0 (vidi na str. 603) ili njegove koordinate, tj. kosinusi kutova (sl. 200) između zadanog smjera i pozitivnog smjera koordinatnih osi (*kosinusi smjera*):

$$l = \cos\alpha; \qquad m = \cos\beta; \qquad n = \cos\gamma; \qquad l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

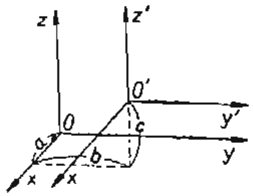
Kut φ **između dva zadana smjera sa** kosinusima smjerova l_1, m_1, n_1 i l_2, m_2, n_2:

$$\cos\varphi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2.$$

Dva smjera su međusobno okomita ako je $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.



Sl. 200



Sl. 201

Transformacija pravokutnih koordinata

Paralelni pomak (x, y i z su stare koordinate; x', y' i z' su nove; a, b i c su koordinate novog ishodišta u starim koordinatama, sl. 201):

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b, \qquad z = z' + c;$$

$$x' = x - a, \qquad y' = y - b, \qquad z' = z - c.$$

Vrtnja osi (sl. 202). Ako kosinuse smjerova novih osi x', y' i z' označimo po dolje naznačenoj shemi, dobivamo:

$$x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z',$$
$$y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z',$$
$$z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z';$$
$$x' = l_1 x + m_1 y + n_1 z,$$
$$y' = l_2 x + m_2 y + n_2 z,$$
$$z' = l_3 x + m_3 y + n_3 z.$$

U odnosu na stare osi	Kosinusi novih osi		
	x'	y'	z'
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

Determinanta transformacije jest:

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}.$$

Svojstva determinante transformacije:

1) $\Delta = \pm 1$ (plus, ako je lijevi sistem prešao u lijevi ili desni u desni, i minus, ako je lijevi prešao u desni ili obrnuto).

2) Zbroj kvadrata elemenata jednog retka ili stupca jest 1.

3) Zbroj produkata pripadnih elemenata dvaju redaka ili dvaju stupaca jednak je nuli.

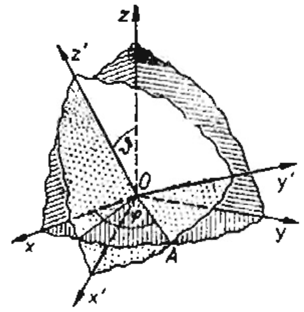
4) Svaki element jednak je svojem algebarskom komplementu (vidi na str. 167) pomnoženom sa $\Delta = \pm 1$.

Eulerovi kutovi. Položaj novog koordinatnog sistema u odnosu na stari može se potpuno karakterizirati sa tri kuta, koje je uveo L. Euler (sl. 202):

1) kut *nutacije* ϑ između pozitivnog smjera osi Oz i Oz' $(0 < \vartheta < \pi)$;

2) kut *precesije* ψ između osi Ox i pravca OA, sjecište ravnine xOy i $x'Oy'$, za koje je izabran pozitivan smjer tako da OA, Oz i Oz' tvore trojku iste orijentacije kao i koordinatne osi*; kut ψ mjeri se u smislu od Ox prema Oy $(0 < \psi < 2\pi)$;

3) kut *rotacije* φ između OA i Ox'; mjeri se u smislu od Ox' prema Oy' $(0 < \varphi < 2\pi)$.



Sl. 202

Ako označimo

$$\cos\vartheta = c_1, \qquad \cos\psi = c_2, \qquad \cos\varphi = c_3,$$
$$\sin\vartheta = s_1, \qquad \sin\psi = s_2, \qquad \sin\varphi = s_3,$$

onda je:

$$l_1 = c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3, \qquad l_2 = -c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3, \qquad l_3 = s_1 s_2,$$
$$m_1 = s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3, \qquad m_2 = -s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3, \qquad m_3 = -s_1 c_2,$$
$$n_1 = s_1 s_3, \qquad n_2 = s_1 c_3, \qquad n_3 = c_1.$$

* O orijentaciji trojke smjerova vidi na str. 607.

Udaljenost dviju tačaka: $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (sl. 203) je $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

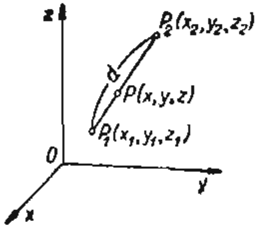
Kosinusi smjera dužine P_1P_2:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

Dijeljenje dužine u zadanom omjeru (sl. 203).

Koordinate tačke P za koju je

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} = \lambda,$$



Sl. 203

određujemo po formulama:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z = \frac{nz_1 + mz_2}{n + m} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Za *polovište* dužine:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Koordinate *težišta* sistema materijalnih tačaka M_i (x_i, y_i) s masama m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ određujemo po formulama (sume idu od $i = 1$ do $i = n$):

$$\bar{x} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}.$$

Volumen trostrane piramide s vrhovima $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ (sl. 204):

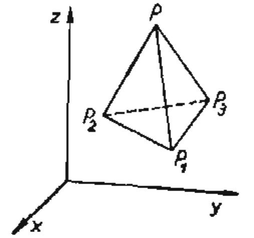
$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix}.$$

Pri računanju po toj formuli jest $V > 0$, ako se orijentacija trojke vektora PP_1, PP_2 i PP_3 poklapa s orijentacijom koordinatnog sistema (vidi na str. 522), i $V < 0$ u protivnom slučaju.

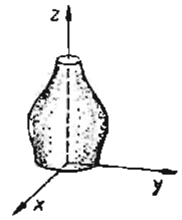
Četiri tačke P, P_1, P_2 i P_3 leže u jednoj ravnini ako je:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Jednadžba plohe. Svakoj jednadžbi $F(x, y, z) = 0$ odgovara neka ploha, sa svojstvom da koordinate bilo koje tačke P na toj plohi zadovoljavaju zadanu jednadžbu i, obrnuto, svaka tačka kojoj koordinate zadovoljavaju zadanu jednadžbu leži na toj plohi. Jednadžbu $F(x, y, z) = 0$ nazivamo jednadžbom te plohe.



Sl. 204



Sl. 205

Jednadžba *valjkaste plohe* (vidi na str. 199) kojoj su izvodnice paralelne osi Ox (ili Oy ili Oz) ne sadržava koordinate x (odnosno y ili z): $F(y, z) = 0$ ili $F(x, z) = 0$ ili $F(x, y) = 0$. U ravnini yOz ta jednadžba predočuje presječnicu valjkaste plohe s tom ravninom.

Valjkasta ploha za koju su izvodnice određene kosinusima smjera (ili njima proporcionalnim veličinama), l, m, n, imaju jednadžbu $F(nx - lz, \; ny - mz) = 0$.

Ploha koja nastaje *rotacijom* krivulje $z = f(x)$ u ravnini xOz oko osi z (sl. 205) ima jednadžbu $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. Analogno pišemo jednadžbe ploha koje nastaju rotacijom oko drugih koordinatnih osi.

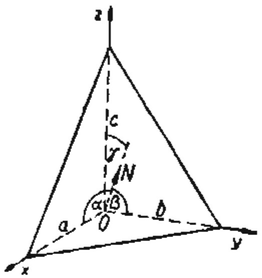
Jednadžba *čunjaste plohe* (vidi na str. 201) s vrhom u ishodištu ima oblik $F(x, y, z) = 0$, gdje je F homogena funkcija koordinata (vidi na str. 331).

Jednadžbe krivulja u prostoru. Krivulja u prostoru zadana je sa tri jednadžbe: $x = \varphi_1(t)$; $y = \varphi_2(t)$; $z = \varphi_3(t)$. Svakoj vrijednosti parametra t odgovara određena tačka krivulje. (Parametar ne mora imati neposredni geometrijski smisao). Drugi je način određivanja krivulje u prostoru sa dvije jednadžbe: $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$. Svaka od njih određuje plohu. Tačke kojima koordinate zadovoljavaju obje jednadžbe leže na presječnici zadanih ploha. Svaka jednadžba $F_1 + \lambda F_2 = 0$ za svaki λ predstavlja plohu koja prolazi kroz promatranu krivulju, i može zamijeniti jednu od prvotnih jednadžbi.

9. RAVNINA I PRAVAC U PROSTORU

Jednadžba ravnine. Svaka jednadžba, linearna s obzirom na koordinate, određuje ravninu i, obrnuto, jednadžba svake ravnine jest jednadžba prvog stupnja.

Opća jednadžba ravnine: $Ax + By + Cz + D = 0$; u vektorskom obliku: $\mathbf{r}\mathbf{N} + D = 0$ (vidi na str. 607 i 611). Vektor $\mathbf{N}(A, B, C)$ (sl. 206) je okomit na ravninu; kosinusi smjera tog vektora jesu:



Sl. 206

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ako je $D = 0$, ravnina prolazi kroz ishodište; ako je $A = 0$ (ili $B = 0$, ili $C = 0$), ravnina je paralelna osi Ox (odnosno Oy ili Oz), ako je $A = B = 0$ (ili $A = C = 0$, ili $B = C = 0$) ravnina je paralelna ravnini Oxy (odnosno Oxz ili Oyz).

Normalna jednadžba ravnine:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0;$$

u vektorskom obliku: $\mathbf{r}\mathbf{N}^\circ - p = 0$. Vektor $\mathbf{N}^\circ$ jest jedinični vektor, p je udaljenost ravnine od ishodišta. Normalnu jednadžbu možemo dobiti iz opće jednadžbe množenjem normirajućim faktorom $\pm\mu = \frac{1}{N} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (predznak od μ mora biti suprotan predznaku D).

Segmentni oblik jednadžbe ravnine: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; a, b, c su odsječci koje odsijeca ravnina na koordinatnim osima, uz poštivanje predznaka (sl. 206).

Jednadžba ravnine koja prolazi

a) *kroz tri tačke* $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

u vektorskom obliku $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0$*;

b) *kroz dvije tačke* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *paralelno pravcu s vektorom smjera* $\mathbf{R}(l, m, n)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

u vektorskom obliku $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{R} = 0$*;

c) *kroz jednu tačku* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *paralelno dvama pravcima sa vektorima smjera* $\mathbf{R}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{R}_2(l_2, m_2, n_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

u vektorskom obliku $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = 0$*;

d) *kroz jednu tačku* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *okomito na pravac s vektorom smjera* $\mathbf{N}(A, B, C)$:

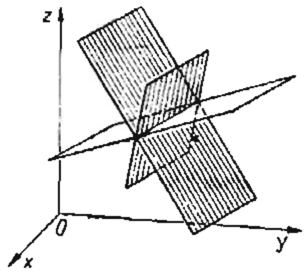
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

u vektorskom obliku $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{N} = 0$**;

e) *kroz presječnicu dviju ravnina* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

(jednadžba *pramena ravnina*, sl. 207). Ako se λ mijenja od $-\infty$ do $+\infty$ dobivamo sve ravnine pramena. Pri $\lambda = \pm 1$ dobivamo jednadžbe ravnina koje raspolavljaju kutove među zadanim ravninama, ako su njihove jednadžbe zadane u normalnom obliku.



Sl. 207

Kut između dvije ravnine — vidi na str. 258.

Presječnicu triju ravnina — vidi na str. 256.

Udaljenost dviju paralelnih ravnina*** $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ i $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ je

* O mješovitom produktu vektora vidi na str. 608.
** O skalarnom produktu vektora vidi na str. 607.
*** O uvjetima paralelnosti ravnina vidi na str. 259.

$$\delta = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Udaljenost tačke od ravnine dobivamo tako da u normalnu jednadžbu $(x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0)$ uvrstimo koordinate tačke $M(a, b, c)$*:

$$\delta = a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma - p.$$

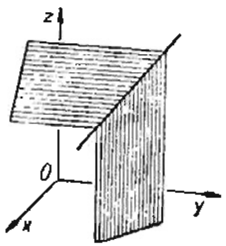
Ako M i ishodište leže na raznim stranama ravnine, onda je $\delta > 0$, a u protivnom slučaju je $\delta < 0$.

Jednadžba pravca u prostoru. Pravac u prostoru određuje se kao presječnica dviju ravnina i zadan je analitički sistemom dviju linearnih jednadžbi.

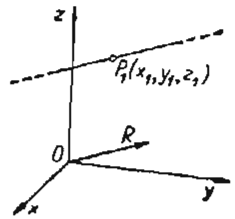
Opće jednadžbe pravca: u vektorskom obliku**

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{r}\mathbf{N}_1 + D_1 = 0, \\ \mathbf{r}\mathbf{N}_2 + D_2 = 0. \end{cases}$$

Jednadžba pravca u dvjema ravninama projiciranja: $y = kx + a$, $z = hx + b$; svaka od tih dviju jednadžbi određuje ravninu koja projicira pravac na ravnine Oxy i Oxz (sl. 208). Na pravce paralelne ravnini Oyz ovaj oblik jednadžbe nije primjenljiv; za njih treba uzeti projekcije na neki drugi par koordinatnih ravnina.



Sl. 208



Sl. 209

Jednadžba pravca koji prolazi

a) *kroz zadanu tačku* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *paralelno vektoru smjera* $\mathbf{R}(l, m, n)$ (sl. 209);

$$\mathrm{II}\ \left\{ \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}, \right. \qquad \text{u vektorskom obliku } (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{R} = 0^{***} \text{ ili}$$

(parametarski oblik) $x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt$; u vektorskom obliku $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}t$;

* O svođenju opće jednadžbe ravnine na normalni oblik vidi na str. 252.
** O skalarnom produktu vidi na str. 607.
*** O vektorskom produktu vidi na str. 606.

Normalni oblik (II) dobijemo iz (I) po formulama:

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix};$$

u vektorskom obliku $\mathbf{R} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$*, brojeve x_1, y_1, z_1 izaberemo tako da oni zadovoljavaju jednadžbe (I);

b) *kroz dvije zadane tačke* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (sl. 210);

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

u vektorskom obliku

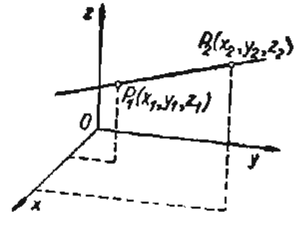
$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0^*;$$

c) *kroz zadanu tačku* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *okomito na ravninu*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ili $\mathbf{r}\mathbf{N} + D = 0^*$ (sl. 211):

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C},$$



Sl. 210

u vektorskom obliku $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{N} = 0^*$.

Udaljenost δ tačke $M(a, b, c)$ od pravca zadanog jednadžbom u normalnom obliku (II) određujemo po formuli:

$$\delta^2 = \frac{[(a - x_1)m - (b - y_1)l]^2 + [(b - y_1)n - (c - z_1)m]^2 + [(c - z_1)l - (a - x_1)n]^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Najkraća udaljenost dvaju pravaca, ako su njihove jednadžbe zadane u normalnom obliku:

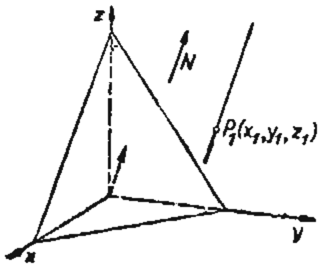
$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

i

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

možemo izračunati po formuli

$$\delta = \frac{\pm \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}}.$$



Sl. 211

Kada determinanta u brojniku postane jednaka nuli, ispunjen je *uvjet presijecanja dvaju pravaca u prostoru.*

* O produktima vektora vidi na str. 606.

Sjecišta ravnina i pravaca

Koordinate sjecišta	Zadanih jednadžbama	Računaju se po formulama	Primjedbe
triju ravnina	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$ $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$	$\bar{x} = \frac{-\Delta_x}{\Delta}, \quad \bar{y} = \frac{-\Delta_y}{\Delta}, \quad \bar{z} = \frac{-\Delta_z}{\Delta},$ gdje je $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}.$	Tri ravnine sijeku se u jednoj tački ako je $\Delta \neq 0$; ako je $\Delta = 0$ i ako je bar jedna poddeterminanta drugog reda $\neq 0$, ravnine su paralelne nekom smjeru; ako su sve poddeterminante $= 0$, ravnina prolazi kroz pravac.
četiriju ravnina	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$ $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$ $A_4x + B_4y + C_4z = D_4 = 0.$	Nađemo sjecište bilo koje tri od četiri ravnine (vidi gore). U tom je slučaju ($\delta = 0$) jedna od jednadžbi posljedica triju ostalih.	Četiri ravnine prolaze kroz jednu tačku samo tada ako je: $\delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$
ravnine i pravca	1) $Ax + By + Cz + D = 0,$ $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ 2) $Ax + By + Cz + D = 0,$ $y = kx + a, \quad z = hx + b$	1) $\bar{x} = x_1 - l\rho,$ $\bar{y} = y_1 - m\rho,$ $\bar{z} = z_1 - n\rho,$ gdje je $\rho = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Al + Bm + Cn};$ 2) $\bar{x} = -\frac{Ba + Cb + D}{A + Bk + Ch},$ $\bar{y} = k\bar{x} + a, \quad \bar{z} = h\bar{x} + b$	Ako je: $Al + Bm + Cn = 0$ $(A + Bk + Ch = 0),$ pravac je paralelan s ravninom; ako je pored toga: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ $(Ba + Cb + D = 0),$ pravac leži u ravnini.
dvaju pravaca	$y = k_1x + a_1, \quad z = h_1x + b_1;$ $y = k_2x + a_2, \quad z = h_2x + b_2$	$\bar{x} = \frac{a_2 - a_1}{k_1 - k_2} = \frac{b_2 - b_1}{h_1 - h_2};$ $\bar{y} = \frac{k_1a_2 - k_2a_1}{k_1 - k_2};$ $\bar{z} = \frac{h_1b_2 - h_2b_1}{h_1 - h_2}.$	Te formule daju sjecište samo pod uvjetom: $(a_1 - a_2)(h_1 - h_2) =$ $= (b_1 - b_2)(k_1 - k_2),$ u protivnom slučaju pravci se ne sijeku (vidi također str. 255).

Kut između ravnina i pravaca

Kut između	Zadanih jednadžbama	Računamo po formuli
dviju ravnina	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}$
u vektorskom obliku	$\mathbf{r}\mathbf{N}_1 + D_1 = 0,$ $\mathbf{r}\mathbf{N}_2 + D_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2}{N_1N_2}$
dvaju pravaca	$\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1},$ $\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}.$	$\cos\varphi = \dfrac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)}}$
u vektorskom obliku:	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{R}_1 = 0,$ $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{R}_2 = 0.$	$\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2}{R_1R_2}$

pravca i ravnine	$\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n},$ $Ax + By + Cz + D = 0.$	$\sin\varphi = \dfrac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(l^2 + m^2 + n^2)}}$
u vektorskom obliku	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{R} = 0,$ $\mathbf{r}\mathbf{N} + D = 0.$	$\sin\varphi = \dfrac{\mathbf{R}\mathbf{N}}{RN}$

Uvjeti paralelnosti (oznake iste kao gore):

dviju ravnina: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ ili $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = 0,$

dvaju pravaca: $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$ ili $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 = 0,$

pravca i ravnine: $Al + Bm + Cn = 0$ ili $\mathbf{R}\mathbf{N} = 0.$

Uvjeti okomitosti (oznake iste kao gore):

dviju ravnina: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ ili $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2 = 0,$

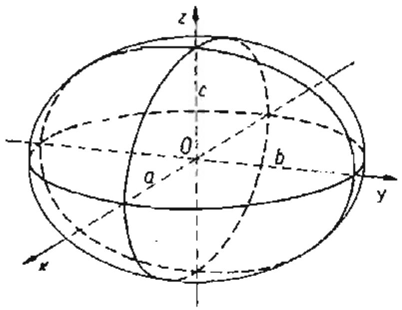
dvaju pravaca: $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ ili $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = 0,$

pravca i ravnine: $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$ ili $\mathbf{N} \times \mathbf{R} = 0.$

10. PLOHE DRUGOG REDA (NORMALNE JEDNADŽBE)*

Centralne plohe. Jednadžbe navedene niže dane su u *normalnom* obliku: *središte* plohe (tačka u kojoj se raspolavljaju sve tetive što krozanj prolaze) je u ishodištu, a za koordinatne osi uzete su osi simetrije plohe. Pri tome su koordinatne ravnine ravnine simetrije.

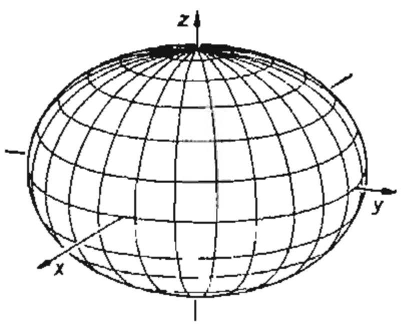
Elipsoid (sl. 212): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, a, b, c, su polovi.



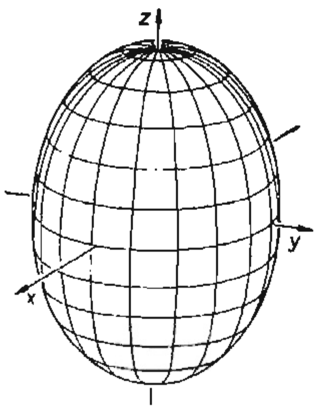
Sl. 212

Ako je $a = b > c$, imamo *spljošteni rotacioni elipsoid* (sl. 213) koji nastaje rotacijom elipse oko male osi elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ u ravnini Oxz.

Ako je $a = b < c$ imamo *produljeni rotacioni elipsoid* (sl. 214) koji nastaje rotacijom elipse oko velike osi elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ u ravnini Oxz.



Sl. 213



Sl. 214

* Opću jednadžbu plohe drugog reda vidi na str. 264.

Ako je $a = b = c$ imamo *kuglu*:

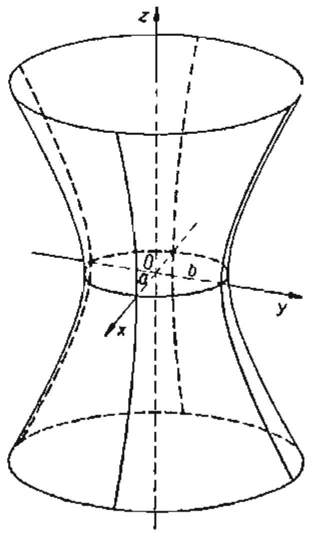
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Svaka ravnina siječe elipsoid u elipsi (u posebnom slučaju u kružnici). Volumen elipsoida je $\frac{4}{3}\pi abc$.

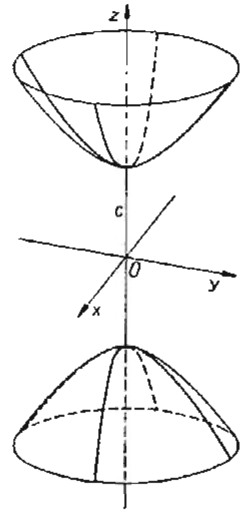
Jednokrilni (jednoplošni) hiperboloid (sl. 215): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, a i b su realne poluosi, c je imaginarna poluos.

O pravčastim izvodnicima vidi na str. 263.

Dvokrilni (dvoplošni) hiperboloid (sl. 216): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, c je realna poluos, a i b su imaginarne poluosi.



Sl. 215

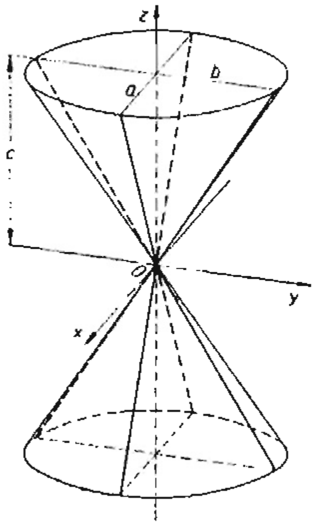


Sl. 216

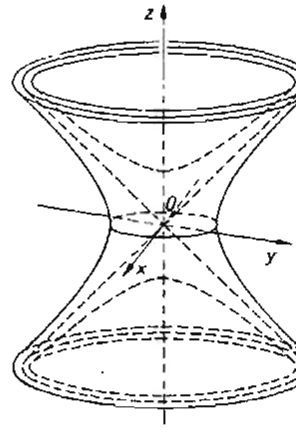
Za oba hiperboloida presjeci paralelni sa osi Oz su hiperbole (za jednokrilni hiperboloid može biti par pravaca koji se sijeku), a presjeci paralelni sa osi xOy su elipse.

Ako je $a = b$, onda hiperboloid može nastati rotacijom hiperbole s poluosima a i c oko osi $2c$, koja je za jednokrilni hiperboloid imaginarna, a za dvokrilni hiperboloid realna.

Čunj (sl. 217) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ ima vrh u ishodištu, a ravnalica (vidi str. 201) mu može biti elipsa s poluosima a i b, kojoj je ravnina okomita na os Oz i udaljena za c od ishodišta. Taj čunj je asimptotički za dva hiperboloida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$, tj. svaka njegova izvodnica se pri udaljavanju u beskonačnost neograničeno približava objema hiperboloidima (sl. 218). Ako je $a=b$ imamo uspravni kružni čunj (vidi na str. 201).



Sl. 217



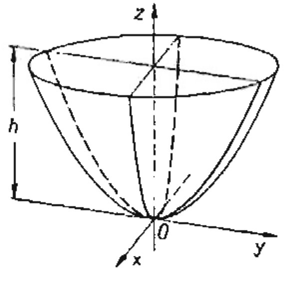
Sl. 218

Paraboloidi. Paraboloidi nemaju središta; za niže navedene jednadžbe tjeme paraboloida je u ishodištu koordinata, os Oz je os simetrije, a ravnine xOz i yOz su ravnine simetrije.

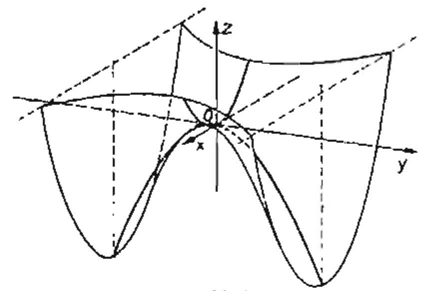
Eliptični paraboloid (sl. 219): $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. Presjeci paralelni sa osi Oz su parabole; presjeci paralelni s ravninom xOy su elipse. Ako je $a=b$ imamo *rotacioni paraboloid*, koji nastaje rotacijom parabole $z=\frac{x^2}{a^2}$, u ravnini xOz, oko njene osi.

Volumen dijela paraboloida koji odsijeca ravnina okomita na njegove osi u visini h je $\frac{1}{2}\pi abh$, a to je polovina volumena eliptičnog valjka s istom bazom i visinom.

Hiperbolni paraboloid (sl. 220): $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$. Presjeci paralelni s ravninom yOz su sukladne parabole; presjeci paralelni s ravninom xOz su sukladne parabole; presjeci paralelni s ravninom xOy su hiperbole (a također i par pravaca koji se sijeku).



Sl. 219



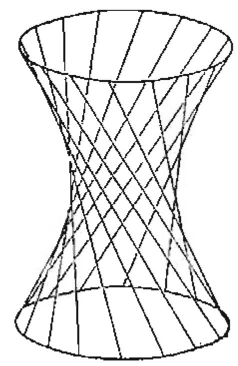
Sl. 220

Pravčastom izvodnicom plohe nazivamo pravac koji čitav leži u zadanoj plohi, npr. pravčasta izvodnica čunjaste ili valjkaste plohe.

Jednokrilni hiperboloid (sl. 221) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ima dvije porodice pravčastih izvodnica:

$$\mathrm{I}\quad\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=u\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b};\end{cases}$$

$$\mathrm{II}\quad\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=v\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1+\frac{y}{b};\end{cases}$$



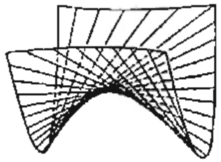
Sl. 221

u i v su po volji odaberivi.

Hiperbolni paraboloid (sl. 222) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ ima također dvije porodice izvodnica:

$$\text{I)}\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u, \quad u\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z;$$

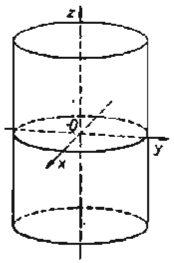
$$\text{II)}\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = v, \quad v\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z;$$



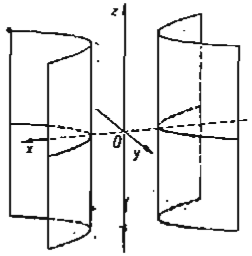
Sl. 222

u i v su po volji. Kroz svaku tačku plohe u oba slučaja prolaze dva pravca; po jedna izvodnica svake porodice (na sl. 221 i 222 nacrtana je samo jedna porodica).

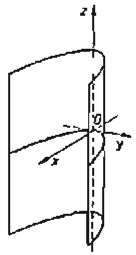
Valjci (cilindri): *eliptični* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (sl. 223), *hiperbolni* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (sl. 224), *parabolni* $y^2 = 2px$ (sl. 225).



Sl. 223



Sl. 224



Sl. 225

11. PLOHE DRUGOG REDA (OPĆA TEORIJA)

Opća jednadžba plohe drugog reda: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$

Invarijante plohe drugog reda*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

$$T = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2.$$

Te veličine se ne mijenjaju pri pomaku ishodišta i vrtnji koordinatnih osi.

* Ovdje je: $a_{ik} = a_{ki}$.

Oblik plohe drugog reda po njenoj jednadžbi određen je predznacima njenih invarijanata Δ, δ, S i T iz donje tablice. U toj tablici je redom pored naziva plohe i njena normalna jednadžba u koju transformacijom koordinate možemo dovesti zadanu jednadžbu. Jednadžbe tzv. imaginarnih ploha ne zadovoljavaju koordinate ni jedne realne tačke (osim dva izuzetka: vrh imaginarnog čunja i presječnica imaginarnih ravnina).

Određivanje oblika površine drugog reda

I. $\delta \neq 0$ (centralne plohe)

	$S\delta > 0, \quad T > 0$	$S\delta$ i T nisu oba > 0
$\Delta < 0$	Elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Dvokrilni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
$\Delta > 0$	Imaginarni elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	Jednokrilni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
$\Delta = 0$	Imaginarni čunj (s realnim vrhom) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Čunj $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

II. $\delta = 0$ (paraboloidi, valjci i parovi ravnina)

	$\Delta < 0$ (pri tome je $T > 0$)	$\Delta > 0$ (pri tome je $T < 0$)
$\Delta \neq 0$	Eliptični paraboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$	Hiperbolni paraboloid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z$
$\Delta = 0$	Valjkasta ploha ima za ravnalicu krivulju drugog reda. U ovisnosti o obliku krivulje (vidi na str. 244 i 245) imamo valjke raznih oblika (eliptični realni ili imaginarni za $T > 0$, hiperbolni za $T < 0$, parabolni za $T = 0$), ako se plohe raspadaju na dvije ravnine (realne, imaginarne ili identične). Uvjeti za raspad: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$	

II. DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

U diferencijalnoj geometriji proučavamo krivulje (ravninske i prostorne) i plohe metodama diferencijalnog računa; zato pretpostavljamo da su funkcije koje ulaze u jednadžbu neprekinute i da imaju neprekinutu derivaciju do tog reda koji nam je u okviru postavljenog problema potreban*. Pri proučavanju geometrijskih tvorevina prema njihovim jednadžbama razlikujemo njihova svojstva, ovisna o izboru koordinatnog sistema (npr. presjek krivulje ili plohe s osima, nagib tangente, tačke maksimuma i minimuma) i invarijantna svojstva koja se ne mijenjaju pri transformaciji koordinata i svojstvena su krivulji ili plohi (npr. tačke infleksije, tjemena krivulje, zakrivljenost). S druge strane razlikujemo lokalna svojstva koja se odnose samo na male dijelove krivulje ili plohe (npr. zakrivljenost, linijski element plohe) i svojstva krivulje ili plohe u cjelini (npr.: broj tjemena, duljina zatvorene krivulje).

A. RAVNINSKE KRIVULJE

1. NAČINI DEFINIRANJA KRIVULJA

Jednadžba krivulje.** Ravninska krivulja može se analitički izraziti u jednom od ovih oblika:

U Descartesovim koordinatama:

implicitno .... $F(x, y) = 0$, (1)

eksplicitno .... $y = f(x)$, (2)

u parametarskom obliku $x = x(t), \quad y = y(t)$ (3)

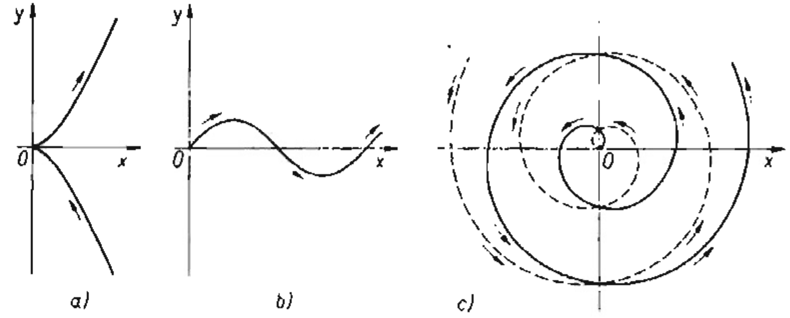
U polarnim koordinatama: $\rho = f(\varphi)$. (4)

Pozitivni smjer na krivulji. Ako je krivulja zadana u obliku (3), onda je njen *pozitivni smjer* zadan smjerom u kojem se giba tačka krivulje $M[x(t), y(t)]$ kada parametar t raste. Ako je krivulja zadana u obliku (2), onda parametrom možemo smatrati apscisu tačke: $x = x$, $y = f(x)$ i pozitivni smjer odgovara prirastu apscise

* Taj uvjet može biti narušen samo za pojedine tačke krivulje ili plohe; u tom slučaju imamo tačku specijalnog tipa (npr. skok ili tačke loma krivulje). O takvim tačkama vidi na str. 274 i 295.

** Opće pojmove o jednadžbi krivulje vidi na str. 229.

(tj. slijeva nadesno). Ako je krivulja zadana u obliku (4), onda je parametar kut φ: $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$ i pozitivni smjer odgovara prirastu φ (tj. suprotan je gibanju kazaljke na satu).



Sl. 226

Primjeri (sl. 226): a) $x = t^2, \quad y = t^3$; b) $y = \sin x$; c) $\rho = a\varphi$.

2. LOKALNI ELEMENTI KRIVULJE

U ovom je paragrafu sa M označena pomična tačka krivulje koja je određena: vrijednošću x kada je krivulja zadana u obliku (2), vrijednošću t kada je krivulja zadana u obliku (3) i vrijednošću φ kada je krivulja zadana u obliku (4); tačka N joj je neizmjerno blizu i određena je vrijednostima $x + dx, \quad t + dt \quad i \quad \varphi + d\varphi$.

Diferencijal luka. Ako je s duljina krivulje od neke stalne tačke A do M, onda infinitezimalni prirast duljine $\Delta s = \widehat{MN}$ približno izražavamo formulom diferencijala luka* ds:

$$\Delta s \approx ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \quad \text{ako je krivulja izražena u obliku (2),}$$

$$= \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt, \quad \text{ako je krivulja izražena u obliku (3),}$$

$$= \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi, \quad \text{ako je krivulja izražena u obliku (4),}$$

Primjeri: 1) $y = \sin x$, $\quad ds = \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$;

2) $x = t^2, \quad y = t^3$, $\quad ds = t\sqrt{4 + 9t^2}\, dt$;

3) $\rho = a\varphi$, $\quad ds = a\sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi$.

* O diferencijalu i njegovim svojstvima vidi na str. 349 i 350.

Tangenta i normala. *Tangentom* u tački M nazivamo granični položaj sekante MN, kada $N \to M$; *normala* je pravac koji prolazi kroz tačku M okomito na tangentu (sl. 227).

Jednadžba tangente i normale (x i y su koordinate tačke M krivulje; X i Y su koordinate pomičnih tačaka tangente ili normale; vrijednosti derivacija računaju se za tačku M).

Oblik jednadžbi krivulje (vidi str. 266)	Jednadžba tangente	Jednadžba normale
(1)	$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)=0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$
(2)	$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$	$Y-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x)$
(3)	$\frac{Y-y}{y'}=\frac{X-x}{x'}$	$x'(X-x)+y'(Y-y)=0$

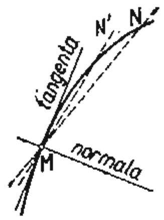
Primjeri: Naći jednadžbe tangente i normale:

1) Za kružnicu $x^2+y^2=25$ u tački $M(3, 4)$. Jednadžba tangente: $2x(X-x)+2y(Y-y)=0$ ili (s obzirom na jednadžbu kružnice) $Xx+Yy=25$; u tački M: $3X+4Y=25$. Jednadžba normale: $\frac{X-x}{2x}=\frac{Y-y}{2y}$ ili $Y=\frac{y}{x}X$; u tački M: $Y={}^4/_3\,X$.

2) Za sinusoidu $y=\sin x$ u tački O (0, 0). Jednadžba tangente: $Y-\sin x=\cos x(X-x)$ ili $Y=X\cos x+\sin x-x\cos x$; u tački O: $Y=X$. Jednadžba normale: $Y-\sin x=-\frac{1}{\cos x}(X-x)$ ili $Y=-X\sec x+\sin x+x\sec x$; u tački O: $Y=-X$.

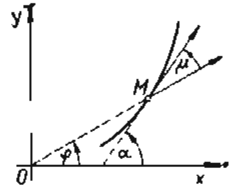
3) Za krivulju $x=t^2$, $y=t^3$ u tački $M(4, -8)$, $t=-2$. Jednadžba tangente: $\frac{Y-t^3}{3t^2}=\frac{X-t^2}{2t}$ ili $Y=\frac{3}{2}tX-\frac{1}{2}t^3$, u tački M: $Y=-3X+4$. Jednadžba normale: $2t(X-t^2)+3t^2(Y-t^3)=0$ ili $2X+3tY=t^2(2+3t^2)$, u tački M: $X-3Y=28$.

Pozitivni smjer. Ako je krivulja zadana u obliku (2), (3) ili (4) (vidi na str. 266), onda se za tangentu i normalu određuje pozitivni smjer ovako: na tangenti se pozitivni smjer poklapa s pozitivnim smjerom u diralištu (vidi na str. 268), a na normali se pozitivni smjer dobiva zakretom pozitivnog smjera tangente oko tačke M za 90° suprotno gibanju kazaljke na satu (sl. 228). Tačka M dijeli tangentu i normalu na pozitivni i negativni polupravac.



Sl. 227

Sl. 228



Sl. 229

Prikloni kut tangente određujemo kutom α između pozitivnog smjera osi apscisa i pozitivnog smjera tangente, ili (ako je krivulja zadana u polarnim koordinatama) kutom μ između radijvektora $OM=\rho$ i pozitivnog smjera tangente (sl. 229). Kutove α i μ određujemo formulama (ds računamo po formulama na str. 267):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx},\qquad \cos\alpha=\frac{dx}{ds},\qquad \sin\alpha=\frac{dy}{ds};$$

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)},\qquad \cos\mu=\frac{d\rho}{ds},\qquad \sin\mu=\rho\frac{d\varphi}{ds}.$$

Primjeri:

1) $y=\sin x$; $\qquad \operatorname{tg}\alpha=\cos x$,

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}},\qquad \sin\alpha=\frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}};$$

2) $x=t^2$, $\quad y=t^3$; $\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{3t}{2}$,

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+9t^2}},\qquad \sin\alpha=\frac{3t}{\sqrt{4+9t^2}};$$

3) $\rho=a\varphi$; $\operatorname{tg}\mu=\varphi$, $\cos\mu=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$, $\sin\mu=\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$.

Duljina tangente i normale; subtangenta i subnormala (sl. 230).

a) U kartezijskim koordinatama [ako su zadane u obliku (2) i (3), vidi na str. 266)]:

$$MT = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right| \qquad (\textit{duljina tangente}),$$

$$MN = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right| \qquad (\textit{duljina normale}),$$

$$PT = \left|\frac{y}{y'}\right| \qquad (\textit{subtangenta}),$$

$$PN = |yy'| \qquad (\textit{subnormala}).$$

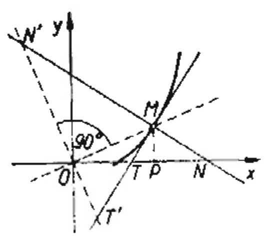
b) U polarnim koordinatama [ako su zadane u obliku (4), vidi na str. 266]:

$$MT' = \left|\frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right| \qquad (\textit{duljina polarne tangente}),$$

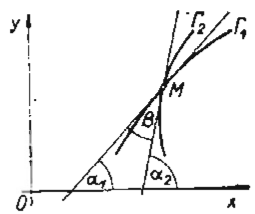
$$MN' = \left|\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right| \qquad (\textit{duljina polarne normale}),$$

$$OT' = \left|\frac{\rho^2}{\rho'}\right| \qquad (\textit{polarna subtangenta}),$$

$$ON' = |\rho'| \qquad (\textit{polarna subnormala}).$$



Sl. 230



Sl. 231

Primjeri: 1) $y = \operatorname{ch} x$; $y' = \operatorname{sh} x$, $\sqrt{1+y'^2} = \operatorname{ch} x$; $MT = |\operatorname{ch} x \operatorname{cth} x|$, $MN = |ch^2 x|$, $PT = |\operatorname{cth} x|$, $PN = |\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x|$. 2) $\rho = a\varphi$; $\rho' = a$, $\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = a\sqrt{1+\varphi^2}$; $MT' = |a\varphi\sqrt{1+\varphi^2}|$, $MN' = |a\sqrt{1+\varphi^2}|$, $OT' = |a\varphi^2|$, $ON' = a$.

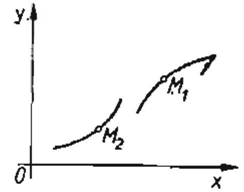
Kut između dviju krivulja. Pod kutom između dviju krivulja Γ_1 i Γ_2 koje se sijeku u tački M razumijevamo kut β između tangenata na te krivulje u tački M (sl. 231). Računanje kuta β svodi se

na određivanje kuta između dvaju pravaca (vidi str. 232) kojima su koeficijenti smjera:

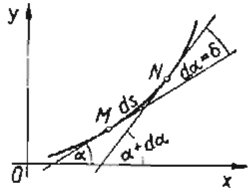
$$k_1 = tg\,\alpha_1 = \left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}\right)_M, \quad \text{i} \quad k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \left(\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x}\right)_M,$$

gdje je $y = f_1(x)$ jednadžba krivulje Γ_1, a $y = f_2(x)$ jednadžba krivulje Γ_2; derivacije se računaju u tački M.

Primjer: Odredimo kut između parabola $y = \sqrt{x}$ i $y = x^2$ u tački $M(1, 1)$. $\operatorname{tg}\alpha_1 = \left(\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}x}\right)_{x=1} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \left(\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=1} = 2$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{3}{4}$.



Sl. 232



Sl. 233

Konkavnost i konveksnost krivulje. Ako je krivulja zadana u eksplicitnom obliku: $y = f(x)$, onda za njen mali dio koji sadrži tačku M (s izuzetkom kada je M tačka infleksije ili singularna tačka, vidi na str. 274 do 278) možemo odrediti da li je krivulja svojom konkavnom stranom okrenuta nadolje ili nagore*: ako je u tački M druga derivacija $f''(x) > 0$, onda je konkavna strana krivulje okrenuta nagore** (tačka M_2 na sl. 232), a ako je $f''(x) < 0$, onda nadolje (tačka M_1); ako je $y'' = 0$, treba izvršiti dopunska ispitivanja, koja su načinjena na str. 274 i 275 pri razmatranju tačaka infleksije.

Primjer: $y = x^3$ (vidi sl. 6, *b* na str. 92); $y'' = 6x$; pri $x > 0$ je krivulja okrenuta nagore, a pri $x < 0$ nadolje.

Zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti. *Zakrivljenošću* K krivulje u njenoj tački M nazivamo limes omjera »kuta kontingencije« δ između pozitivnih smjerova tangenata u tačkama M i N (sl. 233) i duljine luka $\widehat{MN}$, kada $\widehat{MN} \to 0$:

$$K = \lim \frac{\delta}{\widehat{MN}} \quad \text{za} \quad \widehat{MN} \to 0.$$

* Smjer *konveksnosti* suprotan je smjeru konkavnosti.
** Tačnije, u stranu pozitivnog smjera osi Oy.

Zakrivljenost K ima predznak »+« ili »—« ovisno o predznaku tog limesa. Predznak K pokazuje da li je krivulja svojom konkavnom stranom okrenuta u smjeru pozitivnog (pri $K > 0$) ili negativnog (pri $K < 0$) polupravca normale (vidi na str. 269).*

Zakrivljenost često smatramo bitno pozitivnom veličinom, razumijevajući pod time apsolutnu veličinu gore napisanog limesa.

Polumjerom zakrivljenosti R u tački M krivulje nazivamo veličinu recipročnu zakrivljenosti: $R = 1/K$. Što je veća zakrivljenost krivulje u blizini zadane tačke, to veći je K i to manji je R u toj tački. Krug s polumjerom a ima zakrivljenost $K = 1/a$ i polumjer zakrivljenosti $R = a$ (konstantni su za sve tačke); za pravac: $K = 0$, $R = \infty$; za druge krivulje zakrivljenost se mijenja od tačke do tačke.

Formule za K **i** R. Uz pretpostavku (sl. 233) da je $\delta = d\alpha$ i $\widehat{MN} = ds$ imamo:

$$K = \frac{d\alpha}{ds}, \quad R = \frac{ds}{d\alpha}. \qquad (*)$$

Ako je krivulja zadana jednadžbama (1), (2), (3) ili (4) (vidi na str. 266), tada se K i R računaju po formulama:

Ako je zadana u obliku (2):

$$K = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}, \qquad R = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},$$

ako je zadana u obliku (3):

$$K = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}, \qquad R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}},$$

ako je zadana u obliku (1):

$$K = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}, \qquad R = \frac{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}},$$

ako je zadana u obliku (4):

$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}, \qquad R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}. \qquad (**)$$

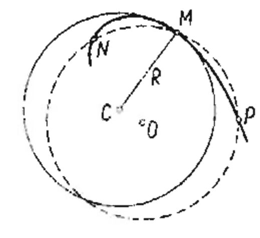
* Drugačije: pri $K > 0$ središte zakrivljenosti (vidi dalje) leži na pozitivnom polupravcu normale, a pri $K < 0$ na negativnom.

Primjeri: 1) $y = \operatorname{ch} x$, $K = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

2) $x = t^2$, $y = t^3$, $K = \dfrac{6}{t(4 + 9t^2)^{3/2}}$;

3) $y^2 - x^2 = a^2$, $K = \dfrac{a^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$;

4) $\rho = a\varphi$, $K = \dfrac{1}{a} \dfrac{\varphi^2 + 2}{(\varphi^2 + 1)^{3/2}}$.



Sl. 234

Kružnica zakrivljenosti i središte zakrivljenosti. *Kružnicom zakrivljenosti* u tački M krivulje nazivamo granični položaj kružnice koja prolazi kroz tačku M i dvije druge bliske tačke krivulje N i P, kada $N \to M$ i $P \to M$ (sl. 234). Polumjer kružnice zakrivljenosti jednak je polumjeru zakrivljenosti u pripadnoj tački [računa se po formulama (**)]. Središte kružnice zakrivljenosti C nazivamo *središtem zakrivljenosti* za tačku M i ono se nalazi na normali krivulje u smjeru njene konkavnosti. Koordinate središta zakrivljenosti (x_c, y_c) određujemo po ovim formulama:

ako je zadana u obliku (2) (vidi str. 266):

$$x_c = x - \frac{\dfrac{dy}{dx}\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}, \quad y_c = y + \frac{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}};$$

ako je zadana u obliku (3):

$$x_c = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}, \quad y_c = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}};$$

ako je zadana u obliku (4):

$$x_c = \rho\cos\varphi - \frac{(\rho^2 + \rho'^2)(\rho\cos\varphi + \rho'\sin\varphi)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''},$$

$$y_c = \rho\sin\varphi - \frac{(\rho^2 + \rho'^2)(\rho\sin\varphi - \rho'\cos\varphi)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''};$$

ako je zadana u obliku (1):

$$x_c = x + \frac{F'_x(F'^2_x + F'^2_y)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}, \quad y_c = y + \frac{F'_y(F'^2_x + F'^2_y)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}. \qquad (***)$$

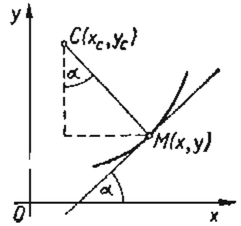
Te formule možemo pisati u obliku:

$$x_c = x - R\sin\alpha, \qquad y_c = y + R\cos\alpha$$

ili

$$x_c = x - R\frac{dy}{ds}, \qquad y_c = y + R\frac{dx}{ds}$$

(sl. 235) gdje se R računa po formulama (**) (vidi na str. 272).



Sl. 235

Sl. 236

3. OSOBITE TAČKE*

Tačke infleksije su tačke krivulje u kojima se smjer konkavnosti mijenja u obrnuti (sl. 236); krivulja u malom dijelu na kome se nalazi ta tačka ne leži samo na jednoj strani tangente, nego je presijeca. U tački infleksije zakrivljenost $K = 0$, a polumjer zakrivljenosti $R = \infty$.

Pravila za traženje tačke infleksije

Krivulja je zadana u obliku (2): $y = f(x)$.

Neophodan uvjet za tačku infleksije: u njoj druga derivacija $f''(x)$, ako postoji, mora biti jednaka nuli. Da nađemo tačku infleksije u kojoj postoji** $f''(x)$, odredit ćemo sve vrijednosti $x_1, x_2, \ldots$ korijena jednadžbe $f''(x) = 0$, i svaku vrijednost x_i zatim uvrstiti redom u slijedeću derivaciju. Ako je $f'''(x_i) \neq 0$, onda je x_i apscisa tačke infleksije; ako je $f'''(x_i) = 0$, a $f^{IV}(x_i) \neq 0$ onda x_i nije tačka infleksije itd.; ovisno o tome koja je od uzastopnih derivacija — parnog ili neparnog reda — prva različita od nule u promatranoj tački, ta će tačka biti tačka infleksije, ili ne. Ako promatrana tačka nije tačka infleksije (prva derivacija koja nije jednaka nuli, derivacija je k-tog reda za k parni), onda je krivulja s konveksnom stranom okrenuta nagore pri $f^{(k)}(x) < 0$ i nadolje pri $f^{(k)}(x) > 0$.

Primjeri: 1) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$; $\qquad f''(x) = -2\dfrac{1 - 3x^2}{(1 + x^2)^3}$,

* Ovdje promatramo samo tačke koje su invarijantne pri transformacijama koordinata. Traženje maksimuma i minimuma vidi na str. 367 do 369.

** Traženje tačaka infleksije za slučajeve, kada $f''(x)$ ne postoji (npr. postaje beskonačno), vidi na str. 275.

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad f'''(x) = 24x\frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^4}, \quad f'''(x_{1,2}) \neq 0;$$

tačke infleksije: $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$, $\qquad B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$.

2) $y = x^4$, $\quad f''(x) = 12x^2$, $\quad x_1 = 0$, $\quad f'''(x) = 24x$, $f'''(x_1) = 0$, $\quad f^{IV}(x) = 24$; tačke infleksije nema.

Možemo također odrediti da li je nađena vrijednost x_i apscisa tačke infleksije neposredno ispitujući izmjenu predznaka druge derivacije pri prolazu kroz tu tačku: ako se predznak $f''(x)$ mijenja u obrnuti, onda se smjer konkavnosti također mijenja u obrnuti (vidi str. 271) pa imamo tačku infleksije. Taj način primjenljiv je i tada kada je $y'' = \infty$.

Primjer: $y = x^{5/3}$, $y' = \dfrac{5}{3}x^{2/3}$, $y'' = \dfrac{10}{9}x^{-1/3}$; za $x = 0$, $y'' = \infty$.

Pri prelazu od negativne vrijednosti x na pozitivnu druga derivacija mijenja predznak od »—« na »+«; prema tome za $x = 0$ krivulja ima tačku infleksije.

Praktički, ako je prema karakteru krivulje jasno postoje li tačke infleksije (npr. između maksimuma i minimuma za graf funkcije koji ima neprekinutu derivaciju), onda se ograničujemo samo na traženje x_i, ne interesirajući se za više derivacije.

Krivulje zadane na drugi način. Prije navedeni nužni uvjet za postojanje tačke infleksije $f''(x) = 0$ pri drugačije zadanim jednadžbama krivulje zamjenjuje se ovim:

parametarski oblik (3) (vidi str. 266) $\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0$;

polarni oblik (4): $\quad \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$;

opći oblik (1): rješava se sistemom jednadžbi:

$$F(x, y) = 0 \;\text{ i }\; \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

sistem rješenja daje koordinate mogućih tačaka infleksije.

Primjeri: 1) $\quad x = a\left(t - \dfrac{1}{2}\sin t\right); \qquad y = a\left(1 - \dfrac{1}{2}\cos t\right)$

(»stegnuta cikloida«, vidi na str. 122);

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4}\begin{vmatrix} 2 - \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4}(2\cos t - 1);$$

$$\cos t = \frac{1}{2}; \qquad t_i = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi;$$

ima neizmjerno mnogo tačaka infleksije, koje odgovaraju vrijednostima parametra t_i.

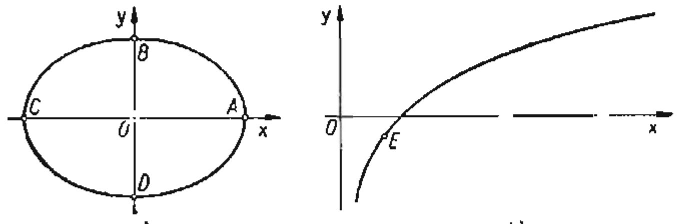
$$2)\ \rho = \frac{1}{\sqrt{\varphi}};\ \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\varphi^3} - \frac{3}{4\varphi^3} = \frac{1}{4\varphi^3}(4\varphi^2 - 1);$$

tačka infleksije određena je polarnim kutom $\varphi = 1/2$.

$$3)\ \begin{matrix} x^2 - y^2 = a^2 \\ \text{(hiperbola).} \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} F''. & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2x \\ 0 & -2 & -2y \\ 2x & -2y & 0 \end{vmatrix} = 8x^2 - 8y^2;$$

jednadžbe $x^2 - y^2 = a^2$ i $8(x^2 - y^2) = 0$ su u proturječnosti; prema tome hiperbola nema tačke infleksije.

Tjemena su tačke krivulje u kojima zakrivljenost ima maksimum ili minimum (krivulja je najviše ili najmanje zakrivljena); npr. elipsa ima 4 tjemena: A, B, C i D, logaritamska krivulja jedno: E (sl. 237). Traženje tjemena svodi se na određivanje maksimuma



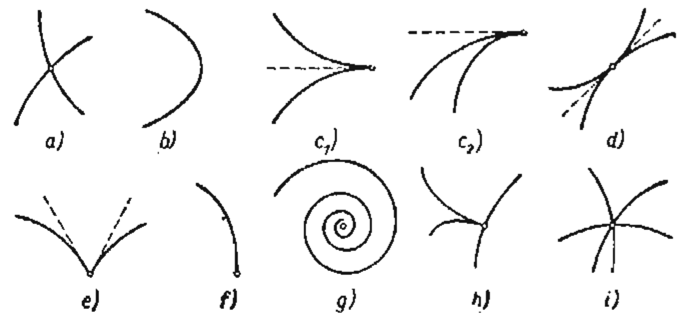
a) b)

Sl. 237

iminimuma izraza K zadanog formulama (**) na str. 272 (ili minimuma i maksimuma za $R = 1/K$, ako je u tom slučaju računanje jednostavnije).

Singularne tačke. Tim zajedničkim nazivom obuhvaćene su tačke različitih tipova: a) *čvorne tačke* u kojima krivulja samu sebe presijeca (sl. 238, *a*); b) *izolirane tačke* koje leže odvojeno od krivulje, ali im koordinate zadovoljavaju jednadžbu krivulje (sl. 238, *b*); c) *šiljci* ili *povratne tačke* u kojima se smjer krivulje mijenja u suprotni; razlikujemo šiljke: *prve vrste* (sl. 238, c_1) i *druge vrste* (sl. 238, c_2) ovisno o položaju tangente u odnosu na obje grane; d) *tačke samotangiranja* u kojima krivulja sama sebe tangira (sl. 238, *d*); e) *tačke loma* u kojima krivulja »skokomice« mijenja svoj smjer, pri čemu je razlika od šiljka u tome što su tangente na oba dijela krivulje u toj tački različite (sl. 238, *e*); f) *tačke prekidanja* u kojima

se krivulja prekida (sl. 238, *f*); g) *asimptotske tačke* oko kojih se krivulja ovija bezbroj puta, približavajući im se na po volji malu udaljenost (sl. 238, *g*). Moguća je istovremena kombinacija dviju ili nekoliko tih singularnih tačaka (sl. 238, *h* i *i*).



Sl. 238

Određivanje tačaka tipa e do g. Osobine tih tipova mogu postojati samo na transcendentnim krivuljama*. Tačke loma odgovaraju prekinutosti derivacije $\frac{dy}{dx}$, npr. ishodište koordinata za krivulju $y = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$ (vidi sl. 284 *c* na str. 348). Tačke prekidanja odgovaraju konačnoj prekinutosti ili skoku funkcije $y = f(x)$, npr. tačke $(1, 0)$ i $(1, 1)$ krivulje $y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$ (vidi sl. 272 na str. 316). Asimptotske tačke najlakše nalazimo na krivuljama zadanim u polarnom obliku: $\rho = f(\varphi)$; ako je $\lim \rho = 0$, kada $\varphi \to +\infty$ ili $\varphi \to -\infty$, tada je pol asimptotska tačka, npr. na logaritamskoj spirali $\rho = ae^{k\varphi}$ (vidi sl. 60 na str. 125).

Određivanje tačaka tipa a — d i *h*, *i* koje nazivamo *višestrukim tačkama* (*dvostrukim*, *trostrukim* itd.). Krivulju proučavamo u obliku $F(x, y) = 0$. Tačka A sa koordinatama (x_1, y_1) koje zadovoljavaju istovremeno tri jednadžbe: $F = 0$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ *dvostruka* je ako jedna od triju drugih derivacija F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy} nije jednaka nuli (u protivnom slučaju A je *trostruka* ili *višestruka* tačka). Karakter dvostruke tačke ovisi o predznaku:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix}_{\begin{pmatrix} x = x_1 \\ y = y_1 \end{pmatrix}}.$$

---

* Vidi na str. 230.

1) Ako je $\Delta < 0$, onda je A čvorna tačka, a koeficijenti smjera tangenata jednaki su korijenima jednadžbe

$$F''_{yy}k^2 + 2F''_{xy}k + F''_{xx} = 0.$$

2) Ako je $\Delta > 0$, onda je A izolirana tačka.

3) Ako je $\Delta = 0$, onda je A ili šiljak ili tačka samotangiranja; koeficijent smjera tangente u njoj je:

$$\operatorname{tg}\alpha = -F''_{xy}/F''_{yy}.$$

Za detaljno ispitivanje višestruke tačke treba ishodište koordinata pomaknuti u tu tačku i zakrenuti osi tako da os Ox bude u smjeru tangente u tački A; tada po obliku jednadžbe možemo ustanoviti imamo li šiljak prve vrste, druge vrste ili tačku samotangiranja.

Primjeri: 1) $F(x, y) \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ (lemniskata, vidi sl. 51 na str. 118); $F'_x = 4x(x^2 + y^2 - a^2)$, $F'_y = 4y(x^2 + y^2 + a^2)$; sistem $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ daje tri rješenja: $(0, 0)$, $(\pm a, 0)$, ali samo prvo zadovoljava $F = 0$. Ako uvrstimo $(0, 0)$ u drugu derivaciju dobivamo: $(F''_{xx})_0 = -4a^2$, $(F''_{xy})_0 = 0$, $(F''_{yy})_0 = +4a^2$, $\Delta = -16a^4 < 0$, tj. ishodište je čvorna tačka: koeficijent smjera tangente: $\operatorname{tg}\alpha = \pm 1$, i jednadžba tangente: $y = \pm x$.

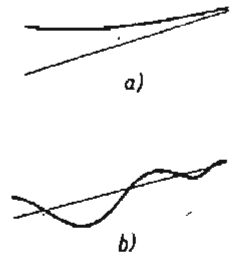
2) $F(x, y) \equiv x^3 + y^3 - x^2 - y^2 = 0$; $F'_x = x(3x - 2)$, $F'_y = y(3y - 2)$; od četiri tačke $(0, 0)$, $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ i $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ samo prva leži na krivulji; $(F''_{xx})_0 = -2$, $(F''_{xy})_0 = 0$, $(F''_{yy})_0 = -2$, $\Delta = 4 > 0$, tj. ishodište je izolirana tačka.

3. $F(x, y) \equiv (y - x^2)^2 - x^5 = 0$. Sistem $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ ima samo rješenje $(0, 0)$ koje zadovoljava i jednadžbu $F = 0$; $\Delta = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$. U tom slučaju imamo u ishodištu šiljak druge vrste, što se vidi iz jednadžbe krivulje u eksplicitnom obliku: $y = x^2(1 \pm \sqrt{x})$; y ne postoji za $x < 0$, a za male $x > 0$ obje vrijednosti y su pozitivne (tangenta je u ishodištu horizontalna).

Slučaj algebarske krivulje $F(x, y) = 0$. Ako jednadžba nema slobodnih članova ni članova prvog stupnja, onda je ishodište koordinata dvostruka tačka; jednadžbe tangenata u njoj dobivamo tako da sve članove drugog stupnja izjednačimo s nulom; npr. za lemniskatu (vidi gore primjer 1) jednadžbe tangenata su: $x^2 - y^2 = 0$ ili $y = \pm x$. Ako nema ni članova drugog stupnja ishodište je trostruka tačka itd.

4. ASIMPTOTE

Opći slučaj. Ako se krivulja nekim svojim dijelom neograničeno udaljuje od ishodišta koordinata, onda taj dio (*beskonačna grana* krivulje) može ponekad imati *asimptotu* — pravac kome se krivulja neograničeno približava ili s jedne strane (sl. 239, *a*) ili je stalno presijeca (sl. 239, *b*). Za određivanje asimptote krivulje zadane u parametarskom obliku: $x = x(t)$, $y = y(t)$ nađemo vrijednosti $t = t_i$, za koje $x(t) \to \infty$ ili $y(t) \to \infty$.



Sl. 239

Ako je

$$x(t_i) = \infty, \text{ ali je } y(t_i) = a \neq \infty,$$

pravac $y = a$ je horizontalna asimptota; ako je

$$y(t_i) = \infty, \text{ ali je } x(t_i) = a \neq \infty,$$

pravac $x = a$ je vertikalna asimptota; ako je

$$x(t_i) = \infty \quad \text{i} \quad y(t_i) = \infty$$

zračunamo dva limesa:

$$k = \lim_{t \to t_i} \frac{y(t)}{x(t)} \quad \text{i} \quad b = \lim_{t \to t_i} [y(t) - k \cdot x(t)];$$

ako postoje oba limesa, krivulja ima asimptotu $y = kx + b$.

Ako je krivulja zadana eksplicitno $y = f(x)$, vertikalnu asimptotu nalazimo kao tačku prekinutosti funkcije $f(x)$ (vidi na str. 321 do 324), a horizontalne i kose asimptote predočujemo u obliku $y = kx + b$, gdje je:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx].$$

Primjer: $x = \dfrac{m}{\cos t}$, $y = n(\operatorname{tg} t - t)$, $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $t_2 = -\dfrac{\pi}{2}$ itd.

Nalazimo npr. asimptotu za $t = \pi/2$:

$$x(t_1) = y(t_1) = \infty, \quad k = \lim_{t \to \pi/2} \frac{n}{m}(\sin t - t\cos t) = \frac{n}{m},$$

$$b = \lim_{t \to \pi/2} \left[n(\operatorname{tg} t - t) - \frac{n}{m}\frac{m}{\cos t}\right] = n \lim_{t \to \pi/2} \frac{\sin t - t\cos t - 1}{\cos t} =$$

$$= -\frac{n\pi}{2}, \; y = \frac{n}{m}x - \frac{n\pi}{2}; \text{ analogno druga asimptota: } \frac{x}{m} - \frac{y}{n} = \frac{\pi}{2} \text{ itd.}$$

Slučaj algebarske krivulje $F(x, y) = 0$. Funkcija $F(x, y)$ je polinom u odnosu na x i y. Odaberimo članove u $F(x, y)$ sa najvišom dimenzijom*. Sa $\Phi(x, y)$ označimo odabranu skupinu »najviših« članova i riješimo jednadžbu $\Phi(x, y) = 0$ po x i y:

$$x = \varphi(y), \qquad y = \psi(x).$$

Vrijednosti $y_1 = a$, za koje je $x = \infty$, daju horizontalne asimptote $y = a$; vrijednosti $x_1 = b$, za koje je $y = \infty$, daju vertikalne asimptote $x = b$. Za određivanje kosih asimptota uvrstimo u $F(x, y)$ izraz $y = kx + b$ i uredimo polinom po potencijama od x:

$$F(x, kx + b) \equiv f_1(k)\, x^m + f_2(k, b)\, x^{m-1} + \ldots$$

Izjednačimo s nulom dva najviša koeficijenta f_1 i f_2 i riješimo sistem jednadžbi:

$$f_1(k) = 0, \qquad f_2(k, b) = 0.$$

Ako su jednadžbe kompatibilne, njihova rješenja k, b daju parametre asimptota $y = kx + b$.

Primjer: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (»Descartesov list«, vidi sl. 44 na str. 113). $F(x, kx + b) \equiv (1 + k^3)\, x^3 + 3(k^2 b - ka)\, x^2 + \ldots$; $1 + k^3 = 0$ i $k^2 b - ka = 0$ daje sistem rješenja $k = -1$, $b = -a$; jednadžba asimptote: $y = -x - a$.

5. OPĆE ISPITIVANJE KRIVULJE IZ NJEZINE JEDNADŽBE

Ispitivanje krivulja iz njihovih jednadžbi vršimo zbog proučavanja toka neke jednoznačne funkcije $y = f(x)$ ili ustanovljenja oblika krivulje koja je analitički određena jednim od oblika (1), (2), (3) ili (4) (vidi na str. 266).

Konstrukcija grafova funkcija zadanih u obliku $y = f(x)$.

1) Nađemo područje definicije funkcije (str. 310).

2) Ustanovimo simetriju s obzirom na os Oy ili ishodište, prema tome da li je funkcija parna ili neparna (str. 314).

---

* Dimenzija člana $Ax^m y^n$ jest suma eksponenata $(m + n)$ za x i y. Tako član $3x^2y^3$ ima dimenziju 5; $2y^2$ ima dimenziju 2; polinom $x^3 + y^3 - 3xy$ ima najviše članove: x^3 i y^3.

3. Odredimo tok funkcije u beskonačnosti, tako da izračunamo $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (str. 315).

4) Nađemo prekinutosti i odredimo njihov karakter (str. 322 i 323).

5) Nađemo sjecište krivulje s osi Oy tako da izračunamo $f(0)$ i s osi Ox tako da riješimo jednadžbu $f(x) = 0$ (o rješavanju algebarskih i transcendentnih jednadžbi u općem obliku vidi na str. 163).

6) Nađemo tačke maksimuma i minimuma (str. 367), ustanovimo područje uzlaznosti i silaznosti funkcije.

7) Nađemo tačke infleksije (str. 274 i 275), ustanovimo područja u kojima je krivulja sa svojom konkavnom stranom okrenuta prema gore i prema dolje (str. 271), pri čemu u tačkama infleksije računamo prikloni kut tangente.

Prema tim podacima postepeno izradimo skicu krivulje, zatim je preciznije izradimo u pojedinim tačkama na mjestima koja su od većeg interesa.

Primjer: Nacrtajmo graf funkcije: $y = \dfrac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}$.

1) Funkcija postoji za svaki x, osim za $x = 0$.

2) Simetrije nema.

3) $y \to 2$ kada $x \to \pm\infty$, pri čemu je $y = 2 - 0$ kada $x \to -\infty$ (teži ka 2 »odozdo«), a kada $x \to +\infty$ onda je $y = 2 + 0$ (teži ka 2 »odozgo«).

4) Za $x = 0$ ima beskonačan skok (od $-\infty$ do $-\infty$, jer je y negativan za mali x).

5) $f(0) = \infty$; jednadžba $2x^2 + 3x - 4 = 0$ ima korijene $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$; prema tome su sjecišta s osi Ox: $x_1 \approx 0{,}85$, $x_2 \approx -2{,}35$.

6) Tačka maksimuma je $x = \dfrac{8}{3} = 2{,}66$, $y = 2{,}56$.

7) Tačka infleksije: $x = 4$, $y = 2{,}5$, $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{16}$.

Skiciramo krivulju prema tim podacima i izračunamo još

8) sjecište krivulje s asimptotom: $x = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$; $y = 2$.

Krivulja je nacrtana na sl. 240.

Konstruiranje krivulja zadanih u implicitnom obliku $F(x, y) = 0$. Držati se općih pravila teško je, jer to često dovodi do složenih računa. Ako je moguće, korisno je potražiti ove elemente:

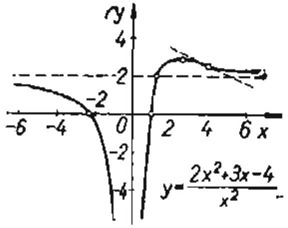
1) Odrediti sva sjecišta s osima.

2) Razjasniti simetričnost krivulje prema osima i ishodištu (tako da zamijenimo x sa $-x$; y sa $-y$).

3) Naći maksimum i minimum za os Ox (vidi na str. 370) i za os Oy primjenom analognih formula s transformacijom koordinatnih osi.

4) Naći tačke infleksije (str. 275) i prikloni kut tangente u njima.

5) Naći singularne tačke (str. 276 i 277).



Sl. 240

6) Naći tjemena krivulje (str. 276); konstruirati za njih kružnice zakrivljenosti (str. 273) — njihovi se lukovi na znatnoj duljini odoka ne razlikuju od krivulje.

7) Naći sve asimptote (str. 279) i ispitati položaj grana s obzirom na asimptote.

6. EVOLUTE I EVOLVENTE

Evoluta zadane krivulje je krivulja sastavljena od središta zakrivljenosti svih tačaka dane krivulje; ona je ovojnica normala dane krivulje. Parametarske jednadžbe evolute vidi na str. 273 formule (***) (jednadžbe za središte zakrivljenosti, gdje x_c i y_c treba smatrati koordinatama pomične tačke na evoluti). Ako se iz tih jednadžbi može izlučiti parametar (x, t ili φ) dobivamo jednadžbe evolute u kartezijskim koordinatama.

Primjer: naći evolutu parabole $y = x^2$ (sl. 241). Imamo:

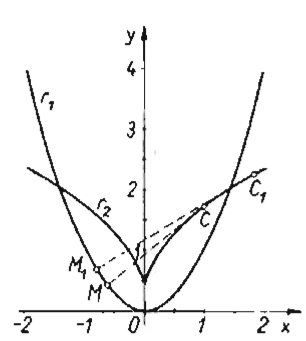
$$X = x - \frac{2x(1+4x^2)}{2} = -4x^3, \qquad Y = x^2 + \frac{1+4x^2}{2} = \frac{1+6x^2}{2},$$

odakle je $Y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{X}{4}\right)^{2/3}$, gdje su X i Y koordinate tačaka evolute.

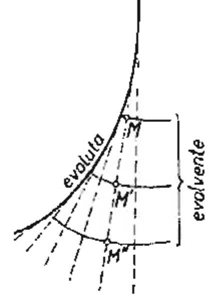
Evolventa zadane krivulje Γ_2 je takva krivulja Γ_1 za koju je Γ_2 evoluta. Normala MC evolvente je tangenta na evolutu, duljina luka $\overset{\frown}{CC_1}$ evolute jednaka je prirastu polumjera zakrivljenosti evolvente (sl. 241):

$$\overset{\frown}{CC_1} = M_1C_1 - MC.$$

Ta svojstva omogućavaju nam da evolventu smatramo »*krivuljom odmatanja*« Γ_1 krivulje Γ_2 dobivenom odmatanjem napete niti. Zadanoj evoluti odgovara porodica evolvenata, od kojih je svaka određena prvobitnom duljinom niti (sl. 242). Jednadžbu evolvente dobivamo integriranjem sistema diferencijalnih jednadžbi, koje predočuju jednadžbe evolute; jednadžbu evolvente kružnice vidi na str. 125.



Sl. 241



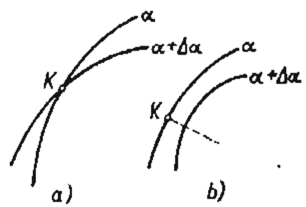
Sl. 242

7. OVOJNICE PORODICE KRIVULJA

Karakteristične tačke. Ako imamo porodicu krivulja s jednim parametrom α:

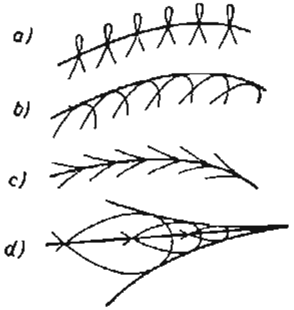
$$F(x, y, \alpha) = 0, \qquad (*)$$

onda dvije neizmjerno bliske krivulje te porodice, koje odgovaraju vrijednostima α i $\alpha + \Delta\alpha$, imaju *tačke najkraće udaljenosti* (tačke najvećeg zbliženja) K. Te tačke su ili sjecište krivulja (α) i ($\alpha + \Delta\alpha$), ili takve tačke na (α) kojima su udaljenosti do ($\alpha + \Delta\alpha$) (po normali) beskonačno male veličine višeg reda u odnosu na $\Delta\alpha$ (sl. 243, *a* i *b*). Ako $\Delta\alpha \to 0$, onda se krivulja ($\alpha + \Delta\alpha$) nastoji stopiti s prvom, a tačka K se u nekim slučajevima približava graničnom položaju — ***karakterističnoj tački***. Singularne tačke krivulje (α) uvijek su karakteristične tačke.

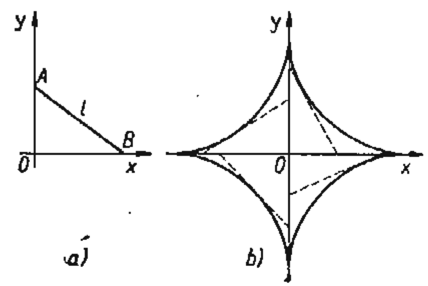


Sl. 243

Karakteristike. Geometrijsko mjesto karakterističnih tačaka za sve krivulje porodice (∗) tvore krivulju (ili nekoliko krivulja), koju nazivamo *karakteristikom* te porodice; ona je sastavljena ili od singularnih tačaka krivulja porodice (sl. 244, *a*) ili je *ovojnica* tih krivulja, tj. tangira svaku krivulju porodice (sl. 244, *b*). Mogu se pojaviti i kombinacije obaju tipova (sl. 244 *c*, *d*).



Sl. 244



Sl. 245

Jednadžbu ovojnice (i karakteristike u općem slučaju) porodice $F(x, y, \alpha) = 0$ dobivamo ako izlučimo α iz sistema jednadžbi $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$.

Primjer: Nađimo jednadžbu ovojnice porodice pravaca na kojima leži dužina $AB = l$, ako njeni krajevi A i B kližu po koordinatnim osima (sl. 245, *a*).

Jednadžba porodice:

$$\frac{x}{l \sin \alpha} + \frac{y}{l \cos \alpha} = 1$$

ili:

$$F \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - l \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha - l \cos^2 \alpha + l \sin^2 \alpha = 0.$$

Ako iz tih jednadžbi eliminiramo α dobivamo $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$, tj. ovojnicu *astroidu* (sl. 245, *b*, vidi također na str. 122 i 123).

B. PROSTORNE KRIVULJE

8. NAČINI DEFINICIJE KRIVULJA

Koordinatne jednadžbe. Prostorna krivulja može biti analitički izražena u jednom od ovih oblika:

a) Presječnica dviju ploha:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \Phi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

b) Parametarski oblik:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \tag{2}$$

(t je neki parametar, napose $t = x$, y ili z).

c) Parametarski oblik:

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = z(s) \tag{3}$$

(s je duljina luka od neke tačke A do pomične M):

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Vektorska jednadžba. Ako označimo sa $\mathbf{r}$ radijvektor neke tačke krivulje (vidi na str. 604), jednadžbu (2) predočujemo u obliku:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \text{gdje je} \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \tag{2a}$$

i jednadžbu (3) u obliku:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad \text{gdje je} \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}. \tag{3a}$$

Pozitivni smjer na krivulji određenoj jednadžbom (2) ili (2a) odgovara prirastu parametra t, a na krivulji određenoj jednadžbom (3) ili (3a) odgovara smjeru u kojem se povećava duljina luka s.

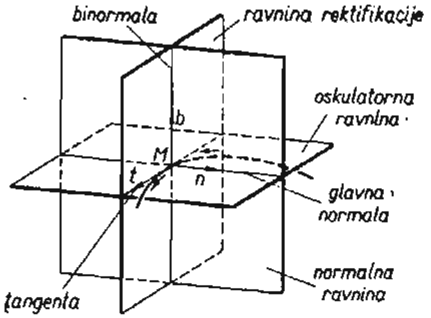
9. POPRATNI TROBRID

Definicija. U svakoj tački M prostorne krivulje (izuzevši singularne tačke) odredimo 3 pravca i 3 ravnine koje su međusobno sijeku u tački M pod pravim kutom (sl. 246):

1) *Tangenta* je granični položaj sekante MN, kada $N \to M$ (vidi sl. 227 na str. 268).

2) *Normalna ravnina* je okomita na tangentu. Sve pravce koji prolaze kroz M i leže u toj ravnini nazivamo normalama krivulje u tački M.

3) *Oskulatorna ravnina* je granični položaj ravnine koja prolazi kroz 3 bliske tačke krivulje M, N i P, kada $N \to M$ i $P \to M$ (sl. 247). U oskulatornoj ravnini nalazi se tangenta.



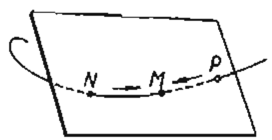
Sl. 246

4) *Glavna normala* je presječnica normalne i oskulatorne ravnine (ona od normala koja leži u oskulatornoj ravnini).

5) *Binormala* je pravac okomit na oskulatornu ravninu.

6) *Ravnina rektifikacije* sadrži tangentu i binormalu.

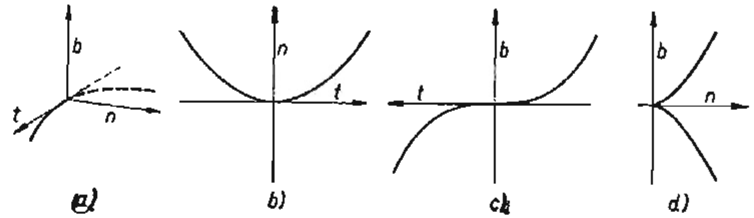
Na trima pravcima 1), 4) i 5) određujemo pozitivni smjer: na tangenti taj smjer odgovara pozitivnom smjeru krivulje i određen je jediničnim vektorom **t**; na glavnoj normali pokazuje u smjeru konkavnosti krivulje i određen je jediničnim vektorom **n**; na binormali određen je jediničnim vektorom $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, (**t**, **n** i **b** moraju tvoriti desnu trojku, vidi na str. 607). Tri vektora **t**, **n** i **b**, zajedno s ravninama koje oni razapinju, tvore *popratni trobrid* prostorne krivulje.



Sl. 247

Položaj krivulje u odnosu na trobrid. U općim tačkama krivulja leži s jedne strane ravnine rektifikacije i presijeca normalnu i oskulatornu ravninu (sl. 248, *a*). Pri tome projekcije malog dijela krivulje, koji sadrži tačku M, na ravnini trobrida imaju približno oblik:

na oskulatornoj ravnini — parabole (sl. 248, *b*),
na ravnini rektifikacije — kubne parabole (sl. 248, *c*),
na normalnoj ravnini — semikubne parabole (sl. 248, *d*).



Sl. 248

Ako je u tački M zakrivljenost ili torzija krivulje (vidi dalje) jednaka nuli ili je tačka singularna $[x'(t) = y'(t) = z'(t) = 0]$, onda krivulja može imati i drugi položaj.

Jednadžba elemenata trobrida

a) *Krivulja je zadana u obliku* (1) (str. 285):

Tangenta:
$$\frac{X - x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}};$$

normalna ravnina:
$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

(x, y i z su koordinate tačke M krivulje; X, Y i Z su koordinate tačaka tangentne ili normalne ravnine; parcijalne derivacije računamo u tački M).

b) *Krivulja je zadana u obliku* (2) *ili* (2a) (vidi str. 285).

U formulama na str. 288 x, y, z i **r** su koordinate i radijvektor tačke M, krivulje X, Y, Z i **R** su koordinate i radijvektor tačaka elementa trobrida; derivacije računamo za tačku M po parametru t.

Vektorska jednadžba	Koordinatne jednadžbe
Tangenta:	
$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \frac{d\mathbf{r}}{dt}$	$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}$
Normalna ravnina:	
$(\mathbf{R}-\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$	$x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0$
Oskulatorna ravnina	
$(\mathbf{R}-\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0$	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$
Binormala:	
$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}$
Ravnina rektifikacije:	
$(\mathbf{R}-\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = 0$	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$ gdje je $l = y'z'' - y''z'$, $m = z'x'' - z''x'$, $n = x'y'' - x''y'$
Glavna normala:	
$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ m & n \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ n & l \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ l & m \end{vmatrix}}.$

c) *Krivulja je zadana u obliku* (3) *ili* (3a) (vidi na str. 285).

Ako smo za parametar izabrali duljinu luka s, onda je jednadžba tangente, normalne ravnine, oskulatorne ravnine i binormale ista kao i u općem slučaju b) (t moramo zamijeniti sa s), a jednadžba glavne normale i ravnine rektifikacije pojednostavnjuju se:

Element trobrida	Vektorska jednadžba	Koordinatne jednadžbe
Glavna normala	$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$	$\frac{X-x}{x''} = \frac{Y-y}{y''} = \frac{Z-z}{z''}$
Ravnina rektifikacije	$(\mathbf{R}-\mathbf{r}) \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0$	$x''(X-x) + y''(Y-y) + z''(Z-z) = 0$

10. ZAKRIVLJENOST I TORZIJA

Zakrivljenost (fleksija) krivulje u tački M je broj koji karakterizira otklon krivulje (u njenom malom dijelu koji sadrži tačku M) od pravca. Tačna definicija:

$$\text{zakrivljenost } K = \lim_{\widehat{MN} \to 0} \left|\frac{\Delta \mathbf{t}}{\widehat{MN}}\right| = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|, \quad \text{(sl. 249).}$$

Polumjer zakrivljenosti: $\rho = \frac{1}{K}$.

K i ρ su za prostorne krivulje uvijek pozitivni.

Sl. 249

Formule za računanje K i ρ:

a) zadane u obliku (3) (vidi str. 285)

$$K = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} \qquad (*)$$

(derivacije po s).

b) Zadane u obliku (2) (vidi na str. 285):

$$K^2 = \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{r}\,d^2\mathbf{r}}{dt\,dt^2}\right)^2}{\left|\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right|^3} =$$

$$= \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2)-(x'x''+y'y''+z'z'')^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3} \qquad (**)$$

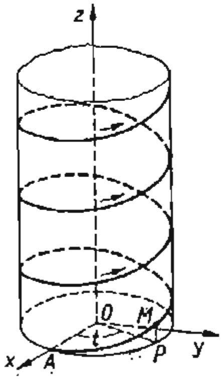
(derivacije po t).

Primjer: Nađimo zakrivljenost *zavojnice* (sl. 250): $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$*. Zamijenimo parametar t sa s: $s = t\sqrt{a^2+b^2}$, odatle dobivamo:

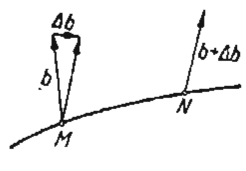
$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

i po formuli $(*)$:

$$K = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \rho = \frac{a^2+b^2}{a} \text{ (konstantni).}$$



Sl. 250



Sl. 251

Isti rezultat dobivamo i bez prelaza na parametar s primjenom formule $(**)$.

Torzija krivulje u tački M je broj koji karakterizira otklon krivulje (u njenom malom dijelu koji sadrži tačku M) od ravninske krivulje. Tačna definicija: torzija je broj određen formulom:

---

* Zavojnicu određenu tom jednadžbom, prikazanu na sl. 250, nazivamo *desnom*; promatrač postavljen duž osi zavojnice (osi Oz) vidi da se krivulja svija (pri gibanju) u smislu suprotnom gibanja kazaljke na satu.

Zavojnicu koja je simetrična desnoj zavojnici s obzirom na neku ravninu nazivamo *lijevom*; promatrač vidi da se krivulja svija (pri gibanju) u smislu kazaljke na satu.

$$T = \lim_{\widehat{MN}\to 0}\left|\frac{\Delta\mathbf{b}}{\widehat{MN}}\right| = \left|\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right| \text{ (sl. 251).} \quad \textit{Polumjer torzije } \tau = \frac{1}{T}.$$

Formule za računanje T i τ:

a) krivulja zadana u obliku (3) (vidi na str. 285):

$$T = \frac{1}{\tau} = \rho^2\left(\frac{d\mathbf{r}\,d^2\mathbf{r}\,d^3\mathbf{r}}{ds\,ds^2\,ds^3}\right) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x''^2+y''^2+z''^2)} \qquad \left(\begin{smallmatrix}*\\ *\end{smallmatrix}\right)$$

(derivacije po s).

b) Krivulja zadana u obliku (2):

$$T = \frac{1}{\tau} = \rho^2\frac{\frac{d\mathbf{r}\,d^2\mathbf{r}\,d^3\mathbf{r}}{dt\,dt^2\,dt^3}}{\left|\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right|^3} = \rho^2\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3} \qquad \left(\begin{smallmatrix}**\\ **\end{smallmatrix}\right)$$

[ρ se računa po formuli $(*)$ ili $(**)$].

Torzija izračunana po formulama $\left(\begin{smallmatrix}*\\ *\end{smallmatrix}\right)$ ili $\left(\begin{smallmatrix}**\\ **\end{smallmatrix}\right)$ pozitivna je ili negativna. Ako je $T > 0$, onda se s mjesta promatrača, koji stoji na glavnoj normali paralelno binormali (vidi sl. 246), vidi svijanje krivulje zdesna prema gore nalijevo, slično hodu vadičepa. Ako je $T < 0$ onda se s te tačke gledanja vidi svijanje slijeva prema gore nadesno.

Primjer: Za zavojnicu je torzija konstantna. Za desnu zavojnicu je:

$$\tau = \frac{a^2+b^2}{b}.$$

$$T = \left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)^2\frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{[(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2]^3} = \frac{b}{a^2+b^2},$$

Za lijevu zavojnicu je torzija negativna: $T = -\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

Serret-Frenetove formule. Derivacije vektora **t**, **n** i **b** po parametru s mogu se izraziti ovim *Serret-Frenetovim formulama:*

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{\rho}, \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{\mathbf{t}}{\rho} - \frac{\mathbf{b}}{\tau}, \qquad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{\mathbf{n}}{\tau},$$

gdje je ρ polumjer zakrivljenosti, a τ polumjer torzije.

C. PLOHE

11. NAČINI DEFINICIJE PLOHA

Jednadžba plohe. Ploha može biti zadana jednadžbom u jednom od ovih oblika:

a) *implicitno:*

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

b) *eksplicitno:*

$$z = f(x, y), \tag{2}$$

c) *parametarski:*

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v), \tag{3}$$

d) *vektorski:*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad \text{ili} \quad \mathbf{r} = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}. \tag{3a}$$

Ako na sve moguće načine mijenjamo parametre u i v, dobivamo radijvektor i koordinate raznih tačaka plohe; ako iz (3) eliminiramo u i v, dobivamo oblik (1). Oblik (2) je poseban slučaj oblika (3) u kojem je $u = x$, $v = y$.

Primjer: Jednadžba kugle:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \tag{1}$$

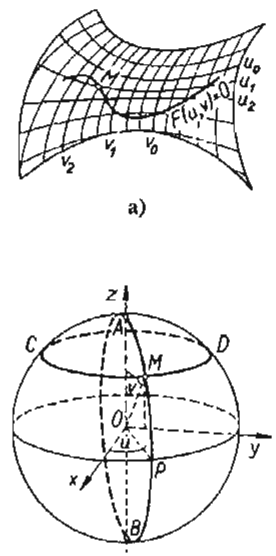
ili:

$$x = a\cos u \sin v, \qquad y = a \sin u \sin v, \qquad z = a \cos v, \tag{3}$$

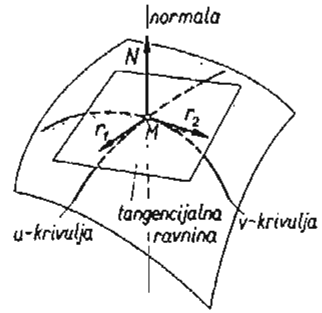
$$\mathbf{r} = a(\cos u \sin v\,\mathbf{i} + \sin u \sin v\,\mathbf{j} + \cos v\,\mathbf{k}). \tag{3a}$$

Krivocrtne koordinate na plohi. Ako je ploha zadana u obliku (3) ili (3a), onda pri fiksiranoj vrijednosti jednog parametra $v = v_0$ i mijenjanju drugog (u) tačka $\mathbf{r}\ \{x, y, z\}$ opisuje krivulju koja leži na plohi: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$. Ako za v dajemo različite konstantne vrijednosti: $v = v_1$, $v = v_2$, ..., dobivamo porodicu krivulja na plohi; kako je $v = \text{const.}$, a pri gibanju duž tih krivulja mijenja se samo u, te krivulje nazivamo *u-linijama* (sl. 252, *a*). Analogno, tačka $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ opisuje drugu krivulju; ako u prima različite konstantne vrijednosti: $u = u_1$, $u = u_2, \ldots$, dobivamo drugu porodicu krivulja ($u = \text{const}$) — *v-linije.* Na taj način na plohi (3) nastaje mreža krivulja — *koordinatnih linija,* a dva broja $u = u_i$ i $v = v_k$ su *krivocrtne* ili *Gaussove koordinate* tačke M na plohi. U slučaju kada je ploha zadana u obliku (2) koordinatne linije su presječnice plohe s ravninama $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Svaka jednadžba koja povezuje te koordinate: $F(u, v) = 0$ ili $u = u(t)$, $v = v(t)$ određuje neku krivulju na plohi.

Primjer: U parametarskim jednadžbama kugle (vidi prethodni primjer) u je *geografska duljina* tačke ($u = \sphericalangle POx$), v je *polarna udaljenost* tačke ($v = \sphericalangle MOz$), v-linije su *meridijani AMB*, u-linije su *paralele CMD* (sl. 252, *b*).



Sl. 252



Sl. 253

12. TANGENCIJALNA RAVNINA I NORMALA

Definicija. Ako kroz zadanu tačku M ($\mathbf{r}$; x, y, z) plohe povučemo na plohi sve moguće krivulje, onda u pravilu tangente na njih u tački M leže u jednoj ravnini, tzv. *tangencijalnoj* (ili *tangentnoj*) *ravnini* na plohu u tački M. (Izuzetak su tzv. čunjaste tačke plohe, vidi dalje). Pravac koji prolazi kroz tačku M okomito na tangencijalnu ravninu nazivamo *normalom* na plohu u tački M (sl. 253). Tangencijalna ravnina razapeta je vektorima $\mathbf{r}_1 = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ i $\mathbf{r}_2 = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, koji diraju u-linije i v-linije u tački M; njihov vektorski produkt $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ je vektor paralelan normali, a njihov jedinični vektor $\mathbf{N}^\circ = \dfrac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}$ nazivamo *jediničnim vektorom normale.* $\mathbf{N}^\circ$ usmjeren je na jednu ili drugu stranu plohe, ovisno o tome koju od krivuljnih koordinata, u ili v, smatramo prvom, a koju drugom.

Jednadžbe tangencijalne ravnine i normale na plohu

Ploha zadana formulom (str. 292)	Tangencijalna ravnina	Normala
(1)	$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$
(2)	$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$	$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}$
(3)	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$
(3a)	$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2=0$ ili $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\mathbf{N}=0$	$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\lambda(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)$ ili $\mathbf{R}=\mathbf{r}+\lambda\mathbf{N}$

U tablici su $x, y, z, \mathbf{r}$ koordinate i radijvektor tačke M; $X, Y, Z, \mathbf{R}$ su koordinate i radijvektor bilo koje tačke tangencijalne ravnine ili normale; derivacije računamo za tačku M; $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

Jednadžbe tangencijalne ravnine i normale na plohu vidi na str. 294.

Primjer: Za kuglu $x^2+y^2+z^2-a^2=0$

tangencijalna ravnina je:

$$2x(X-x)+2y(Y-y)+2z(Z-z)=0$$

ili:

$$xX+yY+zZ-a^2=0,$$

normala je:

$$\frac{X-x}{2x}=\frac{Y-y}{2y}=\frac{Z-z}{2z} \quad \text{ili} \quad \frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}.$$

Za kuglu

$$x=a\cos u\sin v, \qquad y=a\sin u\sin v, \qquad z=a\cos v$$

tangencijalna ravnina je:

$$X\cos u\sin v+Y\sin u\sin v+Z\cos v=a,$$

normala:

$$\frac{X}{\cos u\sin v}=\frac{Y}{\sin u\sin v}=\frac{Z}{\cos v}.$$

Singularne (čunjaste) tačke na plohi. Ako je za tačke plohe koja je zadana u obliku (1) (vidi na str. 292) istovremeno (za $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$)

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=F(x,y,z)=0,$$

onda je tačka $M(x_1, y_1, z_1)$ *singularna* (*čunjasta*). Sve tangente koje prolaze kroz tačku M ne leže u jednoj ravnini, nego tvore čunj drugog reda, kome je jednadžba:

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}(X-x)+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}(Y-y)+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}(Z-z)+2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}(X-x)(Y-y)+$$
$$+2\frac{\partial^2F}{\partial y\partial z}(Y-y)(Z-z)+2\frac{\partial^2F}{\partial z\partial x}(Z-z)(X-x)=0$$

(gdje se derivacije računaju za tačku M); ako istovremeno svih šest drugih derivacija postanu jednake nuli, singularna tačka je složenijeg tipa (čunj trećeg ili višeg reda).

13. LINIJSKI ELEMENT PLOHE

Diferencijal luka. Ako je ploha zadana u obliku (3) ili (3a) (vidi na str. 292) i zadana je tačka $M(u, v)$, a njena bliska tačka na plohi je $N(u + \mathrm{d}u,\ v + \mathrm{d}v)$, onda je duljina luka MN na plohi približno izražena *diferencijalom luka* ili *linijskim elementom plohe*, po formuli:

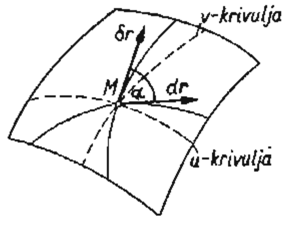
$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2, \qquad (1)$$

gdje je:

$$E = \mathbf{r}_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \mathbf{r}_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$



Sl. 254

Desni dio formule (1) nazivamo također *prvom kvadratnom formom* plohe, zadane u obliku (2); njeni koeficijenti E, F, G ovise o tački plohe.

Primjer: Za kuglu je:

$$\mathbf{r} = a(\cos u \sin v\,\mathbf{i} + \sin u \sin v\,\mathbf{j} + \cos v\,\mathbf{k}),$$

$$E = a^2\sin^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2,$$

prva kvadratna forma je: $\mathrm{d}s^2 = a^2(\sin^2 v\,\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$.

Za plohu zadanu u obliku (2) (vidi na str. 292) vrijedi:

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \text{ gdje je } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Mjerenja na plohi. *Duljinu luka* krivulje $u = u(t)$, $v = v(t)$ na plohi za $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ računamo po formuli:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Kut α između dviju krivulja (tj. među njihovim tangentama) koje se sijeku u tački M i u toj tački imaju smjerove vektora $\mathrm{d}\mathbf{r}\,\{\mathrm{d}u, \mathrm{d}v\}$ i $\delta\mathbf{r}\,\{\delta u, \delta v\}$ (sl. 254) računamo po formuli:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}\,\delta\mathbf{r}}{\sqrt{(\mathrm{d}\mathbf{r})^2(\delta\mathbf{r})^2}} =$$

$$= \frac{E\,\mathrm{d}u\,\delta u + F(\mathrm{d}u\,\delta v + \mathrm{d}v\,\delta u) + G\,\mathrm{d}v\,\delta v}{\sqrt{E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2}\ \sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}. \qquad (**)$$

(koeficijente E, F, G računamo za tačku M). Napose su krivulje okomite ako je brojnik $(**)$ jednak nuli; $F = 0$ je *uvjet okomitosti* koordinatnih krivulja $v = \text{const}$ $(\mathrm{d}v = 0)$ i $u = \text{const}$ $(\delta u = 0)$.

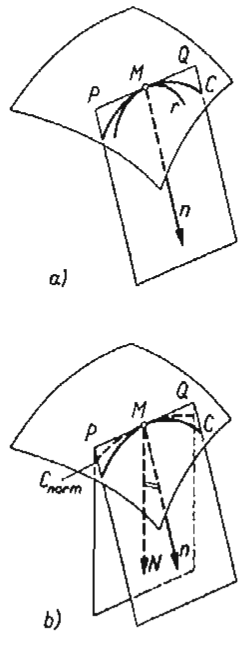
Površinu plohe S ograničene nekom krivuljom na plohi računamo kao dvostruki integral:

$$S = \int_{(S)} \mathrm{d}S, \qquad \text{gdje je} \qquad \mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \quad (***)$$

Na taj način, kada znamo koeficijente prve kvadratne forme E, F, G možemo izmjeriti duljine, kutove i površine na plohi po formulama $(*)$, $(**)$, $(***)$, tj. prva kvadratna forma potpuno određuje *metriku plohe*.

Polaganje plohe na plohu pri savijanju. Ako plohu savijamo a da se ne rasteže i trga, njena se jednadžba mijenja, ali metrika ostaje ista, tj. prva kvadratna forma se ne mijenja. Dvije različite plohe, koje imaju istu kvadratnu formu, mogu se *savijanjem* položiti jedna na drugu.

14. ZAKRIVLJENOST PLOHE



Sl. 255

Zakrivljenost krivulja na plohi. Ako kroz tačku M povučemo na plohi različite krivulje, onda su u tački M polumjeri zakrivljenosti ρ tih krivulja Γ međusobno povezani ovim odnosima:

1) Polumjer zakrivljenosti ρ krivulje Γ jednak je polumjeru zakrivljenosti krivulje C, koja je presječnica plohe i oskulatorne ravnine Γ u tački M (sl. 255, *a*).

2) Za svaki presjek ravnine C polumjer zakrivljenosti je:

$$\rho = R\cos(\mathbf{n}, \mathbf{N}), \qquad (M)$$

gdje je R polumjer zakrivljenosti normalnog presjeka (C_{norm}) koji prolazi kroz istu tangentu PQ, kao i C, i kroz vektor $\mathbf{N}$, a $(\mathbf{n}, \mathbf{N})$ je kut između jediničnog vektora glavne normale $\mathbf{n}$ (vidi na str. 286) krivulje C i jediničnog vektora normale $\mathbf{N}$ na plohu (*Meusnierov* teorem, sl. 255, *b*). U formuli (M) imamo R sa predznakom plus, ako je $\mathbf{N}$ usmjeren na konkavnu stranu krivulje C_{norm}, a minus, ako je usmjeren na konveksnu stranu.

3) Za svaki normalni presjek C_{norm} zakrivljenost je:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2} \qquad \text{(E)}$$

(*Eulerova formula*), gdje su R_1 i R_2 *glavni polumjeri zakrivljenosti*, tj. *najveća i najmanja vrijednost* R; dobijemo ih u *glavnim normalnim presjecima* plohe C_1 i C_2 (vidi dalje), a α je kut među ravninama presjeka C i C_1 (sl. 256). U formuli (E) za R, R_1 i R_2 uzimamo predznak plus ili minus, određen kao i u formuli (M).

Glavni polumjeri zakrivljenosti. Ako je ploha zadana jednadžbom $z = f(x, y)$, onda R_1 i R_2 izračunavamo kao korijene kvadratne jednadžbe:

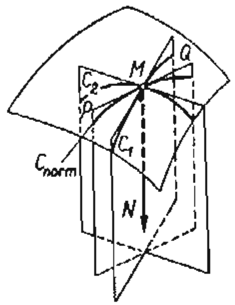
$$(rt - s^2)\,R^2 + h\,[2pq\,s - (1 + p^2)\,t - (1 + q^2)\,r]\,R + h^4 = 0, \qquad \text{(A)}$$

gdje je:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

i $$h = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$



Sl. 256

Ravnine glavnih normalnih presjeka C_1 i C_2 međusobno su okomite i njihovi smjerovi određeni su s vrijednošću $\frac{dy}{dx}$, koju dobivamo iz kvadratne jednadžbe:

$$[tpq - s(1 + q^2)]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [t(1 + p^2) - r(1 + q^2)]\frac{dy}{dx} + \\ + [s(1 + p^2) - rpq] = 0. \qquad \text{(B)}$$

Ako je ploha zadana parametarski $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ onda pripadne jednadžbe za (A) i (B) imaju oblik:

$$(DD'' - D'^2)\,R^2 - (ED'' - 2FD' + GD)\,R + (EG - F^2) = 0, \quad \text{(A')}$$

$$(GD' - FD'')\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (GD - ED'')\frac{dv}{du} + (FD - ED') = 0, \quad \text{(B')}$$

gdje se veličine D, D', D'' — koeficijenti *druge kvadratne forme* plohe — određuju formulama:

$$D = \mathbf{r}_{11}\mathbf{N} = \frac{d}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad D' = \mathbf{r}_{12}\mathbf{N} = \frac{d'}{\sqrt{EG - F^2}},$$

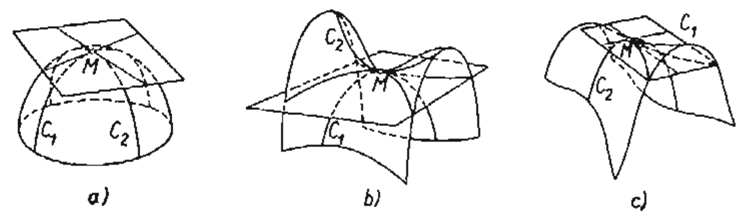
$$D'' = \mathbf{r}_{22}\mathbf{N} = \frac{d''}{\sqrt{EG - F^2}};$$

ovdje su vektori $\mathbf{r}_{11}$, $\mathbf{r}_{12}$, $\mathbf{r}_{22}$ druge parcijalne derivacije radijvektora $\mathbf{r}$ po parametrima u i v; brojnici d, d', d'' jednaki su:

$$d = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad d' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad d'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Krivulje na plohi, koje u svakoj tački imaju smjer glavnih normalnih presjeka, nazivamo *linijama zakrivljenosti*; njihove jednadžbe dobivamo integriranjem diferencijalne jednadžbe (B) ili (B').

Klasifikacija tačaka na plohi. Ako su u tački M plohe obje veličine R_1 i R_2 (str. 298) istog predznaka, onda su glavni normalni presjeci okrenuti svojim konkavnim stranama na istu stranu. U



Sl. 257

tom slučaju u okolini tačke M ploha leži s jedne strane tangentne ravnine; takvu tačku na plohi nazivamo *eliptičkom* tačkom (sl. 257, a); njen je analitički kriterij $DD'' - D'^2 > 0$. Posebno se pri $R_1 = R_2$ tačka naziva *kružnom* ili *umbilikalnom*; u njoj je za sve normalne presjeke $R =$ const.

Ako R_1 i R_2 imaju suprotne predznake, onda su glavni normalni presjeci svojim konkavnim stranama okrenuti na suprotne strane. U tom slučaju tangencijalna ravnina siječe plohu koja ima oblik sedla; takvu tačku plohe nazivamo *hiperbolnom* (sl. 257, b), a njen analitički kriterij je: $DD'' - D'^2 < 0$.

Ako su R_1 ili R_2 jednaki ∞, onda jedan glavni normalni presjek ima tačku infleksije ili je pravac; takvu tačku plohe nazivamo *parabolnom* (sl. 257, *c*), a njen analitički kriterij je: $DD'' - D'^2 = 0$.

Primjeri: Sve tačke na elipsoidu su eliptične, na jednokrilnom hiperboloidu su hiperbolne, na valjku su parabolne.

Zakrivljenost plohe. *Srednjom zakrivljenošću* plohe u tački M nazivamo izraz:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right);$$

Gaussovom zakrivljenošću nazivamo izraz:

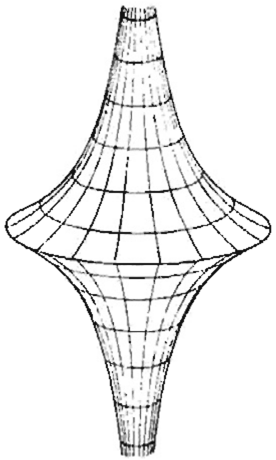
$$K = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Primjer: Za kružni valjak (polumjera a):

$$H = \frac{1}{2a}, \quad K = 0.$$

Za eliptičke tačke je $K > 0$, za hiperbolne je $K < 0$, za parabolne je $K = 0$.

Ako je ploha zadana jednadžbom $z = f(x, y)$, onda H i K izračunavamo pomoću ovih formula:



Sl. 258

$$H = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}^{*}.$$

Plohe kojima je srednja zakrivljenost H u svim tačkama jednaka nuli ($R_1 = -R_2$) nazivamo *minimalnim plohama.* Plohe kojima je Gaussova zakrivljenost K u svim tačkama konstantna nazivamo *plohama s konstantnom zakrivljenošću*; najjednostavniji primjeri takvih ploha su ovi: za $K > 0$ *kugla*, za $K < 0$ *pseudosfera* [(sl. 258 rotaciona ploha traktrise (v. str. 127) oko njene asimptote].

* Oznake p, q, r, s, t vidi na str. 298.

15. PRAVČASTE I RAZMOTLJIVE PLOHE

Plohe nazivamo *pravčastim* ako ih možemo dobiti pomicanjem pravca; ako pri tome plohu možemo razmotati na ravninu onda je nazivamo *razmotljivom.* Jednostavniji primjeri razmotljivih ploha su valjkasta i čunjasta ploha (vidi na str. 199 i 201). Ali svaka pravčasta ploha nije razmotljiva (npr. jednokrilni hiperboloid i hiperbolni paraboloid su pravčaste, ali nisu razmotljive plohe, vidi na str. 263). U svim tačkama razmotljive plohe Gaussova zakrivljenost jednaka je nuli. Ako je ploha zadana jednadžbom $z = f(x, y)$ onda je uvjet razmotljivsti:

$$rt - s^2 = 0^{*}.$$

16. GEODETSKE LINIJE NA PLOHI

Pojam geodetske linije. Kroz svaku tačku plohe $M(u, v)$ u svim smjerovima određenim sa $\frac{dv}{du}$ prolazi na plohi određena krivulja, tzv. *geodetska linija,* koja na toj plohi ima ulogu pravca: 1) ako je materijalna tačka prisiljena da ostane na plohi, onda se ona giba po geodetskoj liniji ako na nju ne djeluju druge vanjske sile; 2) elastična nit koja je nategnuta duž plohe poprima oblik geodetske linije; 3) linija najkraće udaljenosti između dviju tačaka na plohi jest geodetska linija.

Definicija. Geodetskom linijom na plohi nazivamo takvu krivulju kojoj se glavna normala u svakoj tački podudara s normalom na plohu.

Primjer: Za kružni valjak su geodetske linije zavojnice.

Jednadžba: Ako je ploha zadana u obliku $z = f(x, y)$, onda je diferencijalna jednadžba geodetske linije:

$$(1 + p^2 + q^2)\frac{d^2y}{dx^2} = pt\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (2ps - qt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \\ + (pr - 2qs)\frac{dy}{dx} - qr^{*}.$$

Ako je ploha zadana u obliku (3) (vidi na str. 292), onda je diferencijalna jednadžba geodetske linije nešto složenija.

* Oznake p, q, r, s, t vidi na str. 298.

ČETVRTI DIO

OSNOVI MATEMATIČKE ANALIZE

I. UVOD U ANALIZU

1. REALNI BROJEVI

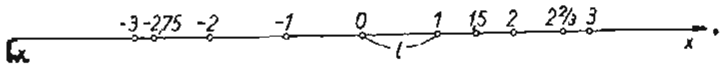
Racionalni brojevi. Svi cijeli brojevi i svi razlomci (pozitivni, negativni i nula) zovu se *racionalni*. Racionalni brojevi tvore beskonačan skup, koji ima ova svojstva:

1) Skup je *uređen*, tj. za svaka dva različita racionalna broja a i b možemo reći koji je od njih manji.

2) Skup je posvuda *gust*, tj. između svaka dva različita racionalna broja a i b $(a < b)$ postoji još jedan racionalni broj c $(a < c < b)$, a stoga i beskonačan skup racionalnih brojeva.

3) Aritmetičke operacije (zbrajanje, odbijanje, množenje i dijeljenje) s bilo koja dva racionalna broja uvijek su moguće, i kao rezultat daju opet racionalan broj. Izuzetak je *dijeljenje s nulom* koje *nije izvedivo*; oblik $\frac{a}{0}$ nema tačan smisao, jer ne postoji određeni broj b koji zadovoljava jednadžbu $b \cdot 0 = a$ (ako je $a = 0$, tada b može biti bilo koji broj, a ako je $a \neq 0$, tada b ne postoji*).

4) Svaki racionalni broj a može biti izražen u obliku decimalnog razlomka (konačnog ili beskonačnog i periodičkog).



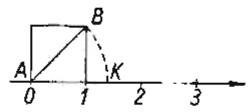
Sl. 259

Geometrijsko predočivanje racionalnih brojeva. Ako na pravcu xx (sl. 259) odredimo kao početak brojanja 0 (*nultačka*), pozitivni smjer (*orijentaciju*) i jedinicu za mjerenje l (*mjerilo*), tada svakom

* Često pišemo $\frac{a}{0} = \infty$ (*neizmjerno*); to ne znači da je takvo dijeljenje moguće (∞ nije broj!), već je to samo skraćeno pisanje fraze: »ako se divizor približava nuli, kvocijent neograničeno raste po apsolutnoj veličini«.

racionalnom broju a pripada određena tačka tog pravca, koja ima koordinatu a (*racionalna tačka*). Pravac xx nazivamo *brojevnim pravcem*. U skladu sa svojstvom pod 2) postoji između dvije racionalne tačke beskonačan skup racionalnih tačaka.

Iracionalni brojevi. Skup racionalnih brojeva nije dovoljan za matematičku analizu; iako je on posvuda gust, ne ispunjava cijeli brojevni pravac. Na primjer, ako dijagonale kvadrata AB sa stranicom 1 položimo na brojevni pravac tako da se tačka A poklapa sa tačkom 0, tada će B pasti na tačku K, koja nema racionalne koordinate (sl. 260). Uvođenje *iracionalnih brojeva* omogućuje nam da *svakoj* tački brojevnog pravca pridružimo neki broj i da time skup brojeva učinimo neprekinutim.



Sl. 260

Strogu definiciju iracionalnih brojeva daju udžbenici matematičke analize. Iracionalni brojevi se na brojevnom pravcu prikazuju tačkama koje ispunjavaju sve praznine među racionalnim tačkama. *Svaki iracionalni broj možemo izraziti neperiodičnim beskonačnim decimalnim razlomkom.*

U iracionalne brojeve spadaju napose necijeli realni korijeni algebarskih jednadžbi oblika

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,x + a_n = 0$$

(s cijelim koeficijentima). Npr. jednadžba $x^3 - 9x + 4 = 0$ ima iracionalne korijene (vidi str. 157). Takvi se brojevi nazivaju *algebarske iracionalnosti*. Jednostavniji primjeri algebarskih iracionalnosti jesu korijeni binomnih jednadžbi $x^n - a = 0$ ili brojevi oblika $\sqrt[n]{a}$, ako nisu racionalni (na primjer: $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, $\sqrt[3]{10} = 2{,}154\ldots$). Iracionalne brojeve, koji nisu algebarske iracionalnosti, nazivamo *transcendentnim*. K njima spadaju

$$\pi = 3{,}14159265\ldots, \qquad e = 2{,}7182818\ldots,$$

dekadski logaritmi cijelih brojeva (osim onih oblika 10^n), većina vrijednosti trigonometrijskih funkcija kuta koji je jednak cijelom broju stupnjeva.

Realni brojevi. Sve racionalne i iracionalne brojeve nazivamo *realnim brojevima*. Osnovna su svojstva skupova realnih brojeva:

1) Skup realnih brojeva je *uređen* (vidi str. 302);

2) *posvuda je gust* (vidi str. 302);

3) *neprekinut skup je*, tj. (za razliku od skupa racionalnih brojeva) svaka tačka brojevnog pravca ima jedan broj iz toga skupa kao koordinatu;

4) aritmetičke operacije s realnim brojevima uvijek su moguće (osim dijeljenja s nulom, vidi str. 302) i daju kao rezultat neki realni broj. Potenciranje i inverzne operacije također su moguće u sistemu realnih brojeva [iz svakog pozitivnog iracionalnog broja možemo izvaditi korijen po volji uzetog stupnja; svaki pozitivni realni broj ima logaritam za svaku pozitivnu bazu (osim za jedinicu)].

Daljnje poopćenje pojma broja u matematičkoj analizi jesu *kompleksni brojevi* (vidi str. 575).

2. NIZOVI I NJIHOVI LIMESI

Nizovi. *Nizom brojeva** nazivamo beskonačan skup brojeva

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

koji su raspoređeni u određenom poredaju jedan za drugim. Brojevi koji ulaze u niz nazivaju se *članovima*. Članovi niza mogu biti i međusobno jednaki.

Niz smatramo zadanim ako je poznat zakon po kojem se on tvori, tj. pravilo po kojem možemo odrediti svaki član niza. U mnogim slučajevima možemo postaviti formulu za *opći član* a_n niza:

Primjeri: 1) $a_n = n$, 2) $a_n = 4 + 3(n-1)$, 3) $a_n = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 4) $a_n = (-1)^{n+1}$, 5) $a_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}}$, 6) $a_n = 3\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot 10^{-\frac{n-1}{2}}$ za neparni n i $a_n = 3\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot 10^{-\frac{n}{2}+1}$ za parni n, 7) $a_n = \frac{1}{n}$, 8) $a_n = (-1)^{n+1} n$, 9) $a_n = -\frac{n+1}{2}$ za neparni n i $a_n = 0$ za parni n,

10) $a_n = 3 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}}$ za neparni n i $a_n = 13 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-2}}$ za parni n.

Prvi članovi tih nizova jesu:

1) 1, 2, 3, 4, 5, ... (niz prirodnih brojeva)

2) 4, 7, 10, 13, 16, ... (aritmetička progresija)

* Ovdje se razmatraju samo beskonačni nizovi.

3) $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$ (geometrijska progresija),

4) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots,$

5) $1, 2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{7}{8}, \ldots,$

6) 3, 4, 3,3, 3,4, 3,33, 3,34, 3,333, 3,334, ...,

7) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots,$

8) $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots,$

9) $-1, 0, -2, 0, -3, 0, -4, 0, \ldots,$

10) $1, 11, 2, 12, 2\frac{1}{2}, 12\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 12\frac{3}{4}, \ldots,$

Limes niza. Ako za zadani niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ postoji broj A, kojemu se brojevi a_n neograničeno približuju kada n raste, tada takav broj A nazivamo *limesom* niza*. Oznaka:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Tačna formulacija: $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ako za svaki po volji maleni pozitivni broj ε u zadanom nizu postoji takav broj a_N, da je bez iznimke za sve a_n, koji su u nizu iza a_N (tj. za $n > N$), njihova razlika od A apsolutno manja od ε:

$$|a_n - A| < \varepsilon \qquad (n > N).$$

Od razmatranih primjera 1 do 10 limes imaju nizovi 3, 5, 6 i 7. Limesi su:

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 5) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$, 6) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3\frac{1}{3}$, 7) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Geometrijski smisao. Ako članove niza, koji imaju limes, prikažemo tačkama brojevnog pravca, tada, počevši od a_N, sva tačke a_n padaju u interval omeđen s tačkama $A - \varepsilon$ i $A + \varepsilon$ (sl. 261):

Sl. 261

Neizmjerni limes. Slučaj kada limes ne postoji zbog toga što a_n s povećanjem n neograničeno raste po apsolutnoj vrijednosti, označavamo simbolom

* Brojevi a_n mogu se za neke n poklapati s limesom A.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (»limes jednak neizmjerno«).

Tačna formulacija: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, ako za po volji velik pozitivan broj K možemo naći u zadanom nizu takav broj N, da su svi brojevi a_n za $n > N$ po apsolutnoj vrijednosti veći od K:

$$|a_n| > K \qquad (n > N).$$

Ako su pri tom svi brojevi a_n $(n > N)$ veći od 0, pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ako su svi brojevi a_n manji od 0, tada pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Od razmotrenih primjera 1 do 10 neizmjerne limese imaju nizovi 1), 2) i 8), pri čemu je u primjerima 1 i 2 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Monotoni nizovi. Niz $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ nazivamo:
uzlaznim, ako je

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots, \tag{1}$$

silaznim, ako je

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots, \tag{2}$$

nesilaznim, ako je

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots, \tag{3}$$

neuzlaznim, ako je

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots. \tag{4}$$

Nizove oblika (1), (2), (3), (4) općenito nazivamo *monotonim*, pri čemu su nizovi (1) i (3) — *monotono uzlazni*, a nizovi (2) i (4) — *monotono silazni*.

Nizovi (1) i (2) nazivaju se ponekad, za razliku od nizova (3) i (4), *striktno monotonim*. Tačke brojevnog pravca koje prikazuju članove monotonog niza idu (prema rednom broju članova) u jednom smjeru, a kod nizova (3) i (4) mogu se neki susjedni članovi prikazati istim tačkama. Od nizova u primjerima 1 do 10 na str. 304, monotoni su samo 1), 2), 5) (uzlazni) i 7) (silazni).

Ograđeni niz. Ako za zadani niz možemo navesti takav pozitivni broj K da svi članovi niza bez iznimke budu po apsolutnoj veličini manji od K ($|a_n| < K$), tada niz nazivamo *ograđenim*; ako takav broj ne postoji, niz je neograđen. Od primjera 1 do 10 na str. 304 ograđeni su nizovi 3 $(K = 4)$, 4 $(K = 2)$, 5 $(K = 3)$, 6 $(K = 5)$, 7 $(K = 2)$, 10 $(K = 13)$.

Osnovni teoremi o limesima nizova

1) Niz može imati samo jedan limes.

2) Niz koji ima konačan limes ograđen je; niz kojem je limes neizmjerno nije ograđen.

3) Monoton ograđen niz ima konačan limes; ako taj niz monotono raste, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant a_n$; ako monotono pada, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant a_n$.

4) Monotono neograđen niz ima za limes neizmjerno; ako taj niz monotono raste, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$; ako monotono pada, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

5) **Potreban i dovoljan uvjet da limes niza postoji.** Da niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ima limes, nužno je i dovoljno da za bilo kako malen broj ε možemo naći takav član a_N niza da se *bilo koja dva* njegova člana, koja stoje iza a_N, razlikuju jedan od drugoga za broj koji je apsolutno manji od ε, tj.:

$$|a_i - a_j| < \varepsilon \quad \text{za} \quad i > N \quad \text{i} \quad j > N^*.$$

Ostala svojstva i računanje limesa vidi na str. 317 do 320 (»Limes funkcije«).

3. FUNKCIJE JEDNE VARIJABLE**

Definicija. Varijablu y nazivamo *funkcijom* varijable x (*argumenta* ili *nezavisne varijable*), ako za zadanu vrijednost x veličina y poprima jednu određenu vrijednost (*jednoznačna funkcija*; na primjer $y = x^2$) ili nekoliko određenih vrijednosti (*višeznačna funkcija*, na primjer funkcija $y = \pm\sqrt{x}$ je dvoznačna). Simboli $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ itd. označavaju različite funkcije varijable x; $f(a)$ jest vrijednost funkcije $f(x)$ koju ona prima za $x = a$; na primjer ako je $f(x) = x^2 + 2x - 5$, tada je $f(3) = 3^2 + 2\cdot 3 - 5 = 10$.

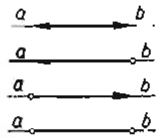
Skup vrijednosti x, za koje je funkcija određena, tvori *područje definicije* funkcije. Najčešće se razmatraju funkcije koje imaju povezano (suvislo) područje definicije. Područje realnih brojeva nazivamo suvislim ako ono 1) ima više od jednog broja i 2) nema praznina, tj. svi brojevi između bilo koja dva broja, koja pripadaju području, spadaju u to područje. Suvislo područje može biti *neograđeno* s obje strane (tj. sadržavati sve tačke brojevnog pravca), *ograđeno slijeva* ili *zdesna* (tj. sadržavati sve brojeve veće ili manje od zadanog broja) i *ograđeno* s obje strane (tj. sadržavati sve brojeve između

* Niz koji ima ta svojstva naziva se *temeljnim* ili *fundamentalnim*.

** Ovdje se razmatraju samo funkcije realne varijable. O funkcijama kompleksne varijable vidi na str. 580, 585.

dva zadana). Suvislo područje nazivamo također i *intervalom brojeva s krajevima a* i *b* ($a < b$; kraj a može biti jednak $-\infty$, a kraj b biti jednak $+\infty$). Kraj intervala a ili b nazivamo *otvorenim* ako on ne pripada području, a *zatvorenim*, ako tom području pripada (krajeve $-\infty$ i $+\infty$ smatramo otvorenim).

Interval označavamo njegovim krajevima a i b zatvorenim u zagrade. Pri tom kod otvorenog kraja stavljamo okruglu zagradu, a kod zatvorenog uglastu. Interval sa dva otvorena kraja nazivamo *otvorenim*, sa jednim otvorenim i jednim zatvorenim krajem *poluotvorenim*, sa dva zatvorena kraja *zatvorenim* (vidi sl. 262)*.

Naziv intervala	Granice područja	Oznake intervala	Prikaz u brojevnom pravcu
Otvoren	$a < x < b$	(a, b)	
Poluotvoren	$a < x \leqslant b$	$(a, b]$	
	$a \leqslant x < b$	$[a, b)$	
Zatvoren	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a, b]$	
Beskonačni intervali	$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty, +\infty)$	Sl. 262
	$-\infty < x < b$	$(-\infty, b)$	
	$-\infty < x \leqslant b$	$(-\infty, b]$	
	$a < x < +\infty$	$(a, +\infty)$	
	$a \leqslant x < +\infty$	$[a, +\infty)$	

Često razmatramo također funkcije koje za područje definicije imaju **konačan skup** ili **beskonačan niz** brojeva. Kao područje definicije osobito često razmatramo skup cijelih pozitivnih brojeva (niz prirodnih brojeva); vrijednosti koje poprima takva funkcija možemo svrstati u niz:

$$f(1),\quad f(2),\quad f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

(*funkcija cjelobrojnog argumenta*).

Razmatramo također i područja definicije, koja se sastoje od više povezanih područja i pojedinih brojeva.

Načini definicije funkcija. Funkcija može biti zadana (definirana) na različite načine, na primjer tablicom vrijednosti, grafom, sa jednom ili (za razna područja) s nekoliko formula.

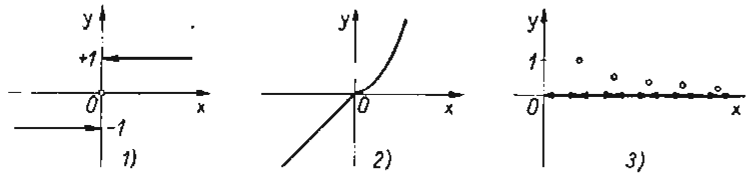
---

* Na brojevnom pravcu otvoreni kraj intervala simbolički se označava strelicom, a zatvoreni kraj tačkom.

Primjeri funkcija zadanih s nekoliko formula i njihovim grafovima (sl. 263)*.

$$1)\ y = \begin{cases} -1 & \text{za } x < 0, \\ 0 & \text{za } x = 0, \\ +1 & \text{za } x > 0. \end{cases} \qquad 2)\ y = \begin{cases} x & \text{za } x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{za } x \geqslant 0. \end{cases}$$

$$3)\ y = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{za cijeli, pozitivni } n, \\ 0 & \text{kada } n \text{ nije cio.} \end{cases}$$



Sl. 263

Područje definicije analitičkog izraza. U matematičkoj analizi u prvome redu razmatramo funkcije koje su definirane jednom formulom, pri čemu u područje definicije takve funkcije spadaju sve vrijednosti argumenata za koje zadani analitički izraz **ima smisao**, tj. poprima određene, konačne realne vrijednosti. Takvo područje se naziva *područjem definicije analitičkog izraza*. Obično, ako nema dodatnih ograničenja, kao područje u kom je zadana *(postoji)* funkcija, koja je definirana jednom formulom, podrazumijevamo upravo područje definicije. U područje definicije ne ulaze u načelu one vrijednosti varijable za koje funkcija: 1) poprima kompleksne vrijednosti, 2) »postaje neizmjerna« (vidi str. 322, tipovi prekinutosti funkcija), 3) poprima neodređene vrijednosti (vidi na str. 318 do 320, neodređeni oblici).

Primjeri: 1) $y = \sqrt{1 - x^2}$; područje definicije $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $y = \lg \cos x$; područje definicije $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}, \ldots, \frac{(4n-1)\pi}{2} < x < \frac{(4n+1)\pi}{2}, \ldots$ za n cio broj.

Osnovni oblici analitički zadavanih funkcija. Funkcije mogu biti zadane *eksplicitno*, kada je y izražen sa x [$y = f(x)$]; *implicitno*, kada su x i y međusobno vezani s jednadžbom [$F(x, y) = 0$], na primjer, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ili $y^y - xy = 0$; *parametarski*, kada

---

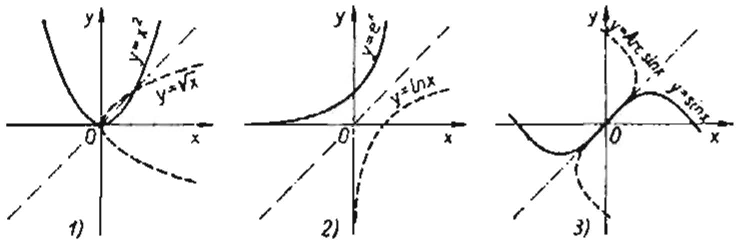
* Strelice pokazuju da njihovi krajevi (šiljci) ne pripadaju grafu.

su vrijednosti x i y, koje međusobno odgovaraju jedna drugoj, izražene pomoću treće varijable, koju nazivamo parametrom $[x = \varphi(t),\ y = \varphi(t)]$, na primjer $x = a\cos t,\ y = a\sin t$.

Inverzne funkcije. Dvije funkcije $y = f(x)$ i $y = \varphi(x)$ zovemo *inverznim* ako za svaki par vrijednosti a, b, koje zadovoljavaju uvjet $b = f(a)$, zadovoljavaju također uvjet $a = \varphi(b)$, a za svaki par koji zadovoljava uvjet $a = \varphi(b)$, zadovoljava uvjet $b = f(a)$. Jednu od dviju međusobno inverznih funkcija zovemo *direktnom* (bez razlike koju); drugu zovemo *inverznom*, s obzirom na prvu.

Primjeri inverznih funkcija (sl. 264): 1) $y = x^2$ i $y = \pm\sqrt{x}$ 2) $y = e^x$ i $y = \ln x$, 3) $y = \sin x$ i $y = \operatorname{Arc\,sin} x$.

Da bi se iz direktne funkcije $y = f(x)$ dobila inverzna, treba međusobno zamijeniti mjesta argumenta i funkcije; jednadžba $x = f(y)$ definira implicitno inverznu funkciju s obzirom na $y = f(x)$. Ako riješimo jednadžbu $x = f(y)$ po y, dobivamo inverznu funkciju $y = \varphi(x)$ u eksplicitnom obliku.



Sl. 264

Grafovi direktne i inverzne funkcije simetrični su s obzirom na simetralu prvog i trećeg kvadranta (vidi sl. 264).

Elementarne funkcije* su funkcije definirane formulama koje sadrže konačan broj algebarskih ili trigonometrijskih operacija izvedenih na argumentu, funkciji i nekim konstantama. (Pod tim operacijama mislimo na četiri aritmetičke operacije, potenciranje na po volji uzetu potenciju, korjenovanje, logaritmiranje i antilogaritmiranje za po volji uzetu bazu, uzimanje trigonometrijske ili ciklometrijske funkcije). Elementarne funkcije dijele se na *algebarske* i *transcendentne*.

Kod *algebarskih* funkcija su argument x i funkcija y međusobno povezani algebarskom jednadžbom oblika:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x^n y^m = 0,$$

* Tablice jednostavnijih elementarnih funkcija vidi na str. 19 do 81, a grafove elementarnih funkcija na str. 90 do 107.

na primjer $3xy^3 - 4xy + x^3 - 1 = 0$. Ako ovakvu jednadžbu možemo algebarski riješiti po y, tada dobivamo jedan od ovih jednostavnih tipova algebarskih funkcija:

1) *Cijela funkcija* (*polinom*): sa x se vrši samo zbrajanje, odbijanje i množenje: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Posebno su cijele funkcije $y = a$ (*konstanta*), $y = ax + b$ (*linearna funkcija*), $y = ax^2 + bx + c$ (*kvadratna funkcija*).

2) *Razlomljena* (*racionalna*) *funkcija*: sa x se vrši zbrajanje, odbijanje, množenje i dijeljenje*. Razlomljenu funkciju uvijek možemo izraziti kvocijentom dviju cijelih funkcija:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Posebno nazivamo $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ *razlomljenom linearnom funkcijom*.

3) *Iracionalna funkcija:* Sa x**, osim operacija nabrojanih pod 2), vršimo i korjenovanje***. Na primjer $y = \sqrt{2x + 3}$, $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)\sqrt{x}}$.

Transcendentne funkcije su takve kod kojih argument i funkcija ne mogu biti vezani algebarskom zavisnošću $\Sigma a_i x^m y^n = 0$. Jednostavnije takve funkcije (*elementarne transcendentne funkcije*) jesu:

1) *Potencija*: varijabla x, ili neka njena algebarska funkcija, nalazi se u eksponentu (na primjer: $y = e^x$, $y = a^x$, $y = 2^{3x^2 - 5x}$).

2) *Logaritamske funkcije:* varijabla x, ili neka njena algebarska funkcija, nalazi se pod znakom logaritma [(na primjer: $y = \ln x$, $y = \lg x$, $y = \log_2(5x^2 - 3x)$].

3) *Trigonometrijske funkcije:* varijabla x, ili neka njena algebarska funkcija, nalazi se pod znakom sin, cos, tg, ctg, sc, csc (na primjer, $y = \sin x$, $y = \cos(2x + 3)$, $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$).****

* Ako se dijeljenje ne može izbjeći skraćivanjem.

** Ili sa racionalnom funkcijom od x.

*** Ako se korjenovanje ne može izbjeći izlučivanjem.

**** Pod argumentom x trigonometrijskih funkcija $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x \ldots$ u analizi ne razumijevamo kut ili luk kružnice (kako se to radi kod prvih upoznavanja tih funkcija u elementarnoj trigonometriji), već po volji uzetu veličinu; trigonometrijske funkcije mogu biti određene čisto analitički, bez pomoći geometrijskih predodžbi [na primjer funkcija $\sin x$ sa svojim razvojem u red potencija (vidi na str. 376) ili kao rješenje diferencijalne jednadžbe $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ s početnim uvjetima $x = 0$, $y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 1$]. Pri takvom shvaćanju trigonometrijske funkcije njen je argument brojčano jednak luku kružnice koji je izražen u radijanima. Prema tome za računanje trigonometrijskih funkcija mogu poslužiti obične trigonometrijske tablice, ako se argument preračuna u radijane.

4) *Ciklometrijske funkcije:* varijabla x ili njena algebarska funkcija nalaze se pod znakom arc sin, arc cos itd. (na primjer, $\arcsin x$, $\arccos \sqrt{1-x}$).

Sve moguće kombinacije algebarskih i transcendentnih funkcija, kada jedna funkcija može služiti kao argument za drugu, daju *složene funkcije*, na primjer, $y = \ln \sin x$, $y = \dfrac{\ln x + \sqrt{\arcsin x}}{x^2 + 5e^x}$ itd. Takve kombinacije elementarnih funkcija, uzete u konačnom broju, daju također elementarne funkcije.

Neelementarne funkcije. Funkcije koje nisu elementarne možemo definirati na različite načine, počevši od opisivanja veze između vrijednosti argumenta i funkcije. U matematičkoj analizi često se primjenjuju ovi načini definiranja neelementarnih funkcija*:

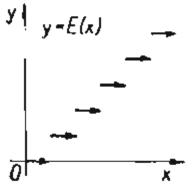
1) Pomoću nekih matematičkih formula (vidi str. 309).

2) Pomoću graničnih prijelaza; posebno:

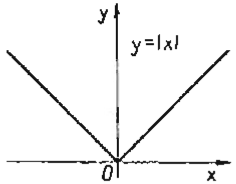
a) pomoću redova i beskonačnih produkata (vidi str. 342),

b) pomoću određenih integrala (s jednom ili dvije promjenljive granice), koje ne možemo izraziti elementarnim funkcijama (vidi str. 385),

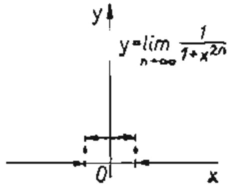
c) pomoću određenih integrala s konstantnim granicama, koje imaju promjenljiv parametar (vidi str. 472).



Sl. 265



Sl. 266



Sl. 267

3) Pomoću diferencijalnih jednadžbi, koje ne možemo riješiti kvadraturama.

4) Pomoću funkcionalnih jednadžbi.

Za neelementarne funkcije koje imaju teoretsko ili praktičko značenje, sastavljamo tablice, crtamo grafove, proučavamo osobine. Takve se funkcije nazivaju *specijalnim*; njima dajemo često posebna imena i oznake.

* Ponekad možemo definirati istu funkciju na različite načine.

Primjeri neelementarnih funkcija:

1) *Cijeli dio varijable x:* y je jednak najvećem cijelom broju koji ne prelazi x. Oznaka: $E(x)$; graf — vidi sl. 265.

2) *Apsolutna vrijednost varijable x:* $y = \begin{cases} -x & \text{za } x \leqslant 0, \\ x & \text{za } x \geqslant 0. \end{cases}$

Oznaka: $y = |x|$; graf — vidi sl. 266.

3) *Predznak* (»signum«) varijable x: $y = \begin{cases} -1 & \text{za } x < 0, \\ 0 & \text{za } x = 0, \\ 1 & \text{za } x > 0. \end{cases}$

Oznaka: $y = \operatorname{sgn} x$; graf — vidi sl. 263, 1), na str. 309.

4) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^{2n}}$ ili $y = \begin{cases} 1 & \text{za } |x| < 1; \\ \frac{1}{2} & \text{za } |x| = 1; \\ 0 & \text{za } |x| > 1; \end{cases}$ Graf — vidi sl. 267.

5) $y = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$ ili $y = x - \dfrac{x^3}{3\cdot 3!} + \dfrac{x^5}{5\cdot 5!} - \dfrac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots$

Oznaka: $y = \operatorname{Si}(x)$ (»integralni sinus«, vidi na str. 428).

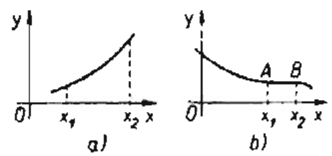
6) $y = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$ ili $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\,n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$

Oznaka: $y = \Gamma(x)$ (»gama-funkcija«), vidi str. 184.

7) Rješenje Besselove jednadžbe: $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\,y = 0$ za određene početne uvjete (»*Besselova funkcija*«, vidi na str. 540).

Neki tipovi funkcija

1) *Monotone funkcije* su funkcije koje za bilo koji $x_2 > x_1$, iz područja definicije, zadovoljavaju uvjet $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ (*monotono uzlazna funkcija*, sl. 268, *a*), ili $f(x_2) \leqslant f(x_1)$ (*monotono silazna funkcija*, sl. 268, *b*); na primjer $y = e^{-x}$, $y = \ln x$.



Sl. 268

Ako taj uvjet nije zadovoljen za sve vrijednosti x cijelog područja definicije, već samo za dio područja (interval, poluos), tada se funkcija zove *monotona u tom području**.

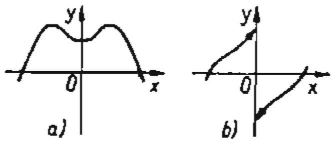
* Monotone funkcije, naprijed definirane, često nazivamo *monotonim u širem smislu*. Funkcija pak koja zadovoljava uvjet $f(x_2) > f(x_1)$ ili $f(x_2) < f(x_1)$ (bez znaka =) naziva se *striktno uzlaznom* (odnosno *striktno silaznom*). Funkcija prikazana na sl. 268, *a* striktno je uzlazna, a ona prikazana na sl. 268, *b* je silazna u širem smislu (na dijelu *AB* funkcija je konstantna).

2) *Ograđene funkcije.* Funkcija koja je *ograđena odozgo* jest ona kojoj vrijednosti ne prelaze neki broj, a koja je *ograđena odozdo* jest ona kojoj vrijednosti nisu manje od nekog broja. Funkciju koja je ograđena odozgo i odozdo nazivamo *ograđenom.*

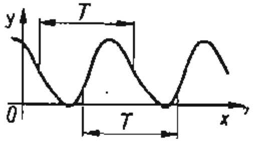
Primjeri: $y = 1 - x^2$ je ograđena odozgo ($y \leqslant 1$); $y = e^x$ je ograđena odozdo ($y > 0$); $y = \sin x$ je ograđena ($-1 \leqslant y \leqslant +1$); $y = \dfrac{4}{1+x^2}$ je ograđena $(0 < y \leqslant 4)$.

3) *Parne funkcije* zadovoljavaju uvjet $f(-x) = f(+x)$ (sl. 269, *a*); na primjer $y = \cos x$, $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

4) *Neparne funkcije* zadovoljavaju uvjet $f(-x) = -f(+x)$ (sl. 269, *b*); na primjer $y = \sin x$, $y = x^3 - x$.



Sl. 269



Sl. 270

5) *Periodične funkcije* zadovoljavaju uvjet $f(x + T) = f(x)$; broj T nazivamo *periodom funkcije* (sl. 270). Obično se periodom naziva najmanji broj T koji zadovoljava taj uvjet.

4. LIMES FUNKCIJE

Pojam *limesa* je ovdje razmotren samo za dva tipa funkcija: 1) za funkciju kod koje je argument cio broj (vidi str. 308) i 2) za funkciju definiranu u suvislom području (vidi str. 307)*.

Limes funkcije kod koje je argument cio broj $y = f(x)$ ($x = 1, 2, 3, \ldots n, \ldots$) određuje se samo za $x \to \infty$; to je limes niza brojeva** $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$:

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(n).$$

Primjeri: 1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$, 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

* Pojam limesa može se razmatrati i za funkcije sa složenijim područjem definicije.

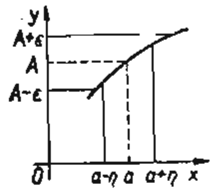
** Vidi str. 305.

Limes funkcije neprekinutog argumenta (tj. sa suvislim područjem definicije).

Definicija. Funkcija $y = f(x)$ ima *limes* A kada $x \to a$:

$$A = \lim_{x \to a} f(x),$$

ako kod približavanja x k a vrijednost funkcije $f(x)$ dolazi po volji blizu broju A. Za vrijednost $x = a$ može da i ne poprimi vrijednost A i općenito može biti nedefinirana.



Sl. 271

Tačna formulacija: $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ako, zadavši po volji malen pozitivni broj ε, možemo naći takav pozitivni broj η da po volji uzetim vrijednostima x u intervalu $a - \eta < x < a + \eta$* (osim, eventualno, vrijednosti $x = a$) pripadne vrijednosti $f(x)$ budu u intervalu $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ (sl. 271).

Uvjeti za postojanje limesa

1) *Svođenje na limes niza.* Funkcija $f(x)$ ima limes A za $x = a$, ako za *po volji uzeti* niz vrijednosti x ($x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$) iz područja definicije funkcije, kojemu je limes broj a, niz pripadnih vrijednosti $[f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots]$ ima limes. Taj limes A je za sve nizove isti i on je limes funkcije $f(x)$.

2) *Cauchyjev uvjet.* Da bi funkcija $f(x)$ imala limes za $x = a$, nužno je i dovoljno da su za po volji uzete dvije vrijednosti argumenta x_1 i x_2 iz područja definicije funkcije, a dovoljno blizu a, pripadne vrijednosti funkcija $f(x_1)$ i $f(x_2)$ budu također međusobno veoma blizu.

Tačna formulacija: Da bi funkcija $f(x)$ imala limes za $x = a$, nužno je i dovoljno da za svaki po volji uzeti mali pozitivni broj ε možemo naći takav pozitivni broj η, da je za po volji uzeti x_1 i x_2, iz područja definicije funkcije, koji zadovoljavaju uvjete $|x_1 - a| < \eta$ i $|x_2 - a| < \eta$, ispunjen uvjet:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Neizmjerni limes funkcije je pojam analogan neizmjernom limesu niza (str. 305); simbolom $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (*limes jednak neizmjerno*) označujemo slučaj kada za $x \to a$ nema limesa funkcije zbog toga što funkcija $f(x)$ neograničeno raste po apsolutnoj vrijednosti kada se x približava k a.

* Ako je a *granična* tačka suvislog područja, za koje je funkcija zadana, tada se ta dvojna nejednakost zamjenjuje s jednostavnom: $a - \eta < x$ ili $x < a + \eta$.

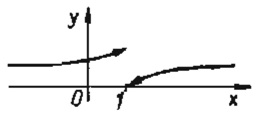
Tačna formulacija: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ ako, zadavši po volji velik pozitivan broj K, možemo naći takav pozitivni broj η da za po volji uzete vrijednosti x u intervalu $a - \eta < x < a + \eta$ pripadne vrijednosti $f(x)$ budu po apsolutnoj vrijednosti veće od K:

$$|f(x)| > K.$$

Ako su pri tome sve vrijednosti $f(x)$ u intervalu $a - \eta < x < a + \eta$ pozitivne, tada pišemo $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$; ako su negativne, tada je $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Lijevi i desni limes funkcije. Funkcija $f(x)$ ima za $x = a$ lijevi limes A ako se neograničeno približava vrijednosti A kada se x uzlazno približava vrijednosti a. Oznaka: $A = f(a - 0)$. Analogno, funkcija za $x = a$ ima *desni* limes A, ako dolazi po volji blizu A kada se x silazno približava vrijednosti a. Oznaka: $A = f(a + 0)$. Npr. funkcija $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$ za $x \to 1$ teži k različitim lijevim i desnim limesima: $f(1 - 0) = 1$, $f(1 + 0) = 0$ (sl. 272).

Limes funkcije kada $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$. Broj A naziva se limesom funkcije $y = f(x)$ kada $x \to +\infty$:



Sl. 272

$$A = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

ako, zadavši po volji malen pozitivan broj ε, možemo naći takav broj N da se za po volji uzete vrijednosti za $x > N$ pripadne vrijednosti $f(x)$ nađu u intervalu $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Analogno

$$A = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

ako, zadavši po volji malen pozitivan broj ε, možemo naći takav broj N da se za po volji uzete vrijednosti za $x < -N$ pripadne vrijednosti $f(x)$ nađu u intervalu $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Na primjer:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

Ako pak funkcija po apsolutnoj vrijednosti neograničeno raste kada x neograničeno raste ili neograničeno pada limesa pri $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) nema. Taj uvjet označavamo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty.$$

Na primjer:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x^3}{x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - x^3}{x^2} = +\infty.$$

Osnovni teoremi o limesima funkcija

1) Limes konstante jednak je toj konstanti:

$$\lim A = A.$$

2) Limes zbroja (razlike) konačnog broja funkcija jednak je pripadnom zbroju (razlici) limesa tih funkcija:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x) - \lim_{x \to a} \psi(x).$$

3) Limes produkta konačnog broja funkcija jednak je produktu limesa tih funkcija:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \varphi(x) \cdot \lim_{x \to a} \psi(x).$$

4) Limes kvocijenta dviju funkcija:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} \varphi(x)}, \quad \text{ako je } \lim_{x \to a} \varphi(x) \neq 0.$$

5) Ako je funkcija $f(x)$ uključena između dvije druge funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$: $\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$ i ako je $\lim_{x \to a} \varphi(x) = A$ i $\lim_{x \to a} \psi(x) = A$, tada je

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

6) Monotona funkcija neprekinutog argumenta ima limes (konačni ili neizmjerni) za svaku vrijednost x (konačnu ili neizmjernu); monotona ograđena funkcija ima konačan limes za svaku vrijednost x.

Neki važni limesi

1) *Broj e*: $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}71828\ldots$ (iracionalan broj).

Tablica vrijednosti vezanih sa e vidi na str. 21. Broj e je baza sistema prirodnih logaritama (vidi str. 150).

2) *Broj C*: $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n\right) = C = 0{,}5772\ldots$ (*Eulerova konstanta*).

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, ako je x duljina luka ili kut izražen u radijanima.

Računanje limesa. Za računanje limesa primjenjujemo naprijed iznesene osnovne teoreme, ali također i ove:

1) Pretvaramo funkciju u oblik za koji je lako naći limes.

Primjeri: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x^2+x+1) = 3;$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\sin 2x)}{2x} = 2 \lim_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \text{ itd.}$$

2) U slučajevima koji se svode na »neodređene oblike« $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, primjenjujemo *L'Hospitalovo pravilo*:

a) *Neodređeni oblici* $\dfrac{0}{0}$ ili $\dfrac{\infty}{\infty}$. Ako je $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ pri čemu su funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ definirane* u intervalu koji sadrži tačku a i imaju u tom intervalu konačne derivacije $[\psi'(x) \neq 0]$, i ako je:

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0 \text{ i } \lim_{x\to a} \psi(x) = 0 \left(\text{»neodređeni oblik } \frac{0}{0}\text{«}\right)$$

ili:

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty \text{ i } \lim_{x\to a} \psi(x) = \infty \left(\text{»neodređeni oblik } \frac{\infty}{\infty}\text{«}\right),$$

tada je:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

uz uvjet da taj limes postoji ili je jednak ∞ (*L'Hospitalovo pravilo*).

U slučaju da $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ iznova predstavlja neodređeni oblik $\dfrac{0}{0}$ ili $\dfrac{\infty}{\infty}$, tada se to pravilo ponovo primjenjuje itd.

* U tački a, $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ mogu biti i nedefinirane.

Primjer:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2}{\cos^2 x}}{\dfrac{2}{\cos^2 2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} = 1.$$

b) *Neodređeni oblik* $0\cdot\infty$. Ako je $f(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x)$ [pod istim uvjetima kao i u slučaju *a*)] i $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = \infty$ (»neodređeni oblik $0\cdot\infty$«), tada za dobivanje limesa $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ funkciju pretvaramo u oblik $\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\psi(x)}}$ ili $\dfrac{\psi(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$, što dovodi do slučaja $\dfrac{0}{0}$ ili $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Primjer:

$$\lim_{x\to \pi/2} (\pi - 2x)\operatorname{tg} x = \lim_{x\to \pi/2} \frac{\pi-2x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{-2}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}} = 2.$$

c) *Neodređeni oblik* $\infty - \infty$. Ako je $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ i $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = \infty$ (»neodređeni oblik $\infty-\infty$«), tada za dobivanje limesa $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ razliku $\varphi(x) - \psi(x)$ pretvaramo algebarski u oblik $\dfrac{0}{0}$ ili $\dfrac{\infty}{\infty}$. To je moguće provesti na različite načine $\left[\text{na primjer } \varphi - \psi = \left(\dfrac{1}{\psi} - \dfrac{1}{\varphi}\right) : \dfrac{1}{\varphi\psi}\right]$.

Primjer: $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x\ln x - x + 1}{x\ln x - \ln x}\right) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$

Nakon dvostruke primjene L'Hospitalovog pravila dobivamo:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x\ln x - x + 1}{x\ln x - \ln x}\right) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \dfrac{1}{x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

d) *Neodređeni oblik* 0^0, ∞^0, 1^∞. Ako je $f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$ i $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x\to a} \psi(x) = 0$, najprije potražimo limes A izraza $\ln f(x) = \psi(x) \cdot \ln \varphi(x)$, koji ima oblik $0 \cdot \infty$ (slučaj *b*), a zatim ga potenciramo, tj. izračunamo e^A.

Primjer: $\lim_{x\to 0} x^x = X$; $\ln x^x = x \ln x$; $\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} =$

$= \lim_{x\to 0} (-x) = 0$, $\ln X = 0$, $X = 1$. Izlazi $\lim_{x\to 0} x^x = 1$.

U slučajevima ∞^0 i 1^∞ postupamo analogno.

3) Osim L'Hospitalovog pravila, za rješavanje neodređenih oblika primjenjujemo razvoj funkcije u Taylorov red. Na primjer:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots\right) = \frac{1}{6}.$$

5. NEIZMJERNO MALE VELIČINE

Definicije. Funkciju α varijable x nazivamo *neizmjerno malom* ili infinitezimalnom veličinom za $x \to a$, ako ona ima za limes nulu ($\lim_{x\to a} \alpha = 0$). Ako je $\alpha = c$ (konstanta) i $\lim \alpha = 0$, tada je $c = 0$*, tj. *među konstantama je neizmjerno mala veličina samo nula.*

Ako funkcija A varijable x ima za $x \to a$ neizmjerni limes (vidi str. 316), tada je nazivamo *neizmjerno velikom veličinom* za $x \to a$.

Osnovna svojstva. Ako su $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ neizmjerno male veličine i a *konačna* veličina (tj. nemaju za limes ni nulu ni neizmjerno), tada je: 1) zbroj i razlika $\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \dots$ neizmjerno mala veličina (ako je broj sumanda ograničen); 2) produkt $\alpha \cdot \beta$ ili $\alpha \cdot a$ neizmjerno mala veličina; 3) kvocijent $\frac{\alpha}{a}$ je neizmjerno mala veličina (ako je $a \neq 0$); 4) kvocijent $\frac{\alpha}{\beta}$ može biti ili neizmjerno mala veličina ili konačna, ili neizmjerno velika veličina, ili veličina koja nema limesa.

Primjeri: 1) $\alpha = \sin x$, $\beta = 1 - \cos x$, $\gamma = x^2$. Za $x \to 0$ α, β i γ su neizmjerno male veličine: $\lim_{x\to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = 0$;

* Limes konstante je konstanta sama.

$\lim_{x\to 0} \frac{\beta}{\gamma} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \infty$; stoga je $\frac{\beta}{\alpha}$ neizmjerno mala, $\frac{\beta}{\gamma}$ konačna, $\frac{\alpha}{\gamma}$ neizmjerno velika veličina.

2) $\alpha = \frac{1}{n}$, $\beta = \frac{(-1)^n}{n}$ (n je cio broj). Za $n \to \infty$ α i β su neizmjerno male veličine; limes $\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to\infty} (-1)^n$ ne postoji.

Red neizmjerno malih veličina. Dvije neizmjerno male veličine imaju *isti red* ako je njihov omjer konačna veličina; ako je pak $\frac{\alpha}{\beta}$ neizmjerno mala veličina, tada je α neizmjerno mala veličina *višeg reda* od β; ako je $\frac{\gamma}{\alpha}$ neizmjerno velika veličina, tada je $\frac{\alpha}{\gamma}$ neizmjerno mala i α ima viši red nego γ.

Primjer: Veličine $\beta = 1 - \cos x$ i $\gamma = x^2$ imaju isti red; β i γ imaju viši red nego $\alpha = \sin x$.

Neizmjerno mala veličina β naziva se *neizmjerno malom veličinom m-tog reda* s obzirom na drugu neizmjerno malu veličinu β, ako je red α jednak redu neizmjerno male veličine β^m.

Primjer: S obzirom na neizmjerno malu veličinu x (za $x \to 0$) $\sin x$ je reda 1, a $1 - \cos x$ reda 2.

Ekvivalentne su takve neizmjerno male veličine kod kojih je limes njihova omjera jednak 1.

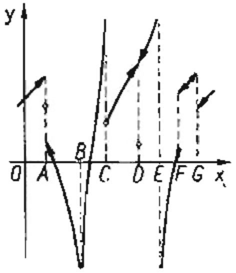
Primjeri: neizmjerno male veličine x i $\sin x$ (za $x \to 0$) su ekvivalentne; neizmjerno male veličine x^2 i $1 - \cos x$ nisu ekvivalentne.

Kada tražimo limes omjera dviju neizmjerno malih veličina, svaku od njih možemo zamijeniti ekvivalentnom neizmjerno malom veličinom, a da time ne promijenimo limese.

6. NEPREKINUTOST I PREKINUTOST FUNKCIJA

Pojam neprekinutosti i prekinutosti. Većina funkcija koje proučavamo u matematičkoj analizi neprekinute su, tj. pri malim promjenama argumenta x funkcija y mijenja se također veoma malo, a graf takve funkcije je suvisla neprekinuta krivulja. Za neke vrijednosti x neprekinutost se može poremetiti, graf se prekida, a funkcija ima *prekinutost*; one vrijednosti argumenta kod kojih dolazi do prekinutosti funkcije nazivamo tačkama prekinutosti. Na sl. 273 prikazan je graf funkcija koje su posvuda neprekinute, osim u tačkama prekinutosti A, B, C, D, E, F, G (slova se odnose na projekcije tačaka)*.

Definicija. Funkciju $y = f(x)$ nazivamo *neprekinutom* za vrijednosti $x = a$ (u tački $x = a$) ako 1) broj a pripada području definicije funkcije i 2) limes $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ postoji i jednak je $f(a)$**.



Sl. 273

Ako je funkcija zadana i neprekinuta za sve vrijednosti x u intervalu od a do b, tada je nazivamo *neprekinutom* u tom *intervalu* (otvorenom, zatvorenom ili poluotvorenom, vidi na str. 308). Funkciju koja je definirana i neprekinuta za sve tačke brojevnog pravca nazivamo *posvuda neprekinutom.*

Za one vrijednosti a koje se nalaze unutar ili na granici područja definicije funkcije i u kojima ona nije definirana, ili se vrijednost $f(a)$ ne poklapa s vrijednošću limesa $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ili $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ne postoji, funkcija ima *prekinutost* (»*tačke prekinutosti*«)***.

Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta u svim tačkama nekog intervala izuzev konačnog broja tačaka u kojima $f(x)$ ima **konačne** prekinutosti (vidi dalje), tada takvu funkciju nazivamo *po odsječcima neprekinutom*; njen graf se sastoji od nekoliko odsječaka krivulja.

Tipovi prekinutosti funkcija koje često susrećemo.

1) *Neizmjerna prekinutost* (»funkcija postaje neizmjerna«) slučaj je koji najčešće susrećemo (tačke B, C, E na sl. 273).

Primjeri:

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty, \quad f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty^{****}$$

(graf vidi na str. 106) (prekinutost tipa tačke E na sl. 273);

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}; \quad f(1-0) = +\infty, \quad f(1+0) = +\infty$$

(prekinutost tipa tačke B na sl. 273);

* Strelice na grafu dogovorno označuju da tačka koja se nalazi na vrhu strelice ne pripada grafu; kružićem označena tačka je ona koja grafu pripada.

** Drugi uvjet može biti zamijenjen ovim ekvivalentnim uvjetom: za neizmjerno mali α razlika $\beta = f(a + \alpha) - f(a)$ je neizmjerno malena (neizmjerno malom prirastu argumenta odgovara neizmjerno malen prirast funkcije).

*** Ako je funkcija definirana samo s jedne strane zadanog argumenta $x = a$ (na primjer $+\sqrt{x}$ za $x = 0$, $\arccos x$ za $x = 1$), tada ne govorimo o prekinutosti, već o prestanku funkcije.

**** O simboličkom označavanju $f(a - 0)$, $f(a + 0)$, vidi str. 316.

$f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$; $f(1-0) = 0$, $f(1+0) = \infty$ (**prekinutost tipa tačke C na sl. 273, s tom razlikom, da $f(x)$ u tački 1 nije definirana**);

2) *Konačna prekinutost:* pri prelazu varijable x preko vrijednosti a funkcija »preskače« od jedne konačne vrijednosti k drugoj (tačke A, F, G na sl. 273). Sama vrijednost $f(x)$ za $x = a$ može da i ne bude definirana (tačka G), može se poklapati s vrijednošću $f(a-0)$ ili $f(a+0)$ (tačka F) i može biti različita kako od $f(a-0)$, tako i od $f(a+0)$ (tačka A).

Primjeri: $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$, $\quad f(1-0) = 1, \quad f(1+0) = 0$

(graf vidi na sl. 272) $f(x) = E(x)$ (vidi na sl. 265 na str. 312), $f(a-0) = a - 1$, $\quad f(a+0) = a$; $\quad f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{1 + x^{2n}}$ (vidi sl. 267), $\quad f(1-0) = 1, \quad f(1+0) = 0, \quad f(1) = \dfrac{1}{2}$.

3) *Uklonjiva prekinutost:* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ postoji: $f(a-0) = f(a+0)$, no za $x = a$ funkcija ili nije definirana ili ima vrijednost $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$ (tačka D na sl. 273). Taj slučaj prekinutosti nazivamo uklonjivim, jer pridavajući $f(a)$ vrijednost $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (»dodajemo grafu jednu tačku«*) napravili smo funkciju neprekinutom. Različiti slučajevi »neodređenih oblika« koje pronalazimo L'Hospitalovim pravilom i drugim načinima (str. 318 do 320), koji daju kao rezultat konačni limes, predstavljaju primjere uklonjive neprekinutosti.

Primjer: $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ za $x = 0$ daje neodređeni oblik $\dfrac{0}{0}$,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}; \quad \text{funkcija } f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & \text{za } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{za } x = 0 \end{cases} \quad \text{postala je neprekinuta.}$$

Neprekinutost i tačke prekinutosti elementarnih funkcija

Sve elementarne funkcije su neprekinute u njihovom području definicije; tačke prekinutosti tih funkcija ne pripadaju području definicije. O istraživanju i konstrukciji grafa elementarne funkcije

* Ili prenoseći »istrgnutu« tačku (D) na graf.

vidi na str. 280; grafove jednostavnijih funkcija vidi na str. 90 do 107. Ovdje dajemo samo opće podatke o prekinutosti elementarnih funkcija.

Cijele funkcije (polinomi) posvuda su neprekinute (na cijelom brojevnom pravcu).

Razlomljene funkcije $\frac{P(x)}{Q(x)}$ [$P(x)$ i $Q(x)$ polinomi] posvuda su neprekinute, osim za one vrijednosti a kod kojih je $Q(x) = 0$, ali $P(x) \neq 0$; za vrijednosti $x = a$ funkcija ima neizmjernu prekinutost. Ako je a korijen nazivnika i brojnika, tada funkcija ima neizmjernu prekinutost samo u onom slučaju kada je višestrukost korijena nazivnika veća od višestrukosti korijena brojnika; u protivnom slučaju prekinutost je uklonljiva.

Iracionalne funkcije. Radikali (s cijelim eksponentom korijena) cijelih funkcija neprekinute su funkcije za sve vrijednosti x koje pripadaju području definicije; na granicama tih područja one mogu prestati konačnom vrijednošću (korijen sa parnim eksponentom, aritmetički razmatran, na granici između pozitivnih i negativnih vrijednosti radikanda). Radikali iz razlomljenih funkcija su prekinuti za one vrijednosti x za koje funkcija pod korijenom ima prekinutost.

Trigonometrijske funkcije $\sin x$ i $\cos x$ su posvuda neprekinute; $\operatorname{tg} x$ i $\sec x$ imaju beskonačnu prekinutost za $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$; $\operatorname{ctg} x$ i $\csc x$ imaju beskonačnu prekinutost za $x = n\pi$ (n cio broj).

Ciklometrijske funkcije. $\operatorname{arc\,tg} x$ i $\operatorname{arc\,ctg} x$ su posvuda neprekinute, $\arcsin x$ i $\arccos x$ prestaju na granicama intervala njihova područja $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$.

Eksponencijalna funkcija e^x ili a^x $(a > 0)$ posvuda je neprekinuta.

Logaritamska funkcija $\log x$ (za svaku pozitivnu bazu) neprekinuta je za sve pozitivne vrijednosti x i prestaje za $x = 0$ ($\lim\limits_{x \to 0} \log x = -\infty$, desni limes).

U slučaju složene elementarne funkcije istražujemo prekinutosti za one vrijednosti argumenata kod kojih imaju prekinutost jednostavne funkcije, koje ulaze u sastav složenih funkcija (u skladu s gore nabrojanim slučajevima).

Primjer: Treba odrediti prekinutosti funkcije $y = \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x \sin \sqrt[3]{1-x}}$.

Eksponent $\frac{1}{x-2}$ ima neizmjernu prekinutost za $x = 2$; $e^{\frac{1}{x-2}}$ ima za $x = 2$ neizmjernu prekinutost

$$\left(e^{\frac{1}{x-2}}\right)_{x=2-0} = 0, \qquad \left(e^{\frac{1}{x-2}}\right)_{x=2+0} = \infty.$$

Nazivnik izraza y za $x = 2$ je konačan: prema tome za $x = 2$ funkcija ima neizmjernu prekinutost, onakvu kao u tački C na sl. 273.

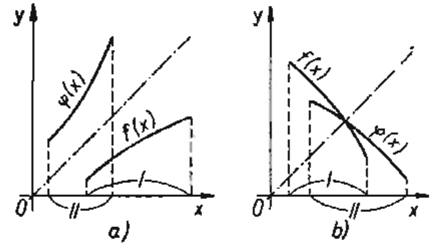
Nazivnik postaje nula za $x = 0$ i za one vrijednosti x za koje postaje nula $\sin \sqrt[3]{1-x}$; ove posljednje vrijednosti se podudaraju s korijenima jednadžbe $\sqrt[3]{1-x} = n\pi$ ili $x = 1 - n^3\pi^3$, gdje je n po volji uzet cio broj. Niti za jednu od tih vrijednosti nije brojnik jednak nuli, pa funkcija ima za vrijednosti $x = 0$, $x = 1$, $x = 1 \pm \pi^3$, $x = 1 \pm 8\pi^3$, $x = 1 \pm 27\pi^3$, ... neizmjerne prekinutosti kao u tački E na sl. 273.

Svojstva neprekinutih funkcija

1) *Prolaženje kroz nulu* (Cauchyjev teorem). Ako je funkcija $f(x)$ definirana i neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$ i ima na krajevima intervala vrijednosti $f(a)$ i $f(b)$ s različitim predznacima, tada između a i b postoji (najmanje jedna) takva vrijednost c, za koju je $f(x)$ jednaka nuli:

$$f(c) = 0 \qquad (a < c < b).$$

(Geometrijski smisao: neprekinuta krivulja, koja prelazi s jedne strane osi x na drugu, siječe tu os.)



Sl. 274

2) *Teorem o međuvrijednostima.* Ako je funkcija $f(x)$ definirana i neprekinuta u nekom suvislom području i ako u dvije tačke a i b $(a < b)$ tog područja prima nejednake vrijednosti A i B:

$$f(a) = A, \qquad f(b) = B, \qquad (A \neq B),$$

onda za bilo kakav broj C između A i B postoji bar jedna tačka c između a i b takva da je:

$$f(c) = C \quad (a < c < b;\ A < C < B \quad \text{ili} \quad A > C > B),$$

(»funkcija $f(x)$ prolazi kroz sve međuvrijednosti između A i B«).

3) *Postojanje inverzne funkcije**. Ako je funkcija $f(x)$ definirana u nekom suvislom području I i ako je u tom području I neprekinuta i striktno raste (ili striktno pada) (str. 313), tada za nju postoji jednoznačna neprekinuta i striktno uzlazna (ili striktno silazna) inverzna funkcija $\varphi(x)$, definirana u području II vrijednosti koje prima funkcija $f(x)$ (sl. 274 a i b).

* Vidi na str. 310.

4) *Teorem o ograđenosti funkcije.* Ako je funkcija $f(x)$ definirana i neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$, tada je ona u tom intervalu ograđena i postoje dva takva broja m i M da je:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{za} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

5) *Postojanje najveće i najmanje vrijednosti.* Ako je funkcija $f(x)$ definirana i neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$, tada u tom intervalu postoji najmanje jedna tačka c, takva da je vrijednost $f(c)$ najveća između svih vrijednosti $f(x)$ i najmanje jedna tačka d takva da je vrijednost $f(d)$ najmanja između svih vrijednosti $f(x)$:

$$f(c) \geqslant f(x) \quad \text{i} \quad f(d) \leqslant f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Razliku između najveće i najmanje vrijednosti neprekinute funkcije nazivamo *oscilacijom* te funkcije u zadanom intervalu*.

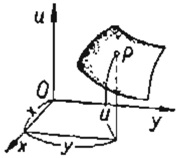
6) Funkcija koja je neprekinuta u zatvorenom intervalu, u tom je intervalu i jednoliko *neprekinuta* (vidi dalje).

Jednolika neprekinutost. Funkciju $y = f(x)$ nazivamo jednoliko *neprekinutom* u određenom području definicije, ako za svaki pozitivni broj ε možemo naći takav broj η, da za po volji uzete dvije tačke x_1, x_2 koje pripadaju području definicije funkcije i koje su međusobno udaljene za manje od η, razlika pripadnih vrijednosti funkcija $f(x_1)$ i $f(x_2)$ bude po apsolutnoj vrijednosti manja od ε:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{pri} \quad |x_2 - x_1| < \eta.$$

Jednolika neprekinutost označuje da je u svim dijelovima područja definicije funkcije dovoljan jedan te isti stupanj blizine dviju vrijednosti argumenta, da bi se dobio zadani stupanj blizine, koji odgovara vrijednostima funkcije.

Nije uvijek funkcija koja je neprekinuta u zadanom području u tom području i jednoliko neprekinuta.



Sl. 275

7. FUNKCIJE OD VIŠE VARIJABLI

Definicija. Varijablu u nazivamo *funkcijom n varijabli x, y, z, ..., t (argumenata)*, ako za zadane vrijednosti tih varijabli veličina u poprima jednu određenu vrijednost (*jednoznačna funkcija*) ili nekoliko određenih vrijednosti (*višeznačna funkcija*). Oznake:

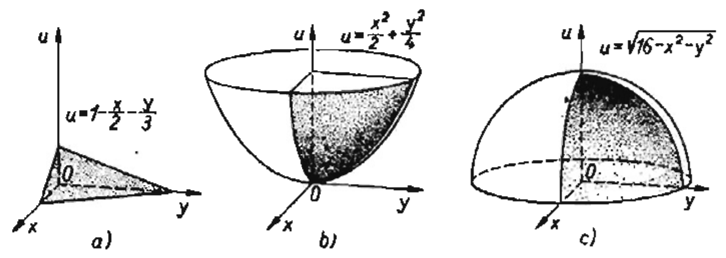
* Pojam oscilacije funkcije može biti proširen i na funkcije koje nemaju najveće i najmanje vrijednosti.

funkcija dviju varijabli: $u = f(x, y)$, funkcija triju varijabli: $u = F(x, y, z)$, funkcija n varijabli: $u = \varphi(x, y, z, \ldots, t)$. Skup od n brojeva, koji predstavljaju pripadne vrijednosti svake varijable, nazivamo *sistemom vrijednosti argumenata**.

Primjeri: Funkcija dviju varijabli: $u = f(x, y) = xy^2$; za sistem vrijednosti $x = 2$, $y = 3$ funkcija poprima vrijednost $f(2, 3) = 2 \cdot 3^2 = 18$. Funkcija četiriju varijabli $u = \varphi(x, y, z, t) = x \ln(y - zt)$; za sistem vrijednosti $x = 3$, $y = 4$, $z = 3$, $t = 1$ poprima vrijednost $\varphi(3, 4, 3, 1) = 3 \cdot \ln(4 - 3 \cdot 1) = 0$.

Geometrijsko prikazivanje

Prikazivanje sistema vrijednosti argumenata. Sistem vrijednosti dviju varijabli x, y može biti prikazan tačkom P u ravnini s Descartesovim koordinatama x i y (vidi str. 226); sistem vrijednosti triju varijabli x, y, z tačkom P u prostoru s Descartesovim koordinatama x, y, z. Za sistem od četiri i više varijabli takovo prikazivanje nije moguće; ipak je po analogiji uobičajeno nazivati sistem vrijednosti n varijabli $x, y, z, \ldots, t$ *tačkom n-dimenzionalnog prostora s koordinatama* $x, y, z, \ldots, t$. U pređašnjem primjeru je sistem brojeva (3, 4, 3, 1) tačka 4-dimenzionalnog prostora s koordinatama $x = 3$, $y = 4$, $z = 3$, $t = 1$. Prema tome nazivamo funkciju od više varijabli *funkcijom tačke* (vidi str. 615).



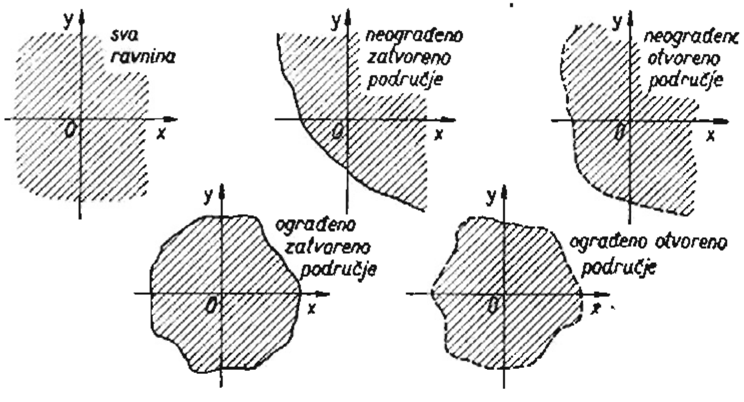
Sl. 276

Prikazivanje funkcije dviju varijabli $u = f(x, y)$. Analogno grafu funkcije jedne varijable prikazujemo funkciju dviju varijabli, *plohom* koja ima jednadžbu $u - f(x, y) = 0$ (sl. 275) (vidi str. 251). Na primjer, funkcija $u = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}$ (sl. 276, *a*) prikazuje se ravninom (vidi str. 252), funkcija $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$ (sl. 276, *b*) eliptičkim

* Ili tačka n-dimenzionalnog prostora, vidi niže.

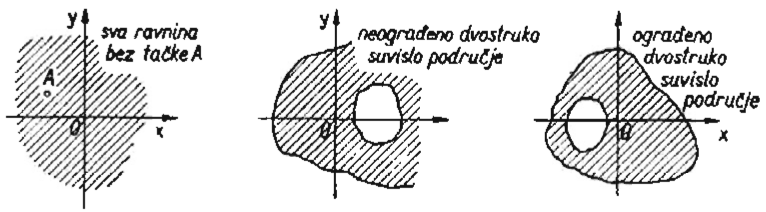
paraboloidom (vidi str. 262), funkcija $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ (sl. 276, c) polukuglom itd.*

Područje u kojem je funkcija zadana jest niz sistema vrijednosti koje u okviru razmatranog pitanja argumenti mogu primiti. Ta područja mogu biti različita; često srećemo funkcije sa suvislim područjima definicije.



Sl. 277

Suvisla područja dviju varijabli. Područja prikazana na sl. 277 nazivamo *jednostruko suvislim*** (u jednostruko suvisla područja spada i cijela ravnina). Ako unutar razmatranog dijela ravnine



Sl. 278

ima jedna tačka, ili jedno jednostruko suvislo područje, koje ne spada u područje definicije funkcije, tada je takav dio ravnine

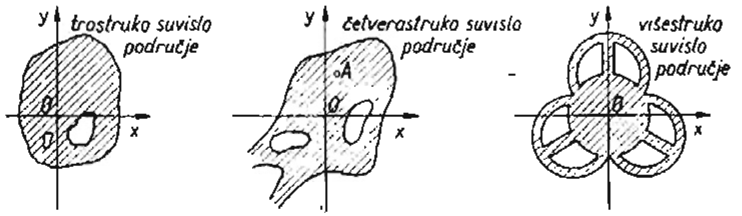
* Funkcije sa tri i više varijabli ne mogu se analogno geometrijski prikazati. No u analogiji s plohom u trodimenzionalnom prostoru uveden je sličan pojam hiperplohe i za n-dimenzionalni prostor.

** Na sl. 277 prikazani su jednostavni slučajevi suvislih područja dviju varijabli i označena njihova imena (područja su crtkana; ako granica područja ulazi u područje definicije, tada je ona prikazana izvučenom crtom, ako ne ulazi, onda tačkastom).

dvostruko suvislo područje. Primjeri dvostruko suvislih područja prikazani su na sl. 278. Analogno, na sl. 279 prikazana su *višestruko suvisla područja.*

Područje na sl. 280 nije suvislo.

Suvisla područja triju varijabli (jednostavniji slučajevi): Čitav prostor, ili njegov dio, ograđen je s jednom ili nekoliko površina; tačke tih površina mogu ili ulaziti ili ne ulaziti u područje definicije; nazivi tih područja analogni su onima navedenim na sl. 277 do 279 za funkcije sa dvije varijable. *Za funkcije koje imaju više varijabli* možemo uvesti analogne geometrijske oblike u višedimenzionalnom prostoru.



Sl. 279

Načini zadavanja funkcija

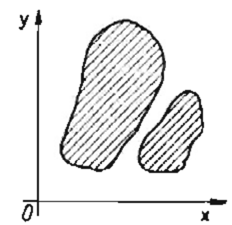
Zadavanje tablicama. Funkcija sa dvije varijable može biti zadana (definirana) tablicom vrijednosti (primjer takvih tablica vidi na str. 86 — tablice vrijednosti eliptičkih integrala). U toj tablici su vrijednosti argumenata raspoređene na lijevom i gornjem rubu, a vrijednost funkcije se nalazi na presjecištu dotičnog stupca i reda. Tablice takvog oblika nazivamo *tablicama sa dva ulaza.*

Zadavanje formulama. Funkcija od nekoliko varijabli može biti zadana pomoću jedne ili nekoliko formula. *Primjeri:*

1) $u = xy^2$; 2) $u = x \ln (y - zt)$;

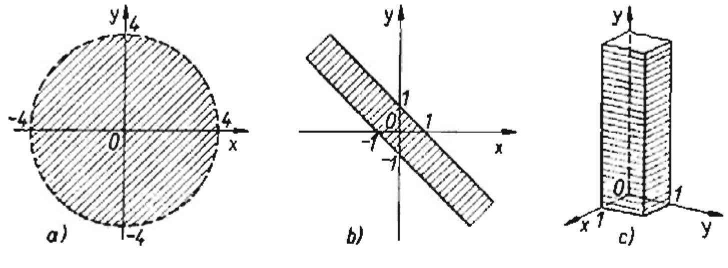
$$3)\ u = \begin{cases} x + y & \text{za} \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \\ x - y & \text{za} \quad x \geqslant 0, \quad y < 0, \\ -x + y & \text{za} \quad x < 0, \quad y \geqslant 0, \\ -x - y & \text{za} \quad x < 0, \quad y < 0 \end{cases}$$

(Ova se funkcija može napisati i u obliku $u = |x| + |y|$.)



Sl. 280

Područje u kojem je analitički izraz definiran (*područje postojanja funkcije*). U matematičkoj analizi u prvom se redu razmatraju funkcije koje su određene jednom formulom. Pri tome su u područje definicije takve funkcije uključeni svi oni sistemi vrijednosti argumenata, kod kojih zadani analitički izraz ima smisao, tj. poprima određene konačne realne vrijednosti. Takvo područje nazivamo *područjem u kojem je analitički izraz definiran.* Obično, ako nema dodatnih ograda, pod područjem definicije (*postojanja*) funkcije, koja je određena jednom formulom, razumijevamo upravo područje u kojemu je analitički izraz definiran.



Sl. 281

Primjeri: 1) $u = x^2 + y^2$; područje definicije su sve vrijednosti x i y (cijela ravnina). 2) $u = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$; područje definicije su sistemi vrijednosti x i y, koji zadovoljavaju nejednadžbu $x^2 + y^2 < 16$ (otvoreno područje unutrašnjosti kruga, sl. 281, *a*). 3) $u = \arcsin(x + y)$; područje definicije su sistemi vrijednosti x i y, koji zadovoljavaju nejednadžbu $-1 \leqslant x + y \leqslant 1$ (zatvoreno područje, traka između paralelnih pravaca, sl. 281, *b*).

4) $u = \arcsin(2x - 1) + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{y} + \ln z$; područje definicije su sistemi vrijednosti koji zadovoljavaju nejednadžbe $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $z > 0$ (sve tačke prostora, koje se nalaze nad kvadratom sa stranicom 1, sl. 281, *c*).

Osnovni oblici analitičkog zadavanja funkcija. Funkcije od nekoliko varijabli zadane su *eksplicitno*, ako su izražene pomoću argumenata: $u = f(x, y, z, \dots, t)$; *implicitno*, kada su argumenti i funkcija vezani jednadžbom $F(x, y, z, \dots, t, u) = 0$; *parametarski*, kada je n argumenata i funkcija izraženo eksplicitno sa n novih varijabli (parametara): $x = \varphi(r, s)$, $y = \psi(r, s)$, $u = \chi(r, s)$ (funkcija sa dvije varijable); $x = \varphi(r, s, t)$, $y = \psi(r, s, t)$, $z = \chi(r, s, t)$, $u = \chi(r, s, t)$ (funkcija sa tri varijable) itd.

Homogene funkcije više varijabli su funkcije $f(x, y, z, \dots t)$. koje zadovoljavaju uvjet:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \dots, \lambda t) = \lambda^n f(x, y, z, \dots, t) \ (\lambda \text{ je po volji uzet broj});$$

broj n nazivamo *stupnjem homogenosti.* Na primjer:

$$u = x^2 - 3xy + y^2 + x\sqrt{xy + \frac{x^3}{y}} \ (n = 2); \quad u = \frac{x + z}{2x - 3y} \ (n = 0).$$

Za homogenu funkciju $u = f(x, y, z, \dots, t)$ vrijedi *Eulerova formula*:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + \dots + t\frac{\partial f}{\partial t} = n \cdot f(x, y, z, \dots, t).$$

Zavisnost funkcija sa više varijabli. Dvije jednoznačne funkcije sa dvije nepoznanice $u = f(x, y)$ i $v = \varphi(x, y)$, koje su zadane u nekom području, nazivamo *zavisnim* ako je jednu od njih moguće izraziti kao funkciju druge: $u = F(v)$; tj. za svaku tačku područja definicije vrijedi identitet:

$$f(x, y) = F[\varphi(x, y)] \quad \text{ili} \quad \Phi(f, \varphi) = 0;$$

i *nezavisnim*, ako takva funkcija F ili Φ ne postoji. Na primjer, dvije funkcije $u = (x^2 + y^2)^2$ i $v = \sqrt{x^2 + y^2}$, definirane u području $x^2 + y^2 \geqslant 0$, zavisne su, jer je $u = v^4$.

Analogno: m funkcija $u_1, u_2, \dots, u_m$ od n varijabli $x_1, x_2, \dots, x_n$, koje su definirane u nekom općem području, nazivamo *zavisnim*, ako jednu od njih (bilo koju) možemo izraziti kao funkciju ostalih, tj. da za svaku tačku područja vrijedi identitet:

$$u_i = F(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_m) \quad \text{ili} \quad \Phi(u_1, u_2, \dots, u_m) = 0,$$

i *nezavisnim*, ako takva funkcija F ili Φ ne postoji. Na primjer, tri funkcije od n varijabli:

$$u = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \qquad v = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$
$$w = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n,$$

definirane u n-dimenzionalnom prostoru zavisne su, jer je $v = u^2 - 2w$.

Analitički kriterij nezavisnosti dviju funkcija $u = f(x, y)$ i $v = \varphi(x, y)$: njihova *Jacobijeva* determinanta, tj. determinanta:

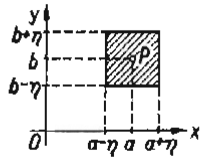
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}, \text{ koju pišemo i ovako: } \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} \quad \text{ili} \quad \frac{D(u, v)}{D(x, y)},$$

ne smije u razmatranom području biti identički jednaka nuli. Taj se kriterij poopćava na slučaj sa n funkcija od istog broja n varijabli $u_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

U slučaju kada je broj m funkcija $u_1, u_2, \ldots, u_m$ manji od broja varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ te su funkcije nezavisne, ako je samo jedna determinanta m-tog reda u matrici

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$



Sl. 282

različita od nule. Broj nezavisnih funkcija jednak je rangu μ spomenute matrice*. Pri tome su nezavisne one funkcije kojih derivacije služe kao elementi neke determinante μ-tog reda, koja nije identički jednaka nuli.

Ako je $m > n$, tada ne može više od n funkcija od zadanih m biti nezavisno.

Limes funkcije od nekoliko varijabli.** Funkcija dviju varijabli $u = f(x, y)$ ima *limes* A za sistem vrijednosti $x = a, y = b$ [oznaka: $A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$], ako se kod približavanja x prema a i y prema b na bilo koji način $f(x, y)$ približava k broju A. U tački $P(a, b)$ (tj. za sistem vrijednosti $x = a, y = b$) funkcija može i da ne poprimi vrijednosti A i općenito može biti nedefinirana.

Tačna formulacija: $A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ ako, zadavši po volji malen pozitivni broj ε, možemo naći takav pozitivni broj η da će se za po volji uzete vrijednosti x i y, međusobno nezavisne, iz intervala $a - \eta < x < a + \eta$ i $b - \eta < y < b + \eta$ (sl. 282) pripadne vrijednosti $f(x, y)$ nalaziti u intervalu

$$A - \varepsilon < f(x, y) < A + \varepsilon.$$

* O rangu matrice vidi str. 170.

** Ovdje se razmatraju funkcije koje su definirane u suvislom području (vidi str. 328 i 329).

Pojam limesa funkcije većeg broja varijabli $f(x, y, z, \ldots, t)$ uvodimo analogno.

Kriteriji postojanja limesa koji su razmotreni za funkcije s jednom varijablom (svođenje na limes niza, Cauchyjev kriterij, vidi str. 314) analogno se protežu i na funkcije s više varijabli.

Višestruki limesi. Ako za funkciju sa dvije varijable $f(x, y)$ nađemo najprije limes $\lim\limits_{x \to a} f(x, y)$ (uzimamo da je y konstantan) i od dobivenog izraza, koji je funkcija od y, nađemo limes za $y \to b$, tada nađeni broj $B = \lim\limits_{y \to b} [\lim\limits_{x \to a} f(x, y)]$ nazivamo *višestrukim limesom.* Ako promijenimo poredaj graničnih prelaza, dobivamo drugi višestruki limes: $C = \lim\limits_{x \to a} [\lim\limits_{y \to b} f(x, y)]$.

Općenito je $B \neq C$ (također ako oba limesa postoje); na primjer za funkciju $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ za $x \to 0$, $y \to 0$ imamo $B = -1$, $C = +1$.

Ako funkcija $f(x, y)$ ima limes $A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$, tada je $B = C = A$. Ali jednakost višestrukih limesa $B = C$ ne povlači postojanje limesa A.

Neprekinute funkcije od nekoliko varijabli

Određivanje. Funkciju od dvije varijable $u = f(x, y)$ nazivamo *neprekinutom* za sistem vrijednosti $x = a, y = b$ [*u tački* $P(a, b)$], ako: 1) tačka $P(a, b)$ pripada području definicije funkcije,

2) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ postoji i jednak je $f(a, b)$; u protivnom slučaju funkcija ima za $x = a$, $y = b$ *prekinutost*. Ako je funkcija zadana i neprekinuta u svakoj tački koja pripada nekom suvislom području, tada se ona naziva *neprekinutom u tom području.*

Analogno se određuje neprekinutost za funkcije od nekoliko varijabli.

Jednolika neprekinutost funkcije od nekoliko varijabli u nekom suvislom području definira se isto tako kao za funkcije s jednom varijablom (str. 326). Na primjer, funkcija sa dvije varijable $f(x, y)$ *jednoliko je neprekinuta* u zadanom suvislom području ako za svaki pozitivni broj ε možemo naći takav pozitivni broj η, da za bilo koje dvije tačke $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, koje zadovoljavaju uvjete $|x_1 - x_2| < \eta$, $|y_1 - y_2| < \eta$, razlika pripadnih vrijednosti funkcije bude po apsolutnoj vrijednosti manja od ε:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Nije uvijek funkcija, koja je neprekinuta u zadanom području, u tom području i jednoliko neprekinuta.

Svojstva neprekinutih funkcija od nekoliko varijabli

1) *Prolaz kroz nulu* (Cauchyjev teorem). Ako je funkcija $f(x, y)$ zadana i neprekinuta u nekom suvislom području, i u dvije tačke tog područja $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ ima različite predznake, tada u tom području postoji najmanje jedna takva tačka $P_3(x_3, y_3)$ u kojoj je funkcija $f(x, y)$ jednaka nuli:

$$f(x_3, y_3) = 0, \quad \text{ako je} \quad f(x_1, y_1) > 0 \quad \text{i} \quad f(x_2, y_2) < 0.$$

2) *Teorem o međuvrijednosti.* Ako je funkcija $f(x, y)$ zadana i neprekinuta u nekom suvislom području, i u dvije tačke tog područja $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2$ i $y_2)$ poprima nejednake vrijednosti A i B, $f(x_1, y_1) = A$, $f(x_2, y_2) = B$, tada u tom području postoji za po volji uzet broj C između A i B najmanje jedna tačka $P_3(x_3, y_3)$ takva da je:

$$f(x_3, y_3) = C \qquad (A < C < B \ \text{ ili } \ B < C < A).$$

3) *Teorem o ograđenosti funkcije.* Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u zatvorenom i ograđenom području, tada je ona ograđena u tom području: postoje dva takva broja m i M, da je za po volji uzetu tačku $P(x, y)$ koja pripada tom području:

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

4) *Postojanje najveće i najmanje vrijednosti.* Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u zatvorenom i ograđenom području, tada u tom području postoji najmanje jedna tačka $P'(x', y')$, takva da je vrijednost $f(x', y')$ najveća od svih vrijednosti $f(x, y)$ koje funkcija poprima u tom području i najmanje jedna tačka $P''(x'', y'')$ takva da je vrijednost $f(x'', y'')$ najmanja od svih vrijednosti $f(x, y)$ koje funkcija poprima u tom području;

$$f(x', y') \geqslant f(x, y) \geqslant f(x'', y'')$$

za po volji uzetu tačku $P(x, y)$, koja pripada području.

5) Funkcija koja je neprekinuta u zatvorenom ograđenom području jednoliko je neprekinuta u tom području*.

* Vidi str. 333.

8. REDOVI BROJEVA

Definicije. Izraz oblika

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

gdje brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$, čine beskonačan niz (vidi str. 308), nazivamo *redom brojeva*; sume $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ nazivamo *djelomičnim* ili *parcijalnim* sumama reda, a član a_n *općim članom* reda. Ako niz parcijalnih suma $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ ima limes (za $n \to \infty$) $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, tada red nazivamo *konvergentnim*, a broj S *sumom reda* (oznaka: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$); ako limesa nema, tada je red *divergentan*; u posljednjem slučaju veličina S_n može neograničeno rasti ($\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$), ili oscilirati. Nužni i dovoljni uvjet za konvergenciju reda svodi se na uvjet za postojanje limesa niza $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ (vidi str. 307).

Primjeri. Red:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \tag{1}$$

konvergira (geometrijska progresija).

Redovi:

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots, \tag{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \ (\textit{harmonijski red}) \tag{3}$$

$$1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots \tag{4}$$

divergiraju. Za redove (2) i (3) je $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$, red (4) oscilira.

Ostatkom konvergentnog reda $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ nazivamo razliku između njegove sume S i parcijalne sume S_n; označujemo ga sa R_n:

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m} + \ldots$$

Osnovni teoremi o konvergenciji redova

1) Odbacivanje konačnog broja početnih članova reda ili dodavanje nekoliko novih članova u početku reda ne utječe na ponašanje (konvergenciju ili divergenciju) reda.

2) Ako članove konvergentnog reda pomnožimo s istim faktorom c, tada nećemo poremetiti konvergenciju reda (njegova suma se isto tako množi sa c).

3) Konvergentne redove možemo član po član zbrajati i odbijati: konvergencija redova $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ sa sumom S i $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ sa sumom Σ povlači da red $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$ konvergira i da je njegova suma jednaka $S \pm \Sigma$.

Nuždan uvjet za konvergenciju reda: opći član reda mora za $n \to \infty$ težiti k nuli: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Taj uvjet *nije dovoljan*; na primjer u harmonijskom redu (3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ali $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Princip uspoređivanja redova s pozitivnim članovima. Ako dva reda:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{A}$$

i

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{B}$$

imaju pozitivne članove i ako je, počevši od nekog n, $a_n \geqslant b_n$, tada iz konvergencije reda (A) izlazi konvergencija reda (B), a iz divergencije reda (B) izlazi divergencija reda (A).

Primjer. Red:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots \tag{5}$$

konvergira, jer počevši sa $n = 2$ članovi reda (5) manji su od članova reda (1): $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$ $(n \geqslant 2)$, a red (1) konvergira.

Red:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \tag{6}$$

divergira, jer počevši sa $n > 1$ članovi reda (6) veći su od članova reda (3): $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ $(n > 1)$, a red (3) divergira.

Uvjeti za konvergenciju redova s pozitivnim članovima

D'Alembertov kriterij. Ako su za red $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ svi kvocijenti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, počevši od nekog mjesta, manji od nekog broja $q < 1$, tada red konvergira; ako su ti kvocijenti, počevši od nekog mjesta, veći od nekog broja $Q > 1$, tada red divergira.

Posljedica. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, tada red konvergira za $\rho < 1$, i divergira za $\rho > 1$. Za $\rho = 1$ kriterij ne daje odluke: red može konvergirati ili divergirati.

Primjeri: 1) za red $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$ (7)

je $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$; red (7) konvergira;

2) za red $2 + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \ldots + \frac{n+1}{n^2} + \ldots$ (8)

je $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{(n+1)^2} : \frac{n+1}{n^2}\right) = 1$ i kriterij ne daje odluke.

Cauchyjev kriterij. Ako su za red $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ svi brojevi $\sqrt[n]{a_n}$, počevši od nekog mjesta, manji od nekog broja $q < 1$, tada red konvergira; ako su svi ti brojevi, počevši od nekog mjesta, veći od nekog broja $Q > 1$, tada red divergira.

Posljedica. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$, tada red konvergira za $\rho < 1$ i divergira za $\rho > 1$; za $\rho = 1$ kriterij ne daje odluke. Na primjer, za red:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \ldots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \ldots \tag{9}$$

je $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$; red (9) konvergira.

Integralni kriterij (Cauchy). Red s općim članom $a_n = f(n)$ konvergira, ako je $f(x)$ monotono silazna funkcija i nepravi integral $\int\limits_c^\infty f(x)\,dx$ (vidi str. 465) konvergira; red s općim članom $f(x)$ divergira, ako taj integral divergira. Pri tome donju granicu c uzimamo po volji, tako da funkcija $f(x)$ za $c < x < \infty$ bude definirana i da nema prekinutost. Na primjer, za red (8) je:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}, \quad \int\limits_c^\infty \frac{x+1}{x^2}\,dx = \left[\ln x - \frac{1}{x}\right]_c^\infty = \infty;$$

integral divergira, a divergira i red (8).

Apsolutna i uvjetna konvergencija. Zajedno s redom:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{A}$$

kojemu članovi imaju različite predznake (npr. alternirani red), podesno je razmatrati red:

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \tag{B}$$

koji je tvoren od apsolutnih vrijednosti članova reda (A). Ako red (B) konvergira, tada i red (A) konvergira; u tom slučaju se red (A) naziva *apsolutno konvergentnim*. Ako pak red (B) divergira, tada red (A) može divergirati, ali može i konvergirati; u posljednjem slučaju se on naziva *uvjetno konvergentnim*. Na primjer red:

$$\frac{\sin\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{2^n} + \ldots, \tag{10}$$

gdje je α po volji uzet konstantan broj, konvergira apsolutno, jer red s općim članom $\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right|$ konvergira $\left[\text{to je vidljivo iz odnosa njega i reda (1): } \left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}\right]$.

Red: $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots \tag{11}$$

konvergira (vidi str. 339, Leibnizov kriterij), ali uvjetno, jer red (3) s općim članom $|a_n| = \frac{1}{n}$ divergira.

Svojstva apsolutno konvergentnih redova

1) U apsolutno konvergentnom redu članove možemo premještati s njihovih mjesta na bilo koji način; suma reda neće se pri tome mijenjati. Izmijenivši poredak članova uvjetno konvergentnog reda (tako da premjestimo neizmjerno mnogo članova reda) možemo promijeniti njegovu sumu, načiniti je da bude po volji određen broj (*Riemannov teorem*), a također možemo red načiniti divergentnim.

2) Apsolutno konvergentni redovi mogu se ne samo zbrajati i odbijati član po član (vidi str. 336), već i množiti, kao obični polinomi, pišući rezultat na primjer u obliku:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots) =$$
$$= \underbrace{a_1b_1} + \underbrace{a_2b_1 + a_1b_2} + \underbrace{a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3} + \ldots +$$
$$+ \underbrace{a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \ldots + a_1b_n} + \ldots$$

Ako je $\Sigma\, a_n = S_a$ i $\Sigma\, b_n = S_b$, tada je suma reda koju dobivamo kao rezultat množenja jednaka S_aS_b*.

Alternirani redovi. Za konvergenciju reda

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots \pm a_n \mp \ldots,$$

gdje je a_n pozitivan broj, dovoljno je da se zadovolje dva uvjeta:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{i} \quad 2)\ a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$$

(*Leibnizov kriterij*). Na primjer, red (11) konvergira.

Ocjena ostatka alterniranog reda. Ako se kod konvergentnog alternatiranog reda ograničimo na prvih n članova, ostatak $R_n = S - S_n$ ima predznak prvog odbačenog člana i manji je od njega po apsolutnoj vrijednosti: $|S - S_n| < a_{n+1}$. Tako je za red:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \ldots,$$

koji ima sumu ln 2, ostatak $|\ln 2 - S_n| < \frac{1}{n+1}$.

Tablica suma nekih redova brojeva

1) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e,$

2) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{n!} \mp \ldots = \frac{1}{e},$

3) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \mp \ldots = \ln 2,$

4) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2,$

5) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} \mp \ldots = \frac{2}{3},$

6) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots \pm \frac{1}{2n-1} \mp \ldots = \frac{\pi}{4},$

7) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = 1,$

* Ako dva reda $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ i $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ konvergiraju, i jedan od njih konvergira apsolutno, tada red koji dobivamo kao rezultat njihovog umnoška, konvergira, ali ne uvijek apsolutno.

8) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots=\frac{1}{2}$,

9) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\ldots=\frac{3}{4}$,

10) $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}+\ldots=$
$$=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8},$$

11) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1(n+2)}+\ldots=\frac{1}{4}$,

12) $\frac{1}{1\cdot 2\ldots l}+\frac{1}{2\cdot 3\ldots(l+1)}+\ldots+\frac{1}{n\ldots(n+l-1)}+\ldots=$
$$=\frac{1}{(l-1)(l-1)!},$$

13) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$,

14) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots\pm\frac{1}{n^2}\mp\ldots=\frac{\pi^2}{12}$,

15) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$,

16) $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$,

17) $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\ldots\pm\frac{1}{n^4}\mp\ldots=\frac{7\pi^4}{720}$,

18) $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96}$,

Bernoullijevi brojevi B_k:

19) $1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\ldots+\frac{1}{n^{2k}}+\ldots=\frac{\pi^{2k}\,2^{2k-1}}{(2k)!}B_k$,

20) $1-\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}-\frac{1}{4^{2k}}+\ldots\pm\frac{1}{n^{2k}}\mp\ldots=\frac{\pi^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}B_k$,

21) $1+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{5^{2k}}+\frac{1}{7^{2k}}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^{2k}}+\ldots=$
$$=\frac{\pi^{2k}(2^{2k}-1)}{2\cdot(2k)!}B_k.$$

Tablica prvih Bernoullijevih brojeva

k	B^k	k	B_k	k	B_k	k	P_k
1	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{30}$	7	$\frac{7}{6}$	10	$\frac{174611}{330}$
2	$\frac{1}{30}$	5	$\frac{5}{66}$	8	$\frac{3617}{510}$	11	$\frac{854513}{138}$
3	$\frac{1}{42}$	6	$\frac{691}{2730}$	9	$\frac{43867}{798}$		

Eulerovi brojevi E_k:

22) $1-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}-\frac{1}{7^{2k+1}}+\ldots\pm\frac{1}{(2n-1)^{2k+1}}\mp\ldots=$
$$=\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!}E_k.$$

Tablica prvih Eulerovih brojeva

k	E_k	k	E_k
1	1	5	50521
2	5	6	2702765
3	61	7	199360981
4	1385		

Neki autori upotrebljavaju druge oznake za Bernoullijeve i Eulerove brojeve:

$$B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_5=0,\quad B_6=\frac{1}{42},$$
$$B_7=0,\quad B_8=-\frac{1}{30}\ \text{itd.}$$
$$E_1=0,\quad E_2=-1,\quad E_3=0,\quad E_4=5,\quad E_5=0,\quad E_6=-61,$$
$$E_7=0,\quad E_8=1385\ \text{itd.}$$

9. REDOVI FUNKCIJA

Definicije. Red sastavljen od funkcija jedne te iste varijable x:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad (1)$$

zove se *red funkcija*. Sve one vrijednosti $x = a$ koje ulaze u područje definicije svih funkcija $f_n(x)$ i za koje red brojeva

$$f_1(a) + f_2(a) + \ldots + f_n(a) + \ldots$$

konvergira [tj. za koje postoji limes parcijalnih suma $S_n(a)$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{n} f_r(a) = S(a)$], tvore *područje konvergencije* reda funkcija (1). Funkciju $S(x)$ nazivamo sumom reda (1) [red (1) »konvergira k funkciji $S(x)$«]. Sumu prvih n članova reda (1) nazivamo *parcijalnom sumom*: $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$. Razlika između sume $S(x)$ konvergentnog reda funkcija i njegove parcijalne sume $S_n(x)$ naziva se *ostatkom reda* (1); on se označava sa $R_n(x)$:

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+m}(x) + \ldots$$

Jednolika i nejednolika konvergencija reda. Prema definiciji limesa niza brojeva (str. 305) red (1) *konvergira* u zadanom području, ako za po volji uzet mali broj $\varepsilon > 0$ možemo naći takav cijeli broj N, da je $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ za $n > N$. Pri tome za redove funkcija mogu nastupiti dva slučaja:

1) Možemo naći broj N, koji je zajednički za sve vrijednosti x koje ulaze u područje konvergencije reda; u tom slučaju red (1) nazivamo *jednoliko konvergentnim* u zadanom području. 2) Takvog zajedničkog broja za sve x koje leže u području konvergencije nema: ma kakav bio n, postoji u području konvergencije takav broj x, da je $|S(x) - S_n(x)| > \varepsilon$. U tom slučaju red (1) *konvergira* u zadanom području *nejednoliko*.

Primjeri. 1) Red:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (*)$$

konvergira za sve vrijednosti x; njegova je suma jednaka e^x (vidi str. 378). Ta je konvergencija jednolika za po volji uzeto konačno područje definicije varijable x. U stvari za $|x| < a$ imamo:

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}\right|^{*} < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a; \quad \text{ali} \quad \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$$

* Prema formuli za ostatak MacLaurinova reda, vidi str. 372.

za dovoljno velik n (koji ne zavisi od x) može biti načinjeno manje od ε, jer $(n+1)!$ raste brže od a^{n+1}. Za cijeli brojevni pravac taj red konvergira nejednoliko: za bilo kakav zadani n možemo naći takav x, da $\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}\right|$ bude veće od po volji uzetog ε.

2) Red:

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots + x(1-x)^n + \ldots \qquad (**)$$

konvergira za sve vrijednosti x u zatvorenom intervalu $[0, 1]$, jer prema D'Alembertovom kriteriju (posljedica str. 337) $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |1 - x| < 1$ za $0 < x \leqslant 1$ (za $x = 0$ je $S = 0$). Ali ta je konvergencija nejednolika:

$$S(x) - S_n(x) = x[(1-x)^{n+1} + (1-x)^{n+2} + \ldots] = (1-x)^{n+1};$$

i kakav god je n, postoji tako mali x, da je $(1-x)^{n+1}$ po volji blizu 1, tj. nije manji od ε. U području pak $a \leqslant x \leqslant 1$ (gdje je $0 < a < 1$) red konvergira jednoliko.

Kriterij (Weierstrassov) *za jednoliku konvergenciju redova.* Red:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

jednoliko konvergira u zadanom području, ako postoji takav konvergentni red brojeva:

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots, \qquad (2)$$

da za sve vrijednosti x, koje leže u tom području, postoji nejednakost:

$$|f_n(x)| \leqslant c_n.$$

U tom slučaju red (2) nazivamo *majorantom* reda (1).

Primjer: Redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ jednoliko konvergiraju u po volji uzetom području, ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, jer je $|a_n \cos nx| \leqslant |a_n|$ i $|a_n \sin nx| \leqslant |a_n|$, a red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira.

Svojstva jednoliko konvergentnih redova:

1) Ako su $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ neprekinute funkcije u nekom području definicije i red $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ jednoliko konvergira u tom području, tada je njegova suma $S(x)$

također neprekinuta funkcija u tom području. Ako pak red konvergira nejednoliko u konačnom području, tada njegova suma $S(x)$ može biti i prekinuta u tom području [u primjeru (**) na str. 343 suma reda je prekinuta: $S(x)$ je jednaka nuli za $x = 0$ i jednaka 1 za $x > 0$; u primjeru (*) na str. 342 funkcija e^x je neprekinuta: red konvergira nejednoliko, ali ne u konačnom području, već na cijelom beskonačnom brojevnom pravcu].

2) Jednoliko konvergentni red možemo integrirati član po član u zadanom području, i suma integrala članova jednaka je integralu sume zadanog reda.

Redovi potencija su redovi funkcija oblika:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{A}$$

ili oblika:

$$a_0 + a_1 (x - a) + a_2 (x - a)^2 + \ldots + a_n (x - a)^n + \ldots, \tag{B}$$

gdje su a_i konstantni koeficijenti.

Osnovna svojstva redova potencija

1) Red (A) apsolutno konvergira za sve vrijednosti x koje su po apsolutnoj vrijednosti manje od nekog broja ρ ($|x| < \rho$), koji nazivamo *polumjerom konvergencije* reda potencije. Red (B) apsolutno konvergira za sve vrijednosti x koje zadovoljavaju nejednakost $|x - a| < \rho$ (ρ je polumjer konvergencije). Polumjer konvergencije može biti određen prema formulama:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \qquad \frac{1}{\rho} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,^*.$$

Na granicama područja konvergencije [za red (A) za $x = +\rho$ i $x = -\rho$; za red (B) za $x = a + \rho$ i $x = a - \rho$] red može konvergirati ili divergirati.

2) Ako red (A) konvergira za pozitivnu vrijednost $x = x_1$, tada on konvergira jednoliko unutar intervala $(-x_1 + \varepsilon,\ x_1)$ (*Abelov teorem*).

Primjer: Za red

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \quad \frac{1}{\rho} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

tj. $\rho = 1$ i red konvergira apsolutno za $-1 < x < +1$, pri čemu za $x = -1$ red konvergira uvjetno [vidi red (11) na str. 338], a za $x = 1$ divergira [vidi red (3) na str. 335]. Prema Abelovom teoremu red konvergira jednoliko u području $[-x_1, +x_1]$, gdje je x_1 po volji uzet broj između 0 i 1.

---

* U slučajevima kada ti limesi ne postoje, u navedenim formulama umjesto lim uzimamo *limes superior* ($\overline{\lim}$).

Tablica prvih članova nekih potencija reda potencija

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots,$$

$$S^2 = a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)\, x^2 + 2\,(ad + bc)\, x^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)\, x^4 + 2\,(af + be + cd)\, x^5 + \ldots.$$

$$\sqrt{S} = S^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2}\frac{c}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{d}{a} - \frac{1}{4}\frac{bc}{a^2} + \frac{1}{16}\frac{b^3}{a^2}\right) x^3 + \left(\frac{1}{2}\frac{e}{a} - \frac{1}{4}\frac{bd}{a^2} - \frac{1}{8}\frac{c^2}{a^2} + \frac{3}{16}\frac{b^2c}{a^3} - \frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}\right) x^4 + \ldots\right],$$

$$\frac{1}{\sqrt{S}} = S^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \left(\frac{3}{8}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{c}{a}\right) x^2 + \left(\frac{3}{4}\frac{bc}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{d}{a} - \frac{5}{16}\frac{b^3}{a^3}\right) x^3 + \left(\frac{3}{4}\frac{bd}{a^2} + \frac{3}{8}\frac{c^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{e}{a} - \frac{15}{16}\frac{b^2c}{a^3} + \frac{35}{128}\frac{b^4}{a^4}\right) x^4 + \ldots\right],$$

$$\frac{1}{S} = S^{-1} = a^{-1} \left[1 - \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right) x^2 + \left(\frac{2bc}{a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{a^3}\right) x^3 + \left(\frac{2bd}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{e}{a} - 3\frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^4}{a^4}\right) x^4 + \ldots\right],$$

$$\frac{1}{S^2} = S^{-2} = a^{-2} \left[1 - 2\frac{b}{a}x + \left(3\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right) x^2 + \left(6\frac{bc}{a^2} - 2\frac{d}{a} - 4\frac{b^3}{a^3}\right) x^3 + \left(6\frac{bd}{a^2} + 3\frac{c^2}{a^2} - 2\frac{e}{a} - 12\frac{b^2c}{a^3} + 5\frac{b^4}{a^4}\right) x^4 + \ldots\right],$$

Obrat reda potencije. Ako je zadan red:

$$y = f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \ldots \quad (a \neq 0),$$

tada razvoj inverzne funkcije u red potencija:

$$x = \varphi(y) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + \ldots$$

ima ove koeficijente:

$$A = \frac{1}{a}, \qquad B = -\frac{b}{a^3}, \qquad C = \frac{1}{a^5}(2b^2 - ac),$$

$$D = \frac{1}{a^7}(5abc - a^2d - 5b^3),$$

$$E = \frac{1}{a^9}(6a^2bd + 3a^2c^2 + 14b^4 - a^3e - 21ab^2c),$$

$$F = \frac{1}{a^{11}}(7a^3be + 7a^3cd + 84ab^3c - a^4f - 28a^2b^2d - 28a^2bc^2 - 42b^5).$$

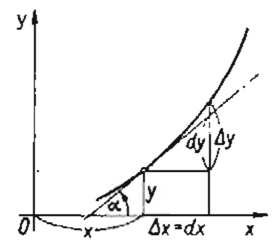
Razvoj funkcija u redove: *potencija* vidi na str. 371, u *trigonometrijske* redove vidi str. 639.

II. DIFERENCIJALNI RAČUN

1. OSNOVNI POJMOVI

Derivacija funkcije jedne varijable* $y = f(x)$ je nova funkcija varijable x $\left[\text{oznake: } y', \dot{y}, Dy, \frac{dy}{dx}, f'(x), Df(x), \frac{df(x)}{dx}\right]$; jednaka je za svaku vrijednost x limesu kvocijenta prirasta funkcije Δy i pripadnog prirasta argumenta Δx, kada Δx teži k nuli:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$



Sl. 283

Geometrijski smisao derivacije. Ako je funkcija $y = f(x)$ prikazana svojim grafom, tj. krivuljom u Descartesovim koordinatama (sl. 283), tada je $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, gdje je α kut između osi Ox i tangente na krivulju u zadanoj tački, mjeren od pozitivnog smjera osi Ox protivno vrtnji kazaljke na satu**.

Postojanje derivacije. Derivacija postoji za takve vrijednosti argumenta x za koje vrijedi: 1) funkcija $y = f(x)$ je definirana i neprekinuta i 2) navedeni odnos ima konačan limes (1). Nepostojanje derivacije za zadanu vrijednost x_1 ukazuje na to da u odnosnoj tački grafa funkcije ili ne postoji određena tangenta, ili ta tangenta zatvara s osi Ox kut od 90°. U posljednjem slučaju limes (1) je neizmjeran; ovo (ne sasvim strogo) označavamo: $f'(x_1) = \infty$ (»derivacija postaje neizmjerna«).

Primjeri nepostojanja derivacije u zadanoj tački:

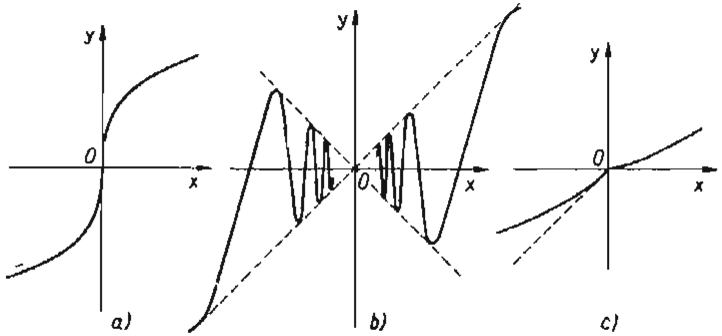
1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f'(0) = \infty$, u tački 0 derivacija teži prema neizmjerno (sl. 284, *a*); 2) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, limesa (1) za

* U ovoj glavi se razmatraju samo jednoznačne funkcije.

** Formula $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ je tačna samo u tom slučaju ako su na osima Ox i Oy jednaka mjerila.

$x = 0$ nema (sl. 284, *b*); 3) $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, limesa (1) za $x = 0$ nema, ali postoji lijevi limes $f'(-0) = 1$ i desni limes $f'(+0) = 0$; u tom slučaju krivulja ima tačku loma (sl. 284, *c*).

Lijeva i desna derivacija. Ako za zadanu vrijednost $x = a$ limesa (1) nema, ali postoje lijevi i desni limes (kao u primjeru 3, sl. 284, *c*), tada njih nazivamo *lijevom i desnom derivacijom.* Geometrijski smisao takvih derivacija: $f'(a - 0) = \operatorname{tg} \alpha_1$, $f'(a + 0) = \operatorname{tg} \alpha_2$ (sl. 285); krivulja ima tačku loma.



Sl. 284

Elementarne funkcije imaju derivaciju u cijelom području postojanja, isključujući pojedine tačke gdje mogu biti slučajevi koje smo pokazali (sl. 284, *a, b, c*).

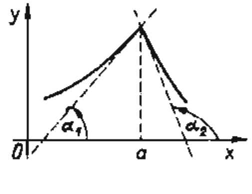
Parcijalna derivacija funkcije nekoliko varijabli $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ po jednoj od njih, na primjer po x $\left[\text{oznake } \dfrac{\partial u}{\partial x},\ u'_x,\ \dfrac{\partial f}{\partial x},\ f'_x\right]$, određuje se jednadžbom:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \ldots, t) - f(x, y, z, \ldots, t)}{\Delta x};$$

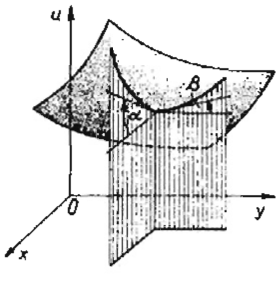
u tom slučaju prirast dobiva samo jedna od nezavisnih varijabli. Funkcija n varijabli ima n parcijalnih derivacija prvog reda: $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial t}$. Parcijalna derivacija se dobiva prema pravilima diferenciranja funkcije jedne varijable (vidi str. 352 do 356), pri čemu ostale varijable smatramo konstantama. Na primjer:

$$u = \frac{x^2 y}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^2 y}{z^2}.$$

Geometrijski smisao parcijalne derivacije funkcije dviju varijabli. Ako je funkcija $u = f(x, y)$ prikazana plohom u Descartesovim koordinatama, tada je $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$, gdje je α kut između pozitivnog smjera osi Ox i tangente na presjek površine u danoj tački, paralelan ravnini xOu (α se računa od osi Ox u protivnom smislu kazaljke na satu, ako se gleda s pozitivne strane osi Oy). Analogno, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta$ (β se računa u protivnom smislu od hoda kazaljke na satu; sl. 286; na toj slici su oba kuta, α i β, pozitivna).



Sl. 285



Sl. 286

Usmjerena derivacija i prostorna derivacija, vidi teoriju polja (str. 622 i 629).

Diferencijali varijabli x, y itd. [označuju se: dx, dy, itd.) određuju se različito, u zavisnosti od toga je li vrijednost nezavisna varijabla ili funkcija. *Diferencijal nezavisne varijable x* je njen prirast, kojemu možemo dodavati po volji određenu vrijednost ($dx = \Delta x$). *Diferencijal funkcije $y = f(x)$ jedne varijable x* za zadanu vrijednost x i zadani diferencijal argumenta dx jest produkt $f'(x)$ sa dx:

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Geometrijski smisao diferencijala. Kod prikazivanja funkcije grafom u Descartesovim koordinatama dy se prikazuje prirastom koji dobiva ordinata tangente na krivulju u danoj tački x pri danom prirastu dx (vidi sl. 283 na str. 347).

Osnovna svojstva diferencijala. 1) *Invarijantnost:* jednadžba $dy = f'(x)\, dx$ ostaje valjana, bude li x nezavisna varijabla ili funkcija nove varijable t. 2) *Red veličine:* ako je dx neizmjerno mala veličina, tada su dy i Δy ekvivalentne neizmjerno male veličine $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1\right)$, a razlika između njih je neizmjerno mala veličina višeg reda od dx, dy, Δy. Ovo svojstvo dopušta pri računanju da male priraste funkcija zamijenimo njihovim diferencijalima; to primjenjujemo kako kod aproksimativnog računanja (str. 130), tako i kod diferencijalnog i integralnog računa.

Parcijalni diferencijal funkcije više varijabli $u = f(x, y, z, \ldots t)$ po jednoj od njih, npr. po x [označava se $d_x u$ ili $d_x f$], određuje se jednadžbom:

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Derivabilna funkcija i totalni diferencijal. Funkciju od nekoliko varijabli $u = f(x, y, \ldots, t)$ nazivamo *derivabilnom* u tački $M_0(x_0, y_0, \ldots, t_0)$, ako se pri prelazu u neizmjerno blizu tačku $M(x_0 + dx, y_0 + dy, \ldots, t_0 + dt)$ (gdje su $dx, dy, \ldots, dt$ neizmjerno male veličine) *totalni prirast* funkcije:

$$\Delta u = f(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz, \ldots, t_0 + dt) - f(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$$

razlikuje od sume parcijalnih diferencijala po svim varijablama:

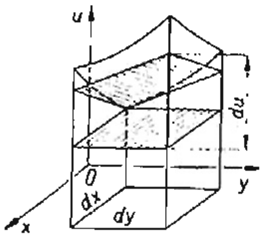
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t} dt\right)_{x_0, y_0, \ldots, t_0} \qquad (*)$$

za neizmjerno malu veličinu koja je višeg reda od udaljenosti

$$M_0M = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \ldots + dt^2}.$$

Ako je u derivabilna funkcija, tada se suma $(*)$ naziva njenim *potpunim ili totalnim diferencijalom* i označava sa du:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial u}{\partial t} dt^*. \quad (**)$$



Sl. 287

Svaka neprekinuta funkcija nekoliko varijabli, koja ima neprekinute parcijalne derivacije, po svim je varijablama derivabilna. Ali samo postojanje parcijalnih derivacija funkcije po svim varijablama još ne povlači njenu derivabilnost.

* O totalnom diferencijalu u vektorskom obliku vidi u teoriji polja str. 623.

Geometrijski smisao totalnog diferencijala funkcije dviju varijabli $u = f(x, y)$, prikazane plohom u Descartesovim koordinatama (sl. 287): du je jednak prirastu aplikate tangencijalne ravnine u zadanoj tački, ako su x i y dobili priraste dx i dy.

Osnovno svojstvo totalnog diferencijala analogno je svojstvima diferencijala s jednom varijablom*: *invarijantnost* izraza $(**)$ s obzirom na varijable u njemu.

Linearnost diferencijalnih izraza. Diferencijali varijabli, koje su povezane nekom funkcionalnom ovisnošću (*konačnom jednadžbom*), vezani su međusobno uvijek linearnom zavisnošću (*diferencijalnom jednadžbom* prvog stupnja). To se odnosi kako na diferencijale nezavisnih varijabli, tako i na diferencijale (parcijalne i totalne) funkcija s jednom ili nekoliko varijabli.

Dobivanje diferencijalne jednadžbe iz konačne jednadžbe nazivamo *diferenciranjem*. U užem smislu diferenciranjem se naziva dobivanje derivacije ili diferencijala.

Derivacije i diferencijali višeg reda. *Druga derivacija* funkcije s jednom varijablom $y = f(x)$ $\left[\text{oznaka: } y'', \ddot{y}, D^2y, \frac{d^2y}{dx^2}^{**}, f''(x), D^2f(x), \frac{d^2f(x)}{dx^2}^{**}\right]$ jest derivacija derivacije: $f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$. Derivacije bilo kojega reda $\left[\text{oznaka: } y''', \dddot{y}, \frac{d^3y}{dx^3}^{**}, f^{IV}(x), D^nf(x), \frac{d^5f(x)}{dx^5}^{**}\right]$ definiramo analogno.

Parcijalnu derivaciju drugog reda funkcije $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ možemo uzeti po istoj varijabli kao i prvu $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots\right)$, ili po nekoj drugoj $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \ldots\right)$; u posljednjem slučaju derivacija se naziva *mješovitom*. Iznos mješovite derivacije, koja je neprekinuta za zadane vrijednosti x i y, ne zavisi od reda varijabli po kojem računamo derivaciju $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)$. Parcijalne derivacije višeg reda definiramo analogno $\left[\text{oznaka: } \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \ldots\right]$.

* Vidi str. 349.

** Ove oznake su zgodne samo u slučaju kada je x nezavisna varijabla, a nisu zgodne ako je $x = \varphi(v)$; vidi str. 361 (zamjena varijabli).

Drugi diferencijal funkcije s jednom varijablom $y = f(x)$ [označuje se d^2y, $d^2f(x)$] jest diferencijal prvog diferencijala: $d^2y = d\,(dy) = f''(x)\,dx^2$*. Analogno se definiraju diferencijali viših redova: $d^3y = d\,(d^2y) = f'''(x)\,dx^3$* itd.

Totalni diferencijal drugog reda funkcije sa dvije varijable $u = f(x, y)$:

$$d^2u = d(du) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

ili u simboličkom obliku: $d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u$**.

Totalni diferencijal reda n funkcije sa dvije varijable:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u^{**},$$

za funkcije s većim brojem varijabli:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \ldots + \frac{\partial}{\partial t}dt\right)^n u^{**}.$$

2. TEHNIKA DIFERENCIRANJA

Opće upute. Koristimo li se niže navedenim pravilima za diferenciranje i tablicom derivacija, možemo naći derivaciju svake elementarne funkcije; takva derivacija je uvijek elementarna funkcija. Najvažnije pravilo za diferenciranje funkcije po funkciji (*složene funkcije*) nazivamo »lančanim pravilom« (str. 355); na primjer:

$$y = e^{\mathrm{tg}\sqrt{x}};$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\mathrm{tg}\sqrt{x}}\cdot\frac{d(\mathrm{tg}\sqrt{x})}{dx} = e^{\mathrm{tg}\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{d\sqrt{x}}{dx} =$$

$$= e^{\mathrm{tg}\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\mathrm{tg}\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$

---

* Ove su oznake zgodne samo u slučaju kada je x nezavisna varijabla, a nisu zgodne ako je $x = \varphi(v)$; vidi str. 361 (zamjena varijabli).

** U slučaju kada su varijable $x, y, \ldots, t$ i same funkcije novih varijabli, formule su složenije. Vidi str. 362 i 363.

Tablica derivacija elementarnih funkcija

Funkcija	Derivacija	Funkcija	Derivacija
C (konstanta)	0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathrm{arcsc}\, x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathrm{arccsc}\, x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
e^x	e^x	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$
a^x	$a^x \ln a$	$\mathrm{th}\, x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{cth}\, x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$\mathrm{Ar\,sh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}4343}{x}$	$\mathrm{Ar\,ch}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{Ar\,th}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathrm{Ar\,cth}\, x$	$-\frac{1}{x^2-1}$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \mathrm{sc}^2 x$		
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{csc}^2 x$		
$\mathrm{sc}\, x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{sc}\, x$		
$\mathrm{csc}\, x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x\, \mathrm{csc}\, x$		

Prije diferenciranja, ako je moguće, zgodno je pretvoriti funkciju u oblik sume rješavanjem zagrada (str. 154), zatim odijeliti cijeli dio (str. 144 i 145), logaritmirati izraz (str. 151) itd.

Primjeri:

$$1)\ y = \frac{2 - 3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x} + x^2}{x} = \frac{2}{x} - 3x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{2}{3}} + x;$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-2} + \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}} + 1.$$

$$2)\ y = \ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-1);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = -\frac{2x}{x^4-1}.$$

Osnovna pravila diferenciranja. (u, v, w su funkcije nezavisne varijable x; u', v', w', ... su derivacije tih funkcija po x.)

1) *Derivacija* (ili *diferencijal*) *algebarske sume* dviju ili više funkcija jednaka je algebarskoj sumi derivacija (diferencijala) svake funkcije:

$$(u + v - w + \ldots + t)' = u' + v' - w' + \ldots + t';$$

$$d(u + v - w + \ldots + t) = du + dv - dw + \ldots + dt.$$

2) *Derivacija* (*diferencijal*) *produkta* dviju ili nekoliko funkcija jednaka je sumi n sumanda (gdje je n broj množenih funkcija); svaki sumand sastavljen je kao dani produkt, s tom razlikom, da je po redu jedan od faktora zamijenjen sa svojom derivacijom (diferencijalom):

za dvije funkcije:

$$(uv)' = uv' + u'v, \quad d(uv) = u\,dv + v\,du;$$

za tri funkcije:

$$(uvw)' = uvw' + uv'w + u'vw,$$

$$d(uvw) = uv\,dw + uw\,dv + vw\,du \quad \text{itd.}$$

Često za izračunavanje derivacije produkta od nekoliko funkcija najprije tražimo *logaritamsku derivaciju*

$\left[\text{tj. derivaciju logaritma zadane funkcije} \quad (\ln y)' = \frac{y'}{y}\right]$; npr.:

$$y = \sqrt{x^3 e^{4x} \sin x}; \quad \ln y = \frac{1}{2}(3\ln x + 4x + \ln\sin x),$$

$$\frac{d\ln y}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} + 4 + \operatorname{ctg} x\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{3}{2x} + 2 + \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x\right)\sqrt{x^3 e^{4x} \sin x}\,^*.$$

3) *Derivacija* (*diferencijal*) *funkcije s konstantnim faktorom.* Konstantni faktor možemo izlučiti pred znak derivacije (diferencijala):

$$(cu)' = cu', \qquad d(cu) = c\,du.$$

4) *Derivacija* (*diferencijal*) *razlomka* izračunava se prema ovoj formuli:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

5) *Derivacija funkcije od funkcije* (*složene funkcije*). Ako je $y = f(u)$ i $u = \varphi(x)$, tada je:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x);$$

ako je $y = f(u)$, $u = \varphi(t)$, $t = \psi(x)$, tada je

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(t) \cdot \psi'(x) \quad \text{(»lančano pravilo«)}.$$

U slučaju »lanca« većeg broja funkcija postupamo analogno.

---

* Taj se način primjenjuje i za diferenciranje funkcija oblika u^v, npr.:

$$y = (2x+1)^{3x}, \quad \ln y = 3x\ln(2x+1), \quad \frac{y'}{y} = 3\left[\frac{2x}{2x+1} + \ln(2x+1)\right],$$

$$y' = 3\left[\frac{2x}{2x+1} + \ln(2x+1)\right]y = 3\left[\frac{2x}{2x+1} + \ln(2x+1)\right](2x+1)^{3x}.$$

Derivacije višega reda jednostavnih funkcija

Funkcija	n-ta derivacija
x^m	$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$ (za cijeli m i $n > m$ je derivacija 0)
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\ln a}\,\frac{1}{x^n}$
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^x	$(\ln a)^n a^x$
a^{kx}	$(k\ln a)^n a^{kx}$
$\sin x$	$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin kx$	$k^n \sin\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos kx$	$k^n \cos\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$ za parni n, $\operatorname{ch} x$ za neparni n
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$ za parni n, $\operatorname{sh} x$ za neparni n

Derivacija n-tog reda produkta dviju funkcija (*Leibnizova formula*):

$$D^n(uv) = u\cdot D^n v + \frac{n}{1} Du\, D^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2} D^2u\, D^{n-2}v + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} D^m u\, D^{n-m}v + \dots + D^n u\cdot v,$$

ili (ako postavimo $D^0u = u$, $D^0v = v$):

$$D^n(uv) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m D^m u\, D^{n-m}v$$

(formula analogna binomnoj formuli, vidi str. 186).

Derivacija složene funkcije od nekoliko varijabli. Slučaj jedne nezavisne varijable: $u = f(x, y, \dots, t)$,
gdje je: $x = \varphi(\xi)$, $y = \psi(\xi), \dots,$ $t = \chi(\xi)$:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\xi} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{d\xi}. \qquad (*)$$

Slučaj s nekoliko nezavisnih varijabli $u = f(x, y, \dots, t)$, gdje je $x = \varphi(\xi, \eta, \dots, \tau)$, $y = \psi(\xi, \eta, \dots, \tau)\dots,$ $t = \chi(\xi, \eta, \dots, \tau)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi},\\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Diferenciranje implicitne funkcije

1) *Funkcija jedne varijable* $y = f(x)$, zadana jednadžbom:

$$F(x, y) = 0. \qquad (A)$$

Diferenciranje (A) po x na osnovu formule $(*)$ daje:

$$F'_x + F'_y\cdot y' = 0, \qquad (B)$$

odakle je:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Diferenciranje (B) po x na osnovu te iste formule daje:

$$F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(y')^2 + F'_y y'' = 0, \qquad (C)$$

odakle dobivamo, uzevši u obzir (B):

$$y'' = \frac{2F'_x F'_y F''_{xy} - (F'_y)^2 F''_{xx} - (F'_x)^2 F''_{yy}}{(F'_y)^3}. \qquad (D)$$

Na taj način dobivamo i:

$$F'''_{xxx} + 3F'''_{xxy}y' + 3F'''_{xyy}(y')^2 + F'''_{yyy}(y')^3 +$$
$$+ 3F''_{xy}y'' + 3F''_{yy}y'y'' + F'_y y''' = 0, \qquad (E)$$

odakle se, uzevši u obzir (B) i (E), izračuna y''' itd.

2) *Funkcija s više varijabli* $u = f(x, y, \ldots, t)$ zadana jednadžbom:

$$F(x, y, \ldots, t, u) = 0.$$

Parcijalne derivacije dobiju se analogno, pomoću formule (**) na str. 357:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -F'_x/F'_u, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -F'_y/F'_u, \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -F'_t/F'_u;$$

a istim putem nalazimo i parcijalne derivacije višega reda.

3) *Dvije funkcije jedne varijable* $y = f(x)$ i $z = \varphi(x)$, zadane sistemom jednadžbi:

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{i} \quad \Phi(x, y, z) = 0. \qquad \text{(A)}$$

Diferenciranje (A) prema formuli (*) na str. 357 daje:

$$F'_x + F'_y y' + F'_z z' = 0, \qquad \Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_z z' = 0, \qquad \text{(B)}$$

odakle je:

$$y' = \frac{F'_z \Phi'_x - \Phi'_z F'_x}{F'_y \Phi'_z - F'_z \Phi'_y}, \qquad z' = \frac{F'_x \Phi'_y - F'_y \Phi'_x}{F'_y \Phi'_z - F'_z \Phi'_y};$$

na isti način [diferenciranjem (B), uzevši u obzir vrijednosti y' i z'] nalazimo drugu derivaciju y'' i z'' itd.

4) *n funkcija jedne varijable* $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, $\ldots$, $t = \psi(x)$, zadanih sistemom od n jednadžbi:

$$F(x, y, z, \ldots, t) = 0, \quad \Phi(x, y, z, \ldots, t) = 0, \quad \ldots$$
$$\ldots, \Psi(x, y, z, \ldots, t) = 0. \qquad \text{(A)}$$

Diferencirajući (A) prema formuli (*) na str. 357, dobivamo:

$$\left.\begin{array}{l} F'_x + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' + \ldots + F'_t \cdot t' = 0, \\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' + \Phi'_z \cdot z' + \ldots + \Phi'_t \cdot t' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Psi'_x + \Psi'_y \cdot y' + \Psi'_z \cdot z' + \ldots + \Psi'_t \cdot t' = 0. \end{array}\right\} \quad \text{(B)}$$

Riješivši sistem (B) s obzirom na $y', z', \ldots, t'$, nalazimo prve derivacije; istim postupkom dobivamo derivacije višega reda.

5) *Dvije funkcije sa dvije varijable* $u = f(x, y)$, $v = \varphi(x, y)$, zadane sistemom dviju jednadžbi:

$$F(x, y, u, v) = 0 \quad \text{i} \quad \Phi(x, y, u, v) = 0. \qquad \text{(A)}$$

Diferenciranjem jednadžbi (A) po x i po y [prema formulama (**) na str. 357] dobivamo:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{array}\right\} (B_x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{array}\right\} (B_y)$$

Ako riješimo sistem (B_x) s obzirom na $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ i sistem (B_y) s obzirom na $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$, dobivamo parcijalne derivacije prvoga reda; istim putem dobivamo derivacije viših redova.

6) *n funkcija sa m varijabli, zadanih sistemom n jednadžbi.* Parcijalne derivacije prvoga i bilo kojeg reda izračunavamo analognim putem.

Derivacije funkcije $y = f(x)$, zadane u parametarskom obliku: $x = x(t)$, $y = y(t)$ (derivacije po t označene su crticom):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'(x'y''' - y'x''') - 3x''(x'y'' - y'x'')}{x'^5}, \ldots$$

Derivacija inverzne funkcije. Ako je funkcija $y = f(x)$ inverzna s obzirom na $y = \varphi(x)$, tada njene derivacije računamo po ovim formulama:

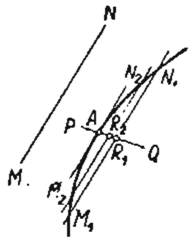
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3[\varphi''(y)]^2 - \varphi'(y)\varphi'''(y)}{[\varphi'(y)]^5}, \ldots$$

Na primjer, $y = \arcsin x$; direktna funkcija: $y = \sin x$,

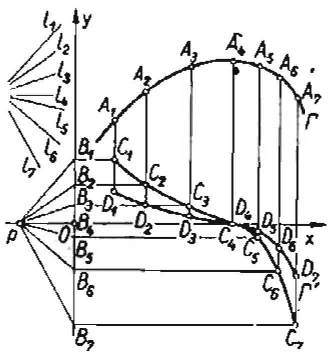
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Grafičko deriviranje. Ako je derivabilna funkcija $y = f(x)$ prikazana (u Descartesovim koordinatama) grafom (Γ) u nekom intervalu $a < x < b$, tada graf njene derivacije (Γ') možemo nacrtati na način koji ćemo sada prikazati.

Prethodna zadaća: konstrukcija tangente u zadanoj tački krivulje »odoka« vrlo je netačna; ako je pak zadan smjer tangente (MN, sl. 288), tada tačku dodira A možemo konstruirati tačnije. Nacrtamo dvije tetive M_1N_1 i M_2N_2, koje su paralelne sa MN, tako da sijeku krivulju u bliskim tačkama, zatim nacrtamo polovišta R_1 i R_2 tih tetiva i kroz tačke R_1 i R_2 nacrtamo pravac PQ; taj pravac siječe krivulju u tački A, u kojoj tangenta (približno) ima zadani smjer. Za kontrolu ispravnosti takve konstrukcije možemo nacrtati treću tetivu koja je paralelna dvjema prvima i bliza njima, a pravac PQ je mora sjeći u sredini.



Sl. 288



Sl. 289

Konstrukcija grafa derivacije. 1) Zadamo nekoliko smjerova (l_1, l_2, ...) tangenata na krivulju $y = f(x)$ (sl. 289), koji odgovaraju razmatranom intervalu krivulje, i odredimo dirališta A_1, A_2, ... prema prethodnoj konstrukciji (tangente ne moramo crtati).

2) Na negativnom dijelu osi Ox izaberemo po volji tačku P (»pol«); odsječak $PO = a$ mora biti to veći, što je krivulja plosnatija.

3) Iz pola P povučemo pravac PB_1, PB_2 paralelno smjerovima l_1, l_2, ... do sjecišta s osi Oy u tačkama B_1, B_2, ...

4) Kroz B_1, B_2, ... povučemo horizontalni pravac B_1C_1, B_2C_2, ... do sjecišta u tačkama C_1, C_2, ... s dotičnim ordinatama tačaka A_1, A_2, ...

5) Tačke C_1, C_2, ... spajamo glatkom krivuljom; njena jednadžba je $y = a \cdot f'(x)$. To je traženi graf derivacije, ako smo za jedinicu mjerila po osi Oy uzeli odsječak a. Da bismo dobili graf u običnom mjerilu (krivulja Γ') konstruiramo tačke D_1, D_2, ... kojoj su ordinate jednake ordinatama tačaka C_1, C_2, ..., podijeljenim sa a ($a = PO$ na sl. 289).

3. ZAMJENA VARIJABLI U DIFERENCIJALNIM IZRAZIMA

Funkcija s jednom varijablom. Ako je $y = f(x)$ i ako imamo u izrazu

$$H = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\right)$$

sadržan argument, funkciju i njenu derivaciju, tada u slučaju zamjene varijabli s novima, derivacije računamo prema ovim formulama:

1) Za slučaj da zamijenimo argument x sa argumentom t, koji je sa x vezan formulom $x = \varphi(t)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^3}\left\{\varphi'(t)\frac{d^2y}{dt^2} - \varphi''(t)\frac{dy}{dt}\right\},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^5}\left\{[\varphi'(t)]^2\frac{d^3y}{dt^3} - 3\varphi'(t)\varphi''(t)\frac{d^2y}{dt^2} + [3[\varphi''(t)]^2 - \varphi'(t)\varphi'''(t)\frac{dy}{dt}\right\}^*.$$

2) Za slučaj zamjene funkcije y s funkcijom u, koja je sa y vezana formulom $y = \varphi(u)$:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(u)\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi'(u)\frac{d^2u}{dx^2} + \varphi''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi'(u)\frac{d^3u}{dx^3} + 3\varphi''(u)\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \varphi'''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^3, \ldots$$

3) Za slučaj zamjene argumenta x i funkcije y s novim argumentom t i funkcijom u, koji su sa x i y vezani formulama $x = \varphi(t, u)$, $y = \psi(t, u)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\right] = \ldots$$

* Ako je formula transformacije dana u nerazvijenom obliku s obzirom na x kao $\Phi(x, t) = 0$, tada derivacije $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ računamo po istim formulama, samo što derivacije $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, $\varphi'''(t)$ računamo po pravilima diferenciranja implicitnih funkcija. Pri tom konačni izraz H može sadržavati varijablu x, koju treba eliminirati pomoću jednadžbe $\Phi(x, t) = 0$.

$$= \frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}} \frac{d}{dt}\left[\frac{\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{du}{dt}}{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}}\right] = \frac{1}{B}\frac{d}{dt}\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{B^3}\left(B\frac{dA}{dt} - A\frac{dB}{dt}\right),$$

gdje je $A = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{du}{dt}$, $B = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}$.

$\frac{d^3y}{dx^3}$ računamo analogno.

Primjer: Pri transformaciji Descartesovih koordinata u polarne po formulama $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\cdot\sin\varphi$ imamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^3}.$$

Funkcija sa dvije varijable. Ako je:

$$\omega = f(x, y)$$

i ako su u izrazu:

$$H = F\left(x, y, \omega, \frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}, \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}, \ldots\right)$$

sadržani argumenti, funkcija i njene parcijalne derivacije, tada u slučaju zamjene varijabli x, y s novim varijablama u, v, koje su sa x i y povezane formulama $x = \varphi(u, v)$, $v = \psi(u, v)$, parcijalnu derivaciju prvog reda $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ dobivamo iz sistema jednadžbi:

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

odakle izlazi:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = A\frac{\partial\omega}{\partial u} + B\frac{\partial\omega}{\partial v}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial y} = C\frac{\partial\omega}{\partial u} + D\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

gdje su A, B, C, D funkcije od u, v. Druge parcijalne derivacije izračunavamo po istim formulama, no ne primjenjujemo na funkciju ω, već na $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ i $\frac{\partial\omega}{\partial y}$; na primjer:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u} + B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) =$$
$$= A\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) +$$
$$+ B\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + B\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} + \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right).$$

Na isti način dobivamo i parcijalne derivacije višega reda.

Primjer: Treba izraziti Laplaceov operator*:

$$\Delta\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$$

u polarnim koordinatama $x = \rho\cos\varphi$, $y = \varphi\sin\varphi$.

Imamo:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial y}\sin\varphi, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\omega}{\partial x}\rho\sin\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial y}\rho\cos\varphi;$$

odavde je:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi};$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right) -$$
$$- \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right).$$

Analogno računajući $\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$, dobivamo:

$$\Delta\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\rho}.$$

Za funkcije s većim brojem varijabli dobivamo formule za zamjenu na sličan način.

4. OSNOVNI TEOREMI DIFERENCIJALNOG RAČUNA

Uvjet monotonosti funkcije. Ako je funkcija $f(x)$ zadana i neprekinuta u nekom suvislom području i ima derivaciju u svim unutrašnjim tačkama tog područja**, tada je nuždan i dovoljan uvjet za monotonost funkcije u području definicije:

* Vidi na str. 634.
** Tj. u tačkama koje nisu krajevi intervala.

$f'(x) \geqslant 0$ za monotono uzlaznu funkciju,

$f'(x) \leqslant 0$ za monotono silaznu funkciju*.

Geometrijski smisao. Graf monotono uzlazne funkcije jest krivulja koja, ako ju razmatramo slijeva nadesno, ni u kom mjestu ne pada (uspinje se ili ide horizontalno, sl. 290, *a*); tangenta u tačkama te krivulje tvori s pozitivnim smjerom osi Ox šiljast kut ili je s njim paralelna. Analogno je za monotono silaznu funkciju (sl. 290, *b*)**.

Fermatov teorem. Ako funkcija $y = f(x)$, koja je zadana u suvislom području, ima u nekoj nutarnjoj tački područja*** najveću ili najmanju vrijednost, tj.:

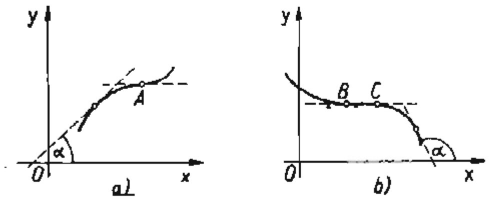
$$f(c) < f(x)$$

ili:

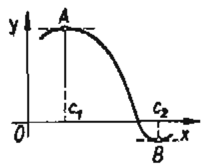
$$f(c) > f(x),$$

i u tački c ima konačnu derivaciju, tada je ta derivacija jednaka nuli:

$$f'(c) = 0.$$



Sl. 290



Sl. 291

Geometrijski smisao. U tačkama A i B grafa funkcije, koja zadovoljava uvjete teorema, tangenta je paralelna s osi x (sl. 291).

Fermatov teorem daje samo nuždan uvjet za postojanje najveće i najmanje vrijednosti funkcije; on nije dovoljan: na sl. 290, *a* u tački A je $f'(x) = 0$, ali tamo nema ni najveće ni najmanje vrijednosti.

* Ovaj uvjet vrijedi za monotono rastenje ili padanje u širokom smislu (vidi primjedbu na str. 313). Da funkcija striktno raste ili pada treba uz taj uvjet još i drugi: derivacija $f'(x)$ ne smije biti identična nuli ni u kom intervalu koji je dio razmatranog područja. Taj uvjet nije npr. ispunjen na odsječku BC, sl. 290, *b*.

** U slučaju striktne monotonosti tangenta može biti paralelna s osi Ox samo za pojedine tačke (npr. u tački A na sl. 290, *a*), ali ne na cijelom intervalu (BC na sl. 290, *b*).

*** Tj. u tački koja nije kraj (rub) intervala.

Uvjet *konačnosti* derivacije bitan je u Fermatovom teoremu: na sl. 292, *d*, u tački E, funkcija ima najveću vrijednost, ali derivacija nije nula.

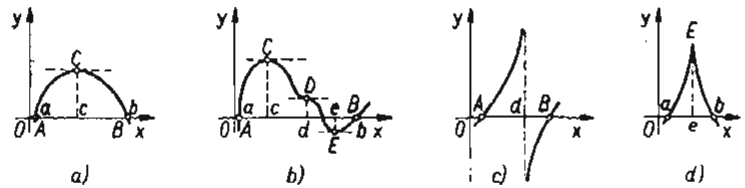
Rolleov teorem. Ako je funkcija $y = f(x)$ u zatvorenom intervalu $[a, b]$ neprekinuta, a ima barem u otvorenom intervalu (a, b) derivaciju i postaje nula na njegovim krajevima:

$$f(a) = 0, \qquad f(b) = 0 \qquad (a < b),$$

tada postoji najmanje jedan broj c između a i b takav da je:

$$f'(c) = 0 \qquad (a < c < b).$$

Geometrijski smisao. Ako je krivulja, koja je graf funkcije $y = f(x)$ ili koja siječe os Ox u dvije tačke A i B, neprekinuta i ima tangentu na cijelom području od A do B, tada postoji najmanje jedna tačka C između A i B u kojoj je tangenta paralelna s osi Ox (sl. 292, *a*).



Sl. 292

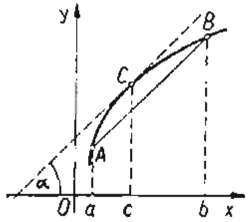
Takvih tačaka može biti i nekoliko (tačke C, D, E na sl. 292, *b*). Zahtjev neprekinutosti funkcije i egzistencije njene derivacije bitan je: na sl. 292, *c* funkcija ima prekinutost za $x = d$, na sl. 292, *d* derivacija u tački E ne postoji; u oba ova slučaja nema tačke C u kojoj je $f'(x) = 0$.

Lagrangeov teorem (*teorem srednje vrijednosti*). Ako je funkcija $y = f(x)$ u zatvorenom intervalu $[a, b]$ neprekinuta, a ima u otvorenom intervalu (a, b) derivaciju, tada postoji najmanje jedan broj c između a i b takav da je:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad (a < c < b).$$

Ako drugačije pišemo (stavivši da je $b = a + h$ i ako sa Θ označimo neki broj između 0 i 1), tada je

$$f(a + h) = f(a) + h f'(a + \Theta h)$$
$$(0 < \Theta < 1).$$



Sl. 293

Geometrijski smisao. Ako je krivulja $y = f(x)$ (sl. 293) neprekinuta i ima između A i B u svakoj tački tangentu, između A i B

postoji takva tačka C krivulje da je tangenta u njoj paralelna s tetivom AB.

Takvih tačaka može biti nekoliko: uvjet neprekinutosti funkcije i postojanja njene derivacije bitan je (lako je konstruirati primjere koji to ilustriraju analogno kao na sl. 292, b, c, d).

Taylorov teorem (poopćenje Lagrangeovog teorema). Ako je funkcija $y = f(x)$ u intervalu $[a, a + h]$* neprekinuta i ima neprekinute derivacije do uključivo $(n - 1)$-toga reda i ako u unutrašnjosti intervala postoji još i n-ta derivacija, vrijedi jednadžba (*formula Taylora*):

$$f(a + h) =$$
$$= f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \Theta h),$$

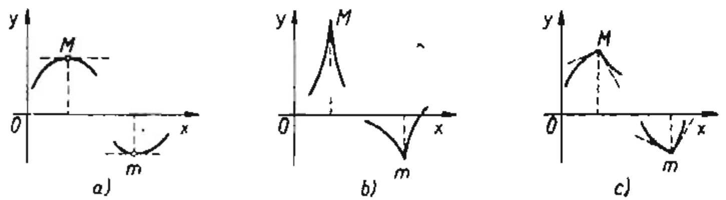
gdje je Θ neki broj između 0 i 1 $(0 < \Theta < 1)$.

Cauchyjev teorem (poopćeni teorem srednje vrijednosti). Ako su dvije funkcije $y = f(x)$ i $y = \varphi(x)$ u zatvorenom intervalu $[a, b]$ neprekinute i imaju barem u unutrašnjosti intervala derivaciju, pri čemu $\varphi'(x)$ ni u jednoj tački intervala nije nula, tada postoji takav broj c između a i b da vrijedi jednadžba:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad (a < c < b).$$

Geometrijski smisao Cauchyjevog teorema je isti kao i kod Lagrangeovog; ako razmatramo krivulju na sl. 293, zadanu u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$, gdje tačka A odgovara vrijednosti parametara $t = a$, a tačka B vrijednosti $t = b$, tada je za tačku C koeficijent smjera tangente na krivulju:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$



Sl. 294

* Ovdje može h biti pozitivan i negativan.

5. ODREĐIVANJE MAKSIMUMA I MINIMUMA

Funkcija s jednom varijablom.

Definicija. Maksimum (M) ili *minimum* (m)* funkcije $y = f(x)$ jest takva vrijednost $f(x_0)$ za koje vrijedi nejednadžba:

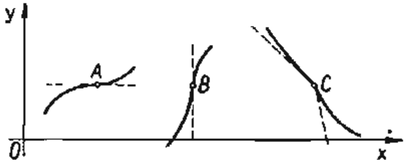
$$f(x_0 + h) < f(x_0) \text{ (za maksimum)}$$

i:

$$f(x_0 + h) > f(x_0) \text{ (za minimum)}$$

za po volji uzete male vrijednosti h pozitivne i negativne. Na taj način u tačkama maksimuma (minimuma) vrijednost $f(x_0)$ je veća (ili manja) od svih *susjednih* vrijednosti funkcije.

Nuždan uvjet za maksimum ili minimum neprekinute funkcije. Neprekinuta funkcija može imati maksimum ili minimum samo u onim tačkama, u kojima je derivacija ili jednaka nuli ili uopće ne postoji (napose kad postaje neizmjerna).



Sl. 295

Geometrijski smisao. U tačkama grafa funkcije, koje odgovaraju maksimumu ili minimumu, tangenta je paralelna s osi Ox (sl. 294, a), ili je paralelna s osi Oy (sl. 294, b), ili ne postoji (sl. 294, c).

Taj uvjet nije dovoljan: na sl. 295 u tačkama A, B, C nužni uvjeti su ostvareni, ali u njima nema niti maksimuma niti minimuma.

Za neprekinutu funkciju maksimumi i minimumi se izmjenjuju: između dva susjedna maksimuma ima jedan minimum, a između dva susjedna minimuma, jedan maksimum.

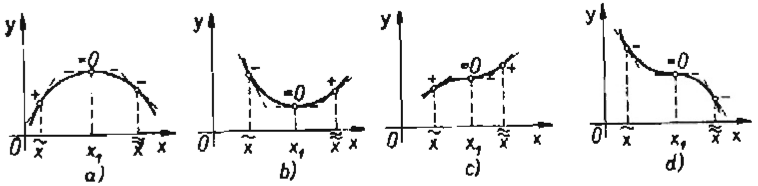
Određivanje maksimuma i minimuma neprekinute funkcije, zadane eksplicitno sa $y = f(x)$, koja ima neprekinutu derivaciju. Najprije nađemo tačke koje zadovoljavaju nužni uvjet $f'(x) = 0$ (*stacionarne tačke*): izračunamo derivaciju $f'(x)$ i nađemo sve realne korijene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jednadžbe $f'(x) = 0$.

Zatim svaki od nađenih korijena, npr. x_1, ispitujemo na jedan od ovih načina:

1) *Usporedba predznaka derivacije.* Odredimo predznak $f'(x)$ za vrijednosti $\tilde{x}$, koje nisu mnogo manje i za vrijednosti $\tilde{\tilde{x}}$, koje nisu mnogo veće od x_1 [tačnije: koje se od x_1 razlikuju tako malo da između $\tilde{x}$ i x_1 i između x_1 i $\tilde{\tilde{x}}$ nema više korijena jednadžbe $f'(x) = 0$]. Ako predznak $f'(x)$ pri tome prelazi od »+« na »—« (sl. 296, a), tada za $x = x_1$ imamo za $f(x)$ maksimum; ako prelazi od »—« na »+« (sl. 296, b), imamo minimum; ako se predznak derivacije ne mijenja (sl. 296, c i d), tada za $x = x_1$ nema niti M,

* U matematičkoj analizi pojmovi maksimuma i minimuma zajedno se zovu »ekstremi«.

niti m, a na grafu postoji tačka infleksije s tangentom koja je paralelna s osi Ox.



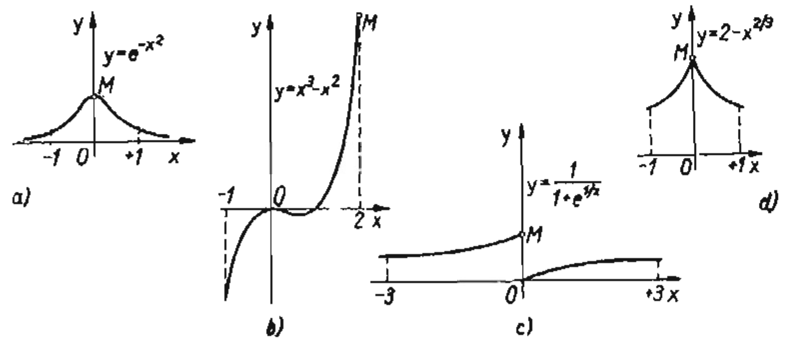
Sl. 296

2) *Metoda viših derivacija* (može biti primijenjena u onim slučajevima kada za $x = x_1$ postoje derivacije višega reda). Uvrstimo svaki korijen x_1 u drugu derivaciju $f''(x)$. Ako je $f''(x_1) < 0$, tada za $x = x_1$ imamo M; ako je $f''(x_1) > 0$, tada imamo m; ako je $f''(x_1) = 0$, tada uvrstimo x_1 u treću derivaciju $f'''(x)$. Ako je u tom slučaju $f'''(x_1) \neq 0$, tada za $x = x_1$ nema niti M niti m funkcije (tačka infleksije); ako je pak $f'''(x_1) = 0$, tada uvrštavamo x_1 u četvrtu derivaciju, itd.

Opće pravilo. Ako je red prve derivacije, koja nije nula za $x = x_1$, paran, tada $f(x)$ ima za $x = x_1$ M ili m, što zavisi od toga da li je ta derivacija negativna ili pozitivna. Ako je taj red neparan, tada funkcija nema niti M niti m za $x = x_1$.

Usporedbu predznaka derivacije možemo primijeniti i na one vrijednosti funkcije gdje nema derivacije (vidi sl. 294, *b* i *c* i sl. 295).

Pri određivanju *najveće* i *najmanje* vrijednosti funkcije u zadanom intervalu $a \leqslant x \leqslant b$ nalazimo sve njezine M i m unutar toga intervala, a također ispitujemo funkciju na krajevima intervala, u tačkama prekinutosti funkcije i u tačkama prekinutosti njene derivacije. Tražene se vrijednosti mogu naći u jednoj od razmotrenih tačaka; sve te vrijednosti moramo izračunati i ustanoviti koja je od njih najveća, a koja je najmanja.



Sl. 297

Primjeri određivanja najveće vrijednosti:

a) $y = e^{-x^2}$ u intervalu $[-1, +1]$. Najveća vrijednost je u tački $x = 0$ (maksimum, sl. 297, *a*).

b) $y = x^3 - x^2$ u intervalu $[-1, +2]$. Najveća vrijednost je u tački $x = +2$ (desni kraj intervala, sl. 297, *b*).

c) $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ u intervalu $[-3, 3]$. Najveća vrijednost je u tački $x = 0$ (prekinutost funkcije, sl. 297, *c*) [ako postavimo $y = 1$ za $x = 0$].

d) $y = 2 - x^{2/3}$ u intervalu $[-1, +1]$. Najveća vrijednost je u tački $x = 0$ (maksimum, neizmjerna derivacija, sl. 297, *d*).

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije koja je zadana implicitno. Pri nalaženju M i m funkcije $y = f(x)$, koja je zadana implicitno jednadžbom $F(x, y) = 0$ (ako su F, F'_x i F'_y neprekinuti), postupamo ovako: Riješimo sistem jednadžbi $F(x, y) = 0$, $F'_x(x, y) = 0$ i dobivena rješenja (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... uvrstimo u F'_y i F''_{xx}. Ako u tački (x_i, y_i), F'_y i F''_{xx} imaju različite predznake, tada za dani x_i funkcija y_i ima m; ako su F'_y i F''_{xx} istog predznaka, tada funkcija za zadani x_i ima M. Ako je jedan od izraza F'_y ili F''_{xx} jednak nuli u razmatranoj tački, tada su daljnje analitičke metode složenije.

Funkcija s nekoliko varijabli

Definicija. Funkcija $u = f(x, y, \ldots, t)$ ima za sistem vrijednosti $x_0, y_0, \ldots, t_0$ (»u tački P_0«) maksimum (minimum), ako možemo naći takav broj ε da područje $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon, \ldots, t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ ulazi u područje definicije funkcije i da su za svaki sistem vrijednosti u tom području, osim sistema $x_0, y_0, \ldots, t_0$, zadovoljeni uvjeti:

$$f(x, y, \ldots, t) < f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \qquad \text{(za maksimum)},$$

odnosno

$$f(x, y, \ldots, t) > f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \qquad \text{(za minimum)}.$$

Služeći se pojmom višedimenzionalnog prostora*, možemo reći da je u tačkama maksimuma (minimuma) vrijednost funkcije u veća (odnosno manja) nego u ma kojoj susjednoj tački.

Geometrijski smisao maksimuma (minimuma) funkcije sa dvije varijable, koja je prikazana plohom u Descartesovim koordinatama (vidi str. 327): u tački A maksimuma (minimuma) aplikata plohe je veća (odnosno manja) nego aplikata bilo koje tačke, koja se nalazi u dovoljno maloj okolini tačke A (tj. u malom području za koje je tačka A unutrašnja tačka), vidi sl. 298: a) maksimum, *b*) minimum.

* Vidi str. 327.

Ako ploha ima u tački P maksimuma ili minimuma tangencijalnu ravninu, tada je ta ravnina paralelna s ravninom xOy (sl. 298, *a* i *b*). Taj uvjet je nuždan, ali nije dovoljan za to, da tačka P ima M ili m: na sl. 298, *c* ploha ima u tački P horizontalnu tangencijalnu ravninu, ali funkcija u njoj nema niti M niti m (P je sedlasta tačka).

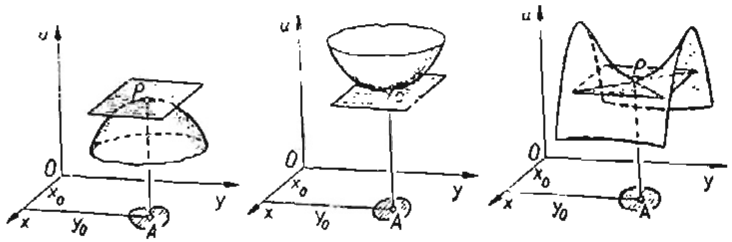
Određivanje maksimuma i minimuma funkcije sa dvije varijable $u = f(x, y)$. Riješimo sistem jednadžbi:

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0;$$

dobivene sisteme rješenja (x_1, y_1), (x_2, y_2) uvrstimo u $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}$ i $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Tvori se izraz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = [f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2]_{x=x_1,\ y=y_1}.$$

Ako je $\Delta > 0$, tada funkcija $f(x, y)$ za sistem vrijednosti (x_1, y_1) ima M pri $f''_{xx} < 0$ i m pri $f''_{xx} > 0$. Ako je $\Delta < 0$, tada $f(x, y)$ nema ni M ni m. Ako je pak $\Delta = 0$, tada su metode složenije.



Sl. 298

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije sa n varijabli $u = F(x, y, \ldots, t)$. *Nuždan* ali ne i dovoljan uvjet za to da bi za sistem vrijednosti $(x, y, \ldots, t)$ derivabilna funkcija u imala M ili m jest: taj sistem mora zadovoljavati n jednadžbi:

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \ldots, \quad F'_t = 0. \qquad \text{(A)}$$

Dovoljni uvjeti su općenito složeni; da bismo praktički ustanovili da li će sistem rješenja $x_1, y_1, \ldots, t_1$ jednadžbi (A) dati M, m ili ne, treba ispitati funkciju za vrijednosti koje su bliske $x_1, y_1, \ldots, t_1$.

Uvjetni (vezani) maksimum i minimum (Lagrangeova metoda). Ako treba naći M ili m funkcije s nekoliko (n) varijabli $u = F(x, y, \ldots, t)$ koje nisu međusobno nezavisne, već međusobno povezane dodatnim uvjetima (broj uvjeta je $k < n$):

$$\varphi(x, y, \ldots, t) = 0, \quad \psi(x, y, \ldots, t) = 0, \quad \ldots, \quad \chi(x, y, \ldots, t) = 0,$$

uvodimo k neodređenih multiplikatora $\lambda, \mu, \ldots, \varkappa$ i razmatramo funkciju $n + k$ varijabli $x, y, \ldots, t, \lambda, \mu, \ldots, \varkappa$ kako slijedi:

$$\Phi(x, y, \ldots, t, \lambda, \mu, \ldots, \varkappa) = F(x, y, \ldots, t) + \lambda \cdot \varphi(x, y, \ldots, t) + \\ + \mu \cdot \psi(x, y, \ldots, t) + \ldots + \varkappa \cdot \chi(x, y, \ldots, t).$$

Nužni uvjeti maksimuma ili minimuma funkcije Φ daju sistem od $n + k$ jednadžbi (A) s nepoznatim $x, y, \ldots, t, \lambda, \mu, \ldots, \varkappa$. Te jednadžbe imaju oblik:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \ldots, \quad \chi = 0, \quad \Phi'_x = 0, \quad \Phi'_y = 0, \quad \ldots, \quad \Phi'_t = 0.$$

Sistem rješenja $(x_1, y_1, \ldots, t_1)$ koji zadovoljava te jednadžbe može dati M ili m za funkciju F; to je samo nuždan uvjet.

Na primjer, za funkciju $u = f(x, y)$, ako je $\varphi(x, y) = 0$, tačku maksimuma (minimuma) dobivamo iz tri jednadžbe:

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)] = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)] = 0,$$

sa tri nepoznanice x, y, λ.

6. RAZVOJ FUNKCIJA U REDOVE POTENCIJA

Taylorov red za funkcije jedne varijable. Funkciju $y = f(x)$, koja je neprekinuta i ima sve derivacije za $x = a$, možemo u mnogim slučajevima izraziti u obliku sume reda potencija (vidi str. 344) dobivenoga iz Taylorove formule (str. 366):

$$f(x) = f(a) + \frac{x - a}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots \qquad (\textit{Taylorov red}) \qquad \text{(T)}$$

Formula (T) je ispravna za one vrijednosti x za koje *ostatak** $f(x) - S_n = R_n$ teži k nuli za $n \to \infty$.

Formule za ostatak:

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad (\xi \text{ je između } a \text{ i } x),$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Drugi oblik Taylorovog reda:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots;$$

za taj su oblik izrazi za ostatak:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \Theta h) \qquad (0 < \Theta < 1),$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^h (h-t)^n f^{(n+1)}(a+t)\, dt.$$

MacLaurinov red je razvoj funkcije $f(x)$ po potencijama od x i predstavlja specijalan slučaj reda (T) za $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots; \quad \text{(M)}$$

njegov ostatak je:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\Theta x) \qquad (0 < \Theta < 1),$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Konvergencija Taylorova i MacLaurinova reda određuje se ili određivanjem člana R_n, ili određivanjem polumjera konvergencije (str. 344); u posljednjem slučaju može se desiti da red konvergira, ali njegova suma $S(x)$ nije jednaka $f(x)$.

* Ovdje pojam ostatka nije jednak onome koji smo upotrijebili u paragrafu o redovima funkcija (str. 342). Oba su pojma ista samo u onim slučajevima kada je formula (T) ispravna.

Taylorov red za funkcije s dvije varijable:

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} k\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} k^2\right\} +$$

$$+ \frac{1}{6}\{\ldots\} + \ldots + \frac{1}{n!}\{\ldots\} + R_n$$

ili u simboličkom obliku:

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right) f(x,y) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^2 f(x,y) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^3 f(x,y) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^n f(x,y) + R_n,$$

gdje je

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^{n+1} f(x + \Theta_1 h, y + \Theta_2 k)$$

$$(0 < \Theta_1 < 1, \quad 0 < \Theta_2 < 1).$$

Za funkciju s m varijabli analogna je simbolička formula:

$$f(x+h, \quad y+k, \quad \ldots, \quad t+l) =$$

$$= f(x,y,\ldots,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \ldots + \frac{\partial}{\partial t} l\right)^i f(x,y,\ldots,t) + R_n,$$

gdje je

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \ldots + \frac{\partial}{\partial t} l\right)^{n+1} f(x + \Theta_1 h,$$

$$y + \Theta_2 k, \ldots, t + \Theta_m l) \quad (0 < \Theta_i < 1).$$

Tablica razvoja nekih funkcija u redove potencija

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
	Algebarske funkcije	
$(a \pm x)^m$	Binomni red se pretvori u oblik $a^m \left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^m$ i svede na ove redove:	$\lvert x \rvert \leqslant a$ za $m > 0$, $\lvert x \rvert < a$ za $m < 0$.
	Binomni redovi s pozitivnim eksponentom	
$(1 \pm x)^m$ $(m > 0)$*	$1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \pm \ldots$	$\lvert x \rvert \leqslant 1$
$(1 \pm x)^{1/4}$	$1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8}x^2 \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4 \pm \ldots$	$\lvert x \rvert \leqslant 1$
$(1 \pm x)^{1/3}$	$1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}x^2 \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 \pm \ldots$	$\lvert x \rvert \leqslant 1$
$(1 \pm x)^{1/2}$	$1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \ldots$	$\lvert x \rvert \leqslant 1$

* Za cio, pozitivan m red je konačan i sadrži $m+1$ članova. Koeficijenti su $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} = C_m^n$; tablicu binomnih koeficijenata C_m^n vidi na str. 186.

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
$(1 \pm x)^{3/2}$	$1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert \leqslant 1$
$(1 \pm x)^{5/2}$	$1 \pm \frac{5}{2}x + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert \leqslant 1$
	Binomni redovi s negativnim eksponentom:	
$(1 \pm x)^{-m}$ $(m > 0)$	$1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3 + \ldots + (\pm 1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}x^n \pm \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-1/4}$	$1 \mp \frac{1}{4}x + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}x^2 \mp \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-1/3}$	$1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}x^2 \mp \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-1/2}$	$1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-1}$	$1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
$(1 \pm x)^{-3/2}$	$1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-2}$	$1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-5/2}$	$1 \mp \frac{5}{2}x + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-3}$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2}(2 \cdot 3x \mp 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 \mp 5 \cdot 6x^4 + \ldots)$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-4}$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(2 \cdot 3 \cdot 4x \mp 3 \cdot 4 \cdot 5x^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6x^3 \mp 5 \cdot 6 \cdot 7x^4 + \ldots)$	$\lvert x \rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-5}$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5x \mp 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6x^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7x^3 \mp 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8x^4 + \ldots)$	$\lvert x \rvert < 1$
	Trigonometrijske funkcije	
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\sin(x+a)$	$\sin a + x \cos a - \frac{x^2 \sin a}{2!} - \frac{x^3 \cos a}{3!} + \frac{x^4 \sin a}{4!} + \ldots + \frac{x^n \sin\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\cos(x+a)$	$\cos a - x \sin a - \frac{x^2 \cos a}{2!} + \frac{x^3 \sin a}{3!} + \frac{x^4 \cos a}{4!} - \ldots + \frac{x^n \cos\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} \pm \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\mathrm{tg}\, x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \ldots$*	$\lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$\frac{1}{x} - \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \ldots + \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \ldots\right]$*	$0 < \lvert x \rvert < \pi$
$\mathrm{sc}\, x$	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \ldots + \frac{E_n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$**	$\lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$
$\mathrm{csc}\, x$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \frac{127}{604800}x^7 + \ldots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1}$*	$0 < \lvert x \rvert < \pi$

* B_n — Bernoullijevi brojevi (vidi str. 341).
** E_n — Eulerovi brojevi (vidi str. 341).

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
	Eksponencijalne funkcije	
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$a^x=e^{x\ln a}$	$1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+\frac{(x\ln a)^3}{3!}+\ldots+\frac{(x\ln a)^n}{n!}+\ldots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\frac{x}{e^x-1}$	$1-\frac{x}{2}+\frac{B_1x^2}{2!}-\frac{B_2x^4}{4!}+\frac{B_3x^6}{6!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{B_nx^{2n}}{(2n)!}\pm\ldots$*	$\lvert x\rvert<2\pi$
	Logaritamske funkcije	
$\ln x$	$2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3}+\frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5}+\ldots+\frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}}+\ldots\right]$	$x>0$
$\ln x$	$(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}\pm\ldots$	$0<x\leqslant 2$
$\ln x$	$\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{nx^n}+\ldots$	$x>\frac{1}{2}$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\pm\ldots$	$-1<x\leqslant 1$

* B_n — Bernoullijevi brojevi (vidi str. 341).

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
$\ln(1-x)$	$-\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\right]$	$-1\leqslant x<1$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\,\mathrm{Ar\,th}\,x$	$2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right]$	$\lvert x\rvert<1$
$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2\,\mathrm{Ar\,cth}\,x$	$2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)\,x^{2n+1}}+\ldots\right]$	$\lvert x\rvert>1$
$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\ln\lvert x\rvert-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}-\ldots-\frac{2^{2n-1}B_nx^{2n}}{n(2n)!}-\ldots$*	$0<\lvert x\rvert<\pi$
$\ln\cos x$	$-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\frac{17x^8}{2520}-\ldots-\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_nx^{2n}}{n(2n)!}-\ldots$*	$\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
$\ln\lvert\mathrm{tg}\,x\rvert$	$\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{90}x^4+\frac{62}{2835}x^6+\ldots+\frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n)!}x^{2n}+\ldots$*	$0<\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
	Ciklometrijske funkcije	
$\arcsin x$	$x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)\,(2n+1)}+\ldots$	$\lvert x\rvert<1$

* B_n — Bernoullijevi brojevi (vidi str. 341).

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
arc cos x	$\frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots\right]$	$\|x\| < 1$
arc tg x	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \dots$	$\|x\| < 1$
	$= \pm\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)\,x^{2n+1}} \pm \dots$*	$\|x\| > 1$
arc ctg x	$\frac{\pi}{2} - \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \dots\right]$	$\|x\| < 1$
	Hiperbolne funkcije	
sh x	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	$\|x\| < \infty$
ch x	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$\|x\| < \infty$

* Prvi član $\frac{\pi}{2}$ ima predznak »+« za $x > 1$ i predznak »—« za $x < -1$.

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
th x	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \dots + \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} \pm \dots$*	$\|x\| < \frac{\pi}{2}$
cth x	$\frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}}{(2n)!}B_n x^{2n-1} \pm \dots$*	$0 < \|x\| < \pi$
sch x	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 - \frac{61}{6!}x^6 + \frac{1385}{8!}x^8 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}E_n x^{2n} \pm \dots$**	$\|x\| < \frac{\pi}{2}$
csch x	$\frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \dots + \frac{2(-1)^n(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} \dots$*	$0 < \|x\| < \pi$
	Area-funkcije	
Ar sh x	$x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n\,(2n+1)}x^{2n+1} \pm \dots$	$\|x\| < 1$

* B_n — Bernoullijevi brojevi (vidi str. 341).
** E_n — Eulerovi brojevi (vidi str. 341).

Funkcija	Razvoj u red	Područje konvergencije
$\operatorname{Ar\,ch} x$*	$\pm\left[\ln(2x)-\frac{1}{2\cdot 2x^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4}-\right.$ $\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6}-\ldots\right]$	$x>1$
$\operatorname{Ar\,th} x$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$	$\|x\|<1$
$\operatorname{Ar\,cth} x$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{(2n+1)\,x^{2n+1}}+\ldots$	$\|x\|>1$

* Funkcija je dvoznačna.

III. INTEGRALNI RAČUN

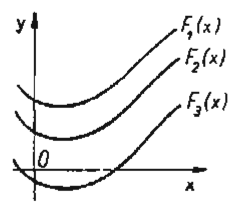
A. NEODREĐENI INTEGRALI

1. OSNOVNI POJMOVI I TEOREMI

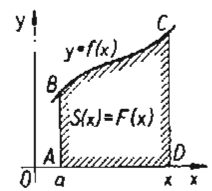
Primitivna funkcija. *Primitivnom funkcijom* za danu funkciju jedne varijable $y = f(x)$, definiranu u nekom suvislom području, nazivamo takvu funkciju $F(x)$ koja je definirana u tom istom području*, a derivacija joj je jednaka $f(x)$ [ili, što je isto, diferencijal joj je jednak $f(x)\,dx$]:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ili} \quad dF(x) = f(x)\,dx.$$

Primitivnih funkcija za danu funkciju ima beskonačan skup; razlika između dvije primitivne funkcije $F_1(x)$ i $F_2(x)$ jest konstantna veličina. Grafovi svih funkcija $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)\ldots$, koje su primitivne za danu funkciju, predstavljaju jednu te istu krivulju i dobivaju se jedan iz drugoga paralelnim pomakom krivulje u smjeru osi ordinate prema gore ili dolje (sl. 299).



Sl. 299



Sl. 300

Geometrijski smisao primitivne funkcije. Ako je dana funkcija $f(x)$ izražena krivuljom u Descartesovim koordinatama (sl. 300), tada je primitivna funkcija brojčano jednaka površini $S(x)$ ograđenoj krivuljom $y = f(x)$, osi Ox i dvjema ordinatama: fiksnom ordinatom AB (za $x = a$) i promjenljivom ordinatom CD (za apscisu x). Birajući po volji konstantu a dobivamo različite primitivne funkcije.

Pri tome se površina $S(x)$ uzima u algebarskom smislu**.

* U nekim slučajevima područje definicije primitivne funkcije šire je od područja definicije zadane funkcije. Ako je područje definicije funkcije $f(x)$ — suvislo s isključenjem nekih pojedinih tačaka neprekinutosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tada se područje definicije prvobitne $F(x)$ može uključiti u ove tačke prekinutosti (vidi str. 384).

** Površina lika $ABCD = \int_a^x f(x)\,dx$, vidi na str. 451.

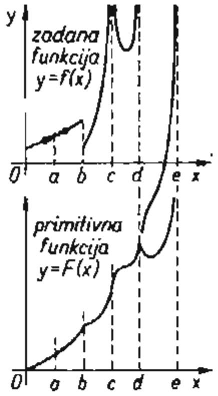
Teorem o postojanju primitivne funkcije. Za svaku funkciju koja je neprekinuta u nekom suvislom području postoji primitivna funkcija, koja je također neprekinuta u tom području. Funkcija koja ima prekinutosti za pojedine vrijednosti x ima primitivnu funkciju, koja je ili neprekinuta ili ima prekinutost za iste vrijednosti x*.

Primjeri:

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad F(x) = 3\sqrt[3]{x};$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad F(x) \quad -\dfrac{1}{x}.$

U oba primjera funkcija $f(x)$ ima prekinutost za $x = 0$, ali funkcija $F(x) = 3\sqrt[3]{x}$ je neprekinuta, a $F(x) = -\dfrac{1}{x}$ ima također prekinutost za $x = 0$.



Sl. 301

Tok grafa primitivne funkcije $F(x)$ u različitim tačkama prekinutosti dane funkcije $f(x)$ vidi na sl. 301. U slučaju uklonjive (a) ili konačne (b) prekinutosti $f(x)$ je primitivna i neprekinuta; u slučaju pak neizmjerne prekinutosti, primitivna $f(x)$ može biti neprekinuta [krivulja $F(x)$ ima tačku infleksije (c) ili šiljak (d) s vertikalnom tangentom] ili ima također prekinutost (e). Analitički uvjet toga, kakav slučaj nastupa, vidi na str. 469 do 472.

Neodređeni integral. Opći izraz $F(x) + C$ za sve primitivne funkcije od zadane funkcije $f(x)$ nazivamo neodređenim integralom funkcije $f(x)$ ili diferencijala $f(x)\,\mathrm{d}x$. Oznaka je:

$$F(x) + C = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

($\int$ — *znak integrala*, $f(x)$ — integrand ili podintegralna funkcija, $f(x)\,\mathrm{d}x$ — *podintegralni izraz*).

Za primitivnu funkciju $F(x)$ može biti uvijek uzet određeni integral (vidi str. 452) s konstantnom (po volji odaberivom) donjom granicom i varijabilnom gornjom granicom.

Integrali elementarnih funkcija nisu uvijek elementarne funkcije. Na str. 385 do 401 izloženi su postupci za računanje integrala (postupci *integriranja*) onih jednostavnih funkcija koje imaju elementarne primitivne funkcije, a rezultati integriranja sabrani su u tablici na str. 402 do 449**.

* Vidi napomenu na predašnjoj stranici.

** U daljnjem je izraz »primitivna« zamijenjen s riječi »integral«, ali u tablicama integrala izostavljena je po volji odaberiva konstanta C.

Ako integral nije elementarna funkcija, tada u slučaju potrebe (teoretskog interesa ili česte praktičke primjene) za takvu funkciju sastavljamo tablicu njenih vrijednosti: takvim specijalnim funkcijama (za koje je po volji odaberiva konstanta određena time što je fiksno odabrana donja granica integrala) često se daju specijalni nazivi, na primjer:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} = \mathrm{li}\,(x) \text{ (»integralni logaritam«)},$$

$$\int_0^{\sin\varphi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = F(k, \varphi) \text{ (»eliptički integral I vrste«)*}$$

Ako se funkcija elementarno ne može integrirati ili je integracija komplicirana, često podintegralnu funkciju razvijamo u red (vidi str. 371) koji (u slučaju njegove jednolike konvergencije, vidi str. 342) integriramo član po član. Za približno integriranje možemo zamijeniti funkciju s polinomom (vidi str. 667)**.

2. OPĆA PRAVILA INTEGRIRANJA

Osnovni integrali. Formule za integriranje, dobivene kao obrat osnovnih formula diferenciranja (str. 353) sabrane su u tablici na str. 386. Na takve integrale nastojimo dovesti zadani integral pomoću algebarskih ili trigonometrijskih transformacija ili primjenom pravila integriranja.

Osnovna pravila integriranja su svojstva neodređenih integrala koja omogućuju da pretvorimo integral zadane funkcije u integral drugih funkcija:

1) *Konstantni faktor* možemo izlučiti pred znak integrala:

$$\int a f(x)\,\mathrm{d}x = a \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2) *Integral sume* (*razlike*) jednak je sumi (odnosno razlici) pojedinih članova:

$$\int (u + v - w)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}x + \int v\,\mathrm{d}x - \int w\,\mathrm{d}x^{***}.$$

3) *Pravilo substitucije:* ako je $x = \varphi(t)$, tada je:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

4) *Parcijalna integracija*

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u^{****}.$$

* O eliptičkim integralima vidi na str. 397.

** O grafičkom integriranju tj. konstrukciji grafa primitivne funkcije iz grafa zadane funkcije, vidi na str. 458.

*** u, v, w su funkcije od x.

**** u, v su funkcije od x.

Tablica osnovnih integrala

(Konstanta integracije je ovdje, a i u drugim tablicama, izostavljena)

Potencije	Eksponencijalne funkcije
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	$\int e^x \, dx = e^x$
$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}$
Trigonometrijske funkcije	Hiperbolne funkcije
$\int \sin x \, dx = -\cos x$	$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x$
$\int \cos x \, dx = \sin x$	$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x$
$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \cos x^*$	$\int \operatorname{th} x \, dx = \ln \operatorname{ch} x^*$
$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln \sin x^*$	$\int \operatorname{cth} x \, dx = \ln \operatorname{sh} x^*$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$
Razlomljene racionalne funkcije	Iracionalne funkcije
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Ar\,th} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}^* \quad (\text{za } \lvert x \rvert < a)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{Ar\,sh} \frac{x}{a} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)^*$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar\,cth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}^* \quad (\text{za } \lvert x \rvert > a)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{Ar\,ch} \frac{x}{a} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)^*$

* U svim formulama u kojima u sastav primitivne funkcije ulazi izraz koji sadrži $\ln f(x)$, treba ga razumjeti kao $\ln \lvert f(x) \rvert$; znak apsolutne vrijednosti je radi jednostavnosti izostavljen.

Opći postupci pri računanju integrala. Ne može se dati opće pravilo za integriranje neke elementarne funkcije; tehnika integriranja stiče se pokusima. U idućim paragrafima sistematski su razmotreni načini integriranja jednostavnijih vrsti elementarnih funkcija; na str. 402 do 449 su tablice integrala u kojima možemo potražiti zadani integral ili onaj blizak zadanom.

Od općih postupaka koji se najčešće primjenjuje pri integriranju možemo navesti ove:

1) Algebarskim ili trigonometrijskim pretvorbama izražavamo podintegralnu funkciju kao sumu nekoliko funkcija, te rastavljamo integral na sumu integrala.

Primjeri:

$$\int (x+3)^2 (x^2+1) \, dx = \int (x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9) \, dx = \frac{x^5}{5} + \frac{3}{2}x^4 + \frac{10}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + C.$$

$$\int \sin 2x \cos x \, dx = \int \frac{1}{2} (\sin 3x + \sin x) \, dx = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x + C.$$

2) Ako je poznat (na primjer iz tablica) $\int f(x) \, dx = F(x)$, tada je:

$$\int f(ax) \, dx = \frac{1}{a} F(ax) + C, \qquad \int f(x+b) \, dx = F(x+b) + C,$$

$$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

Primjeri: $\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C,$

$$\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C, \qquad \int \frac{dx}{1 + (x+a)^2} = \operatorname{arc\,tg}(x+a) + C.$$

3) Ako je podintegralni izraz razlomak, kojemu je brojnik diferencijal nazivnika, tada je integral jednak logaritmu nazivnika:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln f(x) + C^*.$$

Primjer: $\int \frac{2x+3}{x^2 + 3x - 5} \, dx = \ln (x^2 + 3x - 5) + C.$

* Vidi napomenu na prethodnoj stranici.

3. INTEGRIRANJE RACIONALNIH FUNKCIJA

Integrali racionalnih funkcija u v i j e k se mogu izraziti elementarnim funkcijama.

Opća pravila. *Cijela racionalna funkcija (polinom)* integrira se neposredno:

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)\,dx =$$

$$= \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_nx + C.$$

Razlomljena racionalna funkcija $\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx$ [gdje su $Q(x)$ i $P(x)$ dva polinoma m-tog i n-tog stupnja] algebarski se pretvara u oblik koji je podesan za integraciju ovako:

1) Skratimo razlomak, tako da polinomi $Q(x)$ i $P(x)$ više nemaju zajedničkih faktora.

2) Ako je $m \geqslant n$, tada dijeljenjem $Q(x)$ sa $P(x)$ dobivamo cijeli dio razlomka (vidi str. 144), koji se integrira kao polinom, pa ostaje za integriranje još ostatak koji je pravi razlomak sa $m < n$.

3) Nazivnik $P(x)$ rastavljamo u linearne i kvadratne faktore (vidi str. 159):

$$P(x) = a_0(x-\alpha)^k(x-\beta)^l \ldots (x^2+px+q)^r(x^2+p'x+q')^s \ldots,$$

gdje je:

$$\frac{p^2}{4} - q < 0, \quad \frac{p'^2}{4} - q' < 0, \ldots$$

4) Koeficijent a_0 u nazivniku stavljamo pred integral.

5) Kraćenjem dobiveni pravi razlomak kojemu je nazivnik rastavljen na proste faktore, pretvaramo u sumu parcijalnih razlomaka (vidi str. 145), koje lako integriramo. Pri tome mogu nastupiti četiri slučaja:

1) Svi su korijeni nazivnika *realni* i *jednostruki*:

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda).$$

Rastav je oblika: $\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \ldots + \frac{L}{x-\lambda}$,

gdje je:

$$A = \frac{Q(\alpha)}{P'(\alpha)}, \quad B = \frac{Q(\beta)}{P'(\beta)}, \quad \ldots, \quad L = \frac{Q(\lambda)}{P'(\lambda)}^{*}.$$

---

* Brojevi $A, B, C, \ldots, L$ mogu se odrediti i metodom neodređenih koeficijenata (vidi na str. 146).

Integrira se po formuli

$$\int \frac{A\,dx}{x-\alpha} = A\ln(x-\alpha) \quad \text{itd.}$$

Primjer: $I = \int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x}$; $\quad \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$;

$$A = \frac{Q(0)}{P'(0)} = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=0} = -\frac{3}{2},$$

$$B = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=1} = \frac{5}{3}, \quad C = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=-2} = -\frac{1}{6},$$

$$I = \int \left(\frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+2}\right) dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln x + \frac{5}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x+2) + \ln C_1 = \ln \frac{C_1 (x-1)^{5/3}}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}}.$$

2) Svi su korijeni nazivnika *realni*; između njih ima *višestrukih:*

$$P(x) = (x-\alpha)^l(x-\beta)^m \ldots$$

Rastav je oblika:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_l}{(x-\alpha)^l} +$$

$$+ \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-\beta)^m} + \ldots$$

Konstante $A_1, A_2, \ldots, A_l, B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots$ izračunavamo metodom neodređenih koeficijenata (vidi str. 146); integriramo po formulama:

$$\int \frac{A_1\,dx}{x-\alpha} = A_1\ln(x-\alpha), \quad \int \frac{A_k\,dx}{(x-\alpha)^k} = -\frac{A_k}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} \quad (k > 1).$$

Primjer:

$$I = \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx; \quad \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}.$$

Metoda neodređenih koeficijenata daje jednadžbe:

$$A + B_1 = 1, \qquad -3A - 2B_1 + B_2 = 0, \qquad 3A + B_1 - B_2 + B_3 = 0,$$

$-A = 1$, odakle dobivamo:

$$A = -1, \quad B_1 = 2, \quad B_2 = 1, \quad B_3 = 2;$$

$$I = \int \left[-\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right] dx =$$

$$= -\ln x + 2\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C =$$

$$= \ln\frac{(x-1)^2}{x} - \frac{x}{(x-1)^2} + C.$$

3) Među korijenima nazivnika ima *jednostrukih kompleksnih korijena:*

$$P(x) = (x-\alpha)^l (x-\beta)^m \ldots (x^2+px+q)(x^2+p'x+q') \ldots,$$

pri čemu je $\frac{p^2}{4} < q, \quad \frac{p'^2}{4} < q', \ldots$

Rastav je oblika:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_l}{(x-\alpha)^l} +$$

$$+ \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-\beta)^m} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{Cx+D}{x^2+px+q} + \frac{Ex+F}{x^2+p'x+q'} + \ldots$$

Konstante se izračunavaju po metodi neodređenih koeficijenata (vidi str. 146).

Izraze integriramo $\frac{Cx+D}{x^2+px+q}$ po formuli:

$$\int \frac{(Cx+D)\,dx}{x^2+px+q} = \frac{C}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{D - \frac{Cp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}},$$

Primjer:

$$I = \int \frac{4\,dx}{x^3+4x}; \quad \frac{4}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Metoda neodređenih koeficijenata daje jednadžbe:

$$A + C = 0, \quad D = 0, \quad 4A = 4,$$

odakle je:

$$A = 1, \qquad C = -1, \qquad D = 0;$$

$$I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4} \right) dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \ln C_1 = \ln\frac{C_1 x}{\sqrt{x^2+4}}$$

(u danom slučaju nema člana s arkus-tangensom).

4) Nazivnik ima *višestrukih kompleksnih korijena:*

$$P(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \ldots (x^2+px+q)^m (x^2+p'x+q')^n \ldots$$

Rastav je oblika:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} +$$

$$+ \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} +$$

$$+ \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m} +$$

$$+ \frac{E_1x+F_1}{x^2+p'x+q'} + \frac{E_2x+F_2}{(x^2+p'x+q')^2} + \ldots + \frac{E_nx+F_n}{(x^2+p'x+q')^n} + \ldots$$

Konstante ćemo izračunati po metodi neodređenih koeficijenata (vidi str. 146).

Izraze integriramo $\frac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m}$ ovako: Pišemo brojnik u obliku:

$$C_mx + D_m = \frac{C_m}{2}(2x+p) + \left(D_m - \frac{C_m p}{2} \right).$$

Traženi integral raspada se na dva sumanda. Prvi od njih integriramo neposredno:

$$\int \frac{C_m}{2} \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^m} = -\frac{C_m}{2(m-1)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

a drugi (bez koeficijenta) po formuli za sniženje stupnja:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \frac{x+\frac{p}{2}}{2(m-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)(x^2+px+q)^{m-1}} +$$

$$+ \frac{2m-3}{2(m-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}. \quad (*)$$

Primjer:

$$I=\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x;$$

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+1)^2}.$$

Metoda neodređenih koeficijenata daje sistem jednadžbi:

$$A+C_1=0,\qquad -2C_1+D_1=0,\qquad 2A+C_1-2D_1+C_2=2,$$
$$-2C_1+D_1-2C_2+D_2=2,\qquad A-2D_1-2D_2=13,$$

odakle je:

$$A=1,\ C_1=-1,\quad D_1=-2,\quad C_2=-3,\quad D_2=-4$$

i: $$I=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\right)dx=\ln(x-2)-$$
$$-\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+2\,\mathrm{arc\,tg}\,x\right]-\left[-\frac{3}{2(x^2+1)}+\int\frac{4\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}\right].$$

Prema formuli ($\star$) je:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x,$$

odakle konačno dobivamo:

$$I=\frac{3-4x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\,\mathrm{arc\,tg}\,x+C.$$

Odvajanje racionalnog dijela integrala (*metoda Ostrogradskog*) Integral razlomljene racionalne funkcije elementarna je funkcija, koja je suma *racionalnog dijela* (tj. nekog algebarskog razlomka) i *transcendentnog dijela* (koji sadrži logaritme i arkus-tangense). Pri tome se racionalni dio pojavljuje u drugom i četvrtom razmatranom slučaju, tj. samo tada, kad nazivnik podintegralne funkcije ima višestrukih korijena (realne ili kompleksne). Racionalni dio možemo odrediti pomoću *metode Ostrogradskog* bez integriranja i svesti integriranje na slučajeve u kojima nazivnik ima samo jednostavne korijene. Način se sastoji u ovom:

Nazivnik $P(x)$ podintegralne funkcije $\frac{Q(x)}{P(x)}$ (p r a v o g razlomka koji se ne da više kratiti, vidi str. 389) ima oblik:

$$P(x)=(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\ldots(x^2+px+q)^m(x^2+p'x+q')^n\ldots$$

Njega možemo rastaviti na dva faktora $P_1(x)$ i $P_2(x)$, gdje je $P_2(x)$ produkt svih faktora koji se javljaju u $P(x)$ uzetih jednostruko:

$$P_2(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')\ldots,$$

i zbog toga:

$$P_1(x)=(x-\alpha)^{k-1}(x-\beta)^{l-1}\ldots(x^2+px+q)^{m-1}(x^2+p'x+q')^{n-1}\ldots^*$$

Dani integral možemo predočiti u obliku:

$$\int\frac{Q(x)}{P(x)}\mathrm{d}x=\frac{Q_1(x)}{P_1(x)}+\int\frac{Q_2(x)}{P_2(x)}\mathrm{d}x \tag{A}$$

(*formula Ostrogradskog*), gdje su $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ poznati polinomi stupnjeva r, s i t, zatim $Q(x)$, poznat polinom stupnja ne višeg od $r-1$, a $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ poznati polinomi stupnja ne višeg od $s-1$, odnosno $t-1$:

$$Q_1(x)=ax^{s-1}+bx^{s-2}+\ldots+d,\quad Q_2(x)=ex^{t-1}+fx^{t-2}+\ldots+h.$$

Diferenciranje izraza (A) daje:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\left[\frac{Q_1(x)}{P_1(x)}\right]'+\frac{Q_2(x)}{P_2(x)}. \tag{B}$$

Nepoznati koeficijenti polinoma $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ određuju se iz jednadžbe (B) pomoću metode neodređenih koeficijenata.

Ako znamo polinome $Q_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_2(x)$, $P_2(x)$, svodimo integraciju danog integrala na integral $\int\frac{Q_2(x)}{P_2(x)}\mathrm{d}x$, u kojemu nazivnik podintegralne funkcije nema višestrukih korijena.

---

* Pri određivanju polinoma $P_1(x)$ i $P_2(x)$ nema teškoća ako znamo rastaviti $P(x)$ na faktore, tj. ako su određeni svi korijeni jednadžbe $P(x)=0$. Ali $P_1(x)$ i $P_2(x)$ možemo odrediti i da ne rješavamo jednadžbe: za to je dovoljno diferencirati polinom $P(x)$ i naći najveću zajedničku mjeru polinoma $P(x)$ i $P'(x)$ (vidi str. 143). Najveća zajednička mjera je $P_1(x)$, a $P_2(x)=\frac{P(x)}{P_1(x)}$.

Primjer: $\displaystyle\int\frac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$

Ovdje je $P_1=P_2=(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1$, $P=(x^3+x^2+x+1)^2$, $Q=x^4+x^3+4x^2+3x+2$, $Q_1=ax^2+bx+c$, $Q_2=ex^2+fx+g$.

Formula (B) daje:

$$\frac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x^3+x^2+x+1)^2}=\left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]'+\frac{ex^2+fx+g}{x^3+x^2+x+1},$$

odakle je:

$$x^4+x^3+4x^2+3x+2=(2ax+b)(x^3+x^2+x+1)-$$
$$-(ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1)+(ex^2+fx+g)(x^3+x^2+x+1).$$

Izjednačenjem koeficijenata jednako visokih potencija od x u oba dijela dobivamo sistem jednadžbi: za a, b, c, d, e, f, g: 1) $e=0$, 2) $-a+f=1$, 3) $-2b+f+g=1$, 4) $a-b-3c+f+g=4$, 5) $2a-2c+f+g=3$, 6) $b-c+g=2$ [u jednadžbama 2) do 6) koeficijent $e=0$ je izostavljen]; odatle dobivamo $a=-\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{4}$, $c=-1$, $e=0$, $f=\frac{3}{4}$, $g=\frac{3}{4}$.

Prema tome je:

$$\int\frac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{4}\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+\frac{3}{4}\int\frac{x+1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$$

Posljednji integral jednak je arc tg x.

Tablice integrala racionalnih funkcija vidi na str. 402 do 411.

4. INTEGRIRANJE IRACIONALNIH FUNKCIJA

Integriranje iracionalnih funkcija ne daje uvijek elementarne funkcije. U jednostavnim slučajevima integrali iracionalnih funkcija mogu se svesti na integrale racionalnih funkcija pomoću ovih supstitucija:

Integral*	Supstitucija
$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)dx$	$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}=t$
$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}},\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+e}},\ldots\right)dx$	$\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+e}}=t$, gdje je r najmanji zajednički višekratnik brojeva $n, m, \ldots$
$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$	Jedna od triju Eulerovih supstitucija:
1) ako je $a>0$**	$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x$
2) ako je $c>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$
3) ako trinom ax^2+bx+c ima različite realne korijene: $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$	$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$

Integral $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ može biti sveden i na jedan od ova tri oblika:

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx,\quad \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,\quad \int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,$$

budući da kvadratni trinom ax^2+bx+c uvijek može biti predočen u obliku sume ili razlike dvaju kvadrata.

Primjeri:

1) $4x^2+16x+17=4\left(x^2+4x+4+\frac{1}{4}\right)=$

$$=4\left[(x+2)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=4\left[x_1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right],\ \text{gdje je } x_1=x+2;$$

2) $x^2+3x+1=x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{5}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=$

$$=x_1^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2,\ \text{gdje je } x_1=x+\frac{3}{2};$$

---

* Simbol R označuje racionalnu funkciju izraza na koje se odnosi. Brojevi $n, m, \ldots$ su cijeli.

** Ako je $a<0$ i trinom ax^2+bx+c ima kompleksne korijene, tada podintegralna funkcija ne postoji ni za koju vrijednost x, jer je $\sqrt{ax^2+bx+c}$ kompleksan broj za sve realne vrijednosti od x. Integriranje nas u tom slučaju ne zanima.

3) $-x^2 + 2x = 1 - x^2 + 2x - 1 = 1^2 - (x-1)^2 = 1^2 - x_1^2$, gdje je $x_1 = x - 1$.

Ti se integrali računaju pomoću supstitucija:

Integral	Supstitucija
$\int R\left(x, \sqrt{x^2+\alpha^2}\right)\mathrm{d}x$	$x = \alpha\,\mathrm{sh}\,t$ ili $x = \alpha\,\mathrm{tg}\,t$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2-\alpha^2}\right)\mathrm{d}x$	$x = \alpha\,\mathrm{ch}\,t$ ili $x = \alpha\,\mathrm{sc}\,t$
$\int R\left(x, \sqrt{\alpha^2-x^2}\right)\mathrm{d}x$	$x = \alpha\sin t$ ili $x = \alpha\cos t$

Navedene supstitucije dovode do integrala racionalnih izraza, koji sadrže trigonometrijske ili hiperbolne funkcije (vidi str. 398 ili 401).

Integriranje binomnih diferencijala. *Binomnim diferencijalom* nazivamo izraz:

$$x^m (a + bx^n)^p \,\mathrm{d}x,$$

u kojem su a, b po volji uzeti realni brojevi, a m, n, p po volji uzeti racionalni brojevi (pozitivni ili negativni).

Teorem Čebiševa. Integral:

$$\int x^m (a + bx^n)^p \,\mathrm{d}x \qquad (*)$$

može biti izražen elementarnim funkcijama samo u ova tri slučaja:

1) p je *cio broj.* Izraz $(a + bx^n)^p$ razvit ćemo po Newtonovoj binomnoj formuli (vidi str. 186), a podintegralna funkcija nakon rješenja zagrada je suma članova oblika cx^k, koje lako integriramo.

2) $\dfrac{m+1}{n}$ je *cio broj.* Integral $(*)$ svodimo na integral racionalne funkcije supstitucijom $t = \sqrt[r]{a + bx^n}$, gdje je r nazivnik razlomka p.

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ je *cio broj.* Integral $(*)$ svodimo na integral racionalne funkcije supstitucijom $t = \sqrt[r]{\dfrac{a+bx^n}{x^n}}$, gdje je r nazivnik razlomka p.

Primjeri:

$$1)\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-1/2}(1 + x^{1/4})^{1/3}\,\mathrm{d}x;$$

$$m = -\frac{1}{2},\quad n = \frac{1}{4},\quad p = \frac{1}{3},\quad \frac{m+1}{n} = 2 \quad (\text{slučaj 2}).$$

Supstitucija: $t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$, $x = (t^3-1)^4$, $\mathrm{d}x = 12\,t^2(t^3-1)^3\,\mathrm{d}t$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 12\int (t^6 - t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{7}t^4(4t^3 - 7) + C.$$

$$2)\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^3}} = \int x^3(1+x^3)^{-1/4}\,\mathrm{d}x;$$

$$m = 3,\quad n = 3,\quad p = -\frac{1}{4};\quad \frac{m+1}{n} = \frac{4}{3},\quad \frac{m+1}{n} + p = \frac{13}{12};$$

niti jedan od uvjeta 1), 2) i 3) nije ispunjen, tako da integral nije elementarna funkcija.

Eliptički integrali. Integrali oblika:

$$\left.\begin{array}{l} \int R\left(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)\mathrm{d}x \\ \text{i} \\ \int R\left(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)\mathrm{d}x \end{array}\right\} \quad (\mathrm{A})$$

u pravilu se ne mogu izraziti pomoću elementarnih funkcija. U slučajevima kada ti integrali nisu elementarne funkcije, oni se nazivaju *eliptičkim**.

Integrali tipova (A), koji se ne mogu izraziti pomoću elementarnih funkcija, mogu se izvjesnim pretvorbama svesti na elementarne funkcije i integrale ovih triju tipova:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\quad \int \frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \end{array}\right\} \quad (0 < k < 1). \quad (\mathrm{B})$$

* U slučajevima kada se integrali (A) mogu izraziti pomoću elementarnih funkcija, nazivaju se pseudoeliptičkim.

Supstitucijom $t = \sin\varphi$ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ integrali (B) mogu biti svedeni na *Legendrov oblik:*

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \quad \textit{(eliptički integral prve vrste)},$$

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi \quad \textit{(eliptički integral druge vrste)},$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + h\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \quad \textit{(eliptički integral treće vrste)}.$$

Pripadne određene integrale s donjom granicom nula označujemo ovim simbolima:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I)} \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = F(k,\varphi),\quad \text{II)} \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\, d\psi = E(k,\varphi). \\ \text{III)} \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1 + h\sin^2\psi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = \Pi(h, k, \varphi) \end{array}\right\} (k < 1).$$

Ti se integrali nazivaju *nepotpunim eliptičkim integralima* 1, 2 i 3-ćeg reda. Za $\varphi = \frac{\pi}{2}$ integrale I i II nazivamo *potpunim eliptičkim integralima* i označujemo ih sa:

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}},$$

$$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\, d\psi.$$

Tablicu vrijednosti nepotpunih i potpunih eliptičkih integrala 1 i 2 vrste vidi na str. 86 i 87.

Tablice integrala iracionalnih funkcija vidi na str. 412 do 427.

5. INTEGRIRANJE TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Integral oblika: $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$* (A)

uvijek možemo svesti na integral racionalne funkcije s dalje navedenom »univerzalnom supstitucijom«, a u posebnim slučajevima i jednostavnijim postupcima.

* Simbol R označuje racionalnu funkciju izrazâ na koje se odnosi.

Univerzalna supstitucija za integral (A)

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \text{odakle je}\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Na primjer:

$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)}\, dx = \int \frac{\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(t + 2 + \frac{1}{t}\right) dt = \frac{t^2}{4} + t + \frac{1}{2}\ln t + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{4} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Ako se u podintegralnoj funkciji integrala (A), $\sin x$ i $\cos x$ nalaze samo u parnim potencijama, integral se jednostavnije svodi na integral racionalne funkcije supstitucijom $t = \operatorname{tg} x$.

Pojednostavnjene metode za slučajeve koje često susrećemo:

1) $\int R(\sin x)\cos x\, dx$. Supstitucija $t = \sin x$, $\cos x\, dx = dt$.

2) $\int R(\cos x)\sin x\, dx$. Supstitucija $t = \cos x$, $\sin x\, dx = -dt$.

3) $\int \sin^n x\, dx$.

Ako je n neparan ($n = 2m + 1$), tada je:

$$\int \sin^n x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)^m \sin x\, dx = -\int (1 - t^2)^m dt, \text{ gdje je } t = \cos x.$$

Ako je n paran ($n = 2m$), tada je:

$$\int \sin^n x\, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right] dx = \frac{1}{2^{m+1}}\int (1 - \cos t)^m dt,$$

gdje je $t = 2x$.

Eksponent potencije snizuje se na polovicu; riješivši zagrade izraza $(1 - \cos t)^m$, integriramo svaki član (vidi slučaj 4).

4) $\int \cos^n x\,dx$.

Ako je n neparan ($n = 2m + 1$), tada je:

$\int \cos^n x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)^m \cos x\,dx = \int (1 - t^2)^m dt$, gdje je $t = \sin x$.

Ako je n paran ($n = 2m$), tada je:

$$\int \cos^n x\,dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right]^m dx = \frac{1}{2^{m+1}}\int (1 + \cos t)^m\,dt,$$

gdje je $t = 2x$.

Eksponent potencije snizuje se na polovicu; riješivši zagrade, integriramo svaki član.

5) $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$ svodi se na slučaj 1) ili 2), ako je jedan od brojeva m ili n neparan.

Primjeri: $\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx = \int \sin^2 x\,(1 - \sin^2 x)^2 \cos x\,dx =$
$= \int t^2(1 - t^2)^2\,dt$, gdje je $t = \sin x$; $\quad \displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$,
gdje je $t = \cos x$.

Ako su oba broja m i n parna, tada eksponenti mogu biti sniženi na polovicu, analogno slučajevima 3) i 4). Pri tome primjenjujemo formule:

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Primjer: $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x\,dx =$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,(1 + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx +$$

$$+ \frac{1}{16}\int (1 - \cos 4x)\,dx = \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + C.$$

6) $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,(\operatorname{sc}^2 x - 1)\,dx =$

$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx \text{ itd.}$$

Ponavljanjem toga postupka integral svedemo uz parni n na integral $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln \cos x\,dx$.

7) $\int \operatorname{ctg}^n x\,dx$ integrira se analogno slučaju 6).

Tablice integrala trigonometrijskih funkcija vidi na str. 427 do 441.

6. INTEGRIRANJE DRUGIH TRANSCENDENTNIH FUNKCIJA

Eksponencijalne funkcije. Integrale tipa:

$$\int R\,(e^{mx}, e^{nx}, \ldots, e^{px})\,dx,$$

gdje su $m, n, \ldots, p$ racionalni brojevi, svodimo supstitucijom $t = e^x$ na integral $\displaystyle\int \frac{1}{t} R\,(t^m, t^n, \ldots, t^p)\,dt$; posljednji integral svodi se na integral racionalne funkcije (vidi str. 388) uvođenjem supstitucije $z = \sqrt[r]{t}$, gdje je r najmanji zajednički višekratnik nazivnika razlomaka $m, n, \ldots, p$.

Hiperbolne funkcije. Integrale koji sadrže $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$, obično računamo zamjenjujući hiperbolne funkcije s eksponencijalnim (str. 221 i 222). Slučajeve $\int \operatorname{sh}^n x\,dx$, $\int \operatorname{ch}^n x\,dx$, $\int \operatorname{sh}^n x \operatorname{ch}^m x\,dx$ koji su najčešći, integriramo analogno kao dotične integrale s trigonometrijskim funkcijama (str. 398 do 400).

Primjena parcijalne integracije. Funkcije koje sadrže logaritme, ciklometrijske funkcije i area-funkcije, produkte x^m sa $\ln x$, e^{ax} sa $\sin ax$ ili $\cos ax$ integriraju se uglavnom primjenom (jednostrukom ili višestrukom) formula za parcijalno integriranje (str. 385). U nekim slučajevima primjena višestruke parcijalne integracije dovodi do početnog integrala, pa se tada računanje tog integrala svodi na rješenje algebarske jednadžbe: tako se računaju na primjer integrali $\int e^{ax} \cos bx\,dx$, $\int e^{ax} \sin bx\,dx$ (kod tih integrala provodi se dvostruka parcijalna integracija, pri čemu treba kao faktor u oba slučaja uzeti istu funkciju, eksponencijalnu ili trigonometrijsku).

U slučajevima $\int P(x)\,e^{ax}\,dx$, $\int P(x) \sin bx\,dx$, $\int P(x) \cos bx\,dx$, gdje je $P(x)$ polinom, također primjenjujemo formulu parcijalne integracije.

Tablice integrala transcendentnih funkcija vidi na str. 441 do 449.

7. TABLICA NEODREĐENIH INTEGRALA

Opće upute

1. Konstanta integracije je izostavljena svugdje, osim u slučajevima kada integral može biti predočen u različitim oblicima, s različitim konstantama.
2. U svim formulama u kojima je u sastavu primitivne funkcije izraz koji sadrži $\ln f(x)$, treba ga razumjeti kao $\ln |f(x)|$; oznaka za apsolutnu vrijednost svuda je zbog jednostavnosti izostavljena.
3. U slučajevima, u kojima je primitivna funkcija izražena u obliku reda potencije, nije moguće izraziti je elementarnim funkcijama.

Integrali racionalnih funkcija

Integrali sa $ax + b$

Oznaka: $X = ax + b$

1) $\int X^n \, dx = \frac{1}{a(n+1)} X^{n+1}$ ($n \neq -1$; za $n = -1$, v. br. 2).

2) $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} \ln X$.

3) $\int x X^n \, dx = \frac{1}{a^2(n+2)} X^{n+2} - \frac{b}{a^2(n+1)} X^{n+1}$

($n \neq -1$, $\neq -2$; pri $n = -1$, $= -2$, v. br. 5 i 6).

4) $\int x^m X^n dx = \frac{1}{a^{m+1}} \int (X-b)^m X^n \, dX$ [primjenjuje se za $m < n$ ili kada je m cio broj, a n razlomak; u tim slučajevima $(X-b)^m$ razvijemo prema binomnoj formuli, str. 186]. ($n \neq -1$, $\neq -2$, $\ldots$, $\ldots$, $\neq -m$).

5) $\int \frac{x \, dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln X$.

6) $\int \frac{x \, dx}{X^2} = \frac{b}{a^2 X} + \frac{1}{a^2} \ln X$.

7) $\int \frac{x \, dx}{X^3} = \frac{1}{a^2} \left(-\frac{1}{X} + \frac{b}{2X^2} \right)$.

8) $\int \frac{x \, dx}{X^n} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{-1}{(n-2) X^{n-2}} + \frac{b}{(n-1) X^{n-1}} \right)$ ($n \neq 1$, $\neq 2$).

9) $\int \frac{x^2 \, dx}{X} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{1}{2} X^2 - 2bX + b^2 \ln X \right)$.

10) $\int \frac{x^2 \, dx}{X^2} = \frac{1}{a^3} \left(X - 2b \ln X - \frac{b^2}{X} \right)$.

11) $\int \frac{x^2 \, dx}{X^3} = \frac{1}{a^3} \left(\ln X + \frac{2b}{X} - \frac{b^2}{2X^2} \right)$.

12) $\int \frac{x^2 \, dx}{X^n} = \frac{1}{a^3} \left[\frac{-1}{(n-3) X^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2) X^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1) X^{n-1}} \right]$

($n \neq 1$, $\neq 2$, $\neq 3$).

13) $\int \frac{x^3 \, dx}{X} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{X^3}{3} - \frac{3bX^2}{2} + 3b^2 X - b^3 \ln X \right)$.

14) $\int \frac{x^3 \, dx}{X^2} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{X^2}{2} - 3bX + 3b^2 \ln X + \frac{b^3}{X} \right)$.

15) $\int \frac{x^3 \, dx}{X^3} = \frac{1}{a^4} \left(X - 3b \ln X - \frac{3b^2}{X} + \frac{b^3}{2X^2} \right)$.

16) $\int \frac{x^3 \, dx}{X^4} = \frac{1}{a^4} \left(\ln X + \frac{3b}{X} - \frac{3b^2}{2X^2} + \frac{b^3}{3X^3} \right)$.

17) $\int \frac{x^3 \, dx}{X^n} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{-1}{(n-4) X^{n-4}} + \frac{3b}{(n-3) X^{n-3}} - \frac{3b^2}{(n-2) X^{n-2}} + \frac{b^3}{(n-1) X^{n-1}} \right]$ ($n \neq 1$, $n \neq 2$, $n \neq 3$, $n \neq 4$).

18) $\int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{b} \ln \frac{X}{x}$.

19) $\int \frac{dx}{xX^2} = -\frac{1}{b^2} \left(\ln \frac{X}{x} + \frac{ax}{X} \right)$.

20) $\int \frac{dx}{xX^3} = -\frac{1}{b^3} \left(\ln \frac{X}{x} + \frac{2ax}{X} - \frac{a^2 x^2}{2X^2} \right)$.

21) $\int \frac{dx}{xX^n} = -\frac{1}{b^n} \left[\ln \frac{X}{x} - \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i \frac{(-a)^i x^i}{i X^i} \right]$ ($n \geqslant 1$).

22) $\int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \frac{X}{x}$.

23) $\int \frac{dx}{x^2 X^2} = -a \left[\frac{1}{b^2 X} + \frac{1}{ab^2 x} - \frac{2}{b^3} \ln \frac{X}{x} \right]$.

24) $\int \frac{dx}{x^2 X^3} = -a \left[\frac{1}{2b^2 X^2} + \frac{2}{b^3 X} + \frac{1}{ab^3 x} - \frac{3}{b^4} \ln \frac{X}{x} \right]$.

25) $\int \frac{dx}{x^2 X^n} = -\frac{1}{b^{n+1}} \left[-\sum_{i=2}^{n} C_n^i \frac{(-a)^i x^{i-1}}{(i-1) X^{i-1}} + \frac{X}{x} - na \ln \frac{X}{x} \right]$ ($n \geqslant 2$).

26) $\int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{b^3} \left[a^2 \ln \frac{X}{x} - \frac{2aX}{x} + \frac{X^2}{2x^2} \right]$.

$$\boxed{X = ax + b}$$

27) $$\int \frac{dx}{x^3 X^2} = -\frac{1}{b^4}\left[3a^2 \ln\frac{X}{x} + \frac{a^3 x}{X} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{3aX}{x}\right].$$

28) $$\int \frac{dx}{x^3 X^3} = -\frac{1}{b^5}\left[6a^2 \ln\frac{X}{x} + \frac{4a^3 x}{X} - \frac{a^4 x^2}{2X^2} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{4aX}{x}\right].$$

29) $$\int \frac{dx}{x^3 X^n} = -\frac{1}{b^{n+2}}\left[-\sum_{i=3}^{n+1} C_{n+1}^{i} \frac{(-a)^i x^{i-2}}{(i-2) X^{i-2}} + \frac{a^2 X^2}{2x^2} - \frac{(n+1)aX}{x} + \frac{n(n+1)a^2}{2}\ln\frac{X}{x}\right] \quad (n \geqslant 3).$$

30) $$\int \frac{dx}{x^m X^n} = -\frac{1}{b^{m+n-1}} \sum_{i=0}^{m+n-2} C_{m+n-2}^{i} \frac{X^{m-i-1}(-a)^i}{(m-i-1)\, x^{m-i-1}}$$

[ako je nazivnik člana pod znakom Σ nula, takav član zamjenjujemo s ovim:

$$C_{m+n-2}^{n-1} (-a)^{m-1} \ln\frac{X}{x}\Big].$$

$$\boxed{\text{Oznaka: } \Delta = bf - ag}$$

31) $$\int \frac{ax+b}{fx+g}\,dx = \frac{ax}{f} + \frac{\Delta}{f^2}\ln(fx+g).$$

32) $$\int \frac{dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\ln\frac{fx+g}{ax+b} \quad (\Delta \neq 0).$$

33) $$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{b}{a}\ln(ax+b) - \frac{g}{f}\ln(fx+g)\right] \quad (\Delta \neq 0).$$

34) $$\int \frac{dx}{(ax+b)^2(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{ax+b} + \frac{f}{\Delta}\ln\frac{fx+g}{ax+b}\right) \quad (\Delta \neq 0).$$

35) $$\int \frac{x\,dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b}{(a-b)(b+x)} - \frac{a}{(a-b)^2}\ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$$

36) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b^2}{(b-a)(b+x)} + \frac{a^2}{(b-a)^2}\ln(a+x) + \frac{b^2-2ab}{(b-a)^2}\ln(b+x) \quad (a \neq b).$$

37) $$\int \frac{dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x}\right) + \frac{2}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$$

38) $$\int \frac{x\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x}\right) + \frac{a+b}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$$

39) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+x}\right) + \frac{2ab}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$$

Integrali sa $ax^2 + bx + c$

$$\boxed{\text{Oznake: } X = ax^2 + bx + c, \qquad \Delta = 4ac - b^2}$$

40) $$\int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \quad (\text{za } \Delta > 0).$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{Ar\,th}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}} \quad (\text{za } \Delta < 0).$$

41) $$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int\frac{dx}{X} \quad (\text{vidi br. 40}).$$

42) $$\int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{\Delta}\left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{\Delta X}\right) + \frac{6a^2}{\Delta^2}\int\frac{dx}{X} \quad (\text{vidi br. 40}).$$

43) $$\int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta X^{n-1}} + \frac{(2n-3)\,2a}{(n-1)\Delta}\int\frac{dx}{X^{n-1}}.$$

$$X = ax^2 + bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2$$

44) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a} \ln X - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

45) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{bx + 2c}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta} \int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

46) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X^n} = -\frac{bx + 2c}{(n-1)\,\Delta X^{n-1}} - \frac{b\,(2n-3)}{(n-1)\,\Delta} \int \frac{dx}{X^{n-1}}.$

47) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln X + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

48) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{(b^2 - 2ac)\,x + bc}{a\Delta X} + \frac{2c}{\Delta} \int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

49) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{X^n} = \frac{-x}{(2n-3)\,a X^{n-1}} + \frac{c}{(2n-3)\,a} \int \frac{dx}{X^n} - \frac{(n-2)\,b}{(2n-3)\,a} \int \frac{x\,dx}{X^n}$

(vidi br. 43 i 46).

50) $\displaystyle\int \frac{x^m dx}{X^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)\,a X^{n-1}} +$

$\displaystyle + \frac{(m-1)\,c}{(2n-m-1)\,a} \int \frac{x^{m-2}\,dx}{X^n} - \frac{(n-m)\,b}{(2n-m-1)\,a} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{X^n}$

($m \neq 2n-1$; za $m = 2n-1$ vidi br. 51).

51) $\displaystyle\int \frac{x^{2n-1} dx}{X^n} = \frac{1}{a} \int \frac{x^{2n-3}\,dx}{X^{n-1}} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{2n-3}\,dx}{X^n} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{2n-2}\,dx}{X^n}.$

52) $\displaystyle\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

53) $\displaystyle\int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2c\,(n-1)\,X^{n-1}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^n} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{x\,X^{n-1}}.$

54) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 X} = \frac{b}{2c^2} \ln \frac{X}{x^2} - \frac{1}{cx} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c}\right) \int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 40).

55) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^m X^n} = -\frac{1}{(m-1)\,cx^{m-1}X^{n-1}} - \frac{(2n+m-3)\,a}{(m-1)\,c} \int \frac{dx}{x^{m-2}X^n} -$

$\displaystyle - \frac{(n+m-2)\,b}{(m-1)\,c} \int \frac{dx}{x^{m-1}X^n}$ ($m > 1$).

56) $\displaystyle\int \frac{dx}{(fx+g)\,X} = \frac{1}{2\,(cf^2 - gbf + g^2a)} \left[f \ln \frac{(fx+g)^2}{X}\right] +$

$\displaystyle + \frac{2ga - bf}{2\,(cf^2 - gbf + g^2a)} \int \frac{dx}{X}$ (v. br. 40).

Integrali sa $a^2 \pm x^2$

Oznake:

$$X = a^2 \pm x^2, \; Y = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{a} \text{ za predznak »+«}, \\ \operatorname{Ar\,th} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{a+x}{a-x} \\ \qquad \text{za predznak »—« pri } |x| < a, \\ \operatorname{Ar\,cth} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+a}{x-a} \\ \qquad \text{za predznak »—« pri } |x| > a. \end{cases}$$

U slučaju dvostrukog predznaka u formuli, gornji predznak se odnosi na $X = a^2 + x^2$, a donji na $X = a^2 - x^2$.

57) $\displaystyle\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a}\,Y.$

58) $\displaystyle\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2a^2 X} + \frac{1}{2a^3}\,Y.$

59) $\displaystyle\int \frac{dx}{X^3} = \frac{x}{4a^2 X^2} + \frac{3x}{8a^4 X} + \frac{3}{8a^5}\,Y.$

60) $\displaystyle\int \frac{dx}{X^{n+1}} = \frac{x}{2na^2 X^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{X^n}.$

61) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X} = \pm \frac{1}{2} \ln X.$

62) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X^2} = \mp \frac{1}{2X}.$

63) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X^3} = \mp \frac{1}{4X^2}.$

$$X = a^2 \pm x^2,\quad Y = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{a} \text{ za predznak »+«} \\ \operatorname{Ar\,th} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{a+x}{a-x} \\ \qquad \text{za predznak »—« pri } |x| < a, \\ \operatorname{Ar\,cth} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+a}{x-a} \\ \qquad \text{za predznak »—« pri } |x| > a. \end{cases}$$

64) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X^{n+1}} = \mp \frac{1}{2nX^n}$ $\qquad (n \neq 0)$.

65) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{X} = \pm x \mp aY.$

66) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{X^2} = \mp \frac{x}{2X} \pm \frac{1}{2a} Y.$

67) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{X^3} = \mp \frac{x}{4X^2} \pm \frac{x}{8a^2X} \pm \frac{1}{8a^3} Y.$

68) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{X^{n+1}} = \mp \frac{x}{2nX^n} \pm \frac{1}{2n} \int \frac{dx}{X^n}$ $\qquad (n \neq 0)$.

69) $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{X} = \pm \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln X.$

70) $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2} \ln X.$

71) $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^2}{4X^2}.$

72) $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{X^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2n\,X^n}$ $\qquad (n > 1)$.

73) $\displaystyle\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a^2} \ln \frac{x^2}{X}.$

74) $\displaystyle\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2a^2X} + \frac{1}{2a^4} \ln \frac{x^2}{X}.$

75) $\displaystyle\int \frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{4a^2X^2} + \frac{1}{2a^4X} + \frac{1}{2a^6} \ln \frac{x^2}{X}.$

76) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^2x} \mp \frac{1}{a^3} Y.$

77) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^4x} \mp \frac{x}{2a^4X} \mp \frac{3}{2a^5} Y.$

78) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x}{4a^4X^2} \mp \frac{7x}{8a^6X} \mp \frac{15}{8a^7} Y.$

79) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^2x^2} \mp \frac{1}{2a^4} \ln \frac{x^2}{X}.$

80) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} \mp \frac{1}{2a^4X} \mp \frac{1}{a^6} \ln \frac{x^2}{X}.$

81) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{1}{a^6X} \mp \frac{1}{4a^4X^2} \mp \frac{3}{2a^8} \ln \frac{x^2}{X}.$

82) $\displaystyle\int \frac{dx}{(b+cx)X} = \frac{1}{a^2c^2 \pm b^2} \left[c \ln (b+cx) - \frac{c}{2} \ln X \mp \frac{b}{a} Y \right].$

Integrali sa $a^3 \pm x^3$

Oznaka: $a^3 \pm x^3 = X$; ako je u formuli dvostruki predznak, gornji predznak se odnosi na $X = a^3 + x^3$, a donji na $X = a^3 - x^3$.

83) $\displaystyle\int \frac{dx}{X} = \pm \frac{1}{6a^2} \ln \frac{(a \pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}.$

84) $\displaystyle\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{3a^3X} + \frac{2}{3a^3} \int \frac{dx}{X}$ $\qquad$ (v. br. 83).

85) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{6a} \ln \frac{a^2 \mp ax + x^2}{(a \pm x)^2} \pm \frac{1}{a\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}.$

$$\boxed{X = a^3 \pm x^3}$$

86) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{x^2}{3a^3X} + \frac{1}{3a^3}\int \frac{x\,dx}{X}$ (v. br. 85).

87) $\int \frac{x^2dx}{X} = \pm \frac{1}{3}\ln X.$

88) $\int \frac{x^2dx}{X^2} = \mp \frac{1}{3X}.$

89) $\int \frac{x^3dx}{X} = \pm x \mp a^3\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 83).

90) $\int \frac{x^3dx}{X^2} = \mp \frac{x}{3X} \pm \frac{1}{3}\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 83).

91) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{3a^3}\ln \frac{x^3}{X}.$

92) $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{3a^3X} + \frac{1}{3a^6}\ln \frac{x^3}{X}.$

93) $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^3x} \mp \frac{1}{a^3}\int \frac{x\,dx}{X}$ (vidi br. 85).

94) $\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x^2}{3a^6X} \mp \frac{4}{3a^6}\int \frac{x\,dx}{X}$ (vidi br. 85).

95) $\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^3x^2} \mp \frac{1}{a^3}\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 83).

96) $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{x}{3a^6X} \mp \frac{5}{3a^6}\int \frac{dx}{X}$ (vidi br. 83).

Integrali sa $a^4 + x^4$

97) $\int \frac{dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\ln \frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{ax\sqrt{2}}{a - x^2}.$

98) $\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}.$

99) $\int \frac{x^2dx}{a^4+x^4} = -\frac{1}{4a\sqrt{2}}\ln \frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} +$

$+ \frac{1}{2a\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}.$

100) $\int \frac{x^3dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4}\ln (a^4+x^4).$

Integrali sa $a^4 - x^4$

101) $\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3}\ln \frac{a+x}{a-x} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

102) $\int \frac{x\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^2}\ln \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$

103) $\int \frac{x^2dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a}\ln \frac{a+x}{a-x} - \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

104) $\int \frac{x^3dx}{a^4-x^4} = -\frac{1}{4}\ln (a^4-x^4).$

Neki slučajevi rastavljanja na parcijalne razlomke

105) $\frac{1}{(a+bx)(f+gx)} \equiv \frac{1}{fb-ag}\left(\frac{b}{a+bx} - \frac{g}{f+gx}\right).$

106) $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} \equiv \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c},$

gdje je $A = \frac{1}{(b-a)(c-a)}$, $B = \frac{1}{(a-b)(c-b)}$,

$C = \frac{1}{(a-c)(b-c)}.$

107) $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} \equiv \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} +$

$+ \frac{C}{x+c} + \frac{D}{x+d}$, gdje je $A = \frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}$,

$B = \frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)}$ itd.

108) $\frac{1}{(a+bx^2)(f+gx^2)} \equiv \frac{1}{fb-ag}\cdot\left(\frac{b}{a+bx^2} - \frac{g}{f+gx^2}\right).$

Integrali iracionalnih funkcija

Integrali sa $\sqrt{x}$ i $a^2 \pm b^2 x$

Oznake: $X = a^2 \pm b^2 x$, $Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{b\sqrt{x}}{a} & \text{za predznak »+«,} \\ \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{a + b\sqrt{x}}{a - b\sqrt{x}} & \text{za predznak »—«.} \end{cases}$

Ako je u formuli dvostruki predznak, gornji se predznak odnosi na $X = a^2 + b^2 x$ a donji na $X = a^2 - b^2 x$.

109) $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X} = \pm \frac{2\sqrt{x}}{b^2} \mp \frac{2a}{b^3} Y.$$

110) $$\int \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X} = \pm \frac{2}{3} \frac{\sqrt{x^3}}{b^2} - \frac{2a^2\sqrt{x}}{b^4} + \frac{2a^3}{b^5} Y.$$

111) $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X^2} = \mp \frac{\sqrt{x}}{b^2 X} \pm \frac{1}{ab^3} Y.$$

112) $$\int \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X^2} = \pm \frac{2\sqrt{x^3}}{b^2 X} + \frac{3a^2\sqrt{x}}{b^4 X} - \frac{3a}{b^6} Y.$$

113) $$\int \frac{dx}{X\sqrt{x}} = \frac{2}{ab} Y.$$

114) $$\int \frac{dx}{X\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2\sqrt{x}} \mp \frac{2b}{a^3} Y.$$

115) $$\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{a^2 X} + \frac{1}{a^3 b} Y.$$

116) $$\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2 X\sqrt{x}} \mp \frac{3b^2\sqrt{x}}{a^4 X} \mp \frac{3b}{a^5} Y.$$

Drugi integrali sa $\sqrt{x}$.

117) $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4 + x^2} = -\frac{1}{2a\sqrt{2}} \ln \frac{x + a\sqrt{2x} + a^2}{x - a\sqrt{2x} + a^2} + \frac{1}{a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{2x}}{a^2 - x}.$$

118) $$\int \frac{dx}{(a^4 + x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \ln \frac{x + a\sqrt{2x} + a^2}{x - a\sqrt{2x} + a^2} + \frac{1}{a^3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{2x}}{a^2 - x}.$$

119) $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + \sqrt{x}}{a - \sqrt{x}} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{a}.$$

120) $$\int \frac{dx}{(a^4 - x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3} \ln \frac{a + \sqrt{x}}{a - \sqrt{x}} + \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{a}.$$

Integrali sa $\sqrt{ax + b}$

Oznaka: $X = ax + b$

121) $$\int \sqrt{X}\,dx = \frac{2}{3a} \sqrt{X^3}.$$

122) $$\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{2(3ax - 2b)\sqrt{X^3}}{15a^2}.$$

123) $$\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{2(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)\sqrt{X^3}}{105a^3}.$$

124) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{a}.$$

125) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(ax - 2b)}{3a^2} \sqrt{X}.$$

126) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2)\sqrt{X}}{15a^3}.$$

127) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\dfrac{2}{\sqrt{b}} \operatorname{Ar\,th} \sqrt{\dfrac{X}{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} \ln \dfrac{\sqrt{X} - \sqrt{b}}{\sqrt{X} + \sqrt{b}} & \text{za } b > 0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{-b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{X}{-b}} & \text{za } b < 0. \end{cases}$$

128) $$\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = 2\sqrt{X} + b \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$$ (vidi br. 127).

$$\boxed{X = ax + b}$$

129) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{bx} - \frac{a}{2b}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (vidi br. 127).

130) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{a}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (vidi br. 127).

131) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(n-1)\,bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)\,a}{(2n-2)\,b}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{X}}.$

132) $\displaystyle\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{2\sqrt{x^5}}{5a}.$

133) $\displaystyle\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{35a^2}\left(5\sqrt{X^7} - 7b\sqrt{X^5}\right).$

134) $\displaystyle\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^9}}{9} - \frac{2b\sqrt{X^7}}{7} + \frac{b^2\sqrt{X^5}}{5}\right).$

135) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{2\sqrt{X^3}}{3} + 2b\sqrt{X} + b^2\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (v. br. 127).

136) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^2}\left(\sqrt{X} + \frac{b}{\sqrt{X}}\right).$

137) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^3}}{3} - 2b\sqrt{X} - \frac{b^2}{\sqrt{X}}\right).$

138) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{2}{b\sqrt{X}} + \frac{1}{b}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (vidi br. 127).

139) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{bx\sqrt{X}} - \frac{3a}{b^2\sqrt{X}} - \frac{3a}{2b^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (v. br. 127).

140) $\displaystyle\int X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2X^{(2\pm n)/2}}{a\,(2\pm n)}.$

141) $\displaystyle\int xX^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^2}\left(\frac{X^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} - \frac{bX^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right).$

142) $\displaystyle\int x^2X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{X^{(6\pm n)/2}}{6\pm n} - \frac{2bX^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} + \frac{b^2X^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right).$

143) $\displaystyle\int \frac{X^{n/2}\,dx}{x} = \frac{2X^{n/2}}{n} + b\int\frac{X^{(n-2)/2}}{x}\,dx.$

144) $\displaystyle\int \frac{dx}{xX^{n/2}} = \frac{2}{(n-2)\,bX^{(n-2)/2}} + \frac{1}{b}\int\frac{dx}{xX^{(n-2)/2}}.$

145) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X^{n/2}} = -\frac{1}{bx\,X^{(n-2)/2}} - \frac{na}{2b}\int\frac{dx}{xX^{n/2}}.$

Integrali sa $\sqrt{ax+b}$ i $\sqrt{fx+g}$

$$\boxed{\text{Oznake: } X = ax+b,\quad Y = fx+g,\quad \Delta = bf - ag}$$

146) $$\int\frac{dx}{\sqrt{XY}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-af}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\dfrac{fX}{aY}} & \text{za } af<0,\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{af}}\operatorname{Ar\,th}\sqrt{\dfrac{fX}{aY}} = \\ \qquad = \dfrac{2}{\sqrt{af}}\ln\left(\sqrt{aY}+\sqrt{fY}\right) & \text{za } af>0.\end{cases}$$

147) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{XY}} = \frac{\sqrt{XY}}{af} - \frac{ag+bf}{2af}\int\frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (vidi br. 146).

148) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{X}\sqrt{Y^3}} = -\frac{2\sqrt{X}}{\Delta\sqrt{Y}}.$

149) $$\int\frac{dx}{Y\sqrt{X}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-\Delta f}}\operatorname{arctg}\dfrac{f\sqrt{X}}{\sqrt{-\Delta f}} & \text{za } \Delta f<0,\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\Delta f}}\ln\dfrac{f\sqrt{X}-\sqrt{\Delta f}}{f\sqrt{X}+\sqrt{\Delta f}} & \text{za } \Delta f>0.\end{cases}$$

150) $\displaystyle\int \sqrt{XY}\,dx = \frac{\Delta+2aY}{4af}\sqrt{XY} - \frac{\Delta^2}{8af}\int\frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (v. br. 146).

151) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{Y}{X}}\,dx = \frac{1}{a}\sqrt{XY} - \frac{\Delta}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (vidi br. 146).

$$\boxed{X = ax + b, \quad Y = fx + g, \quad \Delta = bf - ag}$$

152) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y} = \frac{2\sqrt{X}}{f} + \frac{\Delta}{f}\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}}$ (vidi br. 149).

153) $\displaystyle\int \frac{Y^n\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{(2n+1)a}\left(\sqrt{X}\,Y^n - n\Delta\int \frac{Y^{n-1}\,dx}{\sqrt{X}}\right).$

154) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^n} = -\frac{1}{(n-1)\Delta}\left\{\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \left(n-\frac{3}{2}\right)a\int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^{n-1}}\right\}.$

155) $\displaystyle\int \sqrt{X}\,Y^n\,dx = \frac{1}{(2n+3)f}\left(2\sqrt{X}\,Y^{n+1} + \Delta\int \frac{Y^n\,dx}{\sqrt{X}}\right)$ (vidi br. 153).

156) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y^n} = \frac{1}{(n-1)f}\left(-\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^{n-1}}\right).$

Integrali sa $\sqrt{a^2 - x^2}$

$$\boxed{\text{Oznaka: } X = a^2 - x^2}$$

157) $\displaystyle\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right).$

158) $\displaystyle\int x\sqrt{X}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$

159) $\displaystyle\int x^2\sqrt{X}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right).$

160) $\displaystyle\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - a^2\frac{\sqrt{X^3}}{3}.$

161) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - a\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

162) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} - \arcsin\frac{x}{a}.$

163) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

164) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \arcsin\frac{x}{a}.$

165) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = -\sqrt{X}.$

166) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X}} = -\frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$

167) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}.$

168) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

169) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2x}.$

170) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

171) $\displaystyle\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right).$

172) $\displaystyle\int x\sqrt{X^3}\,dx = -\frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

173) $\displaystyle\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = -\frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{a}.$

174) $\displaystyle\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$

175) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

176) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} - \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}.$

177) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{X}}{2} + \frac{3a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

$$\boxed{X = a^2 - x^2}$$

178) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$

179) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{1}{\sqrt{X}}.$

180) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{\sqrt{X}} - \arcsin\frac{x}{a}.$

181) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$

182) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

183) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^4}\left(-\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$

184) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

Integrali sa $\sqrt{x^2+a^2}$

$$\boxed{\text{Oznaka: } X = x^2 + a^2}$$

185) $\displaystyle\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2 \operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\right) + C =$

$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{X} + a^2\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right] + C_1.$$

186) $\displaystyle\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$

187) $\displaystyle\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\right) + C =$

$$= \frac{x}{4}\sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8}\left[x\sqrt{X} + a^2\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right] + C_1.$$

188) $\displaystyle\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}.$

189) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - a\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

190) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a} + C =$

$$= -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$$

191) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

192) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

193) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$

194) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a} + C =$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$$

195) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}.$

196) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

197) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2x}.$

198) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

199) $\displaystyle\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}\right) + C =$

$$= \frac{1}{4}\left[x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right] + C_1.$$

200) $\displaystyle\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

$$\boxed{X = x^2 + a^2}$$

201) $$\int x^2 \sqrt{X^3}\,dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2 x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4 x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a} + C = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2 x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4 x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$$

202) $$\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$$

203) $$\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$$

204) $$\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} + \frac{3}{2}a^2\,\mathrm{Ar\,sh}\,\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} + \frac{3}{2}a^2\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$$

205) $$\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{X} - \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{X}}{x}\right).$$

206) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$$

207) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$$

208) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \mathrm{Ar\,sh}\,\frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$$

209) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$$

210) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$$

211) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$$

212) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$$

Integrali sa $\sqrt{x^2 - a^2}$

$$\boxed{\text{Oznaka: } X = x^2 - a^2}$$

213) $$\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} - a^2\,\mathrm{Ar\,ch}\,\frac{x}{a}\right) + C = \frac{1}{2}[x\sqrt{X} - a^2\ln(x+\sqrt{X})] + C_1.$$

214) $$\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$$

215) $$\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} - a^2\,\mathrm{Ar\,ch}\,\frac{x}{a}\right) + C = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}[x\sqrt{X} - a^2\ln(x+\sqrt{X})] + C_1.$$

216) $$\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} + \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}.$$

217) $$\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - a\arccos\frac{a}{x}.$$

218) $$\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \mathrm{Ar\,ch}\,\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$$

219) $$\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\arccos\frac{a}{x}.$$

220) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \mathrm{Arch}\,\frac{x}{a} + C = \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$$

221) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$$

222) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{Ar\,ch}\,\frac{x}{a} + C = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$$

223) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X}.$$

$$\boxed{X = x^2 - a^2}$$

224) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x}.$$

225) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$$

226) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3} \arccos \frac{a}{x}.$$

227) $$\int \sqrt{X^3}\, dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{4}\left[x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln\left(x + \sqrt{X}\right)\right] + C_1.$$

228) $$\int x\sqrt{X^3}\, dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$$

229) $$\int x^2\sqrt{X^3}\, dx =$$
$$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a} + C =$$
$$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\ln\left(x + \sqrt{X}\right) + C_1.$$

230) $$\int x^3\sqrt{X^3}\, dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} + \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$$

231) $$\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\, dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X} + a^3 \arccos\frac{a}{x}.$$

232) $$\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^3 \operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a} + C =$$
$$= -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2\ln\left(x + \sqrt{X}\right) + C_1.$$

233) $$\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\, dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3\sqrt{X}}{2} - \frac{3}{2}a \arccos\frac{a}{x}.$$

234) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$$

235) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$$

236) $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a} + C =$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln\left(x + \sqrt{X}\right) + C_1.$$

237) $$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} - \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$$

238) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\arccos\frac{a}{x}.$$

239) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$$

240) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5}\arccos\frac{a}{x}.$$

Integrali sa $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Oznake: $X = ax^2 + bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2, \quad k = \dfrac{4a}{\Delta}$

241) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(2\sqrt{aX} + 2ax + b\right) + C & \text{za } a > 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Ar\,sh}\dfrac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} + C_1 & \text{za } a > 0,\ \Delta > 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax + b) & \text{za } a > 0,\ \Delta = 0, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\dfrac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} & \text{za } a < 0,\ \Delta < 0. \end{cases}$$

242) $$\int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2ax + b)}{\Delta\sqrt{X}}.$$

243) $$\int \frac{dx}{X^2\sqrt{X}} = \frac{2(2ax + b)}{3\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + 2k\right).$$

244) $$\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} = \frac{2(2ax + b)}{(2n - 1)\Delta X^{(2n-1)/2}} + \frac{2k(n - 1)}{2n - 1}\int \frac{dx}{X^{(2n-1)/2}}.$$

$$\boxed{X = ax^2 - bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2, \quad k = \frac{4a}{\Delta}}$$

245) $$\int \sqrt{X}\,\mathrm{d}x = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{4a} + \frac{1}{2k}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} \quad \text{(v. br. 241).}$$

246) $$\int X\sqrt{X}\,\mathrm{d}x = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{8a}\left(X + \frac{3}{2k}\right) + \frac{3}{8k^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$$
(v. br. 241).

247) $$\int X^2\sqrt{X}\,\mathrm{d}x = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{12a}\left(X^2 + \frac{5X}{4k} + \frac{15}{8k^2}\right) + \frac{5}{16k^3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$$
(v. br. 241).

248) $$\int X^{(2n+1)/2}\,\mathrm{d}x = \frac{(2ax+b)\,X^{(2n+1)/2}}{4a\,(n+1)} + \frac{2n+1}{2k\,(n+1)}\int X^{(2n-1)/2}\,\mathrm{d}x.$$

249) $$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} \quad \text{(v. br. 241).}$$

250) $$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{X\sqrt{X}} = -\frac{2\,(bx+2c)}{\Delta\sqrt{X}}.$$

251) $$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{X^{(2n+1)/2}} = -\frac{1}{(2n-1)\,aX^{(2n-1)/2}} - \frac{b}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{X^{(2n+1)/2}} \quad \text{(v. br. 244).}$$

252) $$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2a} - \frac{3b}{4a^2}\right)\sqrt{X} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} \quad \text{(v. br. 241).}$$

253) $$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{X\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)\,x + 2bc}{a\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} \quad \text{(v. br. 241).}$$

254) $$\int x\sqrt{X}\,\mathrm{d}x = \frac{X\sqrt{X}}{3a} - \frac{b\,(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{X} - \frac{b}{4ak}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$$
(v. br. 241).

255) $$\int xX\sqrt{X}\,\mathrm{d}x = \frac{X^2\sqrt{X}}{5a} - \frac{b}{2a}\int X\sqrt{X}\,\mathrm{d}x \quad \text{(v. br. 246).}$$

256) $$\int xX^{(2n+1)/2}\,\mathrm{d}x = \frac{X^{(2n+3)/2}}{(2n+3)\,a} - \frac{b}{2a}\int X^{(2n+1)/2}\,\mathrm{d}x$$
(v. br. 248).

257) $$\int x^2\sqrt{X}\,\mathrm{d}x = \left(x - \frac{5b}{6a}\right)\frac{X\sqrt{X}}{4a} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2}\int \sqrt{X}\,\mathrm{d}x$$
(v. br. 245).

258) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\dfrac{2\sqrt{cX}}{x} + \dfrac{2c}{x} + b\right) + C & \text{za } c > 0, \\[2ex] -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{Arsh}\,\dfrac{bx+2c}{x\sqrt{\Delta}} + C_1 & \text{za } c > 0,\ \Delta > 0, \\[2ex] -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\ln\dfrac{bx+2c}{x} & \text{za } c > 0,\ \Delta = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\dfrac{bx+2c}{x\sqrt{-\Delta}} & \text{za } c < 0,\ \Delta < 0. \end{cases}$$

259) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{cx} - \frac{b}{2c}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{X}} \quad \text{(v. br. 258).}$$

260) $$\int \frac{\sqrt{X}\,\mathrm{d}x}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + c\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{X}} \quad \text{(v. br. 241 i 258).}$$

261) $$\int \frac{\sqrt{X}\,\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + a\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{X}} \quad \text{(v. br. 241 i 258).}$$

262) $$\int \frac{X^{(2n+1)/2}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{X^{(2n+1)/2}}{2n+1} + \frac{b}{2}\int X^{(2n-1)/2}\,\mathrm{d}x + c\int \frac{X^{(2n-1)/2}}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{(v. br. 248 i 260).}$$

$$\boxed{X = ax^2 - bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2, \quad k = \frac{4a}{\Delta}}$$

$$263) \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx}} = -\frac{2}{bx}\sqrt{ax^2 + bx}.$$

$$264) \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \arcsin \frac{x-a}{a}.$$

$$265) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\sqrt{2ax - x^2} + a \arcsin \frac{x-a}{a}.$$

$$266) \int \sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{a}.$$

$$267) \int \frac{dx}{(ax^2 + b)\sqrt{fx^2 + g}} = \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag - bf}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{ag - bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2 + g}} \quad (ag - bf > 0),$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{bf - ag}} \ln \frac{\sqrt{b}\sqrt{fx^2 + g} + x\sqrt{bf - ag}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2 + g} - x\sqrt{bf - ag}} \quad (ag - bf < 0).$$

Integrali s iracionalnim izrazima drugog oblika

$$268) \int \sqrt[n]{ax + b}\,dx = \frac{n(ax + b)}{(n+1)a}\sqrt[n]{ax + b}.$$

$$269) \int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax + b}} = \frac{n(ax + b)}{(n-1)a} \frac{1}{\sqrt[n]{ax + b}}.$$

$$270) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n + a^2}} = -\frac{2}{na} \ln \frac{a + \sqrt{x^n + a^2}}{\sqrt{x^n}}.$$

$$271) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n - a^2}} = \frac{2}{na} \arccos \frac{a}{\sqrt{x^n}}.$$

$$272) \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3 - x^3}} = \frac{2}{3} \arcsin \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^3}.$$

Rekurzijske formule za binomne integrale

$$273) \int x^m (ax^n + b)^p\,dx =$$

$$= \frac{1}{m + np + 1}\left[x^{m+1}(ax^n + b)^p + npb \int x^m (ax^n + b)^{p-1}\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{bn(p+1)}\left[-x^{m+1}(ax^n + b)^{p+1} + (m + n + np + 1)\int x^m (ax^n + b)^{p+1}\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{(m+1)b}\left[x^{m+1}(ax^n + b)^{p+1} - a(m + n + np + 1)\int x^{m+n}(ax^n + b)^p\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{a(m + pn + 1)}\left[x^{m-n+1}(ax^n + b)^{p+1} - (m - n + 1)b\int x^{m-n}(ax^n + b)^p\,dx\right].$$

Integrali trigonometrijskih funkcija*

Integrali sa sinusom

$$274) \int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax.$$

$$275) \int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax.$$

$$276) \int \sin^3 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3 ax.$$

$$277) \int \sin^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax.$$

$$278) \int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx \quad (n \text{ cio}, > 0).$$

$$279) \int x \sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}.$$

---

* Integrale funkcija koje sadrže $\sin x$ i $\cos x$ u vezi s hiperbolnim funkcijama i sa e^{ax}, vidi na str. 442 do 444.

280) $$\int x^2 \sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos ax.$$

281) $$\int x^3 \sin ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\sin ax - \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\cos ax.$$

282) $$\int x^n \sin ax\,dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx \qquad (n > 0).$$

283) $$\int \frac{\sin ax}{x}\,dx = ax - \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7\cdot 7!} + \dots{}^{*}.$$

284) $$\int \frac{\sin ax}{x^2}\,dx = -\frac{\sin ax}{x} + a\int\frac{\cos ax}{x}\,dx \qquad \text{(v. br. 322)}.$$

285) $$\int \frac{\sin ax}{x^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int\frac{\cos ax}{x^{n-1}}\,dx$$
(v. br. 324).

286) $$\int \frac{dx}{\sin ax} = \int \csc ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2} = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \operatorname{ctg} ax).$$

287) $$\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax.$$

288) $$\int \frac{dx}{\sin^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a\sin^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$$

289) $$\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\,\frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2} ax}$$
$(n > 1)$.

* Određeni integral $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ nazivamo *integralni sinus* i označavamo sa Si (x): $\mathrm{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \dots$

290) $$\int \frac{x\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2}\left[ax + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{7\,(ax)^5}{3\cdot 5\cdot 5!} + \frac{31\,(ax)^7}{3\cdot 7\cdot 7!} + \frac{127\,(ax)^9}{3\cdot 5\cdot 9!} + \dots + \frac{2\,(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!}B_n\,(ax)^{2n+1} + \dots\right]^{*}.$$

291) $$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg} ax + \frac{1}{a^2}\ln\sin ax.$$

292) $$\int \frac{x\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{x\cos ax}{(n-1)\,a\sin^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)\,a^2\sin^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{x\,dx}{\sin^{n-2} ax} \qquad (n > 2).$$

293) $$\int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$$

294) $$\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$$

295) $$\int \frac{x\,dx}{1+\sin ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$$

296) $$\int \frac{x\,dx}{1-\sin ax} = \frac{x}{a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$$

297) $$\int \frac{\sin ax\,dx}{1\pm\sin ax} = \pm x + \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right).$$

298) $$\int \frac{dx}{\sin ax\,(1\pm\sin ax)} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$$

299) $$\int \frac{dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$$

300) $$\int \frac{dx}{(1-\sin ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$$

301) $$\int \frac{\sin ax\,dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$$

* B_n su Bernoullijevi brojevi (vidi str. 340 i 341).

302) $$\int \frac{\sin ax\,dx}{(1-\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right).$$

303) $$\int \frac{dx}{1+\sin^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a}\arcsin\left(\frac{3\sin^2 ax - 1}{\sin^2 ax + 1}\right).$$

304) $$\int \frac{dx}{1-\sin^2 ax} = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax.$$

305) $$\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$$
$(|a| \neq |b|$; za $|a| = |b|$ v. br. 275).

306) $$\int \frac{dx}{b+c\sin ax} =$$
$$= \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg}^{ax}/_2 + c}{\sqrt{b^2-c^2}} \qquad (\text{za } b^2 > c^2),$$
$$= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{b\operatorname{tg}^{ax}/_2 + c - \sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg}^{ax}/_2 + c + \sqrt{c^2-b^2}} \qquad (\text{za } b^2 < c^2).$$

307) $$\int \frac{\sin ax\,dx}{b+c\sin ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b+c\sin ax} \qquad (\text{v. br. } 306).$$

308) $$\int \frac{dx}{\sin ax\,(b+c\sin ax)} = \frac{1}{ab}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \frac{c}{b}\int\frac{dx}{b+c\sin ax}$$
(v. br. 306).

309) $$\int \frac{dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{c\cos ax}{a(b^2-c^2)(b+c\sin ax)} +$$
$$+ \frac{b}{b^2-c^2}\int\frac{dx}{b+c\sin ax} \qquad (\text{v. br. } 306).$$

310) $$\int \frac{\sin ax\,dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{b\cos ax}{a(c^2-b^2)(b+c\sin ax)} +$$
$$+ \frac{c}{c^2-b^2}\int\frac{dx}{b+c\sin ax} \qquad (\text{v. br. } 306).$$

311) $$\int \frac{dx}{b^2+c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b^2+c^2}\operatorname{tg} ax}{b}$$
$(b > 0)$.

312) $$\int \frac{dx}{b^2-c^2\sin^2 ax} =$$
$$= \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b^2-c^2}\operatorname{tg} ax}{b} \qquad (b^2 > c^2,\ b > 0).$$
$$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax + b}{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax - b} \qquad (c^2 > b^2,\ b > 0).$$

Integrali sa kosinusom

313) $$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax.$$

314) $$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax.$$

315) $$\int \cos^3 ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax - \frac{1}{3a}\sin^3 ax.$$

316) $$\int \cos^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax.$$

317) $$\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2} ax\,dx.$$

318) $$\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}.$$

319) $$\int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax.$$

320) $$\int x^3\cos ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\sin ax.$$

321) $$\int x^n\cos ax\,dx = \frac{x^n\sin ax}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx.$$

322) $$\int \frac{\cos ax}{x}\,dx = \ln(ax) - \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6\cdot 6!} + \dots^{*}$$

323) $$\int \frac{\cos ax}{x^2}\,dx = -\frac{\cos ax}{x} - a\int \frac{\sin ax\,dx}{x} \qquad \text{(v. br. 283).}$$

324) $$\int \frac{\cos ax}{x^n}\,dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{a}{n-1}\int \frac{\sin ax\,dx}{x^{n-1}}$$
$(n \neq 1)$ (v. br. 285).

325) $$\int \frac{dx}{\cos ax} = \int \operatorname{sc} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{a}\ln(\operatorname{sc} ax + \operatorname{tg} ax).$$

326) $$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax.$$

327) $$\int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\sin ax}{2a\cos^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$$

328) $$\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)}\frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \qquad (n > 1).$$

329) $$\int \frac{x\,dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 2!} + \frac{5\,(ax)^6}{6\cdot 4!} + \frac{61\,(ax)^8}{8\cdot 6!} + \frac{1385\,(ax)^{10}}{10\cdot 8!} + \dots + \frac{E_n\,(ax)^{2n+2}}{(2n+2)\,(2n!)} + \dots\right]^{**}.$$

330) $$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2}\ln\cos ax.$$

* Određeni integral $\int\limits_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ nazivamo *integralni kosinus* i označavamo sa $\operatorname{Ci} x$:
$$\operatorname{Ci} x = C - \ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \dots,$$
gdje je C Eulerova konstanta (vidi str. 317).

** E_n su Eulerovi brojevi (vidi str. 341).

331) $$\int \frac{x\,dx}{\cos^n ax} = \frac{x\sin ax}{(n-1)\,a\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)\,a^2\cos^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\cos^{n-2} ax} \qquad (n > 2).$$

332) $$\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$$

333) $$\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}.$$

334) $$\int \frac{x\,dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\cos\frac{ax}{2}.$$

335) $$\int \frac{x\,dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\sin\frac{ax}{2}.$$

336) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{1+\cos ax} = x - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$$

337) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{1-\cos ax} = -x - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}.$$

338) $$\int \frac{dx}{\cos ax\,(1+\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$$

339) $$\int \frac{dx}{\cos ax\,(1-\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}.$$

340) $$\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}.$$

341) $$\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2}.$$

342) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}.$$

343) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{(1-\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2}.$$

344) $$\int \frac{dx}{1+\cos^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a}\arcsin\left(\frac{1-3\cos^2 ax}{1+\cos^2 ax}\right).$$

345) $$\int \frac{dx}{1-\cos^2 ax} = \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax.$$

346) $$\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$$
$(|a| \neq |b|;$ za $|a| = |b|$ v. br. 314).

347) $$\int \frac{dx}{b + c\cos ax} =$$
$$= \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{(b-c)\operatorname{tg}{}^{ax}/_2}{\sqrt{b^2-c^2}} \qquad (\text{za } b^2 > c^2),$$
$$= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}} \ln \frac{(c-b)\operatorname{tg}{}^{ax}/_2 + \sqrt{c^2-b^2}}{(c-b)\operatorname{tg}{}^{ax}/_2 - \sqrt{c^2-b^2}} \qquad (\text{za } b^2 < c^2).$$

348) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{b + c\cos ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b + c\cos ax} \qquad (\text{v. br. } 347).$$

349) $$\int \frac{dx}{\cos ax\,(b + c\cos ax)} =$$
$$= \frac{1}{ab} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{c}{b}\int \frac{dx}{b + c\cos ax} \qquad (\text{v. br. } 347).$$

350) $$\int \frac{dx}{(b + c\cos ax)^2} = \frac{c\sin ax}{a(c^2-b^2)(b + c\cos ax)} -$$
$$- \frac{b}{c^2-b^2}\int \frac{dx}{b + c\cos ax} \qquad (\text{v. br. } 347).$$

351) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{(b + c\cos ax)^2} = \frac{b\sin ax}{a(b^2-c^2)(b + c\cos ax)} -$$
$$- \frac{c}{b^2-c^2}\int \frac{dx}{b + c\cos ax} \qquad (\text{v. br. } 347).$$

352) $$\int \frac{dx}{b^2 + c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2+c^2}} \qquad (b > 0).$$

353) $$\int \frac{dx}{b^2 - c^2\cos^2 ax} =$$
$$= \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2-c^2}} \qquad (b^2 > c^2,\ b > 0),$$
$$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}} \ln \frac{b\operatorname{tg} ax - \sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg} ax + \sqrt{c^2-b^2}} \qquad (c^2 > b^2,\ b > 0).$$

Integrali sa sinusom i kosinusom

354) $$\int \sin ax \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax.$$

355) $$\int \sin^2 ax \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}.$$

356) $$\int \sin^n ax \cos ax\,dx = \frac{1}{a(n+1)}\sin^{n+1} ax \qquad (n \neq -1).$$

357) $$\int \sin ax \cos^n ax\,dx = -\frac{1}{a(n+1)}\cos^{n+1} ax \qquad (n \neq -1).$$

358) $$\int \sin^n ax \cos^m ax\,dx =$$
$$= -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(n+m)} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} ax \cos^m ax\,dx$$
(sniženje eksponenta n; m i $n > 0$),
$$= \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n ax \cos^{m-2} ax\,dx$$
(sniženje eksponenta m; m i $n > 0$).

359) $$\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg} ax.$$

360) $$\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos ax} = \frac{1}{a}\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{\sin ax}\right].$$

361) $$\int \frac{dx}{\sin ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{1}{\cos ax}\right).$$

362) $$\int \frac{dx}{\sin^3 ax \cos ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg} ax - \frac{1}{2\sin^2 ax}\right).$$

363) $$\int \frac{dx}{\sin ax \cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg} ax + \frac{1}{2\cos^2 ax}\right).$$

364) $$\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^2 ax} = -\frac{2}{a}\operatorname{ctg} 2ax.$$

365) $$\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^3 ax} =$$
$$= \frac{1}{a}\left[\frac{\sin ax}{2\cos^2 ax} - \frac{1}{\sin ax} + \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right].$$

366) $$\int \frac{dx}{\sin^3 ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\cos ax} - \frac{\cos ax}{2\sin^2 ax} + \frac{3}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$$

367) $$\int \frac{dx}{\sin ax \cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin ax \cos^{n-2} ax} \quad (n \neq 1) \quad \text{(v. br. 361, 363).}$$

368) $$\int \frac{dx}{\sin^n ax \cos ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos ax} \quad (n \neq 1) \quad \text{(v. br. 360, 362).}$$

369) $$\int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^m ax} =$$
$$= -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos^m ax}$$
(sniženje eksponenta n; $m > 0$, $n > 1$),
$$= \frac{1}{a(m-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^{m-2} ax}$$
(sniženje eksponenta m; $n > 0$, $m > 1$).

370) $$\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a\cos ax} = \frac{1}{a}\operatorname{sc} ax.$$

371) $$\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{2a\cos^2 ax} + C = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax + C_1.$$

372) $$\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax}.$$

373) $$\int \frac{\sin^2 ax\, dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\sin ax + \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$$

374) $$\int \frac{\sin^2 ax\, dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{\sin ax}{2\cos^2 ax} - \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right].$$

375) $$\int \frac{\sin^2 ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$$
$(n \neq 1)$ (v. br. 325, 326, 328).

376) $$\int \frac{\sin^3 ax\, dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\left(\frac{\sin^2 ax}{2} + \ln \cos ax\right).$$

377) $$\int \frac{\sin^3 ax\, dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \frac{1}{\cos ax}\right).$$

378) $$\int \frac{\sin^3 ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-3)\cos^{n-3} ax}\right]$$
$(n \neq 1,\ n \neq 3)$.

379) $$\int \frac{\sin^n ax}{\cos ax}dx = -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} ax\, dx}{\cos ax} \qquad (n \neq 1).$$

380) $$\int \frac{\sin^n ax}{\cos^m ax}dx =$$
$$= \frac{\sin^{n+1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\sin^n ax}{\cos^{m-2} ax}dx \qquad (m \neq 1),$$
$$= -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-m)\cos^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\sin^{n-2} ax\, dx}{\cos^m ax} \qquad (m \neq n),$$
$$= \frac{\sin^{n-1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\sin^{n-1} ax\, dx}{\cos^{m-2} ax} \qquad (m \neq 1).$$

381) $$\int \frac{\cos ax\, dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a\sin ax} = -\frac{1}{a}\csc ax.$$

382) $$\int \frac{\cos ax\, dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a\sin^2 ax} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2 ax}{2a} + C_1.$$

383) $$\int \frac{\cos ax\, dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax}.$$

384) $$\int \frac{\cos^2 ax\, dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$$

385) $$\int \frac{\cos^3 ax\, dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a}\left(\frac{\cos ax}{\sin^2 ax} - \ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$$

386) $$\int \frac{\cos^3 ax\, dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{(n-1)}\left(\frac{\cos ax}{a\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}\right)$$
$(n \neq 1)$ (v. br. 289).

387) $$\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{\cos^2 ax}{2} + \ln \sin ax\right).$$

388) $$\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\left(\sin ax + \frac{1}{\sin ax}\right).$$

389) $$\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-3)\sin^{n-3} ax} - \frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} ax}\right] \qquad (n \neq 1,\ n \neq 3).$$

390) $$\int \frac{\cos^n ax}{\sin ax}\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin ax} \qquad (n \neq 1).$$

391) $$\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^m ax} =$$
$$= -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} \qquad (m \neq 1),$$
$$= \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-m)\sin^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^m ax} \qquad (m \neq n),$$
$$= -\frac{\cos^{n-1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} \qquad (m \neq 1).$$

392) $$\int \frac{dx}{\sin ax\,(1 \pm \cos ax)} = \pm \frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$

393) $$\int \frac{dx}{\cos ax\,(1 \pm \sin ax)} =$$
$$= \mp \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$$

394) $$\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax\,(1 \pm \cos ax)} = \frac{1}{a}\ln \frac{1 \pm \cos ax}{\cos ax}.$$

395) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax\,(1 \pm \sin ax)} = -\frac{1}{a}\ln \frac{1 \pm \sin ax}{\sin ax}.$$

396) $$\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax\,(1 \pm \sin ax)} =$$
$$= \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} \pm \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$$

397) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax\,(1 \pm \cos ax)} = -\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} \pm \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$

398) $$\int \frac{\sin ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$$

399) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$$

400) $$\int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right).$$

401) $$\int \frac{dx}{1 + \cos ax \pm \sin ax} = \pm \frac{1}{a}\ln\left(1 \pm \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$$

402) $$\int \frac{dx}{b\sin ax + c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2 + c^2}}\ln \operatorname{tg}\frac{ax + \Theta}{2},$$
gdje je $\sin \Theta = \dfrac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, $\operatorname{tg} \Theta = \dfrac{c}{b}$.

403) $$\int \frac{\sin ax\,dx}{b + c\cos ax} = -\frac{1}{ac}\ln(b + c\cos ax).$$

404) $$\int \frac{\cos ax\,dx}{b + c\sin ax} = \frac{1}{ac}\ln(b + c\sin ax).$$

405) $$\int \frac{dx}{b + c\cos ax + f\sin ax} = \int \frac{d\left(x + \frac{\Theta}{a}\right)}{b + \sqrt{c^2 + f^2}\sin(ax + \Theta)},$$
gdje je $\sin \Theta = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 + f^2}}$, a $\operatorname{tg} \Theta = \dfrac{c}{f}$ (v. br. 306).

406) $$\int \frac{dx}{b^2\cos^2 ax + c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{abc}\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{b}\operatorname{tg} ax\right).$$

407) $$\int \frac{dx}{b^2\cos^2 ax - c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{2abc}\ln \frac{c\operatorname{tg} ax + b}{c\operatorname{tg} ax - b}.$$

408) $$\int \sin ax \cos bx\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)}$$
($a^2 \neq b^2$; za $a = b$ v. br. 354).

Integrali s tangensom

409) $\int \operatorname{tg} ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax.$

410) $\int \operatorname{tg}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} - x.$

411) $\int \operatorname{tg}^3 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax + \frac{1}{a}\ln\cos ax.$

412) $\int \operatorname{tg}^n ax\,dx = \frac{1}{a(n-1)}\operatorname{tg}^{n-1} ax - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax\,dx.$

413) $\int x\operatorname{tg} ax\,dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{a^3x^5}{15} + \frac{2a^5x^7}{105} + \frac{17a^7x^9}{2835} + \dots$
$$\dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots^*$$

414) $\int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} = ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \frac{17(ax)^7}{2205} + \dots$
$$\dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots^*$$

415) $\int \frac{\operatorname{tg}^n ax}{\cos^2 ax}dx = \frac{1}{a(n+1)}\operatorname{tg}^{n+1} ax \qquad (n \neq -1).$

416) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

417) $\int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

Integrali s kotangensom

418) $\int \operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\sin ax.$

419) $\int \operatorname{ctg}^2 ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x.$

420) $\int \operatorname{ctg}^3 ax\,dx = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}^2 ax - \frac{1}{a}\ln\sin ax.$

* B_n su Bernoullijevi brojevi (vidi str. 340).

421) $\int \operatorname{ctg}^n ax\,dx = -\frac{1}{a(n-1)}\operatorname{ctg}^{n-1} ax - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax\,dx \qquad (n \neq 1).$

422) $\int x\operatorname{ctg} ax\,dx =$
$$= \frac{x}{a} - \frac{ax^3}{9} - \frac{a^3x^5}{225} - \dots - \frac{2^{2n}B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \dots^*$$

423) $\int \frac{\operatorname{ctg} ax\,dx}{x} = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \frac{2(ax)^5}{4725} - \dots$
$$\dots - \frac{2^{2n}B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \dots^*$$

424) $\int \frac{\operatorname{ctg}^n ax}{\sin^2 ax}dx = -\frac{1}{a(n+1)}\operatorname{ctg}^{n+1} ax \qquad (n \neq -1).$

425) $\int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{ctg} ax} = \int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1}$ (v. br. 417).

Integrali drugih transcendentnih funkcija

Integrali hiperbolnih funkcija

426) $\int \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax.$

427) $\int \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sh} ax.$

428) $\int \operatorname{sh}^2 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh} ax\operatorname{ch} ax - \frac{1}{2}x.$

429) $\int \operatorname{ch}^2 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh} ax\operatorname{ch} ax + \frac{1}{2}x.$

430) $\int \operatorname{sh}^n ax\,dx =$
$$= \frac{1}{an}\operatorname{sh}^{n-1} ax\operatorname{ch} ax - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sh}^{n-2} ax\,dx \quad (\text{za } n > 0),$$
$$= \frac{1}{a(n+1)}\operatorname{sh}^{n+1} ax\operatorname{ch} ax - \frac{n+2}{n+1}\int \operatorname{sh}^{n+2} ax\,dx$$
(za $n < 0$) $(n \neq -1)$.

* B_n su Bernoullijevi brojevi (vidi str. 340).

431) $$\int \operatorname{ch}^n ax\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{an}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n-1} ax + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{ch}^{n-2} ax\,\mathrm{d}x \quad (\text{za } n > 0),$$

$$= -\frac{1}{a(n+1)}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n+1} ax + \frac{n+2}{n+1}\int \operatorname{ch}^{n+2} ax\,\mathrm{d}x$$

$$(\text{za } n < 0)\ (n \neq -1).$$

432) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{th}\frac{ax}{2}.$$

433) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a}\operatorname{arctg} e^{ax}.$$

434) $$\int x \operatorname{sh} ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{sh} ax.$$

435) $$\int x \operatorname{ch} ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{ch} ax.$$

436) $$\int \operatorname{th} ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln \operatorname{ch} ax.$$

437) $$\int \operatorname{cth} ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln \operatorname{sh} ax.$$

438) $$\int \operatorname{th}^2 ax\,\mathrm{d}x = x - \frac{\operatorname{th} ax}{a}.$$

439) $$\int \operatorname{cth}^2 ax\,\mathrm{d}x = x - \frac{\operatorname{cth} ax}{a}.$$

440) $$\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{sh} ax).$$

$$a^2 \neq b^2.$$

441) $$\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx - b \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax).$$

$$a^2 \neq b^2.$$

442) $$\int \operatorname{ch} ax \operatorname{sh} bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} bx \operatorname{sh} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{ch} ax).$$

$$a^2 \neq b^2.$$

443) $$\int \operatorname{sh} ax \sin ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax \sin ax - \operatorname{sh} ax \cos ax).$$

444) $$\int \operatorname{ch} ax \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax \cos ax + \operatorname{ch} ax \sin ax).$$

445) $$\int \operatorname{sh} ax \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax \cos ax + \operatorname{sh} ax \sin ax).$$

446) $$\int \operatorname{ch} ax \sin ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax \sin ax - \operatorname{ch} ax \cos ax).$$

Integrali eksponencijalnih funkcija

447) $$\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}.$$

448) $$\int xe^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1).$$

449) $$\int x^2e^{ax}\,\mathrm{d}x = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right).$$

450) $$\int x^ne^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,\mathrm{d}x.$$

451) $$\int \frac{e^{ax}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \ldots^*$$

452) $$\int \frac{e^{ax}}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}\,\mathrm{d}x\right) \qquad (n \neq 1).$$

453) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a}\ln \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}.$$

454) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{b+ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab}\ln(b+ce^{ax}).$$

455) $$\int \frac{e^{ax}\,\mathrm{d}x}{b+ce^{ax}} = \frac{1}{ac}\ln(b+ce^{ax}).$$

---

* Određeni integral $\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ nazivamo *integralnom eksponencijalnom funkcijom* i označujemo sa $\mathrm{Ei}(x)$. Za $x > 0$ u tački $t = 0$ integral divergira; u tom slučaju pod $\mathrm{Ei}(x)$ razumijevamo glavnu vrijednost nepravog integrala (vidi str. 469).

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t = C + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \ldots + \frac{x^n}{n\cdot n!} + \ldots$$

(C je Eulerova konstanta, vidi str. 317.)

456) $$\int \frac{dx}{be^{ax}+ce^{-ax}} = \frac{1}{a\sqrt{bc}} \operatorname{arc\,tg}\left(e^{ax}\sqrt{\frac{b}{c}}\right) \qquad (bc > 0),$$
$$= \frac{1}{2a\sqrt{-bc}} \ln \frac{c+e^{ax}\sqrt{-bc}}{c-e^{ax}\sqrt{-bc}} \qquad (bc < 0).$$

457) $$\int \frac{xe^{ax}\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}.$$

458) $$\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx \quad \text{(v. br. 451).}$$

459) $$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx).$$

460) $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx).$$

461) $$\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\sin x - n\cos x) + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx \quad \text{(v. br. 447, 459).}$$

462) $$\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\cos x + n\sin x) + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx \quad \text{(v. br. 447, 460).}$$

463) $$\int xe^{ax}\sin bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\sin bx - 2ab\cos bx].$$

464) $$\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\cos bx + 2ab\sin bx].$$

Integrali logaritamskih funkcija

465) $$\int \ln x\,dx = x\ln x - x.$$

466) $$\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x.$$

467) $$\int (\ln x)^3\,dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x.$$

468) $$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx \qquad (n \neq -1).$$

469) $$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln\ln x + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots^*.$$

470) $$\int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1) \quad \text{(v. br. 469).}$$

471) $$\int x^m \ln x\,dx = x^{m+1}\left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right] \qquad (m \neq -1).$$

472) $$\int x^m(\ln x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}\,dx \quad (m \neq 1,\ n \neq -1;\ \text{v. br. 471}).$$

473) $$\int \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}.$$

474) $$\int \frac{\ln x}{x^m}\,dx = -\frac{\ln x}{(m-1)\,x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2\,x^{m-1}} \qquad (m \neq 1).$$

475) $$\int \frac{(\ln x)^n}{x^m}\,dx = -\frac{(\ln x)^n}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{n}{m-1}\int \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^m}\,dx \qquad (m \neq 1) \quad \text{(v. br. 474).}$$

476) $$\int \frac{x^m\,dx}{\ln x} = \int \frac{e^{-y}}{y}\,dy, \text{ gdje je } y = -(m+1)\ln x \quad \text{(v. br. 451).}$$

477) $$\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1).$$

---

* Određeni integral $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ nazivamo *integralnim logaritmom* i označavamo sa li (x). Za $x > 1$ u tački $t = 1$ integral divergira; u tom slučaju pod li (x) razumijevamo glavnu vrijednost nepravog integrala (str. 469). Integralni logaritam je povezan s integralnom eksponencijalnom funkcijom (vidi str. 443); li (x) = Ei $(\ln x)$.

478) $$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x.$$

479) $$\int \frac{dx}{x^n \ln x} = \ln \ln x - (n-1) \ln x + \frac{(n-1)^2 (\ln x)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(n-1)^3 (\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

480) $$\int \frac{dx}{x (\ln x)^n} = \frac{-1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1).$$

481) $$\int \frac{dx}{x^p (\ln x)^n} = \frac{-1}{x^{p-1}(n-1)(\ln x)^{n-1}} - \frac{p-1}{n-1} \int \frac{dx}{x^p (\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1).$$

482) $$\int \ln \sin x \, dx = x \ln x - x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^5}{900} - \dots - \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n+1}}{n(2n+1)!} - \dots^{*}.$$

483) $$\int \ln \cos x \, dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{315} - \dots - \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1) B_n}{n(2n+1)!} x^{2n+1} - \dots^{*}.$$

484) $$\int \ln \operatorname{tg} x \, dx = x \ln x - x + \frac{x^3}{9} + \frac{7x^5}{450} + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1) B_n}{n(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots^{*}.$$

485) $$\int \sin \ln x \, dx = \frac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x).$$

486) $$\int \cos \ln x \, dx = \frac{x}{2}(\sin \ln x + \cos \ln x).$$

487) $$\int e^{ax} \ln x \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \ln x - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx \qquad \text{(v. br. 451).}$$

* B_n su Bernoullijevi brojevi (vidi str. 340).

Integrali ciklometrijskih funkcija

488) $$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

489) $$\int x \arcsin \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

490) $$\int x^2 \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

491) $$\int \frac{\arcsin \frac{x}{a} dx}{x} = \frac{x}{a} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{x^3}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \frac{x^5}{a^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \frac{x^7}{a^7} + \dots$$

492) $$\int \frac{\arcsin \frac{x}{a} dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

493) $$\int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

494) $$\int x \arccos \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

495) $$\int x^2 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

496) $$\int \frac{\arccos \frac{x}{a} dx}{x} = \frac{\pi}{2} \ln x - \frac{x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{x^3}{a^3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \frac{x^5}{a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \frac{x^7}{a^7} - \dots$$

497) $$\int \frac{\arccos \frac{x}{a} dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \arccos \frac{x}{a} + \frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

498) $$\int \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2).$$

499) $$\int x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2}.$$

500) $\int x^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln (a^2 + x^2).$

501) $\int x^n \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{a^2 + x^2} \quad (n \neq -1).$

502) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}\, dx}{x} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3^2 a^3} + \frac{x^5}{5^2 a^5} - \frac{x^7}{7^2 a^7} + \ldots \quad (|x| < |a|).$

503) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}\, dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$

504) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}\, dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)\, x^{n-1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2 + x^2)} \quad (n \neq 1).$

505) $\int \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2).$

506) $\int x \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$

507) $\int x^2 \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6} \ln (a^2 + x^2).$

508) $\int x^n \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{a^2 + x^2} \quad (n \neq 1).$

509) $\int \frac{\operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a}\, dx}{x} = \frac{\pi}{2} \ln x - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2 a^3} - \frac{x^5}{5^2 a^5} + \frac{x^7}{7^2 a^7} - \ldots$

510) $\int \frac{\operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a}\, dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$

511) $\int \frac{\operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a}\, dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)\, x^{n-1}} \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2 + x^2)} \quad (n \neq 1).$

Integral Area-funkcija

512) $\int \operatorname{Ar\,sh} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{Ar\,sh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}.$

513) $\int \operatorname{Ar\,ch} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{Ar\,ch} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2}.$

514) $\int \operatorname{Ar\,th} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{Ar\,th} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (a^2 - x^2).$

515) $\int \operatorname{Ar\,cth} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{Ar\,cth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (x^2 - a^2).$

B. ODREĐENI INTEGRALI

8. OSNOVNI POJMOVI I TEOREMI

Definicija. *Određenim integralom* funkcije $y = f(x)$ u granicama od a do b, zadane u zatvorenom intervalu $[a, b]$* [pri tome može biti $a < b$ (slučaj A) ili $a > b$ (slučaj B)], nazivamo broj koji dobijemo kako slijedi:

1) interval $[a, b]$ podijelimo na n »elementarnih intervala« sa po volji uzetim brojevima $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ izabranim tako, da je

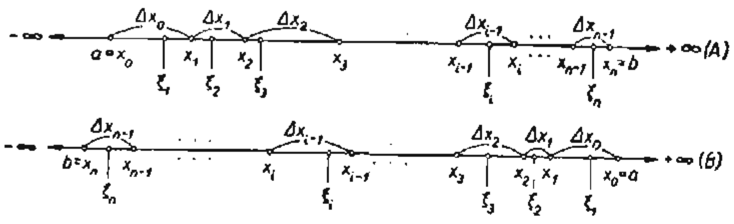
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ (u slučaju A)
ili
$a = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_i > \ldots > x_{n-1} > x_n = b$ (u slučaju B);

2) unutar (ili na rubu) svakog elementarnog intervala $[x_{i-1}, x_i]$ izaberemo po volji broj ξ_i (sl. 302):

$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x$ (u slučaju A) ili $x_{i-1} \geqslant \xi_i \geqslant x_i$ (u slučaju B);

* Pojam određenog integrala može biti poopćen i na funkcije definirane u bilo kojem suvislom području (otvoreni ili poluotvoreni interval, poluos ili čitav brojevni pravac) ili u suvislom području s izuzetkom konačnog broja singularnih tačaka. Integrali koje razmatramo u takvom poopćenom smislu spadaju u neprave integrale (vidi str. 457 do 471).

3) vrijednosti $f(\xi_i)$ funkcije $f(x)$ u tim izabranim tačkama pomnožimo s pripadnim razlikama $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ (duljinama elementarnih intervala $[x_{i-1}, x_i]$, uzetim s predznacima »+« u slučaju A i predznacima »—« u slučaju B)



Sl. 302

4) svih n dobivenih produkata $f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1}$ zbrojimo;

5) izračunamo limes dobivene sume

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1},$$

kada dužina svakog elementarnog intervala Δx_{i-1}, teži k nuli (i stoga i $n \to \infty$).

Ako taj limes postoji i ne zavisi od izbora brojeva x_i i ξ_i, tada se on naziva određeni integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1}. \qquad (*)$$

Teorem egzistencije. Određeni integral funkcije, koja je neprekinuta u intervalu $[a, b]$, postoji, tj. limes $(*)$ postoji i ne zavisi od izbora brojeva x_i i ξ_i.*

Elementi određenog integrala. U formuli $(*)$ simbol $\int$ nazivamo *znakom integrala*, broj a *donjom granicom*, broj b *gornjom granicom*, funkciju $f(x)$ *podintegralnom funkcijom*, izraz $f(x)\,dx$ *podintegralnim izrazom*, slovo x *varijablom integracije*. Vrijednost integrala zavisi samo od oblika funkcije f i od granica a i b, ali ne zavisi od varijable integracije koja može biti označena bilo kojim slovom. Tako je

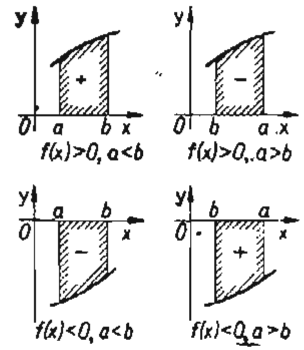
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz \quad \text{itd.}$$

* Određeni integral postoji također i za ograđenu funkciju koja u intervalu $[a\ b]$ ima konačan broj tačaka prekinutosti. Funkcija za koju postoji određeni integral u danom intervalu naziva se *integrabilnom* za taj interval.

Geometrijski smisao određenog integrala neprekinute funkcije. Integral $(*)$ brojčano je jednak površini koja je omeđena dijelom grafa funkcije $y = f(x)$, osi Ox i ordinatama $f(a)$ i $f(b)$, uzetima s predznacima »+« ili »—«, suglasno shemi na sl. 303. Ako krivulja siječe os Ox jedanput ili nekoliko puta unutar intervala $[a, b]$, tada je integral brojčano jednak algebarskoj sumi površina koje se nalaze na obje strane osi Ox.

Integral s jednakim granicama. Prema definiciji je

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$



Sl. 303

Osnovna svojstva određenog integrala izražena su ovim teoremima:

1) *Teorem o zamjeni granica.* Zamjenom granica integral mijenja predznak:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

2) *Teorem o rastavljanju integrala.* Za bilo koje brojeve a, b, c, vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3) *Integral algebarske sume* nekoliko funkcija jednak je sumi integrala tih funkcija:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

4) *Konstantni faktor* možemo izlučiti pred znak integrala:

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

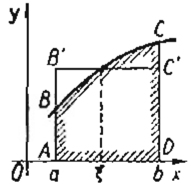
5) *Teorem o srednjoj vrijednosti.* Ako je $f(x)$ neprekinuta u intervalu $[a, b]$, tada unutar intervala $[a, b]$ postoji najmanje jedan takav broj ξ ($a < \xi < b$ u slučaju A, te $a > \xi > b$ u slučaju B, vidi str. 449), da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\,f(\xi).$$

Geometrijski smisao ovog teorema pokazan je na sl. 304: između tačaka a i b postoji takva tačka ξ da je površina lika $ABCD$ jednaka površini pravokutnika $AB'C'D$.

Poopćenje teorema o srednjoj vrijednosti. Za integral produkta dviju funkcija $f(x)$ i $\varphi(x)$ (gdje je $f(x)$ neprekinuta funkcija, a $\varphi(x)$ ne mijenja predznak u intervalu $[a, b]$) postoji unutar toga intervala najmanje jedan takav broj ξ da je

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$



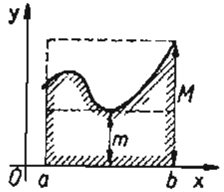
Sl. 304

6) *Teorem o ocjeni integrala.* Vrijednost određenog integrala nalazi se između produkta najmanje i najveće vrijednosti podintegralne funkcije s duljinom intervala u kojem integriramo, tj.

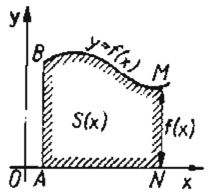
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

gdje je m najmanja, a M najveća vrijednost $f(x)$ u intervalu $[a, b]$.

Geometrijski smisao tog teorema jasan je iz sl. 305.



Sl. 305



Sl. 306

7) *Leibnitz-Newtonov teorem.* Određeni integral s varijabilnom gornjom granicom $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$* neprekinuta je funkcija $F(x)$ te granice, i primitivna u odnosu na podintegralnu funkciju:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ili} \quad \mathrm{d}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Geometrijski smisao tog teorema: derivacija varijabilne površine $S(x)$, koja je prikazana na sl. 306, jednaka je varijabilnoj

* Ovdje je varijabla integracije označena sa t, da je ne bismo zamijenili s varijabilnom granicom x (vidi str. 450).

konačnoj ordinati NM (kako površinu, tako i ordinatu, uzimamo sa predznakom »+« ili »—«, vidi sl. 303 na str. 451).

8) *Osnovni teorem integralnog računa* (izražavanje određenog integrala s neodređenim). Ako je

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

tada je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \qquad (**)$$

Desni dio jednadžbe $(**)$ često označujemo *simbolom supstitucije*:

$$F(b) - F(a) \equiv \Big[F(x)\Big]_a^b \quad \text{ili} \quad F(x)\Big|_a^b.$$

Konstanta integracije C kod supstitucije granica se ukida pa prema tome može biti izostavljena pri računanju određenog integrala prema formuli $(**)$. Na taj način jednadžbu $(**)$ možemo izraziti u obliku

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big]_a^b.$$

Jednadžbu $(**)$ možemo izraziti također i u obliku integrala diferencijala

$$\int_a^b \mathrm{d}\,F(x) = F(b) - F(a).$$

9. IZRAČUNAVANJE ODREĐENIH INTEGRALA

Osnovna metoda za izračunavanje određenih integrala jeste da izrazimo određeni integral pomoću neodređenog integrala (vidi osnovni teorem gore)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big]_a^b.$$

U tom je slučaju za izračunavanje određenog integrala potrebno naći primitivnu funkciju od $f(x)$.

Pravila za pretvaranje određenog integrala. Određeni integral pretvara se u drugi najčešće pomoću pravila, koja su analogna pravilima pretvaranja neodređenih integrala:

1) *Pravilo supstitucije.* S pomoćnom funkcijom $x = \varphi(t)$ (gdje je nova varijabla t jednoznačna funkcija $t = \psi(x)$ u intervalu $[a, b]$) integral se pretvara u oblik

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Ova formula omogućuje da ne treba izvršiti inverznu supstituciju pri određivanju neodređenog integrala.

Primjer:

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} a^2\sqrt{1-\sin^2 t}\,d\sin t^{*} = a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\Big[t\Big]_0^{\pi/2} + \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi}\cos z\,dz^{**} =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\Big[\sin z\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

2) *Pravilo parcijalne integracije.* Pošto podintegralni izraz $f(x)\,dx$ predočimo na bilo koji način u obliku $u\,dv$, nađemo du (diferenciranjem) i v (integriranjem), i pretvorimo dani integral u oblik

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u\,dv = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Primjer:

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = \Big[x e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e-(e-1) = 1.$$

Doskočice. Ako je neodređeni integral veoma teško izračunati ili ga uopće ne možemo izraziti elementarnim funkcijama, tada u nizu slučajeva vrijednost određenog integrala nalazimo pomoću doskočica. Na primjer, možemo se poslužiti svojstvima analitičkih funkcija kompleksne varijable (primjeri na str. 599 i 602) i teoremom o diferenciranju integrala po parametru (vidi str. 472)

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx. \qquad \text{(A)}$$

* Supstitucija $x = \varphi(t) = a\sin t$, $t = \psi(x) = \arcsin\frac{x}{a}$, $\psi(0) = 0$, $\psi(a) = \frac{\pi}{2}$.

** Supstitucija $t = \varphi(z) = \frac{z}{2}$, $z = \psi(t) = 2t$, $\psi(0) = 0$, $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Primjer: Treba izračunati

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx.$$

Uvodimo parametar t i promatramo integral

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t-1}{\ln x}\,dx; \quad F(0) = 0; \quad F(1) = I.$$

Primijenimo li na $F(t)$ formulu (A) imamo

$$\frac{dF}{dt} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{x^t-1}{\ln x}\right]dt = \int_0^1 \frac{x^t\ln x}{\ln x}\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^t\,dx = \left[\frac{1}{t+1}x^{t+1}\right]_0^1 = \frac{1}{t+1}$$

Integriranje daje

$$F(t) - F(0) = \int_0^t \frac{dt}{t+1} = [\ln(t+1)]_0^t = \ln(t+1),$$

odakle je traženi integral $I = F(1) = \ln 2$.

Integriranje razvojem u red. Ako podintegralnu funkciju $f(x)$ možemo izraziti u intervalu integriranja $[a, b]$ jednoliko konvergentnim redom funkcije (vidi str. 343)

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots,$$

tada vrijedi jednadžba

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi_1(x)\,dx + \int \varphi_2(x)\,dx + \ldots + \int \varphi_n(x)\,dx + \ldots$$

pa određeni integral možemo izraziti u obliku konvergentnog reda brojeva

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi_1(x)\,dx + \int_a^b \varphi_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b \varphi_n(x)\,dx + \ldots$$

U slučaju da imamo funkcije $\varphi_i(x)$ koje se lako mogu integrirati (npr. pri razvijanju $f(x)$ u red potencija, koji jednoliko konvergira u intervalu $[a, b]$) integral $\int_a^b f(x)\,dx$ možemo izračunati po volji tačno.

Primjer: Treba izračunati $\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$ s tačnošću do 0,0001.

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

(vidi tablicu na str. 378); red konvergira jednoliko u po volji uzetom konačnom intervalu (prema Abelovom teoremu, vidi str. 344); stoga je

$$\int e^{-x^2}\,dx = x\left(1 - \frac{x^2}{1!\,3} + \frac{x^4}{2!\,5} - \frac{x^6}{3!\,7} + \frac{x^8}{4!\,9} - \dots\right),$$

odakle dobivamo

$$I = \int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 1!\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 2!\cdot 5} - \frac{1}{2^6\cdot 3!\cdot 7} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^8\cdot 4!\cdot 9} - \dots\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{160} - \frac{1}{2688} + \frac{1}{55296} - \dots\right);$$

za izračunavanje I sa zadanom tačnošću možemo se prema Leibnizovom teoremu o alterniranim redovima (vidi str. 339) ograničiti na prva četiri člana razvoja

$$I \approx \frac{1}{2}(1 - 0{,}08333 + 0{,}00625 - 0{,}00037) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}92255 = 0{,}46127,$$

$$\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = 0{,}4613.$$

Metode aproksimacije. Najviše se primjenjuju one koje se osnivaju na zamjeni integrala s konačnom sumom. Da bismo izračunali $\int\limits_a^b y\,dx$ interval od $a(=x_0)$ do $b\,(=x_n)$ razdijelimo na n jednakih dijelova i za diobene tačke $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ izračunamo vrijednosti funkcije y koju integriramo. Zatim se koristimo jednom od triju formula $\left(\text{uzimamo } h = \frac{b-a}{n}\right)$:

1) *Formula pravokutnika* (sl. 307, *a*)

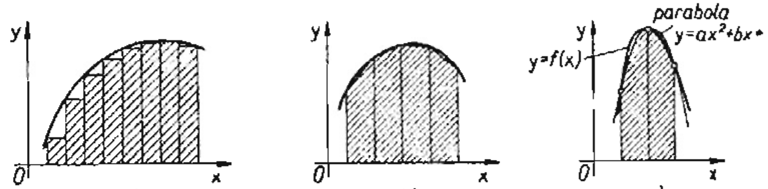
$$\int\limits_a^b y\,dx \approx h\,(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}).$$

2) *Formula trapeza* (sl. 307, *b*)

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

3) *Formula parabole* (*Simpsonova formula*); n je paran (sl. 307, *c*)

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \qquad \text{(I)}$$



Sl. 307

Sve tri formule su to tačnije što je veće n. Pri jednom te istom n druga formula je tačnija od prve, treća još tačnija i prema tome najprikladnija. Da bismo ocijenili pogrešku koja se dobiva pri izračunavanju integrala prema Simpsonovoj formuli (ako je n višekratnik broja 4), izračunat ćemo pomoćnu sumu

$$\frac{2h}{3}(y_0 + 4y_2 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-2} + y_n), \qquad \text{(II)}$$

koja predočuje Simpsonovu formulu za prugu širine $2h$ (dobivamo je izostavljanjem ordinata s neparnim indeksima). Možemo približno uzeti da je

$$\int\limits_a^b y\,dx - \text{(I)} = \frac{\text{(I)} - \text{(II)}}{15}.$$

Ako zamijenimo podintegralnu funkciju s nekim interpolacionim polinomom (vidi str. 665), možemo dobiti mnogo drugih formula za približnu integraciju. Najprikladnije su (oznake vidi na str. 669)

$$\int_a^b y\,dx = 2h\left[(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + \frac{1}{6}(\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_2 + \ldots + \Delta^2 y_{n-2}) - \frac{1}{180}(\Delta^4 y_{-1} + \Delta^4 y_1 + \ldots + \Delta^4 y_{n-3}) + \frac{1}{1512}(\Delta^6 y_{-2} + \Delta^6 y_0 + \ldots + \Delta^6 y_{n-4})\right] \text{ (} n \text{ je paran),}$$

$$\int_a^b y\,dx = h\left[\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{\Delta y_{n-1} + \Delta y_n}{2} - \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2}\right) + \frac{11}{720}\left(\frac{\Delta^3 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-1}}{2} - \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}\right) - \frac{1}{317}\left(\frac{\Delta^5 y_{n-3} + \Delta^5 y_{n-2}}{2} - \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2}\right)\right].$$

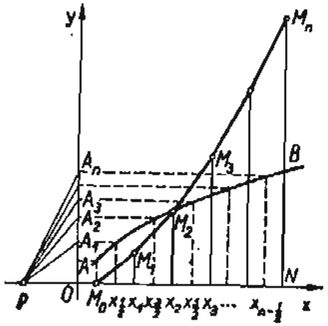
Posljednji se sumand u tim formulama obično ne računa i služi samo za približnu ocjenu pogreške izračunavanja prema zadanoj formuli.

Grafička metoda. Ako je integrabilna funkcija $y = f(x)$ prikazana grafom AB (sl. 308), tada $\int_a^b f(x)\,dx$, koji je jednak površini M_0ABN, možemo naći grafički ovako:

1) M_0N podijelimo na $2n$ jednakih dijelova s tačkama

$x_{1/2}, x_1, x_{3/2}, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1/2}$,

(što je više djelišta, to je tačniji rezultat);



Sl.308

2) U djelištima $x_{1/2}, x_{3/2}, \ldots, x_{n-1/2}$ postavimo ordinate krivulje i nanesemo ih na os Oy (odsječci $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$);

3) Nanesemo odsječak OP po volji odabrane duljine na lijevu stranu osi Ox i spojimo P s tačkama $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

4) Kroz tačku M_0 nanesemo odsječak M_0M_1 paralelno sa PA_1 do sjecišta s ordinatom tačke x_1, kroz M_1 odsječak $M_1M_2 \parallel PA_2$ do sjecišta s ordinatom x_2, zatim $M_2M_3 \parallel PA_3$ itd. dok ne dođemo do posljednje ordinate u tački M_n.

Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ brojčano je jednak produktu duljine odsječaka OP i NM_n; po volji odabranom dužinom OP služimo se za podešavanje dimenzija crteža (što su manje dopuštene dimenzije, to veće moramo odabrati OP). Ako je $OP = 1$, tada je $\int_a^b f(x)\,dx = NM_n$, a lomljena crta (poligonalni potez) $M_0M_1M_2\ldots M_n$ približno predočuje graf primitivne funkcije od $f(x)$ [neodređeni integral $\int f(x)\,dx$].

Računanje pomoću planimetra. Planimetri su naprave kojima možemo odrediti površinu ograđenu zadanom krivuljom i na taj način izračunati određene integrale funkcije $y = f(x)$ koja je zadana svojim grafom. Specijalni planimetri izračunavaju ne samo $\int y\,dx$, nego i $\int y^2\,dx$ i $\int y^3\,dx$.

Integrafi. To su naprave koje crtaju graf integralne funkcije

$$Y = \int_a^x f(t)\,dt$$

prema grafu zadane funkcije $y = f(x)$.

10. PRIMJENA ODREĐENIH INTEGRALA

Opći princip primjene određenog integrala za izračunavanje geometrijskih, fizikalnih i drugih veličina:

1) Veličinu A, koju treba izračunati, podijelimo određenim načinom na mnogo malih veličina: $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

2) Svaku veličinu a_i zamijenimo veličinom $\tilde{a}_i$ (bliskom a_i), koja se izračuna prema poznatoj formuli; pogreška $\alpha_i = a_i - \tilde{a}_i$ mora biti neizmjerno malena veličina višeg reda prema $\tilde{a}_i$, tj. a_i i $\tilde{a}_i$ su ekvivalentne neizmjerno male veličine.

3) Veličinu $\tilde{a}_i$ izrazimo nekom varijablom x, koju izaberemo tako da $\tilde{a}_i$ poprimi oblik $f(x_i)\,\Delta x_i$.

4) Traženu veličinu izračunamo kao limes sume

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

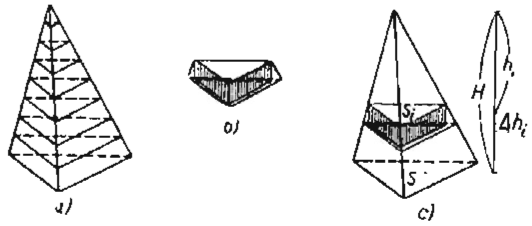
gdje su a i b rubne vrijednosti za x.

Primjer: izračunavanje volumena piramide (S je površina baze, H je visina):

1) Volumen V, koji izračunavamo, razdijelimo ravninskim presjecima na volumene tankih isječenih piramida (sl. 390, *a*)

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n;$$

2) Svaka isječena piramida zamjenjuje se s prizmom $\tilde{v}_i$, iste visine, i s površinom baze koja je jednaka gornjoj površini isječane piramide (sl. 390, *b*). Zanemareni volumen, neizmjerno malen, višeg je reda nego v_i.



Sl. 309

3) Formulu volumena $\tilde{v}_i$ svodimo na oblik $\tilde{v}_i = S_i\,\Delta h_i$, gdje je h_i (sl. 309, *c*) udaljenost gornje plohe do vrha piramide ili (jer je $S_i : S = h_i^2 : H^2$)

$$\tilde{v}_i = \frac{Sh_i^2}{H^2}\Delta h_i;$$

4) Traženi volumen izračunamo kao limes sume

$$V_{\text{pir}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{Sh_i^2}{H^2}\Delta h_i = \int_0^H \frac{Sh^2}{H^2}\,dh = \frac{SH}{3}.$$

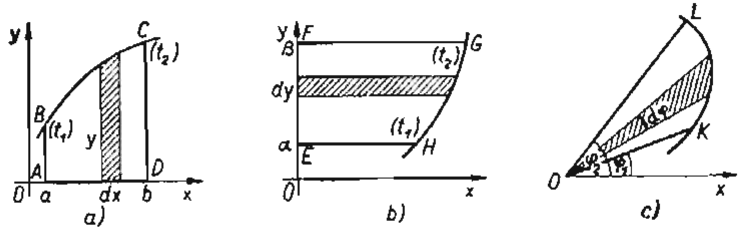
Osnovne primjene u geometriji

Površina. Formula površine *krivocrtnog trapeza* (sl. 310, *a*), ako je jednadžba krivulje zadana eksplicitno [$y = f(x)$ i $a \leqslant x \leqslant b$] ili parametarski [$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$], glasi

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt;$$

formula površine krivocrtnog trapeza prikazanog na sl. 310, *b* [$x = g(y)$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ ili parametarski $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$] glasi

$$S_{EFGH} = \int_\alpha^\beta g(y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt;$$



Sl. 310

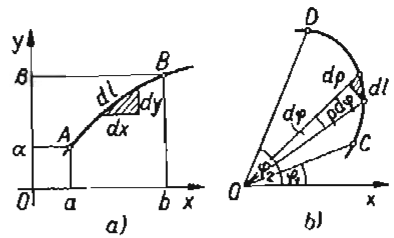
formula površine *krivocrtnog sektora* (sl. 310, *c*), ako je krivulja zadana jednadžbom u polarnim koordinatama [$\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$], glasi

$$S_{OKL} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\,d\varphi.$$

Površine složenijih likova izračunavamo pomoću krivuljnog integrala (vidi str. 480) ili dvostrukog integrala (vidi str. 488).

Duljina luka. Formula za duljinu luka krivulje (sl. 331, *a*), ako je jednadžba krivulje zadana eksplicitno [$y = f(x)$ ili $x = g(y)$] ili parametarski [$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$], glasi

$$L_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{[g'(y)]^2 + 1}\,dy = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt;$$



Sl. 311

ili $L = \int dl$, gdje je dl diferencijal luka: $dl^2 = dx^2 + dy^2$.

Ako je pak krivulja (sl. 311, *b*) zadana jednadžbom u polarnim koordinatama [$\rho = \rho(\varphi)$], tada je

$$L_{\widehat{CD}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$$

ili $L = \int dl$, gdje je dl diferencijal luka: $dl^2 = \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2$.

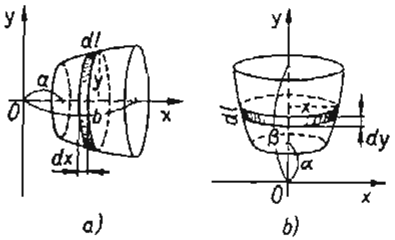
Površina rotacione plohe. Formula za površinu plohe koja je nastala rotacijom krivulje $y = f(x)$ oko osi Ox (sl. 312, *a*) glasi:

$$S = 2\pi \int_a^b y\,dl = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx;$$

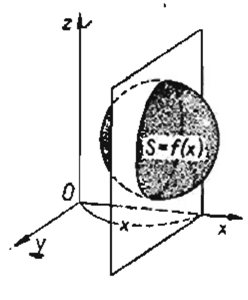
a krivulje $x = f(y)$ oko osi Oy (sl. 312, *b*)

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta x\,dl = 2\pi \int_\alpha^\beta x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy.$$

Izračunavanje površina koje omeđuju složenija tijela vidi na str. 499, 503.



Sl. 312



Sl. 313

Volumen. Formula za volumen rotacionog tijela koje nastaje rotacijom krivulje oko osi Ox (sl. 312, *a*), glasi

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx;$$

a pri rotaciji oko osi Oy (sl. 312, *b*)

$$V = \pi \int_\alpha^\beta x^2\, dy.$$

Formula za volumen tijela, ako je površina njegova presjeka okomitog na os Ox funkcija varijable x [$S = f(x)$] (sl. 313), glasi

$$V = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Volumeni složenijih tijela izračunavaju se pomoću dvostrukih ili trostrukih integrala (vidi str. 489, 497, 498).

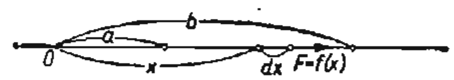
Primjena u mehanici i fizici

Put koji pređe tačka od momenta t_0 do momenta T [ako je brzina gibanja varijabla, zavisna o vremenu $v = f(t)$], određujemo po formuli

$$s = \int_{t_0}^T v\, dt.$$

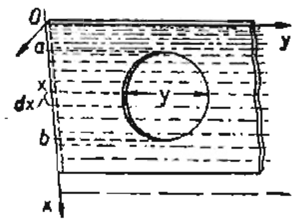
Rad koji vrši sila da pomakne tijelo od $x = a$ do $x = b$ po pravcu Ox, koji se poklapa sa smjerom sile [ako je veličina sile varijabla $F = f(x)$], određuje se prema formuli (sl. 314)

$$A = \int_a^b F\, dx^*.$$

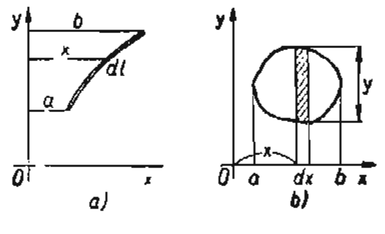


Sl. 314

Pritisak koji proizvodi tekućina specifične težine γ na jednu stranicu u tu tekućinu vertikalno uronjene ploče, ako se razmak (x)



Sl. 315



Sl. 316

tačaka ploče do nivoa tekućine mijenja od a do b (sl. 315), određuje se po formuli

$$P = \int_a^b \gamma x y\, dx,$$

gdje je y duljina horizontalnog presjeka ploče [$y = f(x)$].

* Općenito ako se smjer sile ne poklapa sa smjerom kretanja, a isto tako ako se tijelo giba po krivocrtnom putu, rad se izračunava krivuljnim integralom (vidi str. 624).

Moment inercije: 1) luka homogene krivulje $y = f(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$ s obzirom na os Oy (sl. 316, *a*) određuje se po formuli

$$I_y = \delta \int_a^b x^2 \, dl = \delta \int_a^b x^2 \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \quad (\delta \text{ je linearna gustoća});$$

2) homogenog lika (sl. 316, *b*) s obzirom na os Oy određuje se po formuli

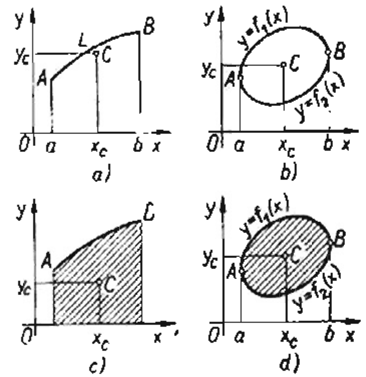
$$I_y = \delta \int_a^b x^2 y \, dx \quad (\delta \text{ je gustoća lika}),$$

gdje je y duljina presjeka, koji je paralelan s osi Oy. Vidi također str. 497.

Težište C luka (sl. 317, *a*) homogene ravninske krivulje $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ ima koordinate

$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} \, dx}{L}, \qquad y_c = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} \, dx}{L},$$

gdje je L duljina krivulje (vidi str. 461 i 462). *Težište zatvorene krivulje* (sl. 317, *b*)



Sl. 317

$$x_c = \frac{\int_a^b x \left[\sqrt{1 + (y_1')^2} + \sqrt{1 + (y_2')^2}\right] dx}{L},$$

$$y_c = \frac{\int_a^b \left[y_1 \sqrt{1 + (y_1')^2} + y_2 \sqrt{1 + (y_2')^2}\right] dx}{L},$$

gdje su $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ jednadžbe gornjeg i donjeg dijela ruba, a L je duljina cijele petlje.

Prvi Guldinov teorem. Površina tijela opisanog ravninskom krivuljom pri rotaciji oko osi koja leži u ravnini te krivulje i koja krivulju ne siječe, jednaka je produktu duljine krivulje i duljine kružnice koju pri toj rotaciji opisuje težište krivulje

$$S_{vr} = L \cdot 2\pi y_c.$$

Težište C homogenog *krivuljnog trapeza* (sl. 317, *c*) ima koordinate

$$x_c = \frac{\int_a^b xy \, dx}{S}, \qquad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 \, dx}{S};$$

gdje je S površina trapeza, a $y = f(x)$ jednadžba krivulje AB. Težište po volji uzete ravninske figure (sl. 317, *d*) ima koordinate

$$x_c = \frac{\int_a^b x (y_1 - y_2) \, dx}{S}, \qquad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (y_1^2 - y_2^2) \, dx}{S},$$

gdje su $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ jednadžbe gornjeg i donjeg dijela ruba, a S je površina figure.

Drugi Guldinov teorem. Volumen tijela opisanog likom pri rotaciji oko osi koja leži u ravnini tog lika, i koja taj lik ne siječe, jednak je produktu površine lika i duljine kružnice koju pri vrtnji opisuje težište tog lika

$$V_{vr} = S \cdot 2\pi y_c.$$

O težištu ravninskih likova i tijela vidi na str. 497 i 498 (višestruki integrali).

11. NEPRAVI INTEGRALI

Opći pojmovi. Najjednostavnije poopćenje određenog integrala (str. 449 i 450) su *nepravi integrali.**

Dva su osnovna tipa nepravih integrala:

1) *Integral s neizmjernim granicama.* Područje definicije podintegralne funkcije je zatvorena poluos $[a, \infty)$ ili $(-\infty, b]$ ili također cijeli brojevni pravac $(-\infty, +\infty)$.

2) *Integrali prekinutih funkcija.* Zadana funkcija je neprekinuta u cijelom intervalu od a do b, osim za neki konačni broj njegovih tačaka, koje nazivamo *singularnim.*

Mogu nastupiti i složeniji slučajevi, koji su kombinacija obaju tipova.

Integrali s neizmjernim granicama

Definicije. Neka je područje definicije zatvorena poluos $[a, \infty)$. Prema definiciji vrijedi

---

* Pojam integrala može biti poopćen i na složenije slučajeve, kada je područje definicije funkcije (područje integracije) skup vrijednosti neke druge funkcije (*integral Stieltjesa*).

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Ako taj limes postoji, tada i integral (1) *postoji* ili *konvergira* i naziva se *nepravim integralom*. Ako limes ne postoji, tada integral (1) *ne postoji* ili *divergira*. U slučaju ako je $\lim\limits_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\,dx = \infty$, upotrebljava se oznaka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \infty$; taj integral divergira.

Analogno se definiraju nepravi integrali za funkcije, definirane na poluosi $(-\infty, b)$ ili na cijelom brojevnom pravcu $(-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_A^B f(x)\,dx^{*}. \qquad (3)$$

Geometrijski smisao integrala s neizmjernim granicama (1), (2) i (3) je limes površina likova prikazanih na sl. 318, *a*, *b*, *c*.

Primjeri:

$$1)\ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B\to\infty} \int_1^B \frac{dx}{x} = \lim_{B\to\infty} \ln B = \infty \quad \text{(divergira)},$$

$$2)\ \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{B\to\infty} \int_2^B \frac{dx}{x^2} = \lim_{B\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{B}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{(konvergira)},$$

$$3)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_A^B \frac{dx}{1+x^2} =$$

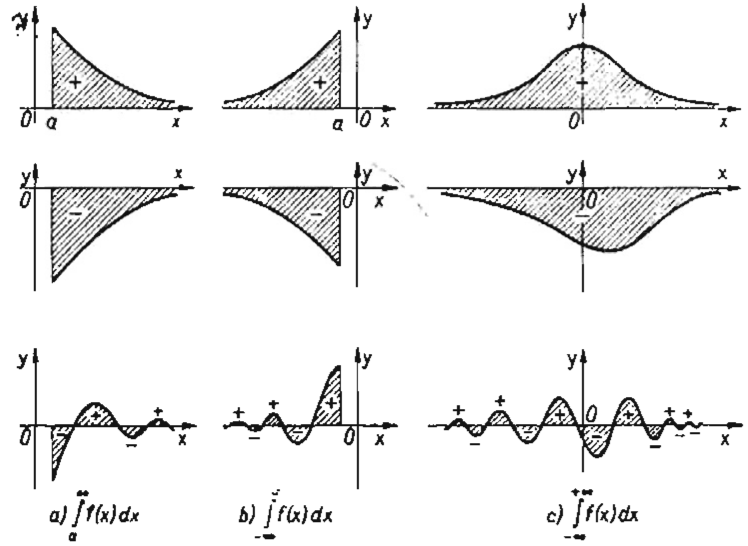
$$= \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} [\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} A] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad \text{(konvergira)}.$$

* Brojevi A i B teže prema neizmjerno nezavisno jedan od drugoga. Ako limes (3) ne postoji, ali ako postoji

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{+A} f(x)\,dx, \qquad (4)$$

tada limes (4) nazivamo *glavnom vrijednošću nepravog integrala*.

Ako je limese (1), (2), (3) teško neposredno odrediti ili treba samo ustanoviti da li integrali konvergiraju ili ne, tada se možemo poslužiti bilo kojim od dovoljnih uvjeta za konvergenciju.



Sl. 318

Dovoljni uvjeti konvergencije. Ovdje je razmotren samo integral tipa (1). Za integral tipa (2) možemo načiniti zamjenu varijabli $x = -z$ i svesti integral na tip (1)

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{\infty} f(-x)\,dx.$$

Integral tipa (3) razdijelimo na sume dvaju integrala tipa (2) i (1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

gdje je c po volji uzet broj.

Uvjet 1: Ako postoji integral $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$, tada postoji i integral (1). U tom slučaju integral (1) nazivamo *apsolutno konvergentnim*, a funkciju $f(x)$ *apsolutno integrabilnom* na poluosi $[a, +\infty)$.

Uvjet 2. Ako su $f(x)$ i $\varphi(x)$ pozitivne funkcije i zadovoljavaju uvjet $f(x) \leqslant \varphi(x)$ za $a \leqslant x < \infty$, tada iz konvergencije integrala

$\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ izlazi konvergencija integrala $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, a iz divergencije integrala $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ divergencija integrala $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$.

Napose, ako uzmemo $\varphi(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ i uočimo da $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$ $\left[\text{on je jednak } \frac{1}{(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}}\right]$ i divergira za $\alpha \leq 1$, možemo taj uvjet dovesti na ovaj oblik:

Uvjet 3. Ako je funkcija $f(x)$ pozitivna za $a \leq x < \infty$ i ako postoji takav broj $\alpha > 1$ da je za dovoljno velik x

$$f(x)\cdot x^\alpha < c,$$

tada integral (1) konvergira; ako je pak $f(x)$ pozitivna funkcija i ako postoji takav broj $\alpha \leq 1$ da je

$$f(x)\cdot x^\alpha > c > 0,$$

tada integral (1) divergira.

Primjer: $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3/2}\,dx}{1+x^2}$. Uzmemo li da je $\alpha = \frac{1}{2}$, dobivamo

$\frac{x^{3/2}}{1+x^2}\cdot x^{1/2} = \frac{x^2}{1+x^2} \to 1$; taj integral divergira.

Veza nepravih integrala s beskonačnim redovima. Ako je $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ po volji uzet neograđen uzlazan niz, tj.

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots,\ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \tag{A}$$

i ako je $f(x)$ pozitivna funkcija za $a \leq x < \infty$, tada pitanje konvergencije integrala (1) možemo svesti na pitanje konvergencije reda

$$\int\limits_a^{x_1} f(x)\,dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx + \ldots \tag{B}$$

Ako red (B) konvergira, tada i integral (1) konvergira i jednak je sumi tog reda; ako red (B) divergira, tada divergira i integral (1). Ovo nam omogućuje da se koristimo uvjetima konvergencije redova za konvergenciju integrala. [Integralni uvjet konvergencije redova (str. 337) svodi pitanje konvergencije reda na pitanje konvergencije nepravih integrala.]

Integrali prekinutih funkcija

Definicija. Neka je područje definicije funkcije poluotvoreni interval $[a, b)$ ili zatvoreni interval $[a, b]$, ali s time da je u tački b limes $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$. U oba slučaja je prema definiciji

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Ako taj limes postoji, tada integral (1) *postoji* ili *konvergira* i nazivamo ga *nepravim integralom.* Ako pak limes ne postoji, tada integral (1) *ne postoji* ili *divergira.* U slučaju da je $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \infty$, upotrebljavamo oznaku

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \infty;$$

taj integral divergira.

Integral (1) uvijek postoji ako je funkcija $f(x)$ po odsječcima neprekinuta i ograđena u području $[a, b)$. U daljnjem ćemo pretpostaviti da funkcija $f(x)$ nije ograđena, tj. da je $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$.

Analogno definiramo nepravi integral za funkciju zadanu u intervalu koji je otvoren slijeva $(a, b]$ ili u intervalu $[a, b]$, ali za $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Na kraju, ako je funkcija definirana na cijelom intervalu $[a, b]$ s isključenjem unutrašnje tačke c $(a < c < b)$, tj. u dva poluotvorena intervala $[a, c)$ i $(c, b]$, ili je definirana i u tački c, ali je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$, tada se nepravi integral definira ovako:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx^{*}. \tag{3}$$

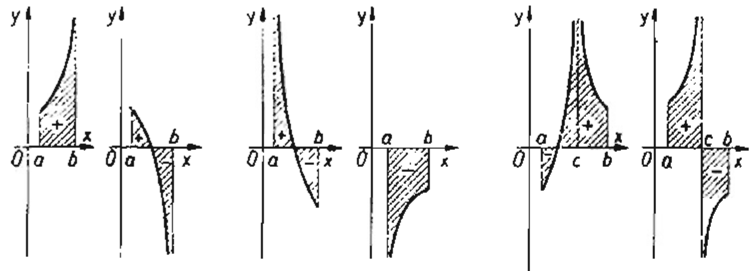
Brojevi ε i δ teže k nuli nezavisno jedan od drugog. Ako limes (3) ne postoji, ali postoji

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right\}, \tag{4}$$

tada limes (4) nazivamo *glavnom vrijednošću nepravog integrala.*

* Analogno slučaju (1), za integrale (2) i (3) ćemo pretpostaviti da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$.

Geometrijski smisao integrala prekinutih funkcija (1), (2), (3) je površina beskonačno rastegnutih likova, koja ima oblik prikazan na sl. 319 (krivulje imaju vertikalnu asimptotu).



a) slučaj (1) b) slučaj (2) c) slučaj (3)

Sl. 319

Primjeri: 1) $\int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$; slučaj (2), singularna tačka $x = 0$;

$$\int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\varepsilon^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(2\sqrt{b} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\sqrt{b} \quad \text{(konvergira)}:$$

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx$; slučaj (1), singularna tačka $x = \frac{\pi}{2}$;

$$\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{\pi/2 - \varepsilon} \operatorname{tg} x \, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln \cos 0 - \ln \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right] = \infty \quad \text{(divergira)}.$$

3) $\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} dx$; slučaj (3), singularna tačka $x = 0$;

$$\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\delta}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{2}\left(\varepsilon^{2/3} - 1\right) + \lim_{\delta \to 0} \frac{3}{2}\left(4 - \delta^{2/3}\right) = \frac{9}{2} \quad \text{(konvergira)}.$$

4) $\int\limits_{-2}^{+2} \frac{2x\,dx}{x^2 - 1}$; slučaj (3), singularne tačke $x = -1$ i $x = +1$;

$$\int\limits_{-2}^{+2} \frac{2x\,dx}{x^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-2}^{-1-\varepsilon} + \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \nu \to 0}} \int\limits_{-1+\delta}^{1-\nu} + \lim_{\gamma \to 0} \int\limits_{1+\gamma}^{+2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \ln (x^2 - 1) \Big|_{-2}^{-1-\varepsilon} + \ldots =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 1) - \ln 3\right] + \ldots = \infty \quad \text{(divergira)}.$$

O primjeni osnovnog teorema integralnog računa. Pri računanju nepravih integrala sa singularnim tačkama tipa (3) ne možemo mehanički primijeniti osnovni teorem (str. 452 i 453)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b, \text{ gdje je } F'(x) = f(x),$$

a da ne bismo u obzir uzeli singularne tačke unutar intervala $[a, b]$: ovo može lako dovesti do pogrešaka. Jer, primjenjujući osnovni teorem na primjer (4), dobivamo

$$\int\limits_{-2}^{+2} \frac{2x\,dx}{x^2 - 1} = \ln (x^2 - 1) \Big|_{-2}^{+2} = \ln 3 - \ln 3 = 0;$$

u isto vrijeme integral divergira.

Opće pravilo: osnovni teorem za slučaj (3) možemo primijeniti samo onda kada je primitivna funkcija od $f(x)$ u singularnoj tački neprekinuta.

U primjeru (4) toga nema: funkcija $\ln (x^2 - 1)$ za $x = \pm 1$ je prekinuta; u primjeru pak (3) funkcija $\frac{3}{2} x^{2/3}$ za $x = 0$ neprekinuta je i prema tome na primjer (3) možemo primijeniti osnovni teorem:

$$\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{-1}^{8} = \frac{3}{2}\left(8^{2/3} - 1^{2/3}\right) = \frac{9}{2}.$$

Dovoljni uvjeti za konvergenciju integrala prekinute funkcije.

1) Ako postoji integral $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, tada postoji i integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, koji u tom slučaju nazivamo *apsolutno konvergentnim*, a funkciju $f(x)$ *apsolutno integrabilnom* u danom intervalu.

2) Ako je $f(x)$ pozitivna funkcija u području $[a, b)$ i ako postoji takav broj $\alpha < 1$ da je za vrijednosti x, koje su dovoljno blizu b

$$f(x)(b-x)^\alpha < c,$$

tada integral (1) konvergira; ako je pak $f(x)$ pozitivna u području $[a, b)$ i ako postoji takav broj $\alpha > 1$ da je za vrijednosti x, koje su dovoljno blizu b

$$f(x)(b-x)^\alpha > c > 0,$$

integral (1) divergira.

12. INTEGRALI OVISNI O PARAMETRU

Definicija: Određeni integral

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = F(y) \tag{1}$$

je funkcija s jednom varijablom y, koju u tom slučaju nazivamo *parametrom*.

Funkcija $F(y)$ u mnogim slučajevima nije elementarna funkcija. Integral (1) može biti obični integral ili nepravi [s neizmjernim granicama ili integral prekinute funkcije $f(x, y)$].

Primjer

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x}\,dx \quad \text{(konvergira za } y > 0)$$

je *gama funkcija* ili *Eulerov integral druge vrste*.

Diferenciranje pod integralom. Ako je funkcija (1) definirana u intervalu $c \leqslant y \leqslant e$ i ako je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u pravokutniku $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant e$ i ako ima u tom području parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial y}$ tada za bilo koji y u intervalu $[c, e]$ vrijedi formula

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx \tag{2}$$

(*diferenciranje pod znakom integrala*).

Primjer: U bilo kom intervalu vrijedi za $y > 0$

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\,dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)dx = -\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}.$$

Provjeravanje: $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\,dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}y\ln\frac{y^2}{1+y^2}$;

$$\frac{d}{dy}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}y\ln\frac{y^2}{1+y^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}.$$

Za $y = 0$ uvjet neprekinutosti funkcije nije ispunjen: derivacije nema.

Poopćenje formule (2) *za slučaj kada i granice integrala zavise od parametra.* Ako su za iste uvjete funkcije $\alpha(y)$ i $\beta(y)$ definirane u intervalu $[c, e]$ i ako imaju neprekinute derivacije $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$ i ako krivulje $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ ne izlaze iz pravokutnika $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant e$, tada formula (2) dopušta poopćenje

$$\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx =$$

$$= \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx + \beta'(y)\cdot f[\beta(y), y] - \alpha'(y)\cdot f[\alpha(y), y]. \tag{2'}$$

Integriranje pod integralom. Ako je funkcija (1) definirana u intervalu $[c, e]$ i ako je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u pravokutniku $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant e$, tada vrijedi formula

$$\int_c^e \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^e f(x, y)\,dy\right] dx \tag{3}$$

(*integriranje pod integralom*).

Primjeri: 1) $f(x, y) = x^y$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ a \leqslant y \leqslant b;\ a > 0)$. Za $a > 0$ uvjeti neprekinutosti su ispunjeni; funkcija x^y ima prekinutost za $x = 0$, $y = 0$. Tada je

$$\int_a^b \left[\int_0^1 x^y\,dx\right] dy = \int_0^1 \left[\int_a^b x^y\,dy\right] dx.$$

Lijevi dio daje $\displaystyle\int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln\frac{1+b}{1+a}$; desni dio daje $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$; neodređeni se integral ne može izraziti s elementarnim funkcijama, ali je određeni integral nađen:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \ln\frac{1+b}{1+a} \quad (a < 0 < b).$$

2. $f(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ $(0 < x < 1,\ 0 < y < 1)$. U tački $(0, 0)$ funkcija ima prekinutost, formulu (3) ne možemo primijeniti. Provjeravanje:

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2 + y^2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1 + y^2};$$

$$\int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = \operatorname{arc\,tg} y\,\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dy = -\frac{y}{x^2 + y^2}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{x^2 + 1};$$

$$-\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = -\operatorname{arc\,tg} x\,\Bigg|_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

13. TABLICA NEKIH ODREĐENIH INTEGRALA

Integrali eksponencijalnih funkcija (u vezi s algebarskim, trigonometrijskim i logaritamskim)

$$1)\ \int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}^{*} \quad \text{za } a > 0,\ n > -1.$$

Napose za cijeli $n > 0$ taj je integral jednak $\dfrac{n!}{a^{n+1}}$.

$$2)\ \int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{(n+1)/2}}^{*} \quad \text{za } a > 0,\ n > -1.$$

Napose za cijeli i parni n $(n = 2k)$ taj je integral jednak $\dfrac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1} a^{k+1/2}}$, a za cijeli i neparni n $(n = 2k + 1)$ jednak $\dfrac{k!}{2a^{k+1}}$.

* O funkciji Γ (gama) vidi na str. 184; tablicu $\Gamma(x)$ vidi na str. 82.

$$3)\ \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad \text{za } a > 0.$$

$$4)\ \int_0^\infty x^2 e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3} \quad \text{za } a > 0.$$

$$5)\ \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-b^2/4a^2} \quad \text{za } a > 0.$$

$$6)\ \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$7)\ \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$8)\ \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,dx = \operatorname{arc\,ctg} a = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} \quad \text{za } a > 0.$$

$$9)\ \int_0^\infty e^{-x} \ln x\,dx = -C \approx -0{,}5772^{*}.$$

Integrali trigonometrijskih funkcija (u vezi s algebarskim)

$$10)\ \int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha+1} x \cos^{2\beta+1} x\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+2)} =$$

$$= \frac{1}{2} B(\alpha+1, \beta+1)^{**} = \frac{\alpha!\,\beta!}{2(\alpha+\beta+1)!}$$

(za cijele i pozitivne α i β).

* C je Eulerova konstanta (vidi str. 317).

** $B(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ je beta-funkcija ili Eulerov integral prve vrste, $\Gamma(x)$ je gama-funkcija ili Eulerov integral druge vrste (vidi str. 184).

Ta formula vrijedi za po volji uzete α i β; upotrebljiva je za izračunavanje integrala

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\sin x}\, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}} \quad \text{itd.}$$

11) $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{za } a > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{za } a < 0. \end{cases}$$

12) $$\int_0^\alpha \frac{\cos ax\, dx}{x} = \infty \quad (\alpha \text{ je po volji uzet broj})$$

13) $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} ax\, dx}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{za } a > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{za } a < 0. \end{cases}$$

14) $$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx = \ln \frac{b}{a}.$$

15) $$\int_0^\infty \frac{\sin x \cos ax}{x}\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{za } |a| < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{za } |a| = 1 \\ 0 & \text{za } |a| > 1 \end{cases}$$

16) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

17) $$\int_0^\infty \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2}\, dx = \pm \frac{\pi}{2} e^{-|ab|}$$

(predznak se podudara s predznakom broja b)

18) $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}.$$

19) $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} |a|.$$

20) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

21) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \quad \text{za } |k| < 1.$$

22) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k} \arcsin k \quad \text{za } |k| < 1.$$

23) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\, dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k^2} (K - E)^* \quad \text{za } |k| < 1.$$

24) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\, dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k^2} [E - (1 - k^2) K]^* \quad \text{za } |k| < 1.$$

25) $$\int_0^\pi \frac{\cos ax\, dx}{1 - 2b \cos x + b^2} = \frac{\pi b^a}{1 - b^2} \quad \text{za cio } a \geqslant 0, |b| < 1.$$

Integrali logaritamskih funkcija (u vezi s algebarskim i trigonometrijskim)

26) $$\int_0^1 \ln |\ln x|\, dx = -C \approx -0{,}5772^{**} \quad (\text{svodi se na br. 9})$$

27) $$\int_0^1 \frac{\ln x}{x - 1}\, dx = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{svodi se na br. 6}).$$

---

* E i K su potpuni eliptički integrali:

$$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \quad K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$ (vidi str. 398 i tablicu na str. 87).

** C = Eulerova konstanta.

28) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}$ (svodi se na br. 7).

29) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{8}.$

30) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

31) $\int\limits_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right)^a dx = \Gamma(a+1)^*$ $(-1 < a < \infty)$

32) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$

33) $\int\limits_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi^2\ln 2}{2}.$

34) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\ln\sin x\,dx = \ln 2 - 1.$

35) $\int\limits_0^{\pi} \ln(a \pm b\cos x)\,dx = \pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}$ za $a \geqslant b$.

36) $\int\limits_0^{\pi} \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2)\,dx = \begin{cases} 2\pi\ln a & (a \geqslant b > 0), \\ 2\pi\ln b & (b \geqslant a > 0). \end{cases}$

37) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\operatorname{tg} x\,dx = 0.$

38) $\int\limits_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

---

* $\Gamma(x)$ je gama-funkcija (vidi str. 184 i tablicu na str. 82).

Integrali algebarskih funkcija

39) $\int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx = 2\int\limits_0^1 x^{2\alpha+1}(1-x^2)^{\beta}\,dx =$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = B(\alpha+1, \beta+1)^*$$

(svodi se na br. 10).

40) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\,x^a} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ za $a < 1$.

41) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1-x)\,x^a} = -\pi\operatorname{ctg} a\pi$ za $a < 1$.

42) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx = \frac{\pi}{b\sin\frac{a\pi}{b}}$ za $0 < a < b$.

43) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)^{**}}{a\,\Gamma\left(\frac{2+a}{2a}\right)}.$

44) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2} = \frac{a}{2\sin a}$ $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right).$

45) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+2x\cos a+x^2} = \frac{a}{\sin a}$ $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right).$

C. KRIVULJNI, VIŠESTRUKI I PLOŠNI INTEGRALI

Pojam određenog integrala (vidi str. 449 do 453) možemo poopćiti u različitim smjerovima. Područje integriranja jednostrukog određenog integrala je dio (interval) $[a, b]$ brojevnog pravca. Ako za područje integriranja uzmemo dio neke krivulje (ravninske ili prostorne), dobivamo krivuljni integral; ako uzmemo neki dio ravnine, tada dobivamo dvostruki integral; ako uzmemo dio prostora (volumen), dobivamo trostruki integral.

---

* $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ je beta funkcija ili Eulerov integral prve vrste.

** $\Gamma(x)$ je gama-funkcija ili Eulerov integral druge vrste (vidi str. 184).

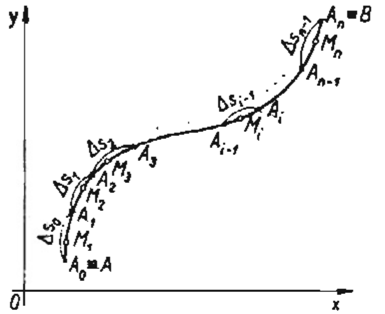
14. KRIVULJNI INTEGRALI PRVOG TIPA

(Integrali po luku krivulje)

Definicija. *Krivuljnim integralom prvog tipa*

$$\int_{(K)} f(x, y)\, ds$$

funkcije sa dvije varijable $u = f(x, y)$ (definirane u nekom suvislom području*), *uzetim na dijelu* $K \equiv \widehat{AB}$ *ravninske krivulje* zadane svojom jednadžbom (taj se dio nalazi u istom području i naziva se *put integracije*), naziva se broj koji dobivamo na ovaj način (sl. 320).



Sl. 320

1) Dio AB razdijelimo na n »elementarnih dijelova« sa po volji uzetim tačkama $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, počevši od početka dijela $A \equiv A_0$ do njegovog kraja $B \equiv A_n$.

2) Unutar (ili na granici) svakog elementarnog dijela $A_{i-1}A$ izabire se jedna po volji uzeta tačka M_i s koordinatama ξ_i, η_i.

3) Vrijednost funkcije $f(\xi_i, \eta_i)$ u tim izabranim tačkama pomnožimo s duljinom dijelova $A_{i-1}A_i = \Delta S_{i-1}$ (te duljine smatramo pozivitnim).

4) Svih dobivenih n produkata $f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_{i-1}$ zbrojimo.

5) Izračunamo limes dobivene sume

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_{i-1},$$

kada duljina svakog elementarnog dijela ΔS_{i-1} teži k nuli (i kada $n \to \infty$).

* O suvislom području dviju varijabli vidi str. 328.

Ako taj limes postoji i ne zavisi od izbora tačaka A_i i M_i, tada se naziva krivuljnim integralom prvog tipa

$$\int_{(K)} f(x, y)\, ds = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_{i-1}. \tag{A}$$

Analogno se određuje *krivuljni integral prvog tipa funkcije sa tri varijable* $u = f(x, y, z)$, *uzet po dijelu* K *prostorne krivulje*:

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, ds = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta s_{i-1}. \tag{B}$$

Teorem egzistencije. Ako je funkcija $f(x, y)$ ili $f(x, y, z)$ neprekinuta, a krivulja na dijelu K neprekinuta i ima tangentu koja se neprekinuto mijenja, tada krivuljni integral prvog tipa (A) ili (B) postoji (tj. limesi postoje i ne zavise o izboru tačaka A_i i M_i).

Izračunavanje krivuljnog integrala prvog tipa svodi se na izračunavanje određenog integrala. Ako su jednadžbe puta integracije zadane u parametarskom obliku (vidi str. 266 i 285) $x = x(t)$, $y = y(t)$ i (za prostornu krivulju) $z = z(t)$, tada je

$$\int_{(K)} f(x, y)\, ds = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \quad \text{(za slučaj A)}$$

i

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, ds =$$

$$= \int_{t_0}^{T} f[x(t),\; y(t),\; z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt \quad \text{(za slučaj B);}$$

ovdje je t_0 vrijednost parametra t za tačku A, a T za tačku B, pri čemu se tačke A i B izabiru tako, da bude $t_0 < T$.

Ako je jednadžba puta integracije zadana u eksplicitnom obliku: $y = \varphi(x)$ za ravninsku krivulju ili $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ za prostornu krivulju, i ako su a i b apscise tačaka A i B $(a < b)$*, tada je

$$\int_{(K)} f(x, y)\, ds = \int_{a}^{b} f[x, \varphi(x)] \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\, dx \quad \text{(za slučaj A)}$$

i

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, ds = \int_{a}^{b} f[x, \varphi(x), \psi(x)] \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2 + [\psi'(x)]^2}\, dx \quad \text{(za slučaj B).}$$

* Pri tom se pretpostavlja, da odsječak krivulje K ima takav oblik da svakoj tački njegove projekcije na os Ox odgovara jednoznačno određena tačka odsječka K (tačka krivulje jednoznačeno je određena svojom apscisom). Ako to nije ispunjeno, tada odsječak K dijelimo na nekoliko dijelova, od kojih svaki ima tražena svojstva: krivuljni integral na cijelom odsječku smatramo sumom integrala uzetih po dijelovima odsječka.

Primjena krivuljnog integrala prvog tipa:

1) *Duljina* krivuljnog luka K:

$$L_{(K)} = \int\limits_{(K)} ds.$$

2) *Masa* nehomogenog krivuljnog luka K, ako je δ varijabilna linearna gustoća [$\delta = f(x, y)$ za ravninsku ili $\delta = f(x, y, z)$ za prostornu krivulju]:

$$M_{(K)} = \int\limits_{(K)} \delta \, ds.$$

15. KRIVULJNI INTEGRALI DRUGOG TIPA

(Integrali po projekciji i integrali općeg oblika)

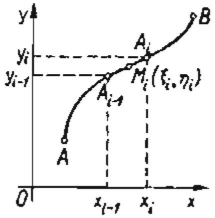
Definicije. *Krivuljnim integralom drugog tipa*

$$\int\limits_{(K)} f(x, y) \, dx \qquad (A_x)$$

ili

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z) \, dx \qquad (B_x)$$

funkcije dviju varijabli $f(x, y)$ *ili triju varijabli* $f(x, y, z)$ (zadane u nekom suvislom području), *na projekciji dijela* $K \equiv \widehat{AB}$ *ravninske (ili prostorne) krivulje* (put integracije nalazi se također u tom području) na os Ox nazivamo broj, koji dobivamo isto tako kao i krivuljni integral prvog tipa (vidi str. 480 i 481), s jednom razlikom: u etapi 3) ne množimo vrijednosti funkcija $f(\xi_i, \eta_i)$ [odnosno $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$] s duljinom dijelova $A_{i-1} A_i$, već sa njihovom projekcijom na os Ox (v. sl. 321):



Sl. 321

$$pr_x \widehat{A_{i-1} A_i} = x_i - x_{i-1} = \Delta x_{i-1}.$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y) \, dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \, \Delta x_{i-1}, \quad (A_x)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z) \, dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \, \Delta x_{i-1}. \qquad (B_x)$$

Analogno definiramo krivuljne integrale drugog tipa, po projekciji dijela K krivulje na os Oy [a za slučaj (B) i na os Oz)]:

$$\int\limits_{(K)} f(x, y) \, dy = \lim_{\substack{\Delta y_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \, \Delta y_{i-1}, \qquad (A_y)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z) \, dy = \lim_{\substack{\Delta y_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \, \Delta y_{i-1}, \qquad (B_y)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z) \, dz = \lim_{\substack{\Delta z_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \, \Delta z_{i-1}. \qquad (B_z)$$

Teorem egzistencije. Ako je funkcija $f(x, y)$ ili $f(x, y, z)$ neprekinuta, a krivulja na luku K neprekinuta i ima neprekinuto promjenljivu tangentu, tada krivuljni integrali drugog tipa (A_x), (A_y), (B_x), (B_y) i (B_z) postoje.

Izračunavanje krivuljnih integrala drugog tipa svodimo na izračunavanje određenih integrala. Ako su jednadžbe puta integracije zadane u parametarskom obliku (vidi str. 234 i 250)

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{i} \quad (\text{za prostornu krivulju}) \quad z = z(t),$$

tada se integrali (A_x), (A_y), (B_x), (B_y), (B_z) izračunavaju po ovim formulama:

$$\int\limits_{(K)} f(x, y) \, dx = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t), y(t)] \, x'(t) \, dt, \qquad (A_x)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y) \, dy = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t), y(t)] \, y'(t) \, dt, \qquad (A_y)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z) \, dx = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)] \, x'(t) \, dt, \qquad (B_x)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z) \, dy = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)] \, y'(t) \, dt, \qquad (B_y)$$

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z) \, dz = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)] \, z'(t) \, dt. \qquad (B_z)$$

Ovdje su t_0 i T vrijednosti parametra t s obzirom na početak A i kraj B luka. Za razliku od krivuljnog integrala prvoga tipa ovdje nije potrebno da bude $t_0 < T$; ako zamijenimo tačke A i B (promjena smjera puta integracije), integrali mijenjaju predznak.

Ako su jednadžbe puta integracije zadane eksplicitno: $y = \varphi(x)$ za ravninsku krivulju i $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ za prostornu krivulju, i ako a i b odgovaraju apscisama tačaka A i B*, tada je u formulama (A_x) — (B_z) apscisa x parametar.

Krivuljni integral općeg oblika.** Ako su u nekom suvislom području zadane dvije funkcije sa dvije varijable $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ ili tri funkcije sa tri varijable $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$ i dio K ravninske [ili prostorne] krivulje, tada *krivuljnim integralom općeg oblika* nazivamo sumu integrala drugog tipa po svim projekcijama:

$$\int_{(K)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(K)} P\,dx + \int_{(K)} Q\,dy \qquad \text{za ravninsku krivulju}$$

$$\int_{(K)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{(K)} P\,dx + \int_{(K)} Q\,dy + \int_{(K)} R\,dz$$

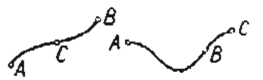
za prostornu krivulju.

Svojstva krivuljnog integrala:

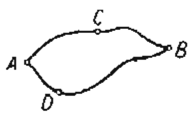
1) Integral se može razdijeliti na dva integrala tačkom koja može ležati unutar ili izvan odsječka $\widehat{AB}$:

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\widehat{AC}} P\,dx + Q\,dy + \int_{\widehat{CB}} P\,dx + Q\,dy^{***}$$

(sl. 322, *a*, *b*).



Sl. 322



Sl. 323

2) Pri integraciji po istom putu, ali u obratnom smjeru, integral mijenja predznak:

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\widehat{BA}} P\,dx + Q\,dy^{***}.$$

3) Krivuljni integral općenito zavisi i od početne i konačne tačke A i B, i od puta integracije koji ih povezuje:

$$\int_{\widehat{ACB}} P\,dx + Q\,dy \neq \int_{\widehat{ADB}} P\,dx + Q\,dy^{***} \quad \text{(sl. 323).}$$

* Ovdje zahtjev da je $a < b$ nije obvezatan.

** Vektorsko izlaganje teorije krivuljnog integrala općeg oblika i mehaničko značenje takvog integrala vidi u glavi »Teorija polja« na str. 624.

*** Analogne formule vrijede i za slučaj triju varijabli.

Primjeri izračunavanja krivuljnog integrala:

1) $I = \int\limits_{(K)} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, gdje je (K) jedan zavoj zavojnice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ (vidi str. 290) od $t_0 = 0$ do $T = 2\pi$:

$$I = \int_0^{2\pi} (-a^3 \sin^2 t \cos t + a^2bt \sin t \cos t + ab^2t \cos t)\,dt = -\frac{\pi a^2 b}{2}.$$

2) $I = \int\limits_{(K)} y^2\,dx + (xy - x^2)\,dy$, gdje je (K) luk parabole $y^2 = 9x$ od tačke $A(0, 0)$ do $B(1, 3)$:

$$I = \int_0^3 \left[\frac{2}{9}y^3 + \left(\frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{81}\right)\right] dy = 6\frac{3}{20}.$$

Cirkulacijom nazivamo krivuljni integral po zatvorenoj krivulji (označuje se $\oint\limits_{(C)} P\,dx + Q\,dy$ ili $\oint\limits_{(C)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, gdje je C zatvoren put integracije, kojemu se početak A podudara s krajem B). Cirkulacija općenito nije jednaka nuli.

Površinu lika možemo izračunati kao cirkulaciju

$$S = \frac{1}{2}\oint_{(C)} (x\,dy - y\,dx),$$

gdje je C krivulja koja omeđuje lik (put integracije prolazi se u suprotnom smislu od gibanja kazaljke na satu).

Uvjet nezavisnosti krivuljnog integrala od puta (*integrabilnost totalnog diferencijala*).

Slučaj dviju dimenzija. Da bi krivuljni integral

$$\int P(x, x)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

gdje su P i Q neprekinute funkcije u jednostruko suvislom području, zavisio samo od početne i konačne tačke A i B i da ne bi zavisio od puta koji ih spaja i koji leži u tom području, tj. ako za po volji odabrane A i B i po volji odabrane putove ACB i ADB (sl. 323) vrijedi jednadžba $\int\limits_{\widehat{ACB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\widehat{ADB}} P\,dx + Q\,dy$, nužno je i dovoljno da postoji takva funkcija dviju varijabli $U(x, y)$, kojoj bi totalni diferencijal bio podintegralni izraz

$$P\,dx + Q\,dy = dU, \tag{1}$$

tj.

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{2}$$

Takva funkcija $U(x, y)$ naziva se primitivnom funkcijom totalnog diferencijala (1).

Nuždan i dovoljan uvjet da primitivna funkcija postoji (uvjet integrabilnosti izraza $P\,dx + Q\,dy$), jest

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3}$$

uz uvjet da su te dvije parcijalne derivacije neprekinute.

Slučaj triju dimenzija. Uvjet nezavisnosti krivuljnog integrala

$$\int P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

od puta integracije je analogan; mora postojati *primitivna* funkcija $U(x, y, z)$ i to takva da je

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU, \tag{1'}$$

tj.

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{2'}$$

Uvjet integrabilnosti u tom se slučaju sastoji od tri jednadžbe koje moraju biti istovremeno zadovoljene:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3'}$$

uz dodatni uvjet da su te parcijalne derivacije neprekinute.

Izračunavanje primitivne funkcije. Pri ispunjenim uvjetima (3) primitivna funkcija $U(x, y)$ jednaka je krivuljnom integralu

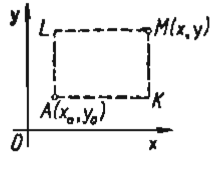
$$U = \int_{\widehat{AM}} P\,dx + Q\,dy$$

za po volji odabrani put [unutar područja gdje su ispunjeni uvjeti (3)], koji spaja po volji odabranu fiksiranu tačku A s koordinatama (x_0, y_0), s pomičnom tačkom M, kojoj su koordinate (x, y). Praktički je za taj put [ako on ne izlazi iz područja ispunjenih uvjeta (3)] najpodesnije uzeti jednu od dviju lomljenih crta AKM ili ALM sa stranicama koje su paralelne koordinatnim osima (sl. 324). Ovo daje dvije računske formule za primitivnu funkciju $U(x, y)$ totalnog diferencijala $P\,dx + Q\,dy$

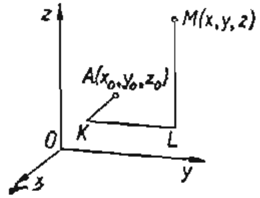
* Primitivna funkcija $U(x, y)$ je potencijal vektorskog polja $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ (u drugoj terminologiji je ona potencijal sa suprotnim predznakom), vidi str. 625.

$$U = \int_{\overline{AK}} + \int_{\overline{KM}} + U(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta)\,d\eta + C, \tag{4$_1$}$$

$$U = \int_{\overline{AL}} + \int_{\overline{LM}} + U(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta)\,d\eta + \int_{x_0}^{x} P(\xi, y)\,d\xi + C'. \tag{4$_2$}$$



Sl. 324



Sl. 325

U trodimenzionalnom slučaju, uz ispunjenje uvjete (3'), analogno računamo primitivnu $U(x, y, z)$ prema ovoj formuli (sl. 325):

$$U = \int_{\overline{AK}} + \int_{\overline{KL}} + \int_{\overline{LM}} + U(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0, z_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta, z_0)\,d\eta + \int_{z_0}^{z} R(x, y, \zeta)\,d\zeta + C \tag{4'}$$

ili prema pet analognih formula koje odgovaraju drugim mogućim lomljenim crtama sa stranicama paralelnim s koordinatnim osima.

Primjeri:

1) $P\,dx + Q\,dy = -\frac{y\,dx}{x^2 + y^2} + \frac{x\,dy}{x^2 + y^2}$; uvjet (3) je zadovoljen $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Primjenjujemo formulu (4$_2$), uzimajući u njoj $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ (ne smijemo uzeti $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, jer u tački $(0, 0)$ funkcije P i Q nisu neprekinute!):

$$U = \int_{1}^{y} \frac{0 \cdot dy}{0^2 + \eta^2} + \int_{0}^{x} \frac{-y\,d\xi}{\xi^2 + y^2} + U(0, 1) =$$

$$= -\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + C = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + C_1.$$

2) $P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$

$$= z\left(\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2 + z^2}\right) dx + \frac{z}{x y^2}\,dy + \left(\frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy}\right) dz.$$

Uvjeti (3') su ispunjeni. Primjenjujemo formulu (4'), uzimajući $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$:

$$U = \int_1^x 0 \cdot d\xi + \int_1^y 0 \cdot d\eta + \int_0^z \left(\frac{x}{x^2+\zeta^2} - \frac{1}{xy}\right) d\zeta + C =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{x} - \frac{z}{xy} + C.$$

Cirkulacija po ravninskoj zatvorenoj krivulji (krivuljni integral od $P\,dx + Q\,dy$ po zatvorenoj ravninskoj krivulji) *je pri ispunjenim uvjetima* (3) *jednaka nuli* u slučaju ako ta zatvorena ravninska krivulja ne sadrži unutar sebe tačaka u kojima je jedna od funkcija P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ ili $\frac{\partial Q}{\partial x}$ prekinuta ili nedefinirana.

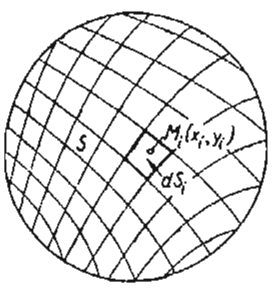
16. DVOSTRUKI I TROSTRUKI INTEGRALI

Dvostruki integral. Dvostrukim integralom funkcije dviju varijabli $u = f(x, y)$*, koji se odnosi na površinu S

$\left[\text{oznaka:} \int_S f(x, y)\, dS,\right.$

$\left.\text{ili} \iint_S f(x, y)\, dS\right]$

nazivamo broj koji dobivamo ovako:



Sl. 326

1) Područje S (sl. 326) **razdijelimo na po volji odabran način na n »elementarnih površina«;**

2) unutar (ili na rubu) svake elementarne **površine odabiremo po volji jednu tačku** $M_i(x_i, y_i)$;

3) vrijednost funkcije u toj tački $f(x_i, y_i)$ pomnožimo s veličinom površine dS_i pripadne elementarne površine;

4) sve produkte $f(x_i, x_i)\, dS_i$ koje na taj način dobivamo zbrojimo;

5) izračunamo limes dobivenog zbroja $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, dS_i$, kada se svaka površina steže u tačku** i stoga $n \to \infty$.

---

* Ovdje se u razmatra kao *funkcija tačke* (vidi str. 327) koja se ne zadaje samo u Descartesovom koordinatnom sistemu.

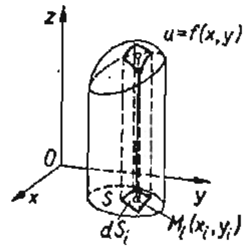
** Nije dovoljno zahtijevati da dS teži k nuli. K nuli mora težiti *dijametar* površine, tj. udaljenost najudaljenijih tačaka površine. Površina pravokutnika, na primjer, teži k nuli ako jedna njegova stranica teži k nuli, ali dijametar ostaje konačan.

Ako taj limes postoji i ne zavisi niti od načina razdiobe površine S na elemetarne površine niti od izbora tačaka $M_i(x_i, y_i)$, tada se on naziva **integralom funkcije** u, protegnutim preko površine S (površina S naziva se u tom slučaju *područjem integracije*):

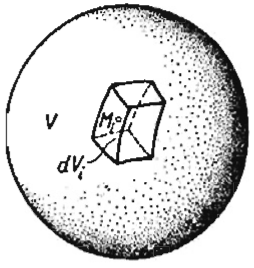
$$\int_S f(x, y)\, dS = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, dS_i. \tag{1}$$

Teorem egzistencije. Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u čitavom području integracije (zatvorenom, tj. uključujući i tačke na rubu površine), tada integral (1) postoji.

Geometrijski smisao dvostrukog integrala je volumen valjkastog tijela (sl. 327) omeđenog: 1) površinom S na ravnini xOy, 2) valjkastom plohom kojoj su izvodnice paralelne s osi O_z a ravnalica je rub površine S i 3) plohom $u = f(x, y)$. Svaki element sume $f(x_i, y_i)\, dS_i$ daje volumen prizmatičnog stupca s bazom dS_i i visinom $f(x_i, y_i)$. Volumen ima predznak »+« ili »—«, ovisno o tome leži li odgovarajući dio plohe $u = f(x, y)$ iznad ili ispod plohe xOy (ako ona siječe tu ravninu, tada se volumen razdijeli na algebarsku sumu pojedinih sumanda).



Sl. 327



Sl. 328

Trostruki integral funkcije triju varijabli $u = f(x, y, z)$ preko volumena V $\left[\text{oznaka} \int_V f(x, y, z)\, dV \text{ ponekad} \iiint_V f(x, y, z\, dV\right]$, definira se analogno dvostrukom integralu: tijelo V (sl. 328) razdijeli se na »elementarna tijela« i proučavaju se produkti oblika $f(x_i, y_i, z_i)\, dV_i$, gdje je $M_i(x_i, x_i, z_i)$ tačka unutar (ili na rubu) elementarnog tijela, a dV_i je njegov volumen. Trostrukim integralom nazivamo limes (ako on postoji i ne ovisi niti o načinu na koji dijelimo V, niti o izboru tačaka M_i) sume takvih produkata za sva elementarna tijela na koja je tijelo razdijeljeno, ako se svako od tih elementarnih tijela steže u tačku*, i stoga njihov broj teži prema neizmjerno:

$$\int_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \lim_{\substack{\mathrm{d}V_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\mathrm{d}V_i \; {}^{**}.$$

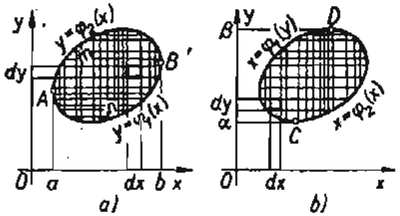
Za trostruki integral neprekinute funkcije vrijedi teorem egzistencije koji je naprijed naveden.

17. IZRAČUNAVANJE VIŠESTRUKIH INTEGRALA

Izračunavanje dvostrukog i trostrukog integrala svodi se na postupno izračunavanje dvaju (triju) jednostrukih integrala. Ovo se provodi na različite načine, ovisno o izboru koordinatnog sistema.

Dvostruki integral

1) *U Descartesovim koordinatama.* Površinu razdijelimo koordinatnim linijama na pravokutnike (sl. 329, *a*), a zbrajamo



Sl. 329

$f(x, y)\,\mathrm{d}S$ najprije po svim pravokutnicima duž svake vertikalne koordinatne linije, a zatim po svim vertikalnim koordinatnim linijama.

Analitički:

$$\int_S f(x, y)\,\mathrm{d}S = \int_a^b \Big[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \; {}^{***},$$

gdje su $y = \varphi_2(x)$ i $y = \varphi_1(x)$ jednadžbe gornjeg (*AmB*) i donjeg

* U tom smislu, kao što se to podrazumijevalo i za dvostruki integral: k nuli treba da teži ne veličina volumena, već *dijametar tijela* (udaljenost dviju najviše udaljenih tačaka tijela).

** Analogno definiramo *n*-struki integral u *n*-dimenzionalnom prostoru.

*** Dogovorno ne pišemo uglaste zagrade i uzimamo da se integrira »unutarnji« integral (onaj koji stoji na drugom mjestu) po varijabli, koje je diferencijal također »unutarnji« (tj. koji stoji na prvom mjestu).

(*AnB*) dijela krivulje, koja omeđuje S; a i b su apscise lijeve i desne krajnje tačke krivulje; $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}S$ (»*element površine u Descartesovim koordinatama*«). Prvu integraciju provodimo tako da se x smatra konstantom.

Izračunavanje u Descartesovim koordinatama možemo izvesti i obrnutim redom (vidi sl. 329, *b*)

$$\int_S f(x, y)\,\mathrm{d}S = \int_\alpha^\beta \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

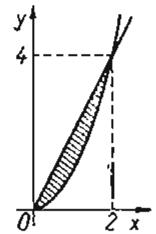
Primjer: $A = \int_S xy^2\,\mathrm{d}S$, gdje je S površina između parabole $y = x^2$ i pravca $y = 2x$ (sl. 330):

$$A = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x \left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{2x} = \frac{1}{3}\int_0^2 (8x^4 - x^7)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{5}$$

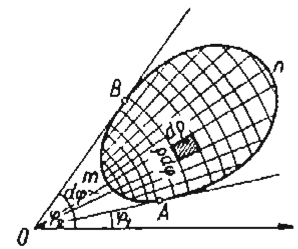
ili

$$A = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 y^2\,\mathrm{d}y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\int_0^4 y^2\left(y - \frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}y = \frac{32}{5}.$$

2) *U polarnim koordinatama.* Površinu razdijelimo koordinatnim krivuljama na elementarne dijelove koji su omeđeni sa dva luka



Sl. 330



Sl. 331

koncentričnih kružnica i sa dvije zrake koje prolaze kroz pol (sl. 331); podintegralna funkcija u polarnim se koordinatama izražava ovako: $w = f(\rho, \varphi)$ i zbraja se u početku duž svakog pojedinog sektora, a zatim po svim sektorima.

Analitički:

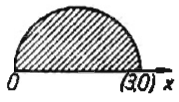
$$\int_S f(\rho, \varphi)\,\mathrm{d}S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho, \varphi)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi, \qquad (*)$$

gdje su $\rho = \rho_1(\varphi)$ i $\rho = \rho_2(\varphi)$ jednadžbe unutarnjeg $(\widehat{AmB})$ i vanjskog $(\widehat{AnB})$ dijela krivulje koja ograđuje S, a φ_1 i φ_2 polarni kutovi krajnjih radijvektora koji diraju rub površine, $\rho\, d\rho\, d\varphi = dS$ (*element površine u polarnim koordinatama*). Obrnuti red integracije rijetko se primjenjuje.

Primjer: $A = \int\limits_S \rho \sin^2\varphi\, dS$, gdje je S površina polukruga $\rho = 3\cos\varphi$ (sl. 332):

$$A = \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{3\cos\varphi} \rho \sin^2\varphi \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\, d\varphi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{3\cos\varphi} =$$

$$= 9 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos^3\varphi\, d\varphi = 1\frac{1}{5}.$$



Sl. 332

3) *U bilo kojim krivocrtnim koordinatama* u, v, koje su definirane formulama

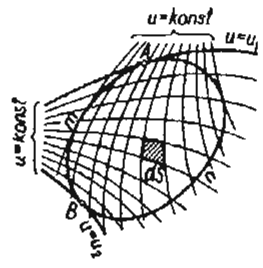
$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)$$

(vidi str. 227). Površinu razdijelimo koordinatnim linijama $u =$ const, $v =$ const na elementarne dijelove (sl. 333), podintegralnu funkciju izrazimo u koordinatama u, v, a zbrajamo duž jedne koordinatne pruge (npr. $v =$ const), a zatim po svim koordinatnim prugama. Analitički:

$$\int\limits_S f(u, v)\, dS = \int\limits_{u_1}^{u_2} \int\limits_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(u, v)\, |D|\, dv\, du, \qquad (**)$$

gdje su $v = v_1(u)$ i $v = v_2(u)$ jednadžbe dijelova $\widehat{AmB}$ i $\widehat{AnB}$ krivulje koja omeđuje S; u_1 i u_2 su koordinate krajnjih krivulja koje omeđuju površinu S, $|D|$ je apsolutna vrijednost Jacobijeve determinante

$$D = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$



Sl. 333

$|D|\, dv\, du = dS$ (*element površine u krivocrtnim koordinatama*).

Formula (*) je poseban slučaj formule (**); za polarne koordinate je $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ i Jacobijeva determinanta $D = \rho$.

Izbor krivocrtnih koordinata vršimo tako da granice integrala (**) budu što jednostavnije.

Primjer:

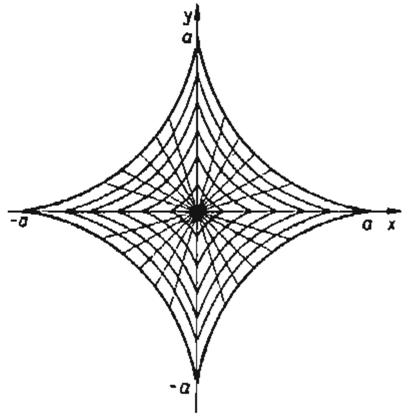
$$A = \int\limits_S f(x, y)\, dS,$$

gdje je S površina astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (sl. 334).

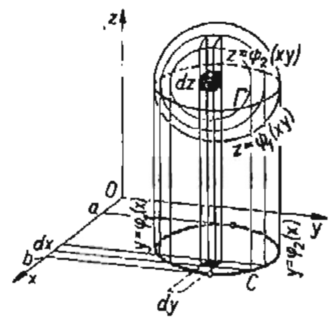
Uvodimo krivocrtne koordinate $x = u\cos^3 v$, $y = u\sin^3 v$. Koordinatne linije: $u = c_1$ je porodica sličnih astroida $x = c_1\cos^3 t$, $y = c_1\sin^3 t$; $v = c_2$ su poluzrake $y = kx$, gdje je $k = \mathrm{tg}^3\, c_2$.

$$D = \begin{vmatrix} \cos^3 v & -3u\cos^2 v \sin v \\ \sin^3 v & 3u\sin^2 v \cos v \end{vmatrix} = 3u\sin^2 v\cos^2 v,$$

$$A = \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} f[x(u, v), y(u, v)]\, 3u\sin^2 v\cos^2 v\, dv\, du.$$



Sl. 334



Sl. 335

Trostruki integral

1) *U Descartesovim koordinatama.* Volumen razdijelimo koordinatnim plohama (u danom slučaju ravninama) na paralelepipede (sl. 335), a zbrajamo $f(x, y, z)\, dV$ najprije po svim paralelepipedima duž svakog vertikalnog stupca (po z), zatim po stupcima duž svakog »sloja« (po y) i na kraju po svim slojevima (u smjeru x). Analitički:

$$\int\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int\limits_a^b \Big\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Big[\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \Big] \mathrm{d}y \Big\} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x;$$

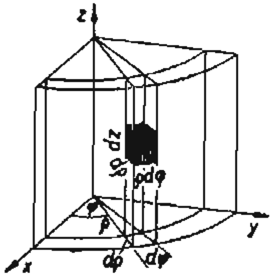
ovdje su $z = \psi_1(x, y)$ i $z = \psi_2(x, y)$ jednadžbe donjeg i gornjeg dijela površine koja omeđuje volumen V, tj. dijelova razdijeljenih krivuljom Γ; $y = \varphi_1(x)$ i $y = \varphi_2(x)$ su jednadžbe dijelova krivulje C, koja je projekcija krivulje Γ na ravninu xOy, tj. dijelova omeđenih tačkama $x = a$ i $x = b$.

Kao i kod dvostrukog integrala, poređaj integriranja može biti po volji odabran; na taj način izračunavanje trostrukog integrala možemo provesti na šest načina.

Primjer: Treba izračunati integral $I = \int\limits_V (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}V$, gdje je V volumen piramide omeđene koordinatnim ravninama i ravninom $x + y + z = 1$

$$I = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-x-y} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \Big\{ \int\limits_0^{1-x} \Big[\int\limits_0^{1-x-y} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}z \Big] \mathrm{d}y \Big\} \mathrm{d}x = \frac{1}{30}.$$



Sl. 336

2) *U cilindričkim koordinatama.* Volumen se razdijeli na elementarne dijelove koordinatnim površinama: $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$. *Element volumena* je $\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$ (sl. 336). Funkciju izrazimo u cilindričkim koordinatama: $f(\rho, \varphi, z)$.

Formula:

$$\int\limits_V f(\rho,\varphi,z)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho,\varphi,z)\,\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi. \qquad (*)$$

Primjer (sl. 337): Treba izračunati integral $I = \int\limits_V S\,\mathrm{d}V$ na volumenu omeđenom ravninama xOy i xOz, valjkom $x^2 + y^2 = ax$ i kuglom $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$*:

* Ako je ovdje $f = 1$, tada je integral numerički jednak volumenu zadanog tijela.

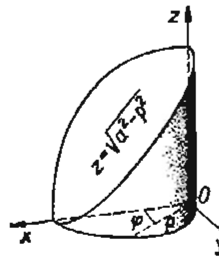
$$z_1 = 0, \qquad z_2 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - \rho^2};$$

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = a\cos\varphi; \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

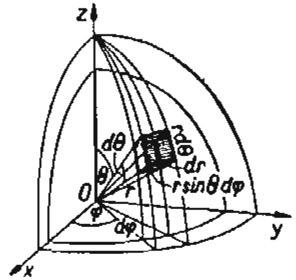
$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{a\cos\varphi} \int\limits_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \Big\{ \int\limits_0^{a\cos\varphi} \Big[\int\limits_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} \mathrm{d}z \Big] \rho\,\mathrm{d}\rho \Big\} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{18}(3\pi - 4).$$

3) *U sfernim koordinatama.* Volumen se razdijeli na elementarne dijelove koordinatnim plohama $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $\Theta = \text{const}$. *Element volumena:* $\mathrm{d}V = r^2 \sin\Theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi$ (sl. 338).



SL 337



Sl. 338

Funkciju izrazimo u sfernim koordinatama: $f(r, \varphi, \Theta)$:

$$\int\limits_V f(r,\varphi,\Theta)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{\Theta_1(\varphi)}^{\Theta_2(\varphi)} \int\limits_{r_1(\Theta,\varphi)}^{r_2(\Theta,\varphi)} f(r,\varphi,\Theta)\,r^2 \sin\Theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi. \qquad (**)$$

Primjer: Treba izračunati integral $I = \int\limits_V \frac{\cos\Theta}{r^2}\,\mathrm{d}V$ preko volumena stošca, komu je visina jednaka h, a kut pri vrhu 2α i koji je smješten, s obzirom na sistem koordinata, prema slici 339.

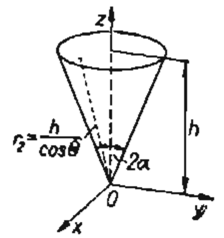
$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{h}{\cos\Theta}, \quad \Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = \alpha, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 2\pi.$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\alpha} \int\limits_0^{h/\cos\Theta} \frac{\cos\Theta}{r^2} r^2 \sin\Theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \Big\{ \int\limits_0^{\alpha} \cos\Theta \sin\Theta \Big[\int\limits_0^{h/\cos\Theta} \mathrm{d}r \Big] \mathrm{d}\Theta \Big\} \mathrm{d}\varphi = 2\pi h\,(1 - \cos\alpha).$$

4) *U bilo kojim krivocrtnim koordinatama u, v, w* zadanim formulama

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$



Sl. 339

(vidi str. 247). Volumen se razdijeli na elementarne dijelove koordinatnim plohama: $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$.

Element volumena:

$$dV = |D|\, du\, dv\, dw, \text{ gdje je } D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Podintegralnu funkciju izražavamo u koordinatama u, v, w:

$$\int_V f(u, v, w)\, dV = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \int_{w_1(u,v)}^{w_2(u,v)} f(u, v, w)\, |D|\, du\, dv\, dw. \qquad (***)$$

Formule $(*)$ i $(**)$ su posebni slučajevi formule $(***)$; za cilindarske koordinate je $D = \rho$, za sferne $D = r^2 \sin\Theta$. Krivocrtne koordinate izabiremo tako da granice integrala $(***)$ budu po mogućnosti što jednostavnije.

18. PRIMJENA VIŠESTRUKIH INTEGRALA

Dvostruki integrali

Veličina	Opća formula	U Descartesovim koordinatama	U polarnim koordinatama
Površina lika	$S = \int_S dS$	$= \iint dy\, dx$	$= \iint \rho\, d\rho\, d\varphi$
Površina plohe	$S_{pl} = \int_S \frac{dS}{\cos\gamma}$*	$= \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dy\, dx$	$= \iint \sqrt{\rho^2 + \rho^2\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\, d\rho\, d\varphi$
Volumen valjkastog tijela (vidi str. 489)	$V = \int_S z\, dS$	$= \iint z\, dy\, dx$	$= \iint z\, \rho\, d\rho\, d\varphi$
Moment inercije lika s obzirom na os Ox	$I_x = \int_S y^2\, dS$	$= \iint y^2\, dy\, dx$	$= \iint \rho^3 \sin^2\varphi\, d\rho\, d\varphi$
Moment inercije lika s obzirom na pol O	$I_0 = \int_S \rho^2\, dS$	$= \iint (x^2 + y^2)\, dy\, dx$	$= \iint \rho^3\, d\rho\, d\varphi$
Masa lika s plošnom gustoćom (funkcija tačke)	$M = \int_S \delta\, dS$	$= \iint \delta\, dy\, dx$	$= \iint \delta\, \rho\, d\rho\, d\varphi$
Koordinate težišta homogenog lika	$x_c = \frac{\int_S x\, dS}{S}$	$= \frac{\iint x\, dy\, dx}{\iint dy\, dx}$	$= \frac{\iint \rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi}{\iint \rho\, d\rho\, d\varphi}$
	$y_c = \frac{\int_S y\, dS}{S}$	$= \frac{\iint y\, dy\, dx}{\iint dy\, dx}$	$= \frac{\iint \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi}{\iint \rho\, d\rho\, d\varphi}$

* Vidi niže plošni integral. U danom slučaju S je projekcija plohe na ravninu xOy, γ je kut koji zatvara normala elementa plohe sa osi Oz.

Trostruki integrali

Veličina	Opća formula	U Descartesovim koordinatama	U cilindarskim koordinatama	U sfernim koordinatama
Volumen tijela	$V=\int_V dv$	$=\iiint dz\,dy\,dx$	$=\iiint \rho\,dz\,d\rho\,d\varphi$	$=\iiint r^2\sin\Theta\,dr\,d\Theta\,d\varphi$
Moment inercije tijela s obzirom na Oz	$I_z=\int_V \rho^2\,dv$	$=\iiint (x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$	$=\iiint \rho^3\,dz\,d\rho\,d\varphi$	$=\iiint r^4\sin^3\Theta\,dr\,d\Theta\,d\varphi$
Masa tijela gustoće δ kao funkcije tačke	$M=\int_V \delta\,dv$	$=\iiint \delta\,dz\,dy\,dx$	$=\iiint \delta\rho\,dz\,d\rho\,d\varphi$	$=\iiint \delta r^2\sin\Theta\,dr\,d\Theta\,d\varphi$
Koordinate težišta homogenog tijela	$x_c=\dfrac{\int_V x\,dv}{V}$	$=\dfrac{\iiint x\,dz\,dy\,dx}{\iiint dz\,dy\,dx}$		
	$y_c=\dfrac{\int_V y\,dv}{V}$	$=\dfrac{\iiint y\,dz\,dy\,dx}{\iiint dz\,dy\,dx}$		
	$z_c=\dfrac{\int_V z\,dv}{V}$	$=\dfrac{\iiint z\,dz\,dy\,dx}{\iiint dz\,dy\,dx}$		

19. PLOŠNI INTEGRALI PRVOG TIPA

(Integrali po dijelu plohe)*

Definicija. *Plošnim integralom prvog tipa*

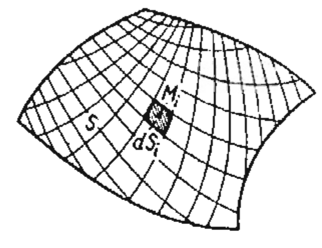
$$\int_S f(x,y,z)\,dS$$

funkcije triju varijabli $u=f(x,y,z)$ (zadane u nekom suvislom području) *po dijelu S zadane plohe* (ovaj se dio nalazi u tom području), nazivamo broj koji dobimo ovako:

1) površinu S (sl. 340) razdijelimo na po volji odabran način na n »elementarnih površina«;

2) unutar (ili na rubu) svake elementarne površine odabiremo po volji jednu tačku $M_i(x_i, y_i, z_i)$;

3) vrijednost funkcije $f(x_i, y_i, z_i)$ u toj tački pomnožimo s veličinom pripadnog dijela površine dS_i;



Sl. 340

4) svih n dobijenih produkata $f(x_i, y_i, z_i)\,dS_i$ zbrojimo;

5) potražimo limes dobivenog zbroja $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,dS_i$, kada se svaka površina steže u tačku** i stoga njihov broj $n\to\infty$.

Ako taj limes postoji i ne ovisi niti o načinu na koji smo razdijelili površinu S na elementarne površine niti o izboru tačaka $M_i(x_i, y_i, z_i)$, nazivamo ga plošnim integralom prvog tipa

$$\int_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{\substack{dS_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i, y_i, z_i)\,dS_i.$$

Teorem egzistencije. Ako je funkcija $f(x,y,z)$ neprekinuta u razmatranom području, i ako su funkcije koje izražavaju jednadžbu plohe neprekinute i imaju neprekinute derivacije, tada plošni integral prvog tipa postoji.

Izračunavanje plošnog integrala prvog tipa svodimo na izračunavanje dvostrukog integrala na ravninskom području (vidi str. 490 do 493).

Ako je jednadžba plohe S zadana eksplicitno

$$z=\varphi(x,y),$$

* Ovi su integrali poopćenje dvostrukih integrala (str. 488), kao što je krivuljni integral prvog tipa (str. 480) poopćenje jednostrukog određenog integrala (str. 449).
** U istom smislu kao što je navedeno u opasci** na str. 488.

tada je

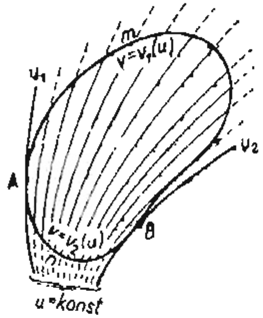
$$\int\limits_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S'} f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad (1)$$

gdje je S' projekcija od S na ravninu xOy, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$*.

Budući da jednadžba normale na plohu $z = \varphi(x, y)$ ima oblik $\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$ (vidi str. 294), to je $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \cos\gamma$, gdje je γ kut između smjera normale i osi Oz**. Prema tome jednadžbu (1) možemo pisati u ovom obliku:

$$\int\limits_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_{xy}} f[x, y, \varphi(x, y)]\frac{\mathrm{d}S_{xy}}{\cos\gamma}, \qquad (2)$$

gdje je $S_{xy} = Pr_{xy}S$.



Sl. 341

Ako je jednadžba plohe zadana u *parametarskom* obliku

$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$

(sl. 341), tada je

$$\int\limits_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Delta} f[x(u, v), \ y(u, v), \ z(u, v)]\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \qquad (3)$$

gdje E, F i G imaju vrijednosti navedene na str. 296, $\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}S$ (*element plohe*), a Δ je područje varijabilnosti argumenata u, v, koje odgovara zadanoj površini S. Integral (3) izračunavamo pomoću ponovljene integracije prema formuli

$$\int\limits_S \Phi(u, v)\,\mathrm{d}S = \int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_{v_1(u)}^{v_2(u)} \Phi(u, v)\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u, \qquad (4)$$

* Pri tome se pretpostavlja da je površinica S takva da svakoj tački njene projekcije S' na ravninu xOy jednoznačno pripada jedna tačka površine S (tačka plohe jednoznačno je određena zadavanjem x i y). Ako to nije, tada se površina S razdijeli na nekoliko dijelova, od kojih svaki ima ta svojstva, a plošni integral po cijeloj površini S smatramo zbrojem integrala po njezinim dijelovima.

Navedenih ograda nema ako je ploha izražena jednadžbama u parametarskom obliku.

** Ovaj kut γ pri izračunavanju plošnog integrala uzimamo da je uvijek šiljast; $\cos\gamma > 0$.

gdje su u_1, u_2 koordinate krajnjih koordinatnih linija $u = \text{const}$, između kojih je obuhvaćena površina S (vidi sl. 341), a $v = v_1(u)$ i $v = v_2(u)$ jednadžbe rubova, koji omeđuju površinu S (na sl. 341 su to linije AmB i AnB).

Formula (1) je poseban slučaj formule (3) za

$$u = x, \quad v = y, \quad E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2.$$

Primjene plošnog integrala prvog tipa

1) *Površina* zakrivljene plohe S:

$$S = \int\limits_S \mathrm{d}S.$$

2) *Masa* nehomogene zakrivljene plohe S, ako je δ varijabilna plošna gustoća $[\delta = f(x, y, z)]$:

$$M_S = \int\limits_S \delta\,\mathrm{d}S.$$

20. PLOŠNI INTEGRALI DRUGOG TIPA

(Integrali po projekciji)

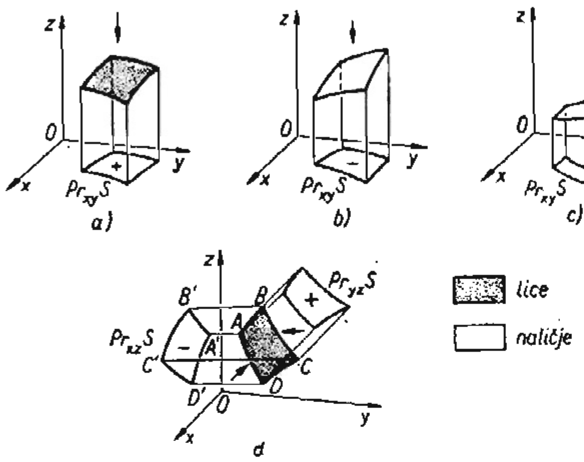
Pojam orijentirane plohe. Obično ploha ima dvije strane, od kojih možemo po volji jednu nazvati licem, a drugu naličjem.* Ploha koje je jedna strana izabrana za lice naziva se orijentiranom. U zatvorenoj plohi, bez samoprodiranja, koja zatvara neki volumen (kugla, elipsoid, itd.) licem obično nazivamo vanjsku stranu, a naličjem unutarnju.

Projekcija orijentirane plohe na koordinatnu ravninu. Ako projiciramo omeđen dio S orijentirane plohe na koordinatnu ravninu, na primjer na ravninu xOy, možemo toj projekciji $\mathrm{Pr}_{xy}S$ pripisati predznak »+« ili »—« na ovaj način (sl. 342): Ako na ravninu xOy gledamo s pozitivne strane treće koordinatne osi (u danom slučaju sa strane osi Oz, tj. odozgo), pa vidimo *lice* površine S, tada projekciju $\mathrm{Pr}_{xy}S$ smatramo pozitivnom (sl. 342, *a*), ako pak vidimo *naličje*, tada je smatramo negativnom (sl. 342, *b*). Ako pak ploha leži tako da joj vidimo dio lica i dio naličja, tada $\mathrm{Pr}_{xy}S$ dobivamo kao algebarsku sumu njenih dijelova koji se vide kao lice

* Postoje plohe kod kojih ne možemo razlikovati dvije strane (npr. Möbiusova vrpca). U matematičkoj analizi takve se plohe ne razmatraju.

i kao naličje (sl. 342, *c*). Na sl. 342, ***d*** prikazane su projekcije S_{xz} i S_{yz} površine S (jedna je od njih pozitivna, a druga negativna).

Projekcija z a t v o r e n e orijentirane plohe na koordinatnu plohu jednaka je nuli.



342

Definicija plošnog integrala drugog tipa po projekciji na koordinatnu ravninu. Plošnim integralom drugog tipa

$$\int_S f(x, y, z)\,dx\,dy$$

funkcije triju varijabli $f(x, y, z)$ (zadane u nekom suvislom području) protegnutim po projekciji orijentirane površine S (koja leži u tom istom području) na ravninu xOy, nazivamo broj koji dobivamo isto tako kao i plošni integral prvog tipa (vidi str. 499), s jednom razlikom: u etapi 3) vrijednost funkcije $f(x_i, y_i, z_i)$ ne množimo s površinom dS_i, već s veličinom p r o j e k c i j e $\mathrm{Pr}_{xy} dS_i$ te površine (orijentirane) na ravninu xOy (ovu projekciju uzimamo s predznakom »+« ili »—«, vidi naprijed)

$$\int_S f(x, y, z)\,dx\,dy = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\mathrm{Pr}_{xy}\,dS_i. \qquad (1_{xy})$$

Analogno definiramo plošne integrale drugog tipa, protegnute po projekciji orijentirane površine S na ravninu yOz i na ravninu zOx:

$$\int_S f(x, y, z)\,dy\,dz = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\mathrm{Pr}_{yz}\,dS_i, \qquad (1_{yz})$$

$$\int_S f(x, y, z)\,dz\,dx = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\mathrm{Pr}_{zx}\,dS_i. \qquad (1_{zx})$$

Teorem egzistencije. Plošni integrali drugog tipa (1_{xy}), (1_{yz}), (1_{zx}) postoje, ako su funkcija $f(x, y, z)$ i funkcije koje izražavaju jednadžbu plohe neprekinute i ako imaju neprekinute derivacije.

Izračunavanje plošnih integrala drugog tipa svodi se na izračunavanje dvostrukih integrala. Ako je jednadžba plohe dana *eksplicitno* $z = \varphi(x, y)$, tada integral (1_{xy}) izračunavamo prema formuli

$$\int_S f(x, y, z)\,dx\,dy = \int_{\mathrm{Pr}_{xy} S} f[x, y, \varphi(x, y)]\,dS_{xy}, \qquad (2_{xy})$$

gdje je $S_{xy} = \mathrm{Pr}_{xy} S$.

Analogno se izračunavaju plošni integrali funkcije $f(x, y, z)$ po projekcijama orijentirane površine S na druge koordinatne ravnine:

$$\int_S f(x, y, z)\,dy\,dz = \int_{\mathrm{Pr}_{yz} S} f[\psi(y, z), y, z]\,dS_{yz}, \qquad (2_{yz})$$

gdje je $x = \psi(y, z)$ jednadžba plohe S riješena s obzirom na x, $S_{yz} = \mathrm{Pr}_{yz} S$, $S_{zx} = \mathrm{Pr}_{zx} S$;

$$\int_S f(x, y, z)\,dz\,dx = \int_{\mathrm{Pr}_{zx} S} f[x, \chi(z, x), z]\,dS_{zx}, \qquad (2_{zx})$$

gdje je $y = \chi(z, x)$ jednadžba plohe S rješena s obzirom na os y.

Ako promijenimo orijentaciju plohe (zamjenom lica s naličjem i obrnuto) integral po projekciji mijenja predznak.

Ako je jednadžba plohe zadana u parametarskom obliku

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

tada integrale (1_{xy}), (1_{yz}), (1_{zx}) izračunavamo po formulama:

$$\int_S f(x, y, z)\,dx\,dy = \int_\Delta f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\,\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du\,dv, \tag{3_{xy}}$$

$$\int_S f(x, y, z)\,dy\,dz = \int_\Delta f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\,\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\,du\,dv, \tag{3_{yz}}$$

$$\int_S f(x, y, z)\,dz\,dx = \int_\Delta f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\,\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\,du\,dv. \tag{3_{zx}}$$

Ovdje su $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$, $\frac{D(z, x)}{D(u, v)}$ Jacobijeve determinante parova funkcija x, y, z od u, v; Δ je područje varijabilnosti argumenata u, v, koje odgovara danoj površini S.

Plošni integral općeg tipa. Ako su u nekom suvislom području zadane tri funkcije sa tri varijable $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ i orijentirana površina S, tada se *plošnim integralom općeg tipa* naziva zbroj integrala drugog tipa po svim projekcijama:

$$\int_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \int_S P\,dy\,dz + \int_S Q\,dz\,dx + \int_S R\,dx\,dy^{*}.$$

Opća formula kojom se plošni integral općeg tipa svodi na obični dvostruki integral je

$$\int_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \int_\Delta \left[P\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q\frac{D(x, z)}{D(u, v)} + R\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right] du\,dv,$$

gdje $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$ itd. i Δ imaju naprijed navedena značenja.

Svojstva plošnih integrala

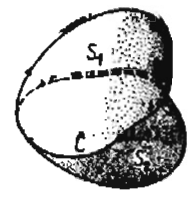
1) Ako područje integracije, tj. površinu S, na bilo koji način razdijelimo na dijelove S_1, S_2, tada je

$$\int_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \int_{S_1} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy + \int_{S_2} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

* Vektorsko tumačenje teorije plošnog integrala općeg tipa vidi u glavi »Teorija polja« (str. 627).

2) Pri promjeni orijentacije plohe (zamjena lica s naličjem i obratno) integral mijenja predznak:

$$\int_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = -\int_{S^-} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$



Sl. 343

(ovdje je sa S^+ i S^- označena ista ploha, ali sa dvije suprotne orijentacije).

3) Plošni integral u *općem slučaju* ovisi kako od krivulje koja površinu S obrubljuje tako i od same plohe: integrali po površinama S_1 i S_2 s istom rubnom krivuljom C (sl. 343) općenito nisu međusobno jednaki:

$$\int_{S_1} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \neq \int_{S_2} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

Volumen V tijela omeđenog zatvorenom plohom S možemo izračunati **kao plošni** integral

$$V = \frac{1}{3}\int_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$

gdje je S tako orijentirana da je lice vanjska strana.

21. FORMULE STOKESA, GREENA I OSTROGRADSKOG-GAUSSA*

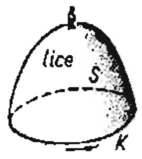
Formula Stokesa (izražavanje krivuljnog integrala plošnim). Ako je S orijentirana ploha koja leži unutar nekog područja i ako je omeđena zatvorenom krivuljom (K), te ako su P, Q i R funkcije triju varijabli x, y, z zadane u istom području, tada vrijedi relacija

$$\int_K P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx^{**}, \tag{1}$$

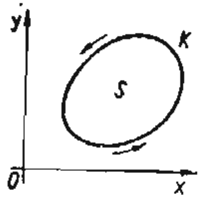
* Vektorsko tumačenje ovih teorema vidi u glavi »Teorija polja«, str. 634 i 635.
** Formula vrijedi uz uvjet da postoji i neprekinutost funkcija P, Q i R i njihovih derivacija prvog reda.

gdje **krivuljni integral** na lijevoj strani treba uzeti po rubnoj krivulji K u smislu koji vidi promatrač s pozitivne strane plohe S kao *suprotan gibanju kazaljke na satu* (sl. 344).

Formula Greena je poseban slučaj formule Stokesa za funkcije P, Q dviju varijabli u ravninskom području (izražavanje krivuljnog integrala po ravninskoj krivulji pomoću dvostrukog). Ako je S



Sl. 344



Sl. 345

ravninska površina koja leži unutar nekog područja i ako je omeđena zatvorenom krivuljom K, i ako su P, Q funkcije sa dvije varijable x, y zadane u tom istom području, vrijedi relacija

$$\int_K P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^*, \tag{2}$$

gdje krivuljni integral na lijevoj strani uzimamo po rubnoj krivulji u suprotnom smislu gibanja kazaljke na satu (sl. 345).

Formula Ostrogradskog-Gaussa (izražavanje trostrukog integrala plošnim). Ako je S zatvorena orijentirana ploha (lice je pozitivna strana) koja omeđuje volumen V, i ako su P, Q i R funkcije sa tri varijable zadane u jednostruko suvislom području koje uključuje tu plohu, tada vrijedi veza

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}V =$$

$$= \iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^*. \tag{3}$$

---

* Vidi opasku na prednjoj stranici.

IV DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

1. OPĆI POJMOVI

Diferencijalna jednadžba jest jednadžba s nepoznatim funkcijama, nezavisnim varijablama i derivacijama nepoznatih funkcija (ili njihovim diferencijalima).

Primjeri: 1) $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3 - xy^5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \sin y = 0$;

2) $x\,\mathrm{d}^2y\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y\,(\mathrm{d}x)^2 = e^y(\mathrm{d}y)^3$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = xyz\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ako nepoznate funkcije ovise o jednoj nezavisnoj varijabli, onda diferencijalnu jednadžbu nazivamo *običnom* (primjeri 1, 2). Ako nepoznate funkcije ovise o nekoliko nezavisnih varijabli, diferencijalnu jednadžbu nazivamo *parcijalnom diferencijalnom jednadžbom* (primjer 3). *Redom diferencijalne jednadžbe* nazivamo red najviše derivacije ili diferencijala u jednadžbi [jednadžba 1) je prvog reda, jednadžbe 2) i 3) su drugog reda].

Integral diferencijalne jednadžbe je jedna ili više jednadžbi koje povezuju nepoznate funkcije i nezavisne varijable, takve, da dana diferencijalna jednadžba prelazi u identitet, ako u nju uvrstimo nepoznate funkcije i njihove derivacije, dobivene iz tih jednadžbi.

Određivanje integrala diferencijalne jednadžbe nazivamo njenim *integriranjem*. Integral koji eksplicitno izražava nepoznatu funkciju s nezavisnim varijablama nazivamo *rješenjem* diferencijalne jednadžbe.

Integrali diferencijalnih jednadžbi mogu imati konstante ili funkcije koje po volji izabiremo (*po volji odaberive konstante i funkcije*). Na taj način integrali diferencijalne jednadžbe nisu jednoznačno određeni. Nepoznatim funkcijama obično propisujemo dodatne, tzv. *početne* ili *granične* uvjete, koji se sastoje u tome da nepoznate funkcije, a također i neke njihove derivacije, moraju primiti zadane vrijednosti za neke određene vrijednosti nezavisnih varijabli. Uz te dodatne uvjete rješenje može biti jednoznačno. Npr. obična diferencijalna jednadžba $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ ima (uz neka ograničenja) jednoznačno rješenje, ako zahtijevamo da $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ primaju zadane vrijednosti za $x = a$ (tačnije vidi na str. 521).

Integral diferencijalne jednadžbe jest *opći* ako iz njega možemo dobiti odgovarajućim izborom po volji odaberivih konstanti ili funkcija određeni *partikularni* integral, koji zadovoljava bilo koje početne ili rubne uvjete, kojima je rješenje jednoznačno određeno. Diferencijalna jednadžba može imati tzv. *singularne* integrale, koje ne možemo dobiti iz općeg integrala ni uz kakve posebne vrijednosti po volji odaberivih konstanti ili funkcija (vidi na str. 514).

A. OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

2. JEDNADŽBE PRVOG REDA

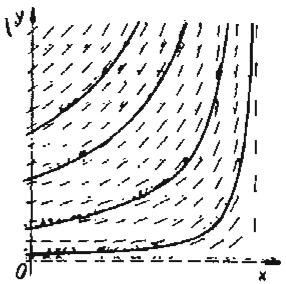
Teoretska objašnjenja. *Teorem o egzistenciji* (Cauchy). Ako je $f(x, y)$ neprekinuta u nekom području u okolini tačke (x_0, y_0), tj. za $|x - x_0| < a$ i $|y - y_0| < b$, onda postoji barem jedno rješenje jednadžbe

$$y' = f(x, y), \tag{a}$$

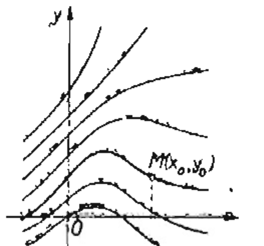
koje za $x = x_0$ dobiva vrijednost y_0 definiranu i neprekinutu u nekom intervalu oko tačke x_0. Ako je, povrh toga, u tom području ispunjen *Lipschitzov uvjet*, tj.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < N(y_1 - y_2),$$

pri čemu N ne ovisi o x, y_1 i y_2, onda je to rješenje jednoznačno i neprekinuta je funkcija od y_0.



Sl. 346



Sl. 347

Lipschitzov uvjet svakako je ispunjen ako $f(x, y)$ ima u promatranom području ograđenu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial y}$. (Primjere u kojima uvjeti Cauchyjeva teorema nisu ispunjeni vidi na str. 515 i 516.)

Polje smjerova. Ako kroz tačku $M(x, y)$ prolazi graf rješenja $y = \varphi(x)$ diferencijalne jednadžbe $y' = f(x, y)$, onda koeficijent smjera tangente na graf u zadanoj tački $\left(\text{jednak } \frac{dy}{dx}\right)$ možemo odrediti neposredno iz diferencijalne jednadžbe; na taj način diferencijalna jednadžba određuje u svakoj tački smjer tangente na graf rješenja. Skup tih smjerova tvori *polje smjerova* (sl. 346). Tačku, zajedno sa njenim smjerom, nazivamo *elementom* polja smjerova. Integriranje diferencijalne jednadžbe prvog reda svodimo na geometrijsko spajanje elemenata u integralne krivulje, kojima se smjer tangenata u svakoj tački poklapa sa smjerom polja.

U mnogim zadacima imamo polje u kojem susrećemo i vertikalne smjerove, što odgovara tome da $f(x, y)$ postaje neizmjerno. U tim slučajevima zamjenjujemo uloge zavisnoj i nezavisnoj varijabli, smatrajući da je jednadžba

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \tag{b}$$

ekvivalentna zadanoj jednadžbi. U području u kojem su ispunjeni uvjeti Cauchyja za jednadžbu (a) ili (b), kroz svaku tačku $M(x_0, y_0)$ prolazi samo jedna integralna krivulja (sl. 347).

Skup svih integralnih krivulja ovisit će o jednom parametru i jednadžba te porodice — opći integral jednadžbe prvog reda — ima jednu po volji odaberivu konstantu. Da iz općeg integrala $F(x, y, C) = 0$ dobijemo partikularan integral $y = \varphi(x)$ koji zadovoljava uvjet $y_0 = \varphi(x_0)$ moramo odrediti C iz jednadžbe

$$F(x_0, y_0, C) = 0.$$

Osnovne metode integriranja. *Separacija varijabli.* Ako jednadžbu možemo dovesti u oblik

$$M(x)\,N(y)\,dx + P(x)\,Q(y)\,dy = 0,$$

onda je možemo izraziti u obliku

$$R(x)\,dx + S(y)\,dy = 0,$$

gdje su varijable x i y s e p a r i r a n e; u tu svrhu treba jednadžbu podijeliti sa $P(x) \cdot N(y)$. Nakon toga se opći integral dobiva u obliku

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = C.$$

Ako $P(x)$ ili $N(y)$ postanu jednaki nuli za bilo koje vrijednosti $\bar{x}$ ili $\bar{y}$, onda će $x = \bar{x}$ i $y = \bar{y}$ također biti integrali zadane jednadžbe.

Primjer: $x\,dy + y\,dx = 0$;

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = C; \quad \ln y + \ln x = C = \ln c; \quad yx = c.$$

Homogene jednadžbe. Ako su $M(x, y)$ i $N(x, y)$ homogene funkcije svojih argumenata jednakog stupnja (vidi na str. 331), onda se u jednadžbama $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ varijable daju separirati (vidi ranije) nakon uvođenja nove varijable $u = \frac{y}{x}$ umjesto y.

Primjer: $y^2\,dx + x(x - y)\,dy = 0$; $y = ux$;

$dy = u\,dx + x\,du$; $\quad u^2x^2\,dx + x^2(1 - u)(x\,du + u\,dx) = 0$;

$\frac{dx}{x} + \frac{(1-u)\,du}{u} = 0$; $\quad \ln x + \ln u - u = C = \ln c$, $\quad ux = ce^u$;

$y = ce^{y/x}$. Pravac $x = 0$ bit će također integralna krivulja (vidi ranije, separacija varijabli).

Egzaktnom diferencijalnom jednadžbom nazivamo jednadžbu oblika

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{*}$$

ako postoji takva funkcija $\Phi(x, y)$ da je

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \equiv d\Phi(x, y)$$

(vidi na str. 350). Ako su u nekom jednostruko suvislom području $M(x, y)$ i $N(x, y)$ neprekinute sa svojim parcijalnim derivacijama prvog reda, onda je uvjet $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ nuždan i dovoljan da bi jednadžba (*) bila egzaktna. U tome će slučaju $\Phi(x, y) = C$ biti opći integral jednadžbe (*). Funkciju $\Phi(x, y)$ možemo naći po formuli [vidi na str. 487, formula (4_2)]

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\,d\eta$$

(x_0 i y_0 su vrijednosti po volji).

Primjer: vidi dalje.

Eulerov multiplikator je funkcija $\mu(x, y)$ sa svojstvom da jednadžba $M\,dx + N\,dy = 0$ pomnožena s njom postaje egzaktna jednadžba. Eulerov multiplikator zadovoljava jednadžbu

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x},$$

pri čemu je svako partikularno rješenje te jednadžbe multiplikator.

Ako nam je poznat Eulerov multiplikator μ jednadžbe (*), koja nakon množenja s tim multiplikatorom dobiva oblik $d\Phi(x, y) = 0$, onda će opći oblik Eulerova multiplikatora te jednadžbe biti $\tilde{\mu} = \mu f(\Phi)$, gdje f označava funkciju po volji.

Primjeri: Treba naći rješenje jednadžbe: $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$.

Jednadžba za Eulerov multiplikator je: $-x\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - (x^2 + y)\frac{\partial \ln\mu}{y} = 2$.

Tražimo multiplikator koji ne ovisi o y; tada je $x\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = -2$ ili $\mu = \frac{1}{x^2}$. Pomnožimo zadanu diferencijalnu jednadžbu sa μ:

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}\,dy = 0.$$

Opći integral ($x_0 = 1$, $y_0 = 0$) je

$$\Phi(x, y) \equiv \int_1^x \left(1 + \frac{y}{\xi^2}\right)d\xi - \int_0^y d\eta = C \quad \text{ili} \quad x - \frac{y}{x} = C_1.$$

Linearna jednadžba. Jednadžbu oblika

$$y' + P(x)\,y = Q(x),$$

u koju nepoznata funkcija i njena derivacija ulaze kao linearne (tj. u prvoj potenciji) nazivamo *linearnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda.* Ona ima Eulerov multiplikator $\mu = e^{\int P\,dx}$. Opći integral dobivamo po formuli

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[\int Qe^{\int P\,dx}\,dx + C\right]. \tag{**}$$

Ako svuda u toj formuli zamijenimo neodređeno integriranje s integracijom u granicama od x_0 do x*, dobivamo rješenje koje ima vrijednost C za $x = x_0$. Ako je poznato ma koje partikularno rješenje $y_1(x)$ linearne jednadžbe, onda njezino opće rješenje dobivamo po formuli $y = y_1 + Ce^{-\int P\,dx}$. Ako poznamo dva linearno nezavisna (vidi na str. 524) partikularna rješenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ onda opće rješenje linearne jednadžbe dobivamo bez integriranja: $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$.

Primjer: Treba naći rješenje jednadžbe $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x$, koje zadovoljava početne uvjete $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Računamo

$$e^{-\int_0^x \mathrm{tg}\,x\,dx} = \cos x$$

* Vidi na str. 384.

i po formuli (**) dobivamo:

$$y = \frac{1}{\cos x}\int_0^x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos x}\left[\frac{\sin x\cos x + x}{2}\right] = \frac{\sin x}{2} + \frac{x}{2\cos x}.$$

Bernoullijeva jednadžba

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$

svodi se na linearnu dijeljenjem sa y^n i supstitucijom nove varijable $z = y^{-n+1}$.

Primjer: $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$. Ovdje je $n = 1/2$. Dijeljenjem sa $\sqrt{y}$ i supstitucijom nove varijable $z = \sqrt{y}$ dobivamo $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}$. Po formuli za rješenje linearne jednadžbe izlazi: $e^{\int P\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2}$ i

$$z = x^2\left[\int \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + C\right] = x^2\left[\frac{1}{2}\ln x + C\right];$$

iz toga se dobiva $y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)^2.$

Riccatijeva jednadžba

$$y' = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x)$$

općenito se ne može integrirati kvadraturama (tj. traženje rješenja ne može se svesti na konačan broj postupnih integracija). Ako je poznato jedno partikularno rješenje y_1 Riccatijeve jednadžbe, onda supstitucijom nove varijable z: $y = y_1 + \frac{1}{z}$ Riccatijevu jednadžbu možemo svesti na linearnu jednadžbu. Ako je poznato još jedno rješenje y_2 Riccatijeve jednadžbe, onda će $z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ biti partikularno rješenje linearne jednadžbe za varijablu z, što omogućuje pojednostavnjenje njenog integriranja. Ako su za Riccatijevu jednadžbu poznata tri partikularna rješenja: y_1, y_2 i y_3, onda će njen opći integral biti $\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C$.

Zamjenom varijabli $y = \frac{u}{P(x)} + \beta(x)$ Riccatijevu jednadžbu možemo uvijek svesti na normalni oblik

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u^2 + R(x).$$

Supstitucijom $y = -\frac{v'}{P(x)\,v}$ možemo Riccatijevu jednadžbu svesti na linearnu jednadžbu drugog reda (vidi na str. 539):

$$P\,v'' - (P' + PQ)\,v' + P^2Rv = 0.$$

Primjer: $y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0$. Zamijenimo $y = z + \beta(x)$. Nakon zamjene koeficijent od z u prvoj potenciji je $2\beta + \frac{1}{x}$, i prema tome iščezava ako uzmemo $\beta(x) = -\frac{1}{2x}$. Dobivamo: $z' + z^2 - \frac{15}{4x^2} = 0$. Prirodno je tražiti partikularno rješenje $z_1 = \frac{a}{x}$. Supstituiranjem dobivamo $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{5}{2}$ $\left(\text{dva partikularna rješenja } z_1 = -\frac{3}{2x}, z_2 = \frac{5}{2x}\right)$. Napravimo novu zamjenu: $z = \frac{1}{u} + z_1 = \frac{1}{u} - \frac{3}{2x}$. Dobivamo $u' + \frac{3u}{x} = 1$. Ako se poslužimo partikularnim rješenjem jednadžbe $u_1 = \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{x}{4}$ nalazimo njeno opće rješenje: $u = \frac{x}{4} + \frac{C}{x^3} = \frac{x^4 + C_1}{4x^3}$; odatle je

$$y = \frac{1}{u} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x} = \frac{2x^4 - 2C_1}{x^5 + C_1x}.$$

Jednadžbe koje nisu rješive s obzirom na y': $F(x, y, y') = 0$. Ako je u nekoj tački $M(x_0, y_0)$ jednadžba $F(x_0, y_0, p) = 0$, u kojoj je $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, ima n realnih korijena $p_1, \ldots, p_n$, pri čemu je za $x = x_0$, $y = y_0$, $p = p_i$ funkcija $F(x, y, p)$ sa svojim prvim derivacijama neprekinuta i $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, onda kroz tačku M prolazi n integralnih krivulja.

Ako zadanu jednadžbu možemo riješiti s obzirom na y', onda se ona raspada na n jednadžbi prije promatranih oblika; ako ih riješimo, dobivamo jednadžbe n porodica integralnih krivulja. Ako jednadžbe možemo predočiti u obliku $x = \varphi(y, y')$ ili $y = \psi(x, y')$ onda, označivši $y' = p$ i smatrajući p pomoćnom varijablom, nakon diferenciranja po y, odnosno po x dobivamo jednadžbu za $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ ili $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, koja je riješena po derivaciji. Njeno rješenje zajedno s početnom jednadžbom određuje u parametarskom obliku traženo rješenje.

Primjer: $x = yy' + y'^2$; $y' = p$; $x = py + p^2$. Diferenciramo po y, postavimo $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$:

$$\frac{1}{p} = p + (y + 2p)\frac{dp}{dy} \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dp} - \frac{py}{1-p^2} = \frac{2p^2}{1-p^2}.$$

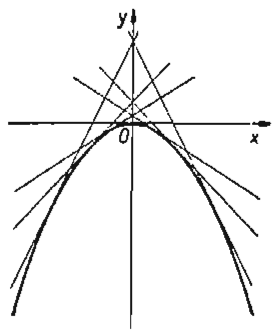
Ta jednadžba je linearna s obzirom na y; ako je riješimo, dobivamo $y = -p + \frac{c + \arcsin p}{\sqrt{1-p^2}}$; ako tom rješenju pridružimo ishodnu jednadžbu $x = py + p^2$, dobivamo traženo rješenje u parametarskom obliku.

Lagrangeova jednadžba $a(y')x + b(y')y + c(y') = 0$ uvijek se može integrirati kvadraturama na prije navedeni način. Ako je $a(p) + b(p)p = 0$ za $p = p_0$, onda je $a(p_0)x + b(p_0)y + c(p_0) = 0$ singularni integral (vidi dalje) Lagrangeove jednadžbe. Ako je $a(p) + b(p)p \equiv 0$, onda imademo *Clairautovu jednadžbu*, koju uvijek možemo svesti na oblik $y = y'x + f(y')$. Njeno opće rješenje je: $y = Cx + f(C)$. Pored općeg rješenja (koje geometrijski daje porodicu pravaca ovisnih o jednom parametru), Clairautova jednadžba ima opći integral koji dobivamo tako da eliminiramo C iz jednadžbe $y = Cx + f(C)$ i $0 = x + f'(C)$ (drugu jednadžbu dobivamo diferenciranjem prve po C; geometrijski je singularni integral ovojnica zadane porodice pravaca, sl. 348 (vidi na str. 283).

Primjer: $y = xy' + y'^2$; opći integral je: $y = Cx + C^2$; singularni integral (pomoću jednadžbe $x + 2C = 0$ eliminiramo C)

$$x^2 + 4y = 0.$$

Integralne krivulje razmatrane diferencijalne jednadžbe prikazane su na sl. 348.



Sl. 348

Singularni integrali: Element (x_0, y_0, y'_0) nazivamo *singularnim* ako on pored jednadžbe $F(x, y, y') = 0$ zadovoljava također jednadžbu $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Integralnu krivulju koju tvore singularni elementi nazivamo *singularnom*. Za sve njene tačke narušeno je svojstvo jednoznačnosti rješenja (vidi Cauchyjev teorem na str. 508). Ovojnice (vidi na str. 283) integralnih krivulja (vidi na sl. 348) bit će singularne integralne krivulje. Jednadžba singularne integralne krivulje $\varphi(x, y) = 0$ je *singularni integral*. U pravilu ga ne možemo dobiti iz općeg integrala ni za kakve vrijednosti po volji odaberive konstante. Za traženje singularnog integrala diferencijalne jednadžbe $F(x, y, p) = 0$, gdje je $p = y'$, zadanoj jednadžbi pridružimo jednadžbu $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ i eliminiramo p. Ako je dobivena jednadžba integral zadane diferencijalne jednadžbe, onda će to biti singularni integral (pri tome moramo jednadžbu prethodno svesti na oblik gdje nema višeznačnih funkcija*, posebno radikala). Ako je poznata jednadžba porodice integralnih krivulja, tj. opći integral zadane diferencijalne jednadžbe, onda za traženje ovojnica te porodice, koje daju singularna rješenja, možemo primijeniti metode diferencijalne geometrije (vidi na str. 283).

Primjeri:

1) $x - y - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 = 0.$

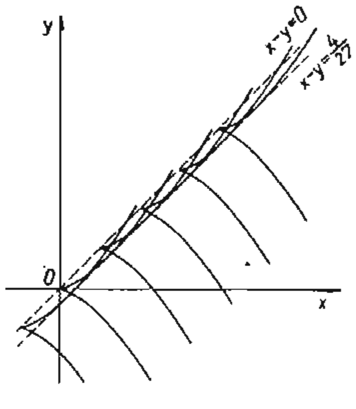
Dopunska jednadžba $\left(\text{tj. } \frac{\partial F}{\partial p} = 0\right)$:

$$-\frac{8}{9}p + \frac{8}{9}p^2 = 0.$$

Kada eliminiramo p, dobivamo

a) $x - y = 0$, *b)* $x - y = \frac{4}{27}$;

a) nije rješenje, b) je singularno rješenje [opće rješenje te jednadžbe: $(y - C)^2 = x - C)^3$]. Integralne krivulje i krivulje a) i b) nacrtane su na sl. 349.



Sl. 349

2) $y' - \ln|x| = 0$. Pišemo jednadžbu u obliku $e^p - |x| = 0$, jer $\ln x$ je višeznačna funkcija (vidi na str. 583). $\frac{\partial F}{\partial p} \equiv e^p = 0$. Kada eliminiramo p, dobivamo singularni integral $x = 0$.

Singularne tačke diferencijalne jednadžbe. Za diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + ey} \quad (ae - bc \neq 0)$$

tačka $(0, 0)$ je *izolirana singularna tačka*, jer su u njoj narušeni uvjeti Cauchyjeva teorema (vidi na str. 508), ali su ispunjeni u ma

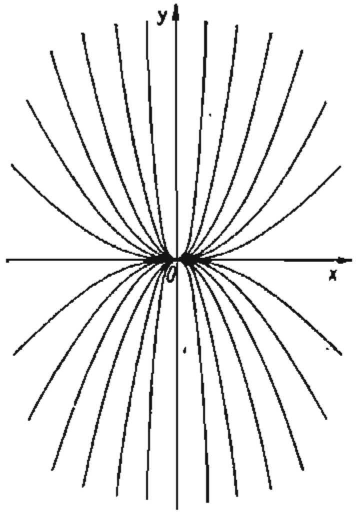
* Uzimaju se u obzir i kompleksne vrijednosti funkcija.

kojoj drugoj po volji bliskoj tački*. Ponašanje integralnih krivulja u blizini te singularne tačke ovisi o korijenima *karakteristične jednadžbe*

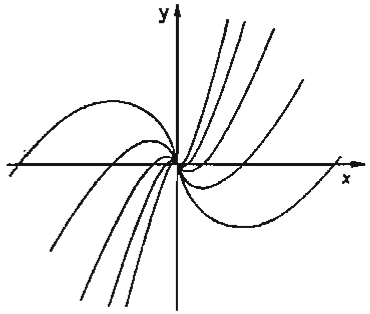
$$\lambda^2 - (b + c)\lambda + bc - ae = 0,$$

i to:

1) Ako su korijeni realni i istog predznaka, onda je singularna tačka *čvorna tačka*. Sve integralne krivulje u okolini singularne tačke prolaze kroz nju i u njoj imaju (ako se korijeni ne poklapaju) zajedničku tangentu, s izuzetkom jedne integralne krivulje. Ako se korijeni poklapaju, onda ili sve krivulje imaju zajedničku tangentu, ili u svakom smjeru kroz singularnu tačku prolazi jedna krivulja.



Sl. 350



Sl. 351

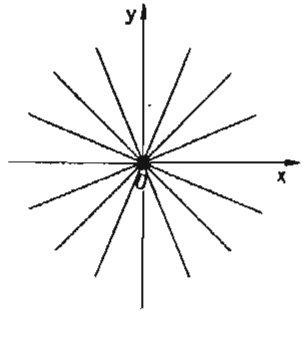
Primjeri: a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$; karakteristična jednadžba: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$; integralne krivulje: $y = Cx^2$** (sl. 350);
b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$; karakteristična jednadžba: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; integralne krivulje: $y = x \ln|x| + Cx$ (sl. 351);

* U strogom smislu uvjeti Cauchyjeva teorema narušeni su i za sve one tačke za koje je $cx + ey = 0$, ali će oni biti ispunjeni ako zamijenimo uloge zavisne i nezavisne varijable i razmatramo jednadžbu $\frac{dx}{dy} = \frac{cx + ey}{ax + by}$.

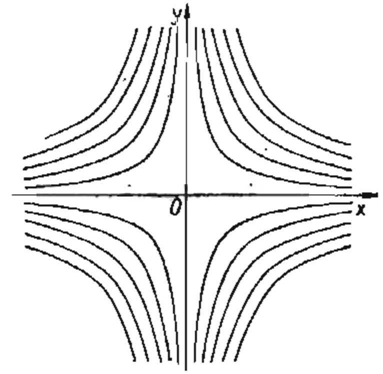
** Pravac $x = 0$ također je sadržan u općem rješenju, što se vidi ako rješenje napišemo u obliku $x^2 = C_1 y$.

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; karakteristična jednadžba: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; integralne krivulje $y = Cx$ (sl. 352).

2) Ako su korijeni realni i suprotnog predznaka, onda je singularna tačka *sedlasta tačka*. Kroz singularnu tačku prolaze dvije integralne krivulje.



Sl. 352



Sl. 353

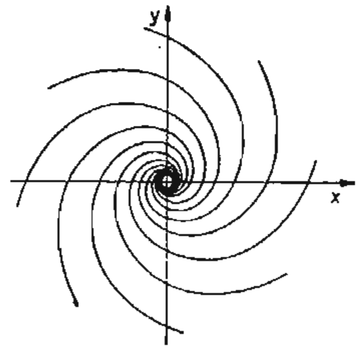
Primjer: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; karakteristična jednadžba: $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$; integralne krivulje: $xy = C$ (sl. 353), za $C = 0$ partikularni integrali su: $x = 0$, $y = 0$.

3) Ako su korijeni konjugirano kompleksni, onda je singularna tačka *žarište*. Integralne krivulje se »namataju« na singularnu tačku, ovijajući se oko nje bezbroj puta.

Primjer: $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$; karakteristična jednadžba:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0;$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i;$$



Sl. 354

integralne krivulje (u polarnim koordinatama): $\rho = Ce^{\varphi}$ (sl. 345).

4) Ako su korijeni čisto imaginarni, onda je singularna tačka *središte*. Ono je okruženo porodicom zatvorenih integralnih krivulja.

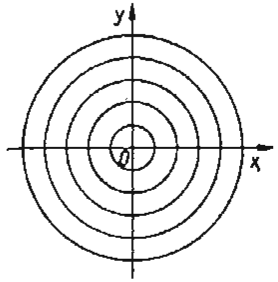
Primjer: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$; karakteristična jednadžba:

$\lambda^2 + 1 = 0$; $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Integralne krivulje: $x^2 + y^2 = C$ (sl. 355). Za jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

singularne tačke su one u kojima je $P(x, y) = 0$ i ujedno $Q(x, y) = 0$.



Sl. 355

Uz pretpostavku da su P i Q funkcije s neprekinutim parcijalnim derivacijama, možemo zadanu jednadžbu predočiti u obliku

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(x - x_0) + b(y - y_0) + P_1(x, y)}{c(x - x_0) + e(y - y_0) + Q_1(x, y)},$$

gdje su x_0 i y_0 koordinate singularne tačke, a $P_1(x, y)$ i $Q_1(x, y)$ su infinitezimalne veličine višeg reda u usporedbi s udaljenošću tačke (x, y) od singularne tačke. Pokazat će se da će karakter singularne tačke zadane diferencijalne jednadžbe biti isti kao i u singularnoj tački *jednadžbe prvog približenja*, koju dobivamo ako odbacimo P_1 i Q_1. *Izuzeci:* a) ako je singularna tačka prvog približenja središte, onda singularna tačka osnovne jednadžbe može biti središte ili žarište; b) ako je $ae - bc = 0$ (tj. $a/c = b/e$ ili $a = c = 0$, ili $a = b = 0$ itd.), onda pri određivanju karaktera singularne tačke treba da razmatramo članove višeg reda.

Aproksimativne metode integriranja. *Metoda postupnog približavanja* (Picard). Jednadžbu $y' = f(x, y)$ s početnim uvjetom $y = y_0$ za $x = x_0$ možemo napisati u obliku

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx. \tag{1}$$

Ako na desnoj strani umjesto y uvrstimo bilo koju funkciju $y_1(x)$ dobit ćemo na lijevoj strani novu funkciju y_2, koja se ne poklapa sa y_1, ako y_1 nije već rješenje zadane jednadžbe. Uvrštavanjem y_2 umjesto y u desnu stranu jednadžbe (1) dobivamo funkciju y_3 itd.

Dobiveni niz funkcija $y_1, y_2, y_3, \ldots$ konvergira na nekom intervalu koji sadrži tačku x_0 prema traženom rješenju ako su ispunjeni uvjeti za Cauchyjev teorem (vidi na str. 508). Metodu postupnih približenja naziva se ponekad i metodom *iteracije* (vidi na str. 164).

Primjer: $y' = e^x - y^2$; početni uvjeti: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. U integralnom obliku jednadžbu pišemo ovako

$$y = \int_0^x (e^x - y^2)\, dx.$$

Primjenom metode Picarda, počevši s $y_0 = 0$, dobivamo postupno:

$$y_1 = \int_0^x e^x dx = e^x - 1;$$

$$y_2 = \int_0^x [e^x - (e^x - 1)^2]\, dx = 3e^x - \frac{1}{2}e^{2x} - x - \frac{5}{2} \text{ itd.}$$

Primjena redova: Razvoj rješenja diferencijalne jednadžbe u Taylorov red (vidi na str. 371)

$$y = y_0 + (x - x_0)\, y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y_0'' + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} y_0^{(n)} + \ldots$$

možemo napisati ako znamo vrijednosti $y_0', y_0'', y_0''', \ldots, y_0^{(n)}, \ldots$ svih njenih derivacija za početnu vrijednost x_0 argumenta. Te vrijednosti možemo naći iz diferencijalne jednadžbe postupnim diferenciranjem i uvrštavanjem početnih uvjeta. Ako je dopušteno neograničeno diferenciranje jednadžbe, dobiveni red uvijek konvergira u okolini početne vrijednosti argumenata. Ta metoda primjenljiva je očigledno i na jednadžbe n-tog reda.

U praksi je često prikladnije tražiti rješenje u obliku reda s neodređenim koeficijentima, koje možemo odrediti iz uvjeta da jednadžba mora biti zadovoljena, kada u nju uvrstimo red.

Primjer: $y' = e^x - y^2$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Uvrstimo

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Uvrštenjem u jednadžbu dobivamo*:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + [a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3)\, x^4 + \\ + \ldots] = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots,$$

odakle je $a_1 = 1$, $2a_2 = 1$, $3a_3 + a_1^2 = \frac{1}{2}$, $4a_4 + 2a_1 a_2 = \frac{1}{6}$ itd.

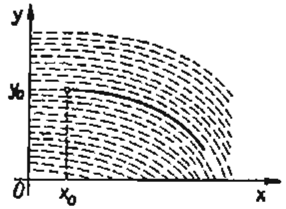
* Formulu za kvadrat reda vidi na str. 345.

Postupnim rješavanjem tih jednadžbi i uvrštavanjem dobivenih koeficijenata u red dobivamo:

$$y = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5}{24} x^4 + \dots$$

Drugi način: $y' = e^x - y^2$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Ako uvrstimo u jednadžbu $x = 0$, dobivamo $y_0' = 1$. Dalje $y'' = e^x - 2yy'$; $y_0'' = 1$; $y''' = e^x - 2y'^2 - 2yy''$; $y_0''' = -1$; $y^{IV} = e^x - 6y'y'' - 2yy'''$, $y_0^{IV} = -5$ itd. Po Taylorovoj formuli dobivamo

$$y = x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{5x^4}{4!} + \dots$$



Sl. 356

Grafičko integriranje jednadžbi osniva se na pojmu polja smjerova (vidi na str. 509). Integralnu krivulju približno nacrtamo lomljenom crtom koja izlazi iz zadane početne tačke (sl. 356), a sastavljena je od malih odsječaka; smjer svakog odsječka podudara se sa smjerom polja u početnoj tački odsječka, koja je ujedno konačna tačka prethodnog odsječka.

Numeričko integriranje. Pri numeričkom integriranju jednadžbe $y' = f(x, y)$ postupno sastavljamo tablicu tražene funkcije za vrijednosti argumenta $x_k = x_0 + kh$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$. U tu se svrhu za računanje $y_{k+1} - y_k = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f[x, y(x)]\, dx$ obično koristimo bilo kojom formulom aproksimativnog integriranja. Za računanje razlike najčešće upotrebljavamo ove formule (oznake vidi na str. 669)

$$y_{k+1} - y_k = h\left[f_k + \frac{1}{2}\Delta f_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{k-3}\right], \qquad (A)$$

$$y_{k+1} - y_k = h\left[f_{k+1} - \frac{1}{2}\Delta f_k - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{k-2}\right]. \qquad (B)$$

Formulom (A) nalazimo prvo približenje y_{k+1} izračunavamo f_{k+1} i dobivamo drugo približenje y_{k+1} po formuli (B). Na isti način možemo naći i treće približenje, ali obično nastojimo da izaberemo korak tako, da nam to ne bude potrebno.

Primjer: Prije dobiveni članovi reda za rješenje jednadžbe $y' = e^x - y^2$, uz početne uvjete $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, omogućavaju nam da izračunamo na četiri decimalne vrijednosti y za $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$ i $x_3 = 0{,}3$. Za računanje postupnih vrijednosti y načinimo tablicu po ovoj shemi (po stepeničastoj crti)

x	y	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	0,0000	1,0000	942	—147	—35
0,1	0,1048	1,0942	795	—182	—21
0,2	0,2183	1,1737	613	—203	
0,3	0,3389	1,2350	410		
0,4	0,4646	1,2760			

Vrijednost y_3 korisno je provjeriti po formuli (B):

$y_3 = 0{,}2183 + 0{,}1\ (1{,}2350 - 0{,}0306 + 0{,}0015 + 0{,}0001) = 0{,}3389.$

Dalje, za $x_4 = 0{,}4$ po formuli (A) dobivamo

$$y_4 - y_3 = 0{,}1\ (1{,}2350 + 0{,}0306 - 0{,}0076 - 0{,}0013) = 0{,}1257.$$

Iz $y_4 = 0{,}4646$ izračunamo vrijednost f_4 i produžujemo tablicu, a po formuli (B) nalazimo:

$$y_4 - y_3 = 0{,}1\ (1{,}2760 - 0{,}0205 + 0{,}0017 + 0{,}0001) = 0{,}1257.$$

Kako se vrijednost y^4 nije promijenila, činimo naredni korak itd.

Umjesto formula razlike (A) i (B) možemo također upotrijebiti i formule

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4}{3}h\,[2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}], \qquad (A_1)$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}\,[f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1}]. \qquad (B_1)$$

Opisane metode lako ćemo primijeniti na sisteme diferencijalnih jednadžbi.

3. JEDNADŽBE VIŠEGA REDA I SISTEMI JEDNADŽBI

Teoretska objašnjenja. *Teorem egzistencije.* Svaku jednadžbu n-tog reda

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

uvođenjem novih varijabli $y_1 = y'$, $y_2 = y''$, $\dots$, $y_{n-1} = y^{(n-1)}$ možemo svesti na sistem n jednadžbi

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Općenitiji sistem jednadžbi

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (*)$$

ima jednoznačno određen sistem rješenja $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, definiran i neprekinut u nekom području $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, koji za $x = x_0$ poprima zadane početne vrijednosti: $y_i(x_0) = y_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ako su funkcije $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ neprekinute za sve varijable i zadovoljavaju *Lipschitzov uvjet*

$$|f_i(x, y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2, \ldots, y_n + \Delta y_n) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leq$$
$$\leq K(|\Delta y_1| + |\Delta y_2| + \ldots + |\Delta y_n|)$$

za vrijednosti x, y_i i $y_i + \Delta y_i$, koje leže u nekom području blizu zadanih početnih vrijednosti. Suglasno s time jednadžba $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ ima jednoznačno rješenje koje zadovoljava početne uvjete: $y = y_0$, $y' = y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ za $x = x_0$ neprekinuto je sa svojim derivacijama do zaključno $(n-1)$-vog reda, ako je funkcija $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ neprekinuta i zadovoljava gore navedeni Lipschitzov uvjet za funkciju $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Opće rješenje. Za jednadžbu

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

opće rješenje ima n nezavisnih konstanti

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Geometrijski ta jednadžba definira n-parametarsku porodicu integralnih krivulja; pojedinu integralnu krivulju (graf odgovarajućeg partikularnog rješenja) dobivamo iz te porodice određenim izborom vrijednosti po volji odaberivih konstanti $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Ako partikularni integral mora zadovoljavati gore zadane početne uvjete, onda vrijednosti $C_1, C_2, \ldots, C_n$ određujemo iz jednadžbi

$$y(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_0,$$

$$\left[\frac{d}{dx} y(x, C_1, \ldots, C_n)\right]_{x=x_0} = y_0',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y(x, C_1, \ldots, C_n)\right]_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Ako te jednadžbe za po volji odabrane početne vrijednosti u nekom području nisu snošljive, onda rješenje u tom području nije opće — po volji odaberive konstante nisu nezavisne.

Za sistem $(*)$ *opće rješenje* ima također n po volji odaberivih konstanti i može biti dano ili u obliku riješenom po nepoznatim funkcijama

$$y_1 = F_1(x, C_1, \ldots, C_n), \qquad y_2 = F_2(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots,$$
$$y_n = F_n(x, C_1, \ldots, C_n)$$

ili u obliku riješenom po konstantama:

$$\varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \qquad \varphi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \ldots,$$
$$\varphi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n.$$

U posljednjem slučaju svaka jednadžba $\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = C_i$ je *prvi integral* sistema $(*)$. Prvi integral možemo odrediti neovisno o općem kao relaciju toga oblika između x, y_1, $\ldots$, y_n, u kojoj lijeva strana postaje konstanta ako umjesto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ uvrstimo bilo koje rješenje zadanog sistema. Svaki prvi integral sistema $(*)$ zadovoljava linearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} + \ldots + f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} = 0,$$

i obrnuto, svako rješenje $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ te jednadžbe jest prvi integral sistema $(*)$. Skup n nezavisnih (vidi na str. 331) prvih integrala sistema $(*)$ tvori njegov opći integral.

Sniženje reda jednadžbe. Jedna od osnovnih metoda integracije jednadžbi n-tog reda je zamjena varijabli, čime dobivamo jednostavnije jednadžbe, napose, jednadžbe nižeg reda.

Jednadžbu koja ne sadržava eksplicitno x: $f(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ svodimo na jednadžbu $(n-1)$-vog reda nakon zamjene:

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy} \qquad \text{itd.}$$

Primjer: $yy'' - y'^2 = 0$, $p = y'$, $p\dfrac{dp}{dy} = y''$, $yp\dfrac{dp}{dy} - p^2 = 0$, $y\dfrac{dp}{dy} - p = 0$, $p = Cy = \dfrac{dy}{dx}$; $y = C_1 e^{Cx}$ (kada skratimo sa p ne gubimo nijedno rješenje jer $p = 0$ daje $y = C_1$, što je sadržano u općem rješenju za $C = 0$).

Jednadžba koja ne sadržava eksplicitno y: $f(x, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$, dopušta sniženje reda pri zamjeni $y' = p$. Ako jednadžba nema k prvih derivacija, moramo načiniti zamjenu $y^{(k+1)} = p$.

Primjer: $y'' - xy''' + (y''')^3 = 0$. Zamjena $y'' = p$ vodi nas na Clairautovu jednadžbu: $p - x\dfrac{dp}{dx} + \left(\dfrac{dp}{dx}\right)^3 = 0$. Njeno opće rješenje je $p = C_1x + C_1^2$. Odatle je $y = \frac{C_1x^3}{6} - \frac{C_1^2x^2}{2} + C_2x + C_3$.

Singularno rješenje Clairautove jednačbe $p = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2}$ daje singularno rješenje početne jednadžbe

$$y = \frac{8\sqrt{3}}{315}x^{7/2} + C_1x + C_2.$$

Jednadžbi $f(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$, u kojoj je funkcija f *homogena* (vidi na str. 331) *s obzirom na* $y, y', \dots, y^{(n)}$, možemo sniziti red uvođenjem nove funkcije $z = \frac{y'}{y}$ (tj. $y = e^{\int z\,dx}$).

Primjer: $yy'' - y'^2 = 0$; $z = \frac{y'}{y}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{yy'' - y'^2}{y^2}$, stoga je $z = C_1$, odakle je $\ln y = C_1x + C_2$ ili Ce^{C_1x}, gdje je $\ln C = C_2$.

Jednadžba $y^{(n)} = f(x)$. Opće rješenje dobivamo postupnim integriranjem u obliku

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \dots + C_nx^{n-1} + \psi(x),$$

gdje je

$$\psi(x) = \int\int \dots \int f(x)\,(dx)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt.$$

Ovdje x_0 nije dodatna konstanta po volji. S promjenom x_0 mijenja se i C_k, jer je $C_k = \frac{1}{(k-1)!}y^{(k-1)}(x_0)$.

Linearne jednadžbe. Linearnim jednadžbama n-tog reda nazivamo jednadžbe oblika

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = F, \qquad \text{(L)}$$

gdje su a_i i F (*desna strana*) funkcije od x, koje ćemo pretpostaviti neprekinutim u nekom intervalu. Ako su $a_1, a_2, \dots, a_n$ konstante, onda jednadžbu nazivamo *jednadžbom s konstantnim koeficijentima.* Linearnu jednadžbu nazivamo *homogenom* ako je $F = 0$, a *nehomogenom* u protivnom slučaju.

Sistem rješenja $y_1, y_2, \dots, y_n$ homogene linearne jednadžbe nazivamo *fundamentalnim,* ako su te funkcije *linearno nezavisne* u promatranom intervalu, tj. ako linearna kombinacija $C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ ni za kakve vrijednosti $C_1, C_2, \dots, C_n$ osim za $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ nije identički nula (za sve vrijednosti x u danom intervalu). Rješenja $y_1, y_2, \dots, y_n$ homogene linearne jednadžbe tvore fundamentalni sistem onda i samo onda, ako je *determinanta Wronskoga*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

različita od nule. Za svaki sistem rješenja homogene linearne jednadžbe vrijedi *Liouvilleova formula*

$$W(x) = W(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx},$$

zbog čega determinanta W može biti jednaka nuli samo identički [tj. samo ako je $W(x_0) = 0$]. Ako $y_1, y_2, \dots, y_n$ tvore fundamentalni sistem rješenja, onda je $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ opće rješenje linearne homogene jednadžbe.

Ako je poznato jedno partikularno rješenje y_1 homogene jednadžbe, onda red jednadžbe možemo sniziti i sačuvati linearnost uvođenjem nove nepoznate funkcije $u = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)$.

Teorem superpozicije. Ako su y_1 i y_2 rješenja jednadžbe (L) za različite desne strane F_1 i F_2, onda će njihova suma $y = y_1 + y_2$ biti rješenje takve iste jednadžbe s desnom stranom $F = F_1 + F_2$. Odatle izlazi da je za dobivanje općeg rješenja nehomogene jednadžbe dovoljno da nekom njenom partikularnom rješenju dodamo opće rješenje homogene jednadžbe.

Teorem rastavljanja. Ako jednadžba (L) ima realne koeficijente i $F = F_1 + iF_2$, gdje su F_1 i F_2 također realni, njeno rješenje je kompleksno $y = y_1 + iy_2$, pri čemu su y_1 i y_2 rješenja jednadžbe (L) s desnom stranom jednakom F_1 odnosno F_2.

Rješenje nehomogene jednadžbe (L) možemo dobiti pomoću kvadratura, ako je poznat fundamentalni sistem rješenja pripadne homogene jednadžbe, na jedan od ovih načina:

Metoda varijacije konstanti. Napisat ćemo traženo rješenje u obliku $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$, smatrajući da $C_1, C_2, \dots, C_n$ nisu konstante nego funkcije od x. Ako zahtijevamo da su zadovoljene relacije

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 + \dots + C_n'y_n = 0,$$
$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + \dots + C_n'y_n' = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0,$$

dobivamo uvrštenjem y u jednadžbu (L):

$$C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = F.$$

Kada riješimo linearni sistem jednadžbi, nađemo $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ i dalje kvadraturama $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Cauchyjeva metoda. U općem rješenju homogene jednadžbe $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ odredit ćemo konstante tako da za $x = \alpha$ bude $y = 0$, $y' = 0, \ldots, y^{(n-2)} = 0$, $y^{(n-1)} = F(\alpha)$, gdje je α parametar po volji. Ako sada tako dobiveno rješenje homogene jednadžbe označimo sa $\varphi(x, \alpha)$, onda će $\int_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha)\,d\alpha$ biti partikularno rješenje jednadžbe (L), koje za $x = x_0$ iščezava zajedno sa svojim derivacijama do zaključno $(n-1)$-tog reda.

4. RJEŠAVANJE LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Operatorska oznaka. Jednadžbu (L) (vidi na str. 524) možemo napisati simbolički u obliku

$$P_n(D)\,y \equiv (D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)\,y = F,$$

gdje je D operator diferenciranja

$$Dy = \frac{dy}{dx}, \quad D^ky = \frac{d^ky}{dx^k}.$$

Ako su koeficijenti a_i konstantni, onda je $P_n(D)$ polinom n-tog stupnja u operatoru D (s numeričkim koeficijentima).

Rješavanje homogene jednadžbe $P_n(D)y = 0$. Da nađemo opće rješenje, najprije moramo naći korijene $r_1, r_2, \ldots, r_n$ algebarske jednadžbe (vidi na str. 154 do 160) $P_n(r) = 0$ (*karakteristična jednadžba*). Svakom korijenu r_i odgovara rješenje e^{r_ix} jednadžbe $P_n(D)y = 0$. Ako je r_i k-struki korijen, onda su $xe^{r_ix}, x^2e^{r_ix}, \ldots, x^{k-1}e^{r_ix}$ također rješenja. Linearna kombinacija tih rješenja za sve korijene r_i

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \ldots + e^{r_ix}(C_i + C_{i+1}x + \ldots + C_{i+k-1}x^{k-1}) + \ldots$$

opće je rješenje homogene jednadžbe.

Ako među korijenima ima i kompleksnih (oni mogu biti samo konjugirano kompleksni*) npr. ako je $r_1 = \alpha + i\beta$,

* Pretpostavljamo da su koeficijenti a_k realni.

$r_2 = \alpha - i\beta$, onda u pripadnim članovima općeg rješenja moramo funkcije e^{r_1x} i e^{r_2x} zamijeniti sa $e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Pri tom dobiveni izraz oblika $C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$ možemo predočiti također u obliku $A\cos(\beta x + \varphi)$, gdje su A i φ konstante po volji.

Primjer: Za jednadžbu $y^{\mathrm{VI}} + y^{\mathrm{IV}} - y'' - y = 0$ karakteristična jednadžba $r^6 + r^4 + r^2 - 1 = 0$ ima korijene: $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_{3,4} = i$, $r_{5,6} = -i$. Opće rješenje je

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (C_3 + C_4x)\cos x + (C_5 + C_6x)\sin x$$

ili

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + A_1\cos(x + \varphi_1) + x\,A_2\cos(x + \varphi_2).$$

Hurwitzov teorem. U teoriji titranja i drugim primjenama često je važno ustanoviti da neko rješenje dane linearne homogene diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima teži k nuli kada $x \to +\infty$. To nastupa onda kada su realne komponente svih korijena karakteristične jednadžbe negativne. Svi korijeni jednadžbe

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0 \quad (a_0 > 0)$$

imat će negativne realne komponente onda i samo onda, ako su sve determinante

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\ldots, \; D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots & a_n \end{vmatrix}, \quad (\text{gdje je } a_m = 0, \text{ za } m > n)$$

pozitivne (*Hurwitzov teorem*).

Rješenje nehomogene jednadžbe s konstantnim koeficijentima možemo uvijek naći metodom varijacije konstanti ili Cauchyjevom metodom (vidi na str. 525 i 526). Druga metoda je operatorska (vidi na str. 533). Najjednostavnije dobivamo partikularno rješenje takove jednadžbe onda, kada desna strana ima specijalan oblik (vidi dalje).

Specijalna desna strana. U nekim slučajevima partikularno rješenje nehomogene jednadžbe $P_n(D)y = F(x)$ možemo naći jednostavnim algebarskim postupkom.

Ako su $F(x) = Ae^{kx}$ i $P_n(k) \neq 0$, onda je partikularno rješenje $y = \dfrac{Ae^{kx}}{P_n(k)}$. Ako je k m-struki korijen karakteristične jednadžbe, tj. $P_n(k) = P_n'(k) = \ldots = P_n^{(m-1)}(k) = 0$, onda je partikularno rješenje $y = \frac{Ax^m e^{kx}}{P_n^{(m)}(k)}$. Pomoću teorema rastavljanja (str. 525) možemo se koristiti tim formulama i u slučaju kada je $F(x) = Ae^{kx}\cos\omega x$ ili $Ae^{kx}\sin\omega x$. Pripadno partikularno rješenje dobivamo kao realni ili imaginarni dio rješenja iste jednadžbe za desnu stranu: $F(x) = Ae^{kx}(\cos\omega x + i\sin\omega x) = Ae^{(k+i\omega)x}$.

Primjeri: 1) Za jednadžbu $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$ partikularno rješenje je $y = -\frac{xe^{2x}}{2}$, gdje je $P(D) = D^2 - 6D + 8$, $P(2) = 0$ i $P'(D) = 2D - 6$, $P'(2) = 2\cdot 2 - 6 = -2$. 2) Za jednadžbu $y'' + y' + y = e^x \sin x$ partikularno rješenje $y_1 = \frac{e^x}{13}(2\sin x - 3\cos x)$, dobijemo kao imaginarni dio rješenja

$$y = \frac{e^{(1+i)x}}{(1+i)^2 + (1+i) + 1} = \frac{e^x(\cos x + i\sin x)}{2+3i}$$

jednadžbe $(D^2 + D + 1)\,y = e^{(1+i)x}$.

Ako $F(x)$ ima oblik $Q_p(x)\,e^{kx}$, gdje je $Q_p(x)$ polinom p-tog stupnja, uvijek možemo naći partikularno rješenje istog oblika, tj. $y = R(x)e^{kx}$. Ovdje je $R(x)$ polinom p-tog stupnja pomnožen sa x^m, ako je k m-struki korijen karakteristične jednadžbe. Ako to rješenje napišemo s neodređenim koeficijentima u $R(x)$ i zahtijevamo da zadovoljava danu jednadžbu, dobivamo linearnu algebarsku jednadžbu za određivanje nepoznatih koeficijenata*.

Primjer: $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + y'' = 6x + 2x\sin x$; korijeni karakteristične jednadžbe su $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k_4 = -1$. Na osnovu teorema superpozicije (vidi na str. 525) možemo tražiti odvojeno partikularna rješenja koja odgovaraju pojedinim sumandima desne strane. Postavimo $y_1 = x^2(ax + b)$ i uvrstimo u jednadžbu, dobivamo $12a + 2b + 6ax = 6x$, odakle je $a = 1$, $b = -6$. Isto tako za drugi sumand postavimo $y_2 = (cx + d)\sin x + (fx + g)\cos x$, što daje $(2g + 2f - 6c + 2fx)\sin x - (2c + 2d + 6f + 2cx)\cos x = 2x\sin x$, odakle je $c = 0$, $d = -3$, $f = 1$, $g = -1$. Konačno će opće rješenje biti

$$y = c_1 + c_2 x - 6x^2 + x^3 + (c_3 x + c_4)e^{-x} - 3\sin x + (x-1)\cos x.$$

* Ovu metodu napose primjenjujemo ako je $F(x) = Q_p(x)$ (tj. $k = 0$) i ako je $F(x) = Q_p(x)\,e^{rx}\cos\omega x$ ili $F(x) = Q_p(x)\,e^{rx}\sin\omega x$, što odgovara $k = r \pm i\omega$. U posljednjem slučaju rješenje treba postaviti u obliku

$$y = x^m e^{rx}[M_p(x)\cos\omega x + N_p(x)\sin\omega x].$$

Eulerovu jednadžbu oblika $\sum_{k=0}^{n} a_k(cx+d)^k y^{(k)} = F(x)$ svodimo na linearnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima uvrštenjem $cx + d = e^t$.

Primjer: Jednadžba $x^2y'' - 5xy' + 8y = x^2$ nakon uvrštenja $x = e^t$ prelazi u jednadžbu $\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 8y = e^{2t}$, koju smo promatrali na str. 528. Prema tome je

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - \frac{t}{2}e^{2t} = C_1x^2 + C_2x^4 - \frac{x^2}{2}\ln x.$$

5. SISTEMI LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Normalni sistemi prvog reda. Najjednostavniji slučaj sistema linearnih jednadžbi prvog reda s konstantnim koeficijentima su tzv. *normalni* sistemi

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n,\\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(N)}$$

Da nađemo opće rješenje takvog sistema moramo prije svega riješiti algebarsku *karakterističnu jednadžbu**

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0.$$

Svakom jednostrukom korijenu r_i karakteristične jednadžbe odgovara sistem partikularnih rješenja

$$y_1 = A_1e^{r_ix},\ y_2 = A_2e^{r_ix},\ \ldots,\ y_n = A_ne^{r_ix}, \qquad (*)$$

gdje koeficijente A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ određujemo iz sistema linearnih homogenih jednadžbi

$$\begin{gathered} (a_{11} - r_i)\,A_1 + a_{12}A_2 + \ldots + a_{1n}A_n = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \ldots + (a_{nn} - r_i)\,A_n = 0. \end{gathered}$$

* O determinantama vidi na str. 165.

Ukoliko iz tog sistema možemo odrediti samo međusobne omjere veličina A_k (vidi na str. 173), sistem partikularnih rješenja za svaki r_l dobiven navedenom metodom ima po jednu po volji odaberivu konstantu. Ako su svi korijeni karakteristične jednadžbe različiti, onda će suma svih takvih partikularnih rješenja sadržavati n nezavisnih po volji odaberivih konstanti i dat će opće rješenje sistema. Ako bilo koji korijen r_l karakteristične jednadžbe ima višestrukost m, onda će tom korijenu odgovarati sistem partikularnih rješenja oblika

$$y_1 = A_1(x)\,e^{r_l x}, \quad y_2 = A_2(x)\,e^{r_l x}, \ldots, y_n = A_n(x)\,e^{r_l x},$$

gdje su $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ polinomi stupnja ne višeg od $m-1$. Kada izraze s neodređenim koeficijentima uvrstimo u zadani sistem, a koeficijente uz jednake potencije x na lijevoj i desnoj strani skratimo sa $e^{r_l(x)}$, dobivamo jednadžbe kojima možemo izraziti sve nepoznate koeficijente pomoću bilo kojih m između njih. U nekim slučajevima stupanj polinoma može biti niži od $m-1$. Napose u slučaju kada je sistem (N) simetričan (tj. $a_{ik} = a_{ki}$), dovoljno je da uzmemo $A_i(x) = \text{const.}$ Ako među korijenima karakteristične jednadžbe ima kompleksnih, onda pripadne članove općeg rješenja svodimo na realan oblik, isto kao i u slučaju jedne jednadžbe s konstantnim koeficijentima (vidi na str. 527).

Primjer: Za sistem

$$y_1' = 2y_1 + 2y_2 - y_3; \quad y_2' = -2y_1 + 4y_2 + y_3;$$
$$y_3' = -3y_1 + 8y_2 + 2y_3$$

karakteristična jednadžba je

$$\begin{vmatrix} 2-r & 2 & -1 \\ -2 & 4-r & 1 \\ -3 & 8 & 2-r \end{vmatrix} = -(r-6)(r-1)^2 = 0.$$

Za jednostruki korijen $r_l = 6$ dobivamo

$$-4A_1 + 2A_2 - A_3 = 0, \quad -2A_1 - 2A_2 + A_3 = 0,$$
$$-3A_1 + 8A_2 - 4A_3 = 0,$$

odakle je

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_3 = C_1, \quad \text{tj. } y_1 = 0, \quad y_2 = C_1 e^{6x}, \quad y_3 = 2C_1 e^{6x}.$$

Za višestruki korijen $r_2 = 1$ stavimo

$$y_1 = (P_1 x + Q_1)\,e^x, \qquad y_2 = (P_2 x + Q_2)\,e^x, \qquad y_3 = (P_3 x + Q_3)\,e^x.$$

Uvrštenjem u jednadžbu dobivamo

$$P_1 x + (P_1 + Q_1) = (2P_1 + 2P_2 - P_3)\,x + (2Q_1 + 2Q_2 - Q_3);$$
$$P_2 x + (P_2 + Q_2) = (-2P_1 + 4P_2 + P_3)\,x + (-2Q_1 + 4Q_2 + Q_3);$$
$$P_3 x + (P_3 + Q_3) = (-3P_1 + 8P_2 + 2P_3)\,x + (-3Q_1 + 8Q_2 + 2Q_3),$$

odakle je

$$P_1 = 5C_2, \quad P_2 = C_2, \quad P_3 = 7C_2; \quad Q_1 = 5C_3 - 6C_2, \quad Q_2 = C_3,$$
$$Q_3 = 7C_3 - 11C_2.$$

Opće rješenje sistema je

$$y_1 = (5C_2 x + 5C_3 - 6C_2)\,e^x, \quad y_2 = C_1 e^{6x} + (C_2 x + C_3)\,e^x,$$
$$y_3 = 2C_1 e^{6x} + (7C_2 x + 7C_3 - 11C_2)\,e^x.$$

Homogeni sistemi prvog reda. Opći oblik sistema linearnih homogenih jednadžbi prvog reda s konstantnim koeficijentima je

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k' + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ako determinanta $|a_{ik}|$* nije nula, onda taj sistem možemo dovesti na normalni oblik. Isto rješenje možemo dobiti neposredno iz danog sistema istom metodom kao i u slučaju normalnog sistema. Karakteristična jednadžba dobiva oblik $|a_{ik} r + b_{ik}| = 0$, a koeficijente A_i rješenja (*), koji pripadaju jednostrukom korijenu r_l, u tom slučaju određujemo iz jednadžbe

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} r_l + b_{ik})\,A_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

U ostalom je metodika traženja rješenja ista kao i u slučaju normalnog sistema.

Slučaj $|a_{ik}| = 0$ zahtijeva dopunska razmatranja.

Primjer: $5y_1' + 4y_1 - 2y_2' - y_2 = 0; \quad y_1' = 8y_1 - 3y_2 = 0.$

Karakteristična jednadžba je

$$\begin{vmatrix} 5r+4 & -2r-1 \\ r+8 & -3 \end{vmatrix} = 2r^2 + 2r - 4 = 0; \quad r_1 = 1, \quad r_2 = -2.$$

* Skraćena oznaka determinante s elementima a_{ik}.

Naći ćemo A_1 i A_2 za $r_1 = 1$: $9A_1 - 3A_2 = 0$, $9C_1 - 3A_2 = 0$, ili $A_2 = 3A_1 = 3C_1$; tačno kao i za $r_2 = -2$ dobivamo $A_2 = 2A_1 = 2C_2$. Odatle je opće rješenje:

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \qquad y_2 = 3C_1 e^x + 2C_2 e^{-2x}.$$

Nehomogeni sistemi linearnih jednadžbi prvog reda. *Opći oblik*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k' + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k = F_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Teorem superpozicije. Ako su $y_j^{(1)}$ i $y_j^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ rješenja nehomogenih sistema kojima se razlikuju samo desne strane jednake $F_i^{(1)}$ odnosno $F_i^{(2)}$, onda je $y_j = y_j^{(1)} + y_j^{(2)}$ $(j = 1, \ldots, n)$ rješenje istog sistema jednadžbi kojima su desne strane $F_i(x) = F_i^{(1)}(x) + F_i^{(2)}(x)$. Odatle slijedi da je za opće rješenje nehomogenog sistema dovoljno da njenom partikularnom rješenju dodamo opće rješenje pripadnog homogenog sistema. Pri računanju partikularnog rješenja nehomogenog sistema možemo primijeniti *metodu varijacije konstanti*: opće rješenje homogenog sistema uvrstimo u nehomogeni sistem i konstante $C_1, \ldots, C_n$ zamijenimo nepoznatim funkcijama $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$. Pri tom se u izrazima za derivaciju y_k' javljaju članovi sa derivacijama novih nepoznatih funkcija $C_k(x)$. Uvrštenjem u zadani sistem, na lijevim stranama ostaju samo ti dodatni članovi, a ostali se međusobno krate, jer je $y_1, \ldots, y_n$ po pretpostavci rješenje homogenog sistema. Na taj način za $C_k'(x)$ dobivamo nehomogeni sistem linearnih algebarskih jednadžbi. Kada ih riješimo sa n integracija, dobivamo funkcije $C_1(x), \ldots, C_n(x)$. Uvrštenjem tih funkcija umjesto konstanti u rješenje homogenog sistema dobivamo traženo partikularno rješenje.

Primjer: $5y_1' + 4y_1 - 2y_2' - y_2 = e^{-x}$; $\quad y_1' + 8y_1 - 3y_2 = 5e^{-x}$.

Opće rješenje homogenog sistema (v. str. 531) je $y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, $y_2 = 3C_1 e^x + 2C_2 e^{-2x}$; uvrstivši ga u zadane jednadžbe i smatrajući da su C_1 i C_2 funkcije od x, dobivamo:

$$5C_1' e^x + 5C_2' e^{-2x} - 6C_1' e^x - 4C_2' e^{-2x} = e^{-x};$$

$$C_1' e^x + C_2' e^{-2x} = 5e^{-x} \text{ ili } C_2' e^{-2x} - C_1' e^x = e^{-x}, \quad C_1' e^x + C_2' e^{-2x} = 5e^{-x}.$$

Odatle $2C_1' e^x = 4e^{-x}$, $C_1 = -e^{-2x} + \text{const}$; $2C_2' e^{-2x} = 6e^{-x}$, $C_2 = 3e^x + \text{const}$. Uzmimo da su sve const. $= 0$ (jer tražimo samo partikularno rješenje). Dobivamo $y_1 = 2e^{-x}$, $y_2 = 3e^{-x}$; opće rješenje je: $y_1 = 2e^{-x} + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, $y_2 = 3e^{-x} + 3C_1 e^x + 2C_2 e^{-2x}$.

U slučaju specijalnih desnih strana oblika $Q_p(x)e^{kx}$, možemo uspješno primijeniti metodu neodređenih koeficijenata, analognu metodi opisanoj na str. 528 za jednu jednadžbu n-tog reda.

Sistemi drugog reda. Ranije opisane metode možemo prenijeti na sisteme linearnih jednadžbi višeg reda. Napose je i za sisteme

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k'' + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k' + \sum_{k=1}^{n} c_{ik} y_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

moguće tražiti partikularno rješenje oblika $y_i = A_i e^{r_i x}$, gdje se r_i određuje iz karakteristične jednadžbe $| a_{ik} r^2 + b_{ik} r + c_{ik} | = 0$, a A_i iz odgovarajućih linearnih homogenih algebarskih jednadžbi.

6. OPERATORSKA METODA RJEŠAVANJA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Transformacija funkcija. *Transformatom* zadane funkcije (*originala*) $\varphi(t)$ po Carsonu-Heavisideu nazivamo funkciju kompleksne varijable p, koja je definirana jednadžbom

$$f(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t)\, dt. \qquad (*)$$

Pri tome smatramo da je za $t < 0$, $\varphi(t) = 0$, za $t > 0$ zadovoljena je nejednadžba $|\varphi(t)| < Me^{at}$, u kojoj su M i a neke pozitivne konstante.

Metodom teorije funkcija kompleksne varijable možemo dobiti *formulu obrata* kojom jednoznačno određujemo original $\varphi(t)$, ako znamo njen transformat $f(p)$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \to \infty} \int_{s-ir}^{s+ir} e^{pt} \frac{f(p)}{p}\, dp,$$

gdje s izabiremo tako da sve singularne tačke podintegralne funkcije leže lijevo od pravca $\operatorname{Re} p = s$ (o integriranju funkcija kompleksne varijable vidi na str. 596). Relaciju $(*)$ ćemo pisati u obliku $f(p) \div\!\rightarrow \varphi(t)$*. U tablici na str. 538 navedene su neke jednostavnije funkcije i njihovi transformati.

Osnovna svojstva transformiranih funkcija. Iz formule $(*)$ možemo dobiti

---

* Funkciju $\frac{f(p)}{p} f(p)$ nazivamo *transformatom* $\varphi(t)$ *po Laplaceu* ili kratko *L-transformatom*.

$$\frac{d\varphi}{dt} \mathrel{\div\!\!\rightarrow} pf(p) - \varphi(0)p; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathrel{\div\!\!\rightarrow} p^2 f(p) - p^2\varphi(0) - p\varphi'(0); \ldots$$

$$\ldots; \frac{d^n\varphi}{dt^n} \mathrel{\div\!\!\rightarrow} p^n f(p) - p^n\varphi(0) - p^{n-1}\varphi'(0) - \ldots - p\varphi^{(n-1)}(0)^*;$$

$$\int_0^t \varphi(t)\,dt \mathrel{\div\!\!\rightarrow} \frac{1}{p} f(p); \quad \varphi(at) \mathrel{\div\!\!\rightarrow} f\left(\frac{p}{a}\right), \quad (a = \text{const} > 0).$$

Ako je $\varphi_1(t) \mathrel{\div\!\!\rightarrow} f_1(p)$ i $\varphi_2(t) \mathrel{\div\!\!\rightarrow} f_2(p)$, onda je

$$a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) \mathrel{\div\!\!\rightarrow} a_1 f_1(p) + a_2 f_2(p).$$

Teorem pomaka. Ako je $\varphi(t) \mathrel{\div\!\!\rightarrow} f(p)$, onda je

$$e^{-at}\varphi(t) \mathrel{\div\!\!\rightarrow} \frac{p}{p+a} f(p+a).$$

Teorem retardacije. Ako je $\varphi(t) \mathrel{\div\!\!\rightarrow} f(p)$ i $\lambda > 0$, onda je

$$e^{-\lambda p} f(p) \mathrel{\leftarrow\!\!\div} \begin{cases} \varphi(t-\lambda) & \text{za } t > \lambda, \\ 0 & \text{za } t < \lambda. \end{cases}$$

Borelov teorem. Ako je $\varphi_1(t) \mathrel{\div\!\!\rightarrow} f_1(p), \varphi_2(t) \mathrel{\div\!\!\rightarrow} f_2(p)$, onda je

$$\int_0^t \varphi_1(t-\tau)\,\varphi_2(\tau)\,d\tau \mathrel{\div\!\!\rightarrow} \frac{1}{p} f_1(p) f_2(p).$$

Impulsna funkcija. Original za $f(p) = p$ je tzv. *delta-funkcija* $\delta(t)$, koja postaje jednaka nuli za $t \neq 0$, a neizmjerna za $t = 0$, tako da je pri tome $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$. Tu funkciju možemo definirati i drukčije, npr. $\delta(t) = \lim_{h\to 0} f(t, h)$, gde je $f(t, h) = \frac{1}{h}$ za $0 < t < h$ i $f(t, h) = 0$ izvan tog intervala. Delta-funkcija služi za predočivanje trenutnih impulsa (mehaničkih, električkih itd., vidi primjer 3 na str. 537).

* Pri tom pretpostavljamo da $\frac{d^n\varphi}{dt^n}$ zadovoljava gore uvedenu nejednadžbu za funkcije koje imaju transformat.

Operatorska metoda. Ta metoda rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi sastoji se u biti u tome da od jednadžbe za nepoznatu funkciju pređemo na jednadžbu za njen transformat (tzv. *pomoćnu jednadžbu*). Ta jednadžba nije diferencijalna nego obična algebarska. Kada dobijemo transformat, pomoću njega izračunamo traženu funkciju. Na taj način osnovna teškoća operatorske metode nije rješavanje jednadžbe, nego prijelaz od funkcije na njen transformat i obrnuto.

Linearne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

$$L_n(D)\,y \equiv (D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)\,y = F(t),$$

(D je operator diferenciranja po nezavisnoj varijabli t).

Neka je $y(t) \mathrel{\div\!\!\rightarrow} \bar{y}(p)$, $F(t) \mathrel{\div\!\!\rightarrow} \bar{F}(p)$. Tada će na osnovu formula sa str. 534 pomoćna jednadžba glasiti

$$\begin{aligned} L_n(p)\,\bar{y} = \bar{F}(p) + (p^n y_0 + p^{n-1}y_0' + \ldots + p y_0^{(n-1)} + \\ + a_1(p^{n-1}y_0 + p^{n-2}y_0' + \ldots + p y_0^{(n-2)}) + \ldots \\ \ldots + a_{n-2}(p^2 y_0 + p y_0') + a_{n-1}p y_0 \equiv \bar{F}(p) + M(p), \quad (**) \end{aligned}$$

gdje su $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ vrijednosti funkcija y i njenih derivacija za $t = 0$. U jednostavnijem slučaju, kada je $y_0 = y_0' = \ldots = y_0^{(n-1)} = 0$, vrijedi $M(p) \equiv 0$. Rješenje koje pripada tim početnim uvjetima nazivamo *normalnim*. Iz ($**$) izlazi da je $\bar{y} = \frac{\bar{F}(p) + M(p)}{L_n(p)}$.

Da nađemo y, često primjenjujemo metodu rastavljanja na parcijalne razlomke (vidi na str. 145) i formule (2) do (9) iz tablice na str. 538. Kako te formule u brojniku imaju p, obično rastavljamo razlomke s nazivnikom $pL_n(p)$ i rezultat pomnožimo sa p. U jednostavnijem slučaju, kada su svi korijeni p_k nazivnika $L_n(p)$ različiti, a brojnik $P_m(p)$ je polinom stupnja ne većeg od n, to dovodi do *formule Heavisideovog razvoja*

$$\frac{P_m(p)}{L_n(p)} \mathrel{\leftarrow\!\!\div} \frac{P_m(0)}{L_n(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{P_m(p)}{pL_n'(p)}\right]_{p=p_k} \cdot e^{p_k t}.$$

Ako $\frac{\bar{F}(p)}{L_n(p)}$ nije racionalna funkcija, onda rastavljamo na elementarne razlomke $\frac{1}{pL_k(p)}$ i služimo se formulama

$$\frac{\bar{F}(p)}{p-a} \leftarrow\!\!\div\ e^{at}\int_0^t F(x)\,e^{-ax}\mathrm{d}x$$

ili

$$\frac{\bar{F}(p)}{(p-a)^m} \leftarrow\!\!\div\ \frac{e^{at}}{(m-1)!}\int_0^t F(x)\,e^{-ax}\,(t-x)^{m-1}\,\mathrm{d}x.$$

Ako među korijenima jednadžbe $L_n(p) = 0$ ima kompleksnih, upotreba posljednih formula u međuračunima može dovesti do kompleksnih veličina, ali konačni rezultat uvijek se može predočiti u realnom obliku.

Primjeri: 1) Nađimo normalno rješenje jednadžbe

$$y''' - y'' - y' + y = t.$$

$$L(p) = (p+1)(p-1)^2, \quad M(p) = 0, \quad \bar{F}(p) = \frac{1}{p};$$

$$\bar{y} = \frac{1}{p(p+1)(p-1)^2} = \frac{p}{p^2(p+1)(p-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{4}\frac{p}{p+1} - \frac{5}{4}\frac{p}{p-1} + \frac{1}{2}\frac{p}{(p-1)^2}.$$

Odatle, na osnovu formula (1), (2) i (9) na str. 538, dobivamo

$$y = t + 1 + \frac{1}{4}e^{-t} + \left(\frac{1}{2}t - \frac{5}{4}\right)e^t.$$

2) Nađimo opće rješenje jednadžbe $y'' + m^2y = a\sin mt$;

$$L(p) = p^2 + m^2; \qquad \bar{F}(p) = \frac{amp}{m^2+p^2}.$$

$$M(p) = p^2y_0 + py_0'; \qquad \bar{y} = \frac{amp}{(p^2+m^2)^2} + \frac{p^2y_0 + py_0'}{p^2+m^2}.$$

Da bismo mogli upotrijebiti formule iz tablice na str. 538, pretvorimo prvi sumand u oblik $A\dfrac{p(p^2-m^2)}{(p^2+m^2)^2} + B\dfrac{pm}{p^2+m^2}$. Metodom neodređenih koeficijenata nalazimo A i B, a pomoću formula (3), (4) i (8) sa str. 538, dobivamo

$$y = \left(y_0 - \frac{a}{2m}t\right)\cos mt + \frac{a + 2my_0'}{2m^2}\sin mt.$$

3) Nađimo zakon gibanja materijalne tačke mase m pod djelovanjem trenutnog impulsa A, koji djeluje u momentu $t = 0$. Početna koordinata je $x_0 = 0$, a početna brzina je $x_0' = 0$.

Jednadžba gibanja je $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = A\,\delta(t)$. Pomoćna jednadžba je $mp^2\bar{x} = Ap$, odakle je $\bar{x} = \dfrac{A}{mp}$, tj. $x = \dfrac{At}{m}$.

Sistemi linearnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Zamijenimo svaku jednadžbu sistema pripadnom pomoćnom jednadžbom, analogno onome što je bilo pokazano ranije za jednu jednadžbu, te riješimo dobiveni *algebarski* sistem linearnih jednadžbi za transformate nepoznatih funkcija. Pri tome pretpostavljamo da je determinanta sistema različita od nule*. Za prijelaz od transformata na original obično se, kao i za jednu jednadžbu, koristimo metodom rastavljanja na parcijalne razlomke.

Primjer: $(5D+4)y_1 - (2D+1)y_2 = e^{-x}$; $(D+8)y_1 - 3y_2 = 5e^{-x}$. Za $x = 0$ je $y_1 = y_{10}$, $y_2 = y_{20}$. Pomoćne jednadžbe glase

$$(5p+4)\bar{y}_1 - (2p+1)\bar{y}_2 = \frac{p}{p+1} + 5py_{10} - 2py_{20};$$

$$(p+8)\bar{y}_1 - 3\bar{y}_2 = \frac{5p}{p+1} + py_{10}.$$

Riješimo ih po $\bar{y}_1$ i $\bar{y}_2$, pa nakon rastavljanja na parcijalne razlomke dobivamo

$$\bar{y}_1 = \frac{2p}{p+1} + (3y_{10} - y_{20} - 3)\frac{p}{p+2} + (-2y_{10} + y_{20} + 1)\frac{p}{p-1};$$

$$\bar{y}_2 = \frac{3p}{p+1} + (6y_{10} - 2y_{20} - 6)\frac{p}{p+2} + (-6y_{10} + 3y_{20} + 3)\frac{p}{p-1},$$

odakle je

$$y_1 = 2e^{-x} + (3y_{10} - y_{20} - 3)\,e^{-2x} + (1 - 2y_{10} + y_{20})\,e^x,$$
$$y_2 = 3e^{-x} + (6y_{10} - 2y_{20} - 6)\,e^{-2x} + (3 - 6y_{10} + 3y_{20})\,e^x.$$

Primjenu operatorskih metoda za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi vidi na str. 572.

* Slučaj da determinanta postane jednaka nuli veoma je rijedak, i zahtijeva dopunska ispitivanja.

Tablica transformiranih funkcija po Carsonu-Heavisideu

	$\varphi(t)\quad (t > 0)$*	$f(p) = p\int\limits_0^\infty e^{-pt}\,\varphi(p)\,\mathrm{d}t$
1.	$\dfrac{t^n}{\Gamma(n+1)}$	$\dfrac{1}{p^n}$
2.	e^{-at}	$\dfrac{p}{p+a}$
3.	$\sin kt$	$\dfrac{pk}{p^2+k^2}$
4.	$\cos kt$	$\dfrac{p^2}{p^2+k^2}$
5.	$e^{-at}\sin kt$	$\dfrac{pk}{(p+a)^2+k^2}$
6.	$e^{-at}\cos kt$	$\dfrac{p(p+a)}{(p+a)^2+k^2}$
7.	$t\sin kt$	$\dfrac{2kp^2}{(p^2+k^2)^2}$
8.	$t\cos kt$	$\dfrac{p(p^2-k^2)}{(p^2+k^2)^2}$
9.	$e^{-at}\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{p}{(p+a)^{n+1}}$
10.	$\dfrac{(2t)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{\sqrt{p}}{p^n}$ (n je cio broj, >0)
11.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\sqrt{p}\,e^{-a\sqrt{p}}\quad (a>0)$
12.	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}\,e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$p\,e^{-a\sqrt{p}}$
13.	$1-\Phi\left(\dfrac{a}{\sqrt{2t}}\right)\quad (a>0)$**	$e^{-a\sqrt{p}}$
14.	$J_0(t)$***	$\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
15.	$I_0(t)$***	$\dfrac{p}{\sqrt{p^2-1}}$
16.	$\int\limits_t^\infty \dfrac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$	$\ln(1+p)$

* Za $t < 0$ uvijek je $\varphi(t) = 0$.
** Definiciju $\Phi(x)$ vidi na str. 654.
*** O Besselovim funkcijama $J(x)$ i $I(x)$ vidi na str. 540 do 542.

7. LINEARNE JEDNAŽDBE DRUGOG REDA

Opće metode. *Jednadžba* $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = F(x)$. Opće rješenje homogene jednadžbe $[F(x) = 0]$ glasi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

gdje su y_1 i y_2 njena dva nezavisna partikularna rješenja (vidi na str. 525). Ako poznamo jedno partikularno rješenje y_1, drugo možemo odrediti po formuli

$$y_2 = A y_1 \int \frac{e^{-\int p\,\mathrm{d}x}}{y_1^2}\,\mathrm{d}x, \text{ gdje je } A \text{ po volji,} \tag{$*$}$$

što je posljedica Liouvilleove formule (vidi na str. 525). Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe u ovom slučaju možemo dobiti po formuli

$$y = \frac{1}{A}\int\limits_{x_0}^{x} F(\xi)\,e^{\int p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}\,[y_2(x)\,y_1(\xi) - y_1(x)\,y_2(\xi)]\,\mathrm{d}\xi,$$

gdje su y_1 i y_2 ranije naznačena partikularna rješenja homogene jednadžbe s istom lijevom stranom.

Da nađemo partikularno rješenje nehomogene jednadžbe, možemo također primijeniti metodu varijacija konstanti (vidi na str. 525).

Ako su u jednadžbi $s(x)\,y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = F(x)$ funkcije $s(x)$, $p(x)$, $q(x)$ i $F(x)$ polinomi ili se mogu razviti u konvergentan red po potencijama $x - x_0$ u nekom području, i $s(x_0) \neq 0$, onda se i rješenja te jednadžbe također razvijaju u konvergentan red po potencijama $x - x_0$ u istom području. Ta rješenja možemo naći metodom neodređenih koeficijenata: traženo rješenje u obliku reda $y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$ uvrstimo u zadanu jednadžbu; izjednačimo koeficijente s jednakim potencijama $x - x_0$, pa dobivamo jednadžbe za računanje a_0, a_1, a_2.

Primjer: $y'' + xy = 0$. Kada postavimo
$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,\quad y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots,$
$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots,$ dobivamo:

$$2a_2 = 0,\quad 6a_3 + a_0 = 0,\quad \ldots;\quad n(n-1)\,a_n + a_{n-3} = 0,\quad \ldots$$

Riješimo te jednadžbe, pa dobivamo $a_2 = 0$, $a_3 = -\dfrac{a_0}{2\cdot 3}$,

$a_4 = -\dfrac{a_1}{3\cdot 4}$, $a_5 = 0$, $\ldots$, odakle je

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \ldots\right) + \\ + a_1\left(x - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \ldots\right).$$

Jednadžba $x^2y'' + xp(x)\,y' + q(x)\,y = 0$. Ako se funkcije $p(x)$ i $q(x)$ mogu razviti u konvergentan red po potencijama x, onda metodom neodređenih koeficijenata možemo naći rješenja oblika

$$y = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots).$$

Vrijednosti eksponenta r dobivamo iz *odredbene jednadžbe*

$$r(r-1) + p(0)\,r + q(0) = 0.$$

Ako su korijeni te jednadžbe različiti i njihova razlika nije cio broj, dobivamo dva nezavisna rješenja naše jednadžbe. U protivnom slučaju metoda neodređenih koeficijenata daje samo jedno rješenje.

Jednadžba (*) sa str. 539 može poslužiti ili za neposredno određivanje drugog rješenja, ili za određivanje oblika u kome možemo naći to rješenje metodom neodređenih koeficijenata.

Primjer: Za Besselovu jednadžbu (vidi dalje), za n cio broj, metodom neodređenih koeficijenata možemo dobiti samo jedno rješenje oblika $y_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{n+2k}$ $(a_0 \neq 0)$, koje se podudara sa $J_n(x)$ s tačnošću do konstantnog faktora. Kako je ovdje $e^{-\int p\,dx} = \frac{1}{x}$, drugo rješenje po formuli (*) bit će

$$y_2 = Ay_1\int\frac{dx}{x\cdot x^{2n}(\Sigma a_k x^{2k})^2} = Ay_1\int\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}}{x^{2n+1}}\,dx = \\ = By_1\ln x + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{2k}.$$

Postupno računanje koeficijenata c_k i d_k iz a_k dosta je složeno, ali se posljednjim izrazom možemo koristiti za računanje rješenja metodom neodređenih koeficijenata (očigledno je da takav oblik ima razvoj u red funkcija $Y_n(x)$, vidi dalje).

Besselova jednadžba $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\,y = 0$. Odredbena jednadžba je $r(r-1) + r - n^2 \equiv r^2 - n^2 = 0$, odakle $r = \pm n$. Uvrštenjem $y = x^n(a_0 + a_1x + \ldots)$, u jednadžbu dobivamo, ako koeficijent od x^{n+k} izjednačimo s nulom: $k(2n+k)\,a_k + a_{k-2} = 0$; za $k = 1$ izlazi $(2n+1)\,a_1 = 0$. Ako k prima vrijednosti $2, 3, \ldots$, dobivamo $a_{2m+1} = 0\ (m = 1, 2, \ldots)$;

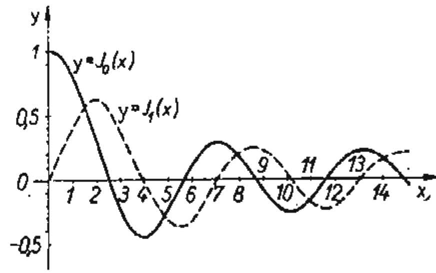
$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)};\qquad a_4 = \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)},\qquad \ldots;$$

a_0 je po volji odaberiv.

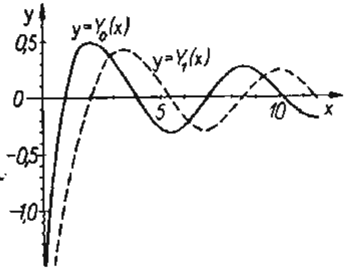
Besselove funkcije. Dobiveni red za $a_0 = \frac{1}{2^n\,\Gamma(n+1)}$* definira *Besselovu* (ili cilindarsku) funkciju n-tog reda prve vrste.

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)} - \ldots\right) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}.$$

Grafovi funkcija J_0 i J_1 nacrtani su na sl. 357.



Sl. 357



Sl. 358

Opće rješenje Besselove jednadžbe za n koji nije cio broj ima oblik: $y = C_1J_n(x) + C_2J_{-n}(x)$, gdje je funkcija $J_{-n}(x)$ određena redom koji dobivamo iz prije navedenog reda za $J_n(x)$, ako n zamijenimo sa $-n$. Kada je n cio broj, vrijedi $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. U općem rješenju u tom slučaju $J_{-n}(x)$ moramo zamijeniti Besselovom funkcijom druge vrste $Y_n(x)$ (*Weberova funkcija*) koja je definirana jednadžbom

$$Y_n(x) = \lim_{m\to n}\frac{J_m(x)\cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}{}^{**}.$$

Grafovi funkcija Y_0 i Y_1 nacrtani su na sl. 358.

U nekim primjenama susrećemo Besselove funkcije čisto imaginarnog argumenta: pri tome obično promatramo produkte $i^{-n}J_n(ix)$, koje označavamo sa $I_n(x)$:

---

* O funkciji Γ vidi na str. 184.

** Ponekad se ta funkcija označava sa $N_n(x)$.

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1!\,\Gamma(n+2)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!\,\Gamma(n+3)} + \dots$$

Te funkcije su rješenja diferencijalne jednadžbe

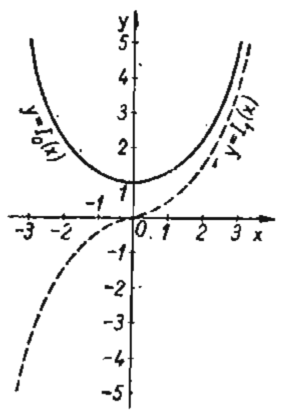
$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + n^2)\, y = 0.$$

Kao drugo rješenje te jednadžbe obično izabiremo *Macdonaldovu funkciju*

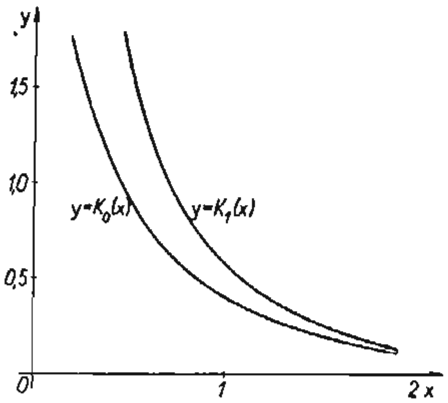
$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi}.$$

Taj izraz teži k određenom limesu, kada n teži k cijelom broju.

Grafovi funkcija I_0 i I_1 prikazani su na sl. 359, a funkcija K_0 i K_1 na sl. 360. Tablice funkcija $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ vidi na str. 83 i 84.



Sl. 359



Sl. 360

Osnovne formule za Besselove funkcije

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x); \qquad \frac{\mathrm{d}J_n(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x);$$

[te formule vrijede i za funkcije $Y_n(x)$];

$$I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \frac{2nI_n(x)}{x}; \qquad \frac{\mathrm{d}I_n(x)}{\mathrm{d}x} = I_{n-1}(x) - \frac{n}{x} I_n(x);$$

$$K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) = \frac{2n\,K_n(x)}{x}; \qquad \frac{\mathrm{d}K_n(x)}{\mathrm{d}x} = -K_{n-1}(x) - \frac{n}{x} K_n(x).$$

Za n cio broj je: $$J_{2n}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\varphi) \cos 2n\varphi \, \mathrm{d}\varphi;$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin\varphi) \sin(2n+1)\varphi \, \mathrm{d}\varphi$$

ili u kompleksnom obliku

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ix\cos\varphi} \cos n\varphi \, \mathrm{d}\varphi.$$

$J_{n+1/2}(x)$ možemo izraziti elementarnim funkcijama, a napose je

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x; \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Odatle možemo izraze $J_{n+1/2}(x)$ za bilo koji cijeli n dobiti postupnom primjenom ranije navedenih formula za rekurziju.

Za velike vrijednosti x imamo ove asimptotske formule

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

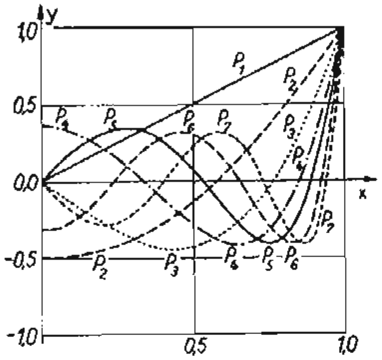
$$K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

gdje $O\left(\frac{1}{x}\right)$ označava neizmjerno malu veličinu istog reda kao i $\frac{1}{x}$ (vidi na str. 321).

Legendreova jednadžba $(1-x^2)\,y''-2xy'+n(n+1)\,y=0.$ Za n cio broj jedno od rješenja su *Legendreovi polinomi* (*kugline funkcije*)

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\,\frac{d^n\,[(x^2-1)^n]}{dx^n}.$$

Grafove funkcija $P_n(x)$ od $n=1$ do $n=7$ vidi sl. 361. Tablice tih funkcija vidi na str. 85.



Sl. 361

$$P_0(x)=1;\qquad P_1(x)=x;$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1);$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x);$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3);$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x);$$

$$P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5).$$

Osnovna svojstva Legendreovih polinoma:

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x\pm\cos\varphi\,\sqrt{x^2-1})^n\,d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(x\pm\cos\varphi\,\sqrt{x^2-1})^{n+1}}$$

(predznak je u obje formule po volji);

$$(n+1)\,P_{n+1}(x)=(2n+1)\,xP_n(x)-nP_{n-1}(x);$$

$$(x^2-1)\,\frac{dP_n(x)}{dx}=n\,[x\,P_n(x)-P_{n-1}(x)];$$

$$\int_{-1}^{+1}P_m(x)\,P_n(x)\,dx=0\ \text{za}\ m\neq n,\qquad \int_{-1}^{+1}[P_m(x)]^2\,dx=\frac{2}{2m+1}.$$

Legendreove polinome možemo dobiti razvojem u red po potencijama z funkcije

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2}=P_0(x)+P_1(x)\,z+P_2(x)\,z^2+\dots\quad(|z|<1).$$

Hipergeometrijska jednadžba

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\,x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0,$$

gdje su α, β i γ parametri, obuhvaća veći broj važnih posebnih slučajeva. Na primjer, za $\alpha=n+1$, $\beta=-n$, $\gamma=1$ i $x=\dfrac{1-z}{2}$ ona se pretvara u Legendreovu diferencijalnu jednadžbu.

Ako je γ različit od nule i nije cio negativan broj, onda je partikularno rješenje hipergeometrijske jednadžbe *hipergeometrijski red*

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}\,x+\frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}\,x^2+\dots$$

$$\dots+\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)}{1\cdot2\dots(n+1)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n)}\,x^{n+1}+\dots,\qquad(1)$$

koji za $|x|<1$* apsolutno konvergira. Ako je $2-\gamma$ različito od nule i nije cio negativan broj, onda je partikularno rješenje hipergeometrijske jednadžbe

$$y=x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,x).$$

U nizu slučajeva hipergeometrijski red se svodi na jednostavne elementarne funkcije, npr.

$$F(1,\beta,\beta,x)=F(\alpha,1,\alpha,x)=\frac{1}{1-x},\quad F(-n,\beta,\beta,-x)=(1+x)^n,$$

$$F(1,1,2,-x)=\frac{\ln(1+x)}{x},\quad F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2\right)=\frac{\arcsin x}{x}.$$

8. RUBNI PROBLEMI

Postavljanje problema. U mnogo slučajeva, naročito u vezi s rješavanjem jednadžbi matematičke fizike (vidi na str. 558), moramo, za razliku od ranije razmatranih zadataka s početnim uvjetima, rješavati tzv. *rubne probleme*, u kojima traženo rješenje diferencijalne jednadžbe mora zadovoljavati neke uvjete na krajevima zadanog intervala u kojem se mijenja nezavisna varijabla. Ograničit ćemo se ovdje na proučavanje ovih najvažnijih rubnih problema:

* Konvergencija hipergeometrijskog reda (1) za $x=1$ i $x=-1$ ovisi o broju $\delta=\gamma-\alpha-\beta$. Za $x=1$ red (1) apsolutno konvergira ako je $\delta>0$, a divergira ako je $\delta\leqslant0$. Za $x=-1$ red (1) apsolutno konvergira ako je $\delta>0$, uvjetno konvergira ako je $-1<\delta\leqslant0$, a divergira ako je $\delta\leqslant-1$.

Treba potražiti rješenje $y(x)$ *samoadjungirane jednadžbe*

$$[py']' - qy + \lambda\rho y = f, \qquad (*)$$

koja zadovoljava homogene uvjete

$$A_0 y(a) + B_0 y'(a) = 0, \quad A_1 y(b) + B_1 y'(b) = 0,$$

pri čemu se pretpostavlja da su funkcije $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$, $f(x)$ neprekinute u intervalu $a \leqslant x \leqslant b$* i da je $p(x) > p_0 > 0$, $\rho(x) > \rho_0 > 0$. Veličina λ je konstanta (parametar jednadžbe). Uzmemo li $f = 0$, dobivamo *homogeni* rubni problem, koji odgovara zadanom *nehomogenom*.

Jednadžbu drugog reda $Ay'' + By' + Cy + \lambda Ry = F$ možemo svesti na oblik (*) množenjem sa $\frac{p}{A}$, gdje je $p = e^{\int \frac{B}{A} dx}$, ako je u promatranom intervalu $A \neq 0$. Pri tome je $q = -\frac{pC}{A}$, $\rho = \frac{pR}{A}$.

Zadatak traženja rješenja koja zadovoljavaju nehomogene uvjete $A_0 y(a) + B_0 y'(a) = C_0$, $A_1 y(b) + B_1 y'(b) = C_1$, svodimo na zadatak s homogenim uvjetima, ali s drugačijom desnom stranom $f(x)$, jednostavnom zamjenom nepoznate funkcije $y = z + u$ gdje je u bilo koja dvaput neprekinuto derivabilna funkcija koja zadovoljava nehomogene rubne uvjete, a z je nova nepoznata funkcija koja očigledno zadovoljava odgovarajuće homogene rubne uvjete.

Sturm-Liouvilleov problem. Za fiksiranu vrijednost parametra λ vrijedi ovo: ili nehomogeni problem ima rješenje za bilo koji $f(x)$ i tada je to rješenje jedno i samo jedno, a pripadni homogeni problem ima samo *trivijalno* rješenje (identično jednako nuli); ili pripadni homogeni problem ima netrivijalno rješenje (različito od nule) i tada nehomogeni problem nije rješiv za sve desne strane, a ako rješenje egzistira, ono nije jednoznačno određeno. Te vrijednosti parametra λ, za koje nastupa drugi slučaj (homogeni problem ima netrivijalno rješenje), nazivamo *svojstvenim* ili *vlastitim vrijednostima* zadanog rubnog problema, a pripadna netrivijalna rješenja nazivamo *svojstvenim funkcijama* koje odgovaraju zadanoj svojstvenoj vrijednosti. Problem traženja svojstvene vrijednosti i svojstvenih funkcija za jednadžbe (*) *nazivamo Sturm-Liouvilleovim problemom.*

Osnovna svojstva svojstvenih funkcija i svojstvenih vrijednosti.

1) Svojstvene vrijednosti rubnih problema tvore niz realnih brojeva

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

* U daljnjem ćemo pretpostaviti da je interval (a, b) konačan. Za slučaj neizmjernog intervala rezultati se bitno mijenjaju.

koji teži prema neizmjerno. Svojstvena funkcija, koja odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_n ima u intervalu $a < x < b$ tačno n nultačaka.

2) Ako su $y(x)$ i $z(x)$ svojstvene funkcije koje odgovaraju svojstvenoj vrijednosti λ, onda je $y(x) = cz(x)$ gdje je c konstanta.

3) Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ svojstvene funkcije koje odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2 onda je

$$\int_a^b y_1(x)\, y_2(x)\, \rho(x)\, dx = 0$$

[svojstvo *ortogonalnosti s težinom* $\rho(x)$].

4) Ako u jednadžbi (*) koeficijente $p(x)$ i $q(x)$ zamijenimo sa $\tilde{p}(x) \geqslant p(x)$ i $\tilde{q}(x) \geqslant q(x)$, onda se svojstvene vrijednosti ne umanjuju, tj. $\tilde{\lambda}_n \geqslant \lambda_n$, gdje su $\tilde{\lambda}_n, \lambda_n$ n-te svojstvene vrijednosti izmijenjene i početne jednadžbe. Ako koeficijent $\rho(x)$ zamijenimo sa $\tilde{\rho}(x) \geqslant \rho(x)$, onda svojstvene vrijednosti ne rastu, tj. $\tilde{\lambda}_n \leqslant \lambda_n$. Pri tome n-te svojstvene vrijednosti neprekinuto ovise o koeficijentima jednadžbe, tj. dovoljno malim promjenama koeficijenata odgovaraju po volji male promjene n-te svojstvene vrijednosti.

5) Ako smanjimo odsječak $[a, b]$, svojstvene vrijednosti se ne smanjuju.

Razvoj po svojstvenim funkcijama. Izabiremo za svaki λ_n takvu svojstvenu funkciju $\varphi_n(x)$ da bude $\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 \rho(x)\, dx = 1$ (takvu svojstvenu funkciju nazivamo *normiranom*).

Svakoj funkciji $g(x)$ koja je zadana u intervalu $[a, b]$ možemo pridružiti njen »*Fourierov red*« po svojstvenim funkcijama danog rubnog problema

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \qquad c_n = \int_a^b g(x)\, \varphi_n(x)\, \rho(x)\, dx,$$

ako samo napisani integrali imaju smisla.

Ako funkcija $g(x)$ ima neprekinutu derivaciju i zadovoljava rubne uvjete razmatranog rubnog problema, onda Fourierov red funkcije $g(x)$ po svojstvenim funkcijama rubnog problema apsolutno i jednoliko konvergira prema $g(x)$ (*teorem o razvoju*).

Primjere svojstvenih funkcija i razvoj po njima vidi na str. 562 do 567.

Parsevalova jednadžba

$$\int_a^b [g(x)]^2 \rho(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

vrijedi uvijek, ako integral na lijevoj strani ima smisla. U tom slučaju Fourierov red funkcije $g(x)$ po svojstvenim funkcijama rubnog problema konvergira prema $g(x)$ u smislu sredine, tj.

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b\left[g(x)-\sum_{n=0}^{N}c_n\varphi_n(x)\right]^2\rho(x)\,\mathrm{d}x=0$$

Singularni slučaj. U primjeni Fourierove metode za rješavanje zadataka matematičke fizike često se pojavljuju rubni problemi ranije promatranog tipa, s tom razlikom da u krajnjim tačkama intervala $[a, b]$ postoje singulariteti diferencijalne jednadžbe, npr. da funkcija $p(x)$ postaje jednaka nuli. U takvim singularnim tačkama propisuju se rješenjima neka ograničenja, kao npr. da budu neprekinuta ili konačna, ili da ne postaju neizmjerna više nego zadanog reda. Ti uvjeti igraju ulogu homogenog rubnog uvjeta (vidi na str. 561 primjer 2). Pored toga u nekim rubnim problemima razmatramo homogene rubne uvjete koji povezuju vrijednosti funkcije i njene derivacije na suprotnim krajevima intervala. Najvažniji od tih uvjeta jest uvjet

$$y(a)=y(b),\qquad p(a)\,y'(a)=p(b)\,y'(b),$$

koji u slučaju $p(a)=p(b)$ možemo shvatiti kao uvjet periodičnosti. Za rubni problem s takvim uvjetima vrijedi sve ranije spomenuto, osim tvrdnje 2 (vidi na str. 547).

B. PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

9. JEDNADŽBE PRVOG REDA

Linearne jednadžbe. *Linearnom* parcijalnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda nazivamo jednadžbu

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=Y,\tag{1}$$

gdje je z nepoznata funkcija nezavisnih varijabli $x_1,\ldots,x_n$, a $X_1,\ldots,X_n$, Y su zadane funkcije od $x_1,\ldots,x_n$. Ako u (1) funkcije $X_1,\ldots,X_n$, Y ovise također i o z, onda jednadžbu nazivamo *kvazilinearnom*. Ako je $Y=0$:

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0,\tag{1a}$$

jednadžbu nazivamo *homogenom.*

Zadatak integracije linearne homogene jednadžbe ekvivalentan je zadatku integracije tzv. *karakterističnog sistema*

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\ldots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}\,*.\tag{2}$$

Vidimo da je svaki prvi integral sistema (2) rješenje homogene linearne jednadžbe (1a), i obrnuto, svako rješenje jednadžbe (1a) prvi je integral sistema (2) (vidi na str. 523). Ako je pri tome $n-1$ prvih integrala

$$\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)=0,\quad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

nezavisno (vidi na str. 524), onda je

$$z=\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$$

gdje je Φ po volji odaberiva funkcija od $(n-1)$ argumenata φ_i, opće rješenje linearne homogene jednadžbe (1a).

Rješenje z linearne nehomogene i kvazilinearne jednadžbe (1) tražimo u implicitnom obliku $V(x_1,\ldots,x_n,z)=C$. Pri tome je funkcija V rješenje homogene linearne jednadžbe sa $n+1$ nezavisnih varijabli

$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial V}{\partial x_n}+Y\frac{\partial V}{\partial z}=0$$

s karakterističnim sistemom

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\ldots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}=\frac{\mathrm{d}z}{Y},\tag{2'}$$

koji nazivamo *karakterističnim sistemom prvotne jednadžbe* (1).

Geometrijsko značenje. U slučaju jednadžbe sa dvije nezavisne varijable $x_1=x$ i $x_2=y$,

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)\tag{1$_1$}$$

rješenje $z=f(x,y)$ predočuje plohu u prostoru xyz, koju na-

* Pri rješavanju takvog sistema za nezavisnu varijablu možemo izabrati bilo koju od x_k za koje je $X_k\neq 0$ (sistem dobiva oblik $\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}x_k}=\frac{X_j}{X_k}$, $j=1,2,\ldots,n$), Zgodnije je ako sačuvamo simetriju i uvedemo novu nezavisnu varijablu, parametar t, stavivši $\frac{\mathrm{d}x_j}{X_j}=\mathrm{d}t$ ili $\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}=X_j$.

zivamo *integralnom plohom* te jednadžbe. Jednadžba (1_1) znači da je u svakoj tački integralne plohe $z = f(x, y)$ vektor normale $\left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right\}$ okomit na zadanom vektoru $\{P, Q, R\}$ u toj tački. Sistem (2') dobiva pri tome oblik

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}; \qquad (2_1)$$

odakle izlazi (vidi na str. 621) da su integralne krivulje tog sistema, tzv. *karakteristike*, tangente na vektore $\{P, Q, R\}$. Zato karakteristika, koja s integralnom plohom $z = f(x, y)$ ima zajedničku tačku, sva leži na toj plohi. Kroz svaku tačku prostora prolazi integralna krivulja karakterističnog sistema (ako je ispunjen uvjet teorema na str. 521), a integralne plohe sastoje se iz karakteristika.

Cauchyjev problem. Neka je zadano n funkcija od $(n-1)$ nezavisnih varijabli $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \quad x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \ldots, \\ x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}). \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Cauchyjevim problemom za jednadžbu (1) nazivamo zadatak traženja takvog njezinog rješenja

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

koje pri uvrštenju u $(*)$ prelazi u zadanu funkciju $\psi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$:

$$\varphi[x_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})] = \\ = \psi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}).$$

Za slučaj dviju nezavisnih varijabli taj zadatak svodimo na traženje integralne plohe koja prolazi zadanom krivuljom. Ako zadana krivulja ima neprekinutu tangentu, a ni u kojoj tački ne dira karakteristiku, onda u nekoj okolini te krivulje Cauchyjev problem uvijek ima jednoznačno rješenje. Integralnu plohu tvore sve karakteristike koje sijeku zadanu krivulju.

Primjeri:

1) $(mz - ny)\frac{\partial z}{\partial x} - (nx - lz)\frac{\partial z}{\partial y} = ly - mx$ (l, m, n su konstante). Jednadžba karakteristika: $\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$. Integrali tog sistema: $lx + my + nz = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

Karakteristike su kružnice sa središtem na pravcu koji prolazi kroz ishodište koordinata i kome su koeficijenti smjera proporcionalni sa l, m, n. Integralne plohe su rotacione plohe kojima je taj pravac os rotacije.

2) Naći integralnu plohu jednadžbe $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z$, koji prolazi krivuljom $x = 0$, $z = \varphi(y)$. Jednadžbe karakteristika su: $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{z}$. Karakteristike kroz tačku (x_0, y_0, z_0): $y = x - x_0 + y_0$, $z = z_0 e^{x - x_0}$. Uz pretpostavku $x_0 = 0$, $z_0 = \varphi_0(y_0)$ naći ćemo $y = x + y_0$, $z = e^x \varphi(y_0)$, a to je parametarski izraz tražene integralne plohe. Ako eliminiramo y_0, dobivamo $z = e^x \varphi(y - x)$.

Nelinearne jednadžbe. Opći oblik parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda je

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \qquad (3)$$

Rješenje jednadžbe (3)

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n),$$

ovisne o n parametara $a_1, \ldots, a_n$ za koje je Jakobijana (vidi na str. 331) $\frac{\partial(\varphi'_{x_1}, \ldots, \varphi'_{x_n})}{\partial(a_1, \ldots, a_n)}$ različita od nule za razmatrane vrijednosti $x_1, \ldots, x_n, z$, nazivamo *potpunim integralom* jednadžbe (3).

Integriranje jednadžbe (3) svodimo na integriranje tzv. *karakterističnog sistema* diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{p_1 P_1 + \ldots + p_n P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z}, \qquad (4)$$

gdje su

$$Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Rješenja karakterističnog sistema (4) koja zadovoljavaju dopunski uvjet $F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$ nazivamo *karakterističnim prugama*.

Kanonski sistemi. Često je prikladnije razmatrati jednadžbu koja nepoznatu funkciju z ne sadržava eksplicitno. Prelaz na takvu jednadžbu postizavamo uvođenjem dodatne nezavisne varijable

$x_{n+1} = z$ i takve nepoznate funkcije $V(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, za koju jednadžba $V(x_1, \ldots, x_n, z) = C$ određuje z kao eksplicitnu funkciju od $x_1, \ldots, x_n$. Pri tom umjesto $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ u (3) uvrstimo $-\frac{\partial V}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} \; (i = 1, \ldots, n)$. Ako smo, pored toga, riješili diferencijalnu jednadžbu po parcijalnoj derivaciji funkcije V s obzirom na bilo koju nezavisnu varijablu koju smo označili sa x, dok smo ostalim nezavisnim varijablama promijenili numeraciju, onda jednadžba (3) dobiva oblik

$$\left.\begin{aligned} &p + H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ &p = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Sistem karakterističnih diferencijalnih jednadžbi prelazi u ovaj sistem:

$$\frac{dx_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

i

$$\frac{dV}{dx} = p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \ldots + p_n \frac{\partial H}{\partial p_n} - H, \qquad \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{6}$$

Jednadžbe (5) same po sebi tvore određeni sistem od $2n$ običnih diferencijalnih jednadžbi. Takav sistem, koji odgovara bilo kojoj funkciji $H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n)$ od $(2n + 1)$ varijabli, nazivamo ***kanonskim sistemom*** diferencijalnih jednadžbi. Na sisteme takvog tipa svodimo mnoge zadatke mehanike i teoretske fizike. Kada znamo potpuni integral

$$V = \varphi(x_1, \ldots, x_n, x, a_1, \ldots, a_n) + a,$$

onda pomoću jednadžbe (3) možemo naći opće rješenje kanonskog sistema (5), jer jednadžbe $\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = b_i$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i \; (i = 1, \ldots, n)$ sa $2n$ po volji uzetih parametara a_i i b_i određuju $2n$-parametarsko rješenje kanonskog sistema (5).

Clairautova jednadžba. Određivanje potpunog integrala naročito je jednostavno u slučaju kad jednadžba ima oblik

$$z = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n + f(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \; (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{(Clairautova jednadžba).}$$

Potpuni integral takve jednadžbe je

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ po volji uzeti parametri.

Primjer: **Problem dvaju tijela.** Dvije materijalne tačke, koje se uzajamno privlače po Newtonovu zakonu, gibaju se stalno u jednoj ravnini. Stoga, ako položaj jedne od tačaka izaberemo za ishodište koordinata, možemo jednadžbe gibanja napisati ovako:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{dy}; \qquad V = \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Taj sistem nakon uvođenja *Hamiltonove funkcije*

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

prelazi u sistem kanonskih diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \tag{*}$$

za veličine

$$x, y, \quad p = \frac{dx}{dt}, \qquad q = \frac{dy}{dt}.$$

Pripadna parcijalna diferencijalna jednadžba glasi

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Nakon prelaza na polarne koordinate ρ, φ nije teško zapaziti da ta jednadžba ima potpuni integral

$$z = -at - b\varphi + c - \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{2a + \frac{2k^2}{r} - \frac{b^2}{r^2}}\, dr,$$

ovisan o parametrima a, b, c. Prema tome iz jednadžbi $\frac{\partial z}{\partial a} = -t_0$, $\frac{\partial z}{\partial b} = -\varphi_0$ dobivamo opće rješenje sistema (*).

Slučaj dviju nezavisnih varijabli ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $p_1 = p$, $p_2 = q$). U tome slučaju karakterističnu prugu možemo geometrijski shvatiti kao krivulju za koju je u svakoj tački (x, y, z) zadana tangencijalna ravnina $p(\xi - x) + q(\eta - y) = \zeta - z$. Traženje integralne plohe jednadžbe

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

kroz zadanu krivulju (Cauchyjev problem) svodimo na polaganje takvih karakterističnih pruga kroz tačke prvotne krivulje, kojima pripadne ravnine diraju tu krivulju. Vrijednosti p i q u tačkama prvotne krivulje određujemo pri tome iz relacija $F(x, y, z, p, q) = 0$ i $p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$, koje u slučaju nelinearne jednadžbe imaju općenito nekoliko rješenja. Zato, prilikom postavljanja Cauchyjeva problema za traženje određenog rješenja moramo na prvotnoj krivulji propisati par neprekinutih funkcija p i q koje zadovoljavaju dvije navedene relacije.

Primjer: Za jednadžbu $pq = 1$ i početnu krivulju $y = x^3$, $z = 2x^2$ možemo duž krivulje zadati $p = x$, $q = \frac{1}{x}$. Karakteristični sistem ima oblik

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = q, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = p, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 2pq, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Karakteristična pruga s početnim uvjetima x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 pri $t = 0$ je: $x = x_0 + q_0 t$, $y = y_0 + p_0 t$, $z = 2p_0 q_0 t + z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$. U slučaju $p_0 = x_0$, $q_0 = \frac{1}{x_0}$ krivulja, koja pripada karakterističnoj pruzi i prolazi kroz tačku (x_0, y_0, z_0) prvotne krivulje, bit će

$$x = x_0 + \frac{t}{x_0}, \qquad y = x_0^3 + t x_0, \qquad z = 2t + 2x_0^2.$$

Eliminacijom parametara x_0, t, dobivamo $z^2 = 4xy$. Zadamo li duž prvotne krivulje druge dopustive vrijednosti za p i q, npr. $p = 3x$, $q = \frac{1}{3x}$, dobivamo drugo rješenje.

Ploha koja je ovojnica jednoparametarske porodice integralnih ploha također je integralna ploha. Poslužimo li se tom činjenicom, možemo pomoću potpunog integrala riješiti Cauchyjev problem tako da odredimo neku jednoparametarsku porodicu rješenja, koja u tačkama početne krivulje dira zadane ravnine, i nađemo ovojnicu te porodice.

Primjer: Za jednadžbu $z - px - qy + pq = 0$ (Clairautova jednadžba) treba naći integralnu plohu koja prolazi kroz krivulju $y = x$, $z = x^2$. Razmatrana jednadžba ima potpuni integral $z = ax + by - ab$. Kako treba pretpostaviti da je duž početne krivulje $p = q = x$, to uvjet $a = b$ odvaja potrebnu jednoparametarsku porodicu. Tražimo ovojnicu i dobivamo $z = \frac{1}{4}(x + y)^2$.

Jednadžbe s totalnim diferencijalima. Jednadžba u totalnim diferencijalima ima oblik

$$\mathrm{d}z = f_1\,\mathrm{d}x_1 + f_2\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + f_n\,\mathrm{d}x_n, \tag{7}$$

gdje su $f_1, f_2, \ldots, f_n$ zadane funkcije varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Jednadžbu (7) nazivamo *potpuno integrabilnom*, ako postoji jednoznačna relacija između $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ s po volji odaberivom konstantom koja relacija povlači jednadžbu (7). U tome slučaju postoji jednoznačno rješenje $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ jednadžbe (7) koje poprima vrijednost z^0 za početne vrijednosti $x_1^0, \ldots, x_n^0$ nezavisnih varijabli. Za $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ to znači da kroz svaku tačku prostora prolazi jedna i samo jedna integralna ploha. Jednadžba (7) potpuno je integrabilna onda i samo onda, ako je za sve parametre $x_1, x_2, \ldots x_n$ identično ispunjeno ovih $\frac{n(n-1)}{2}$ relacija:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + f_k \frac{\partial f_i}{\partial z} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial f_k}{\partial z} \qquad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Ako je jednadžba (7) zadana u simetričnom obliku

$$f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n = 0,$$

onda su uvjeti potpune integrabilnosti identiteti

$$f_i\left(\frac{\partial f_k}{\mathrm{d}x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right) + f_j\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right) + f_k\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = 0$$

za sve kombinacije indeksa i, j, k.

U slučaju potpune integrabilnosti rješenje jednadžbe (7) svodi se na integraciju obične jednadžbe sa $(n - 1)$ parametrom.

10. LINEARNE JEDNADŽBE DRUGOG REDA

Opći oblik linearne jednadžbe drugog reda sa dvije nezavisne varijable x, y i nepoznatom funkcijom u jest

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f, \tag{1}$$

gdje su koeficijenti A, B, C, a, b i c te slobodni član f, zadane funkcije od x i y.

Klasifikacija. Karakter rješenja te jednadžbe ovisi o predznaku diskriminante $\delta = AC - B^2$. Jednadžbu (1) nazivamo jednadžbom ***hiperbolnog tipa*** u nekom području ako je u njemu $\delta < 0$, jednadžbom *parabolnog* tipa ako je u promatranom području identično $\delta = 0$, jednadžbom *eliptičkog* tipa ako je u promatranom području $\delta > 0$. Ako se promijeni predznak u promatranom području, onda jednadžbu (1) nazivamo jednadžbom *mješovitog* tipa. Predznak diskriminante δ invarijantan je s obzirom na bilo koju transformaciju nezavisnih varijabli (uvođenje novog sistema koordinata u ravnini Oxy). Zato je tip jednadžbe invarijantan s obzirom na izbor nezavisnih varijabli.

Karakteristikama jednadžbe (1) nazivamo integralne krivulje diferencijalne jednadžbe

$$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{-\delta}}{A}.$$

Jednadžba hiperbolnog tipa ima dvije porodice realnih karakteristika, jednadžba parabolnog tipa ima jednu porodicu realnih karakteristika, jednadžba eliptičnog tipa nema realnih karakteristika. Jednadžba koju dobivamo iz jednadžbe (1), kada u nju uvrstimo nove nezavisne varijable, ima iste karakteristike kao i jednadžba (1). Ako se porodica karakteristika podudara s jednom od porodica koordinatnih krivulja, onda u jednadžbi (1) nema člana s drugom derivacijom po pripadnoj nezavisnoj varijabli. U parabolnom slučaju također nema člana s mješovitom derivacijom.

Normalni oblik. Uvođenjem novih nezavisnih varijabli $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ možemo jednadžbu (1) svesti na jedan od tri *normalna* oblika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = 0 \quad (\delta < 0, \text{ hiperbolni tip}), \tag{a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = 0 \quad (\delta = 0, \text{ parabolni tip}), \tag{b}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = 0 \quad (\delta > 0, \text{ eliptički tip}), \tag{c}$$

gdje tačke označavaju članove bez parcijalnih derivacija drugog reda nepoznate funkcije.

Ako u hiperbolnom slučaju izaberemo dvije porodice karakteristika kao porodice koordinatnih krivulja novog koordinatnog sistema, tj. uvrstimo $\xi_1 = \varphi(x, y)$, $\eta_1 = \psi(x, y)$, gdje su $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$ jednadžbe porodica karakteristika, onda jednadžba (1) dobiva oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + \ldots = 0.$$

Taj oblik također nazivamo normalnim oblikom jednadžbe hiperbolnog tipa. Od nje zamjenom $\xi = \xi_1 + \eta_1$, $\eta = \xi_1 - \eta_1$ možemo preći na normalni oblik (a). Da jednadžbu parabolnog tipa svedemo na normalni oblik (b) dovoljno je da za porodicu $\xi = \text{const}$ izaberemo porodicu karakteristika koja je u tom slučaju jedina, i da za η uzmemo bilo koju funkciju varijabli x i y koja mora biti nezavisna od ξ. Ako su koeficijenti $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ analitičke funkcije (vidi na str. 590), onda jednadžba karakteristika u eliptičkom slučaju određuje dvije konjugirano kompleksne porodice krivulja $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$. Jednadžbu svodimo na normalni oblik (c) ako uvrstimo $\xi = \varphi + \psi$, $\eta = i(\varphi - \psi)$.

Sve ranije rečeno za klasifikaciju i svođenje na normalni oblik može se primijeniti i na jednadžbe općenitijeg oblika

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Broj nezavisnih varijabli veći od dva. Linearna parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda s brojem nezavisnih varijabli većim od dva ima oblik

$$\sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \ldots = 0, \tag{2}$$

gdje su a_{ik} zadane funkcije nezavisnih varijabli, a tačke označuju članove bez derivacija drugog reda nepoznate funkcije.

Jednadžbu (2) općenito nije moguće svesti na normalni oblik transformacijom nezavisnih varijabli, ali i za nju postoji vrlo važna klasifikacija koja je slična ranije spomenutoj.

Jednadžba s konstantnim koeficijentima. Ako su koeficijenti a_{ik} u jednadžbi (2) konstantni, onda pomoću linearne homogene transformacije nezavisnih varijabli možemo svesti jednadžbu na normalni oblik

$$\sum_i \varkappa_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \ldots = 0, \tag{2'}$$

gdje su svi koeficijenti $\varkappa_i$ jednaki ± 1 ili 0.

Ako su svi koeficijenti $\varkappa_i$ različiti od nule i imaju iste predznake, onda jednadžbu nazivamo *eliptičkom*. Ako su svi koeficijenti $\varkappa_i$ različiti od nule, a predznak jednog od njih različit je od predznaka ostalih, jednadžba je *hiperbolna**. Ako je jedan koeficijent $\varkappa_i$ jednak

* Ako imamo bar dva koeficijenta svakog predznaka, onda jednadžbu nazivamo *ultrahiperbolnom*.

nuli, a ostali su različiti od nule sa jednakim predznacima, onda jednadžbu nazivamo *parabolnom*.

Ako u linearnoj jednadžbi nisu konstantni samo koeficijenti najviših derivacija, nego i koeficijenti prvih derivacija nepoznate funkcije, onda se zamjenom nepoznate funkcije u jednadžbama možemo osloboditi članova s prvim derivacijama, za koje je $x_i \neq 0$. Za to je dovoljno uvrstiti $u = ve^{-\frac{1}{2}\sum \frac{b_k}{x_k} x_k}$ gdje je b_k koeficijent od $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ u (2′), a sumiranje se proteže na sve $x_k \neq 0$. Na taj način sve diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima u eliptičkom slučaju svodimo na oblik $\Delta v + kv = g$, a u hiperbolnom slučaju na oblik $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + kv = g$, gdje je Δ Laplaceov operator

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}.$$

Postavljanje problema. Razmatranje različitih fizikalnih pojava u neprekinutim sredinama (mehaničkih, električkih, toplinskih i sl.) svodimo na parcijalne diferencijalne jednadžbe, koje po tome i nazivamo *jednadžbama matematičke fizike*. Pri tome su najvažnije i najčešće linearne jednadžbe drugog reda. Za rješavanje problema fizike, koje svodimo na parcijalne diferencijalne jednadžbe, obično treba naći takvo rješenje diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava neke dodatne, tzv. *rubne* i *početne uvjete*. Skup tih uvjeta mora jednoznačno određivati rješenje jednadžbe. Povrh toga, a to nije manje važno, rješenje mora biti stabilno s obzirom na male izmjene početnih i rubnih uvjeta, tj. mora se mijenjati po volji malo, ako se dovoljno malo mijenjaju uvjeti. U tom slučaju kažemo da je problem *korektno* postavljen. Samo ako je taj uvjet ispunjen, matematički problem rješenja diferencijalne jednadžbe primjenljiv je za opisivanje realnih pojava. Pri tome se pokazuje da je za jednadžbe hiperbolnog tipa, na koje napose svodimo izučavanje titranja neprekinutih sredina, korektan »Cauchyjev problem«, tj. da su na početnoj »mnogostrukosti« (krivulji, plohi) zadane vrijednosti tražene funkcije i njenih derivacija u netangencijalnom smjeru (napose u smjeru normale). Za jednadžbe pak eliptičkog tipa, na koje se svodi proučavanje stacionarnih procesa i ravnoteže neprekinutih sredina, korektan je »rubni problem«, da su zadane vrijednosti nepoznate funkcije (ili njenih derivacija u smjeru normale) na rubu razmatranog područja nezavisnih varijabli. Ako je razmatrano područje neograđeno, obično se dodaju neki zahtijevi na ponašanje

tražene funkcije »u neizmjernosti«, tj. na ponašanje funkcije kada argument neograničeno raste.

Nehomogeni uvjeti i nehomogene jednadžbe. Rješavanje linearne jednadžbe (homogene ili nehomogene) za n e h o m o g e n e početne ili rubne uvjete (vidi na str. 545) možemo svesti na rješavanje jednadžbe koja se od zadane razlikuje samo slobodnim (od nepoznate funkcije) članom, a rješava se uz h o m o g e n e uvjete. Za to je dovoljno da traženu funkciju zamijenimo razlikom između nje i bilo koje (dvaput neprekinuto derivabilne) funkcije koja zadovoljava zadane uvjete.

Rješenje linearne n e h o m o g e n e jednadžbe za dane nehomogene početne ili rubne uvjete jest suma rješenja te jednadžbe za nul-uvjete i pripadnog rješenja h o m o g e n e jednadžbe uz dane uvjete.

Najzad, rješenje linearne nehomogene jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L[u] = g(x, t)^*$$

za homogene početne uvjete $u\Big|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ svodimo na rješenje Cauchyjevog problema za pripadnu homogenu jednadžbu, na ovaj način:

$$u = \int_0^t \varphi(x, t; \tau)\, d\tau,$$

gdje je $\varphi(x, t; \tau)$ rješenje jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L[u] = 0$$

uz uvjete $u\Big|_{t=\tau} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = g(x, \tau)$.

Najčešće jednadžbe

1) *Valna jednadžba* jest jednadžba širenja titranja u homogenoj sredini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = Q(x, t),$$

* Ovdje je x simbol za n prostornih varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a $L[u]$ je linearni diferencijalni izraz, koji može sadržavati derivaciju $\frac{\partial u}{\partial t}$ ali ne sadrži viših derivacija po t.

gdje je $Q(x, t)$ desna strana (x je simbol prostornih varijabli $x_1, \ldots, x_n$), koja je jednaka nuli kada nema sila smetnje (perturbacije). Za homogenu jednadžbu ($Q(x, t) = 0$) dobiva se rješenje koje zadovoljava početne uvjete $u\Big|_{t=0} = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$ prema formulama:

za $n = 3$

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\iint_{S_{at}} \frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\,d\sigma\right],$$

gdje je integracija protegnuta preko površine kugle $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 + (\alpha_3 - x_3)^2 = a^2t^2$ (*Kirchhoffova formula*);

za $n = 2$

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\iint_{k_{at}} \frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2)\,d\alpha_1\,d\alpha_2}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_{k_{at}} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2)\,d\alpha_1\,d\alpha_2}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}\right],$$

gdje je područje integracije krug $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 \leqslant a^2t^2$ (*Poissonova formula*)

za $n = 1$

$$u(x_1, t) = \frac{\varphi(x_1 + at) + \varphi(x_1 - at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_1 - at}^{x_1 + at} \psi(\alpha)\,d\alpha$$

(*D'Alembertova formula*).

Ako je početna jednadžba homogena, onda desnim stranama tih formula treba dodati:

za $n = 3$ tzv. *retardirani potencijal*

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{r \leqslant at} \frac{Q\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{r}{a}\right)}{r}\,d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3,$$

gdje je $r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}$;

za $n = 2$

$$\frac{1}{2\pi a}\iiint_{K} \frac{Q(\xi_1, \xi_2, \tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}},$$

gdje je K dio prostora ξ_1, ξ_2, τ, određen nejednadžbama

$$0 \leqslant \tau \leqslant t, \quad (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 \leqslant a^2(t - \tau)^2;$$

za $n = 1$

$$\frac{1}{2a}\iint_T Q(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau,$$

gdje je T trokut $0 \leqslant \tau \leqslant t$, $\quad |\xi - x_1| \leqslant a\,|t - \tau|$.

Iz navedenih formula izlazi da je a brzina širenja poremećaja.

2) *Jednadžba širenja topline* u homogenoj sredini

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\,\Delta u = Q(x, t)^*.$$

Ovdje je $Q(x, t)$ desna strana, koja je jednaka nuli kada nema izvora ni ponora topline. Za tu jednadžbu obično postavljamo ovaj *Cauchyjev problem:* naći rješenje ograđeno za $t > 0$, ako je $u|_{t=0} = f(x)$. Uvjeti ograđenosti osiguravaju jednoznačnost rješenja. Za homogenu jednadžbu imamo

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, e^{-\frac{(x_1 - \alpha_1)^2 + \ldots + (x_n - \alpha_n)^2}{4a^2t}}\,d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Za $Q(x, t) \neq 0$ treba desnoj strani te jednadžbe dodati

$$\int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\left[2a\sqrt{\pi(t - \tau)}\right]^n}\, e^{-\frac{(x_1 - \alpha_1)^2 + \ldots + (x_n - \alpha_n)^2}{4a^2t}}\,d\alpha_1 \ldots d\alpha_n\right] d\tau.$$

Pokazuje se da je zadatak traženja $u(x, t)$ za $t < 0$, ako su zadane vrijednosti $u(x, 0)$, nekorektno postavljen.

3) *Jednadžba teorije potencijala*

$$\Delta u = -4\pi\rho^*,$$

* Δ je Laplaceov operator za n varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (vidi na str. 558).

gdje je ρ zadana funkcija tačke (*Poissonova jednadžba*). Ako je $\rho \equiv 0$, dobivamo *Laplaceovu jednadžbu* $\Delta u = 0$ (vidi na str. 637).

Metode integriranja. *Separacija varijabli.* Za mnoge diferencijalne jednadžbe matematičke fizike možemo pomoću specijalnih supstitucija dobiti ako ne sav skup rješenja, a ono porodicu rješenja ovisnih o po volji odaberivim parametrima. U linearnim diferencijalnim jednadžbama, napose drugog reda, često možemo primijeniti supstituciju $u(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n)$. Za određivanje svake od tih funkcija $\varphi_k(x_k)$ ako se nakon supstitucije takvog produkta u ishodnu jednadžbu varijable daju separirati (vidi primjere), dobivamo običnu linearnu diferencijalnu jednadžbu. Da bi pri tome rješenje ishodne jednadžbe zadovoljavalo potrebne homogene rubne uvjete, može biti dovoljno da dio funkcija $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2), \ldots, \varphi_n(x_n)$ zadovoljava neke rubne uvjete.

Iz dobivenih rješenja pomoću sumiranja, diferenciranja i integriranja možemo dobiti nova rješenja. Pri tome moramo parametre odabrati tako da budu ispunjeni i preostali rubni i početni uvjeti (vidi primjere). Treba uočiti da je tako dobiveno rješenje u obliku reda ili nepravog integrala samo »formalno rješenje«, pa nakon što dobijemo takvo rješenje treba da provjerimo ima li ono smisla (tj. konvergira li red i sl.) i zadovoljava li zadanu jednadžbu i rubne uvjete (tj. možemo li član po član diferencirati, je li moguć granični prelaz pri približavanju rubu i sl.).

U svim dolje navedenim primjerima redovi i nepravi integrali konvergiraju ako funkcijama, kojima zadamo početne uvjete, nametnemo prikladna ograničenja (npr. neprekinutost druge derivacije u primjerima 1 i 2).

Primjeri: 1) Treba naći rješenje jednadžbe $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, koje zadovoljava početne uvjete $u\Big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)$ i rubne uvjete $u\,|_{x=0} = 0$, $u\,|_{x=l} = 0$ (*titranje napete žice*).

Tražimo rješenje u obliku $u = X(x)\,T(t)$. Uvrštenjem u jednadžbu dobivamo $\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$ (varijable su separirane). Kako lijeva strana ne ovisi o x, a desna o t, svaka od njih je konstantna veličina. Ako tu konstantu označimo sa $-\lambda^2$*, dobivamo $X'' + \lambda^2 X = 0$, $T'' + a^2\lambda^2 T = 0$. Povrh toga iz rubnih uvjeta imamo $X(0) = X(l) = 0$. Na taj način je $X(x)$ svojstvena funkcija rubnog *Sturm-Liouvilleova* problema, a λ^2 je svojstvena vrijednost tog zadatka (vidi na str. 546). Iz jednadžbe za X i rubnih uvjeta naći ćemo $X(x) = C \sin \lambda x$, pri čemu je $\sin \lambda l = 0$, tj. $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ako sada integriramo jednadžbu $T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$, dobivamo partikularno rješenje prvotne jednadžbe u obliku

$$u_n = \left(a_n \cos \frac{na\pi}{l} t + b_n \sin \frac{na\pi}{l} t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Na temelju zahtjeva da $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ za $t = 0$ bude jednako $f(x)$, a $\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ da bude $\varphi(x)$, onda pomoću formula za razvoj Fourierovog reda po sinusima dobivamo (vidi na str. 639):

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad b_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

2) Promatranje uzdužnog *titranja šipke* kojoj je jedan kraj slobodan, a na drugom kraju u početnom trenutku djeluje konstantna sila p, svodimo na diferencijalnu jednadžbu iz primjera 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

s početnim uvjetima $u\Big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)$, ali s nehomogenim rubnim uvjetima: $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$ (slobodni kraj), $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = kp$. Te uvjete možemo zamijeniti homogenim $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0\right)$, tako da umjesto u supstituiramo novu nepoznatu funkciju $z = u - \frac{kpx^2}{2l}$. Diferencijalna jednadžba time postaje nehomogena: $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a^2 kp}{l}$. Njeno ćemo rješenje tražiti u obliku $z = v + w$, gdje v zadovoljava homogenu diferencijalnu jednadžbu, rubne i početne uvjete za z, tj.

$$z\Big|_{t=0} = f(x) - \frac{kpx^2}{2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

* Iz daljnjeg vidimo da za pozitivne vrijednosti te konstante ne možemo zadovoljiti rubne uvjete.

a w zadovoljava nehomogenu diferencijalnu jednadžbu i početne i rubne nuluvjete. Lako se vidi da je $w = \frac{ka^2pt^2}{2l}$. Pretpostavimo li da je $v = X(x)\,T(t)$ i uvrstimo li to u jednadžbu, dobivamo kao i prije $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda^2$. Ako jednadžbu za X integriramo s rubnim uvjetima $X'(0) = X'(l) = 0$, naći ćemo svojstvene funkcije zadanog problema $X_n = \cos\frac{n\pi x}{l}$ i pripadne svojstvene vrijednosti $\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ako računamo dalje kao u prethodnom primjeru, dobivamo konačno

$$u = \frac{ka^2pt^2}{2l} + \frac{kpx^2}{2l} + a_0 + \frac{a\pi}{l}b_0t + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{an\pi t}{l} + \frac{b_n}{n}\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l},$$

gdje su a_n i b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ koeficijenti razvoja u Fourierov red po kosinusima u intervalu $(0, l)$ funkcija $f(x) - \frac{kpx^2}{2}$ i $\frac{l}{a\pi}\varphi(x)$ (vidi na str. 639).

3) *Titranje kružne na rubu učvršćene membrane.* Jednadžba glasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ili u polarnim koordinatama (vidi na str. 363)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

uz uvjete

$$u\Big|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(r, \varphi), \quad u\Big|_{r=R} = 0.$$

Neka je $u = U(r)\,\Phi(\varphi)\,T(t)$. Uvrštenjem u jednadžbu dobivamo $\frac{U''}{U} + \frac{U'}{rU} + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}$. Odatle, kao i prije, izlazi $T'' + a^2\lambda^2 T = 0$ i $\frac{r^2U'' + rU'}{U} + \lambda^2 r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \nu^2$ ili $\Phi'' + \nu^2\Phi = 0$.

Iz uvjeta $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, $\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$ dobivamo

$$\Phi(\varphi) = a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi, \quad \nu^2 = n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Za određivanje U i λ imamo: $[rU']' - \frac{n^2}{r}U = -\lambda^2 rU$, uz uvjet $U(R) = 0$. Ako dodamo prirodne uvjete ograđenosti $U(r)$ za $r = 0$ i uvrstimo $\lambda r = z$, naći ćemo

$$z^2U'' + zU' + (z^2 - n^2)\,U = 0, \quad \text{tj.} \quad U(r) = J_n(z) = J_n\left(\mu\frac{r}{R}\right)$$

(J_n je Besselova funkcija, vidi na str. 541) gdje je $\lambda = \frac{\mu}{R}$ i $J_n(\mu) = 0$.

Neka je μ_{nk} k-ta pozitivna nultačka funkcije $J_n(z)$. Sistem funkcija $U_{nk}(r) = J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots,)$ potpuni je sistem svih svojstvenih funkcija samoadjungiranog problema Sturm-Liouvilleova tipa, ortogonalnih s težinom r (vidi na str. 546).

Rješenje našeg zadatka tražimo u obliku dvostrukog reda

$$U = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_{nk}\cos n\varphi + b_{nk}\sin n\varphi)\cos\frac{a\mu_{nk}t}{R} + \right. \\ \left. + (c_{nk}\cos n\varphi + d_{nk}\sin n\varphi)\sin\frac{a\mu_{nk}t}{R}\right] J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right).$$

Iz početnih uvjeta za $t = 0$ dobivamo

$$f(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk}\cos n\varphi + b_{nk}\sin n\varphi)\,J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right),$$

$$F(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\mu_{nk}}{R}(c_{nk}\cos n\varphi + d_{nk}\sin n\varphi)\,J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right),$$

odakle je

$$\begin{matrix} a_{nk} \\ b_{nk} \end{matrix} = \frac{2}{\pi R^2 J_{n-1}^2(\mu_{nk})}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R f(r, \varphi)\begin{matrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{matrix}\,J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right)r\,dr;$$

za $n = 0$ moramo 2 u brojniku zamijeniti sa 1. Formule kojima određujemo koeficijente c_{nk} i d_{nk} dobivamo iz formula za a_{nk} i b_{nk} tako da $f(r, \varphi)$ zamijenimo sa $F(r, \varphi)$ i pomnožimo sa $\frac{R}{a\mu_{nk}}$.

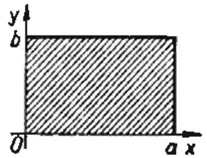
4) *Dirichletov problem* (vidi na str. 637) za pravokutnik $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ (sl. 362). Treba naći funkciju $u(x,y)$ koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu $\Delta u = 0$ i uvjete

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u(a,y)=\varphi_2(y),\quad u(x,0)=\psi_1(x),\quad u(x,b)=\psi_2(x).$$

Riješimo najprije zadatak za slučaj $\varphi_1(y)=\varphi_2(y)=0$. Uvrštenjem $u=X(x)\,Y(y)$ u jednadžbu dobivamo $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$ $(=-\lambda^2)$. Kako je $X(0)=X(a)=0$, to je $X = C\sin\lambda x$, $\lambda=\frac{n\pi}{a}$ $(n=1,2,\ldots)$. Ako opće rješenje jednadžbe $Y''-\frac{n^2\pi^2}{a^2}Y=0$ napišemo u obliku

$$Y = a_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}(b-y)+b_n\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y,$$

dobivamo partikularno rješenje jednadžbe $\Delta u=0$, koje zadovoljava uvjete $u(0,y)=u(a,y)=0$, u obliku



Sl. 362

$$u_n = \left[a_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}(b-y)+b_n\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y\right]\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

Ako sada postavimo $u=\sum u_n$, dobivamo iz uvjeta za $y=0$ i $y=b$ da je

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}(b-y)+b_n\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x,$$

gdje je

$$a_n = \frac{2}{a\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a \psi_1(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx,\quad b_n=\frac{2}{a\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a\psi_2(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx.$$

Ako analogno riješimo zadatak za slučaj $\psi_1(x)=\psi_2(x)=0$, dobivamo rješenje općeg zadatka kao zbroj dvaju nađenih rješenja.

5) *Širenje topline u homogenoj šipki* kojoj je jedan kraj u neizmjernosti, a na drugom održavamo konstantnu temperaturu. Treba naći ograđeno rješenje jednadžbe $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<+\infty,\ t\geqslant 0)$, uz uvjet $u\big|_{t=0}=f(x)$, $u\big|_{x=0}=0$ (pretpostavljamo da je konstantna temperatura na kraju šipke jednaka nuli). Uvrštenjem $u=X(x)\,T(t)$ u jednadžbu, dobivamo $\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}$ $(=-\lambda^2)$. Odatle je $T(t)=C_\lambda e^{-\lambda^2a^2t}$.

Iz uvjeta ograđenosti rješenja izlazi da je $\lambda^2 \geqslant 0$. Kako je $X(0)=0$, to je $X(x)=C\sin\lambda x$. Time je $u_\lambda = C_\lambda e^{-\lambda^2a^2t}\sin\lambda x$. Ovdje je λ po volji odabran realan broj, pa stoga možemo razmotriti rješenja oblika

$$u(x,t)=\int_0^\infty C(\lambda)\,e^{-\lambda^2a^2t}\sin\lambda x\,d\lambda.$$

Iz uvjeta $u\big|_{t=0}=f(x)$ naći ćemo $f(x)=\int_0^\infty C(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda$. Posljednja jednadžba je zadovoljena ako stavimo $C(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(s)\sin\lambda s\,ds$ (vidi na str. 639). Uvrštenjem $C(\lambda)$ u $u(x,t)$ dobivamo

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(s)\left(\int_0^\infty e^{-\lambda^2a^2t}\sin\lambda s\sin\lambda x\,d\lambda\right)ds$$

ili zamjenom produkta sinusa s polovičnom razlikom kosinusa (vidi na str. 209) i upotrebom jednadžbe 5) sa str. 475

$$u(x,t)=\int_0^\infty f(s)\,\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}}\right]ds.$$

Riemannova metoda rješavanja Cauchyjevog problema za jednadžbu hiperbolnog tipa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=F.$$

Potražimo »*Riemannovu funkciju*« $v(x,y;\xi,\eta)$ (ξ,η su parametri) koja zadovoljava konjugiranu* homogenu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial(av)}{\partial x}-\frac{\partial(bv)}{\partial y}+cv=0$$

i uvjete

$$v(x,\eta;\xi,\eta)=e^{\int_\xi^x b(s,\eta)\,ds},\quad v(\xi,y;\xi,\eta)=e^{\int_\eta^y a(\xi,s)\,ds}.$$

* Konjugiranom jednadžbom linearnoj jednadžbi

$$\sum_{i,k}a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}+\sum_i b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f \quad\text{nazivamo}\quad \sum_{i,k}\frac{\partial^2(a_{ik}v)}{\partial x_i\,\partial x_k}-\sum_i\frac{\partial(b_iv)}{\partial x_i}+cv=0.$$

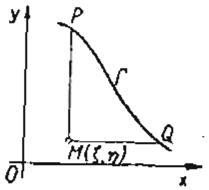
Funkcija $u(\xi,\eta)$ koja zadovoljava ishodnu jednadžbu i koja na zadanoj krivulji Γ (sl. 363; glatka krivulja Γ ne smije imati tangente paralelne koordinatnim osima, tj. ne smije dirati karakteristike) poprima zajedno sa svojom derivacijom u smjeru normale te krivulje (vidi na str. 267) zadane vrijednosti, određuje se po formuli

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(uv)_P+\frac{1}{2}(uv)_Q-\int_{QP}\left[buv+\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]dx-$$
$$-\left[auv+\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dy+\iint_{PMQ}Fv\,dx\,dy.$$

Krivuljni integral u toj formuli može se izračunati, jer iz vrijednosti funkcije i njene derivacije (u netangencijalnom smjeru) na luku mogu se odrediti vrijednosti obiju parcijalnih derivacija. Često pri postavljanju Cauchyjeva problema umjesto derivacije u smjeru normale zadajemo na krivulji vrijednosti jedne parcijalne derivacije tražene funkcije. U tom je slučaju prikladnije upotrijebiti drugi oblik Riemannove formule

$$u(\xi,\eta)=(uv)_P-\int_{QP}\left(buv-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx-$$
$$-\left(auv+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy+\iint_{PMQ}Fv\,dx\,dy$$

$\left(\text{ako su na } \Gamma \text{ zadane vrijednosti } \frac{\partial u}{\partial y}\right)$.



Sl. 363

Primjer: Jednadžba prolaženja električne struje vodičima (telegrafska jednadžba) ima oblik

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2b\frac{\partial u}{\partial t}+cu=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

gdje su $a>0$, b, c konstante.

Zamjenom nepoznate funkcije $u=ze^{-(b/a)t}$, jednadžbu svodimo na oblik

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=m^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+n^2 z\qquad\left(m^2=\frac{1}{a},\quad n^2=\frac{b^2-ac}{a^2}\right),$$

a zamjenom nezavisnih varijabli $\xi=\frac{n}{m}(mt+x)$, $\eta=\frac{n}{m}(mt-x)$ na oblik

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{z}{4}=0.$$

Riemannova funkcija $v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ mora zadovoljiti tu jednadžbu i postati jednaka jedinici za $\xi=\xi_0$ i za $\eta=\eta_0$. Ako tražimo v u obliku $v=f(w)$, gdje je $w=(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)$, onda je $f(w)$ rješenje jednadžbe $w\frac{d^2f}{dw^2}+\frac{df}{dw}-\frac{1}{4}f=0$ s početnim uvjetom $f(0)=1$. Zamjenom $w=\alpha^2$ tu jednadžbu svodimo na Besselovu jednadžbu nultog reda $\frac{d^2f}{d\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{df}{d\alpha}-f=0$ (vidi na str. 540) i, prema tomu je $v=I_0\left[\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right]$. Ako treba naći rješenje ishodne jednadžbe koja zadovoljava početne uvjete $z\Big|_{t=0}=f(x)$, $\frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=0}=g(x)$, onda supstitucijom dobivene vrijednosti v u Riemannovu formulu i vraćanjem na stare varijable dobivamo

$$z(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-mt)+f(x+mt)]+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x-mt}^{x+mt}\left[g(s)\frac{I_0\left(\frac{n}{m}\sqrt{m^2t^2-(s-x)^2}\right)}{m}-\right.$$
$$\left.-f(s)\frac{mtI_1\left(\frac{n}{m}\sqrt{m^2t^2-(s-x)^2}\right)}{\sqrt{m^2t^2-(s-x)^2}}\right]ds.$$

Greenova metoda rješavanja rubnih problema za jednadžbe eliptičkog tipa u mnogome je slična Riemannovoj metodi rješavanja Cauchyjevih problema za jednadžbe hiperbolnog tipa. Ako treba naći funkciju $u(x,y)$ koja u nekom području zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f$$

i na rubu tog područja poprima zadane vrijednosti, onda najprije nađemo »*Greenovu funkciju*« $G(x,y;\xi,\eta)$, koja zadovoljava ove uvjete (ξ,η smatramo parametrima):

1) $G(x,y;\xi,\eta)$ posvuda, osim u tački $x=\xi$, $y=\eta$, zadovoljava homogenu konjugiranu* jednadžbu

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}-\frac{\partial(aG)}{\partial x}-\frac{\partial(bG)}{\partial y}+cG=0.$$

* Vidi napomenu na str. 567.

2) Funkcija G ima oblik $U \ln \frac{1}{r} + V$, gdje su U i V zajedno sa svojim derivacijama do uključivog drugog reda u čitavom području neprekinute funkcije, pri čemu U u tački $x = \xi$, $y = \eta$ ima vrijednost 1, a $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$.

3) Na rubu promatranog područja $G(x, y; \xi, \eta)$ iščezava.

Pomoću Greenove funkcije rješenje rubnog problema dobivamo po formuli

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_S u(x, y) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y; \xi, \eta)\, ds -$$
$$- \frac{1}{2\pi} \iint_D f(x, y)\, G(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy,$$

gdje je D promatrano područje, S njegov rub na kojem je funkcija u zadana, a $\frac{\partial}{\partial n}$ označava derivaciju u smjeru nutarnje normale na rubu područja.

Uvjet 3) ovisi o karakteru postavljenog zadatka. Ako npr. na rubu područja nisu zadane vrijednosti tražene funkcije nego vrijednosti njene derivacije u smjeru normale ruba, onda se u uvjetu 3) mora tražiti da izraz

$$\frac{\partial G}{\partial n} - (a \cos \alpha + b \cos \beta)\, G$$

bude jednak nuli, pri čemu su α, β kutovi nutarnje normale ruba prema koordinatnim osima. Rješenje je u tom slučaju određeno formulom

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial u}{\partial n} G\, ds - \frac{1}{2\pi} \iint_D f G\, dx\, dy.$$

Greenovu metodu primjenjujemo također i na linearne jednadžbe sa tri nezavisne varijable, koje imaju oblik

$$\Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} + eu = f.$$

Pri traženju rješenja te jednadžbe, kojemu su zadane vrijednosti na rubu razmatranog područja, konstruiramo kao i prije Greenovu funkciju (s tom razlikom da sada ona ovisi o trima parametrima

ξ, η, ζ); konjugirana jednadžba koju zadovoljava Greenova funkcija ima oblik

$$\Delta G - \frac{\partial (aG)}{\partial x} - \frac{\partial (bG)}{\partial y} - \frac{\partial (cG)}{\partial z} + eG = 0,$$

a u uvjetu 2) se traži da G ima oblik $U \frac{1}{r} + V$, gdje je $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$. Rješenje zadatka dano je pri tome formulom

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \iint_S u \frac{\partial G}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \iiint_D f G\, dx\, dy\, dz.$$

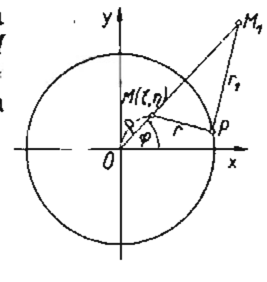
Kao i po Riemannovoj metodi, i po Greenovoj treba najprije naći neko specijalno rješenje diferencijalne jednadžbe, pomoću kojega možemo zatim dobiti rješenje uz bilo koje početne (rubne) uvjete. Bit razlike između Greenove i Riemannove funkcije je u tome da Greenova funkcija ovisi samo o obliku lijeve strane diferencijalne jednadžbe, a Riemannova ovisi i o razmatranom području. Određivanje Greenove funkcije, čak i onda kada je osigurano njeno postojanje, praktički je veoma teško, zbog čega se Greenova metoda više upotrebljava u teoretskim istraživanjima.

Primjer: 1) Za Laplaceovu jednadžbu $\Delta u = 0$, ako je razmatrano područje kružnica, možemo lako konstruirati Greenovu funkciju za Dirichletov problem. Ako je polumjer kružnice jednak R, a tačka M_1 simetrična s točkom $M(\xi, \eta)$ s obzirom na kružnicu, tj. M i M_1 leže na istom polumjeru a $OM \cdot OM_1 = R^2$, onda je Greenova funkcija izražena formulom

$$G(x, y; \xi, \eta) = \ln \frac{1}{r} + \ln \frac{\rho r_1}{R},$$

gdje je

$$r = MP, \quad \rho = OM \quad \text{i} \quad r_1 = M_1 P \text{ (sl. 364).}$$



Sl. 364

Navedena formula za rješenje Dirichletovog problema u danom slučaju, nakon uvrštenja normalne derivacije Greenove funkcije i nekih transformacija, daje tzv. *Poissonov integral*

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)} u(\varphi)\, d\varphi$$

(oznake su iste kao i prije, $\xi = \rho \cos\psi$, $\eta = \rho \sin\psi$; $u(\varphi)$ je na kružnici zadana funkcija koja određuje rubne vrijednosti tražene funkcije u).

2) Analogno konstruiramo Greenovu funkciju za Dirichletov problem Laplaceove jednadžbe $\Delta u = 0$ u prostoru, ako je promatrano područje kugla polumjera R. Tada Greenova funkcija ima oblik

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} - \frac{R}{r_1 \rho},$$

gdje je $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ udaljenost od tačke (ξ, η, ζ) do središta kugle, r je udaljenost od tačke (x, y, z) do tačke (ξ, η, ζ), r_1 je udaljenost od tačke (x, y, z) do tačke $\left(\frac{R\xi}{\rho}, \frac{R\eta}{\rho}, \frac{R\zeta}{\rho}\right)$ simetrične tački (ξ, η, ζ). Poissonov integral ima pri tome oblik (iste oznake):

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^3} u \, ds.$$

Operatorska metoda. Isto kao i za obične diferencijalne jednadžbe, i za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi možemo uspješno primijeniti operatorsku metodu, koja se temelji na prelazu od tražene funkcije na njen transformat (vidi na str. 533). Pri tome traženu funkciju smatramo funkcijom jedne od nepoznatih varijabli, a ostale parametrima. Za transformat tražene funkcije dobivamo tako diferencijalnu jednadžbu (*pomoćna jednadžba*) koja ima jednu nezavisnu varijablu manje od ishodne jednadžbe. Posebno, ako je ishodna jednadžba imala dvije nezavisne varijable, za transformat tražene funkcije dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu. Ako iz dobivene jednadžbe možemo naći transformat tražene funkcije, onda samu funkciju nalazimo ili iz tablice transformata, ili po formuli obrata.

Primjeri: 1) Promotrimo širenje topline u krutom tijelu omeđenom s jedne strane ($x > 0$). Temperatura na rubu ($x = 0$) mijenja se po zakonu $u = k \cos \omega t$ za $t > 0$, a početna temperatura tijela jednaka je nuli.

Zadatak svodi se na rješavanje jednadžbe

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{u području } x > 0,\ t > 0$$

uz uvjete: $u\big|_{t=0,\, x>0} = 0$, $u\big|_{x=0,\, t>0} = k \cos \omega t$. Pomoćna jednadžba ima oblik

$$a^2 \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - p\bar{u} = 0, \quad x > 0$$

uz uvjet $\bar{u} = \frac{kp^2}{p^2 + \omega^2}$ za $x = 0$. Rješenje pomoćne jednadžbe koje ostaje ograđeno za $x \to \infty$ jest

$$\bar{u} = \frac{kp^2}{p^2 + \omega^2} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}.$$

Primjenjujući formulu (12) sa str. 538 i Borelov teorem (vidi na str. 534) za prelaz od transformata na funkciju, dobivamo

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \cos \omega\tau \, \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} \, d\tau.$$

2) Šipka duljine l nalazi se u stanju mirovanja, a njen kraj $x = 0$ je upet. U trenutku $t = 0$ na slobodni kraj šipke djeluje sila S (na jedinicu površine).

Zadatak istraživanja titranja šipke svodimo na rješenje jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

u području $0 < x < l$, $t > 0$, uz početne uvjete

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

za $0 < x < l$ i rubne uvjete

$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \frac{S}{E}$$

(E je Youngov modul). Pomoćna jednadžba ima oblik

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2} \bar{u} = 0$$

s uvjetom $\bar{u}\Big|_{x=0} = 0$, $\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=l} = \frac{S}{E}$.

Rješenje je funkcija $\bar{u} = \frac{Sa}{Ep} \frac{\operatorname{sh} \frac{px}{a}}{\operatorname{ch} \frac{pl}{a}}$.

Pomoću rastavljanja transformata u na parcijalne razlomke ili pomoću obrata možemo odatle dobiti

$$u(x,t) = \frac{Sx}{E} - \frac{8Sl}{\pi^2 E}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi a t}{2l}.$$

Aproksimativne metode. Pri rješavanju konkretnih zadataka u vezi s integriranjem parcijalnih diferencijalnih jednadžbi često se primjenjuju aproksimativne metode kako analitičke, pomoću kojih možemo dobiti približan analitički izraz za traženu funkciju, tako i numeričke, pomoću kojih neposredno dobivamo vrijednosti tražene funkcije za neke određene vrijednosti argumenata.

Numeričke metode osnovane su na zamjeni derivacija s kvocijentima diferencija, čime diferencijalna jednadžba prelazi u sistem algebarskih jednadžbi, koji je u slučaju linearne ishodne jednadžbe linearan sistem. Osim toga vrlo je raširena metoda modeliranja, koja se osniva na tome da jedna te ista diferencijalna jednadžba opisuje različite fizikalne pojave. Za rješavanje dane jednadžbe konstruiramo model u kojem se odvija jedan od procesa koji opisuje promatrana jednadžba, a vrijednost tražene funkcije dobivamo neposrednim mjerenjem na modelu. Model obično sadrži elemente koje možemo mijenjati u određenim granicama i zato na modelu možemo rješavati zadaće za čitavu klasu diferencijalnih jednadžbi.

PETI DIO

DOPUNSKA POGLAVLJA ANALIZE

I. KOMPLEKSNI BROJEVI I FUNKCIJE KOMPLEKSNE VARIJABLE

1. OSNOVNI POJMOVI

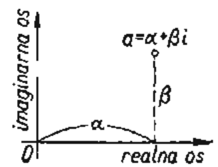
Imaginarna jedinica. Imaginarnu jedinicu i* formalno definiramo kao broj koji kvadriran daje »—1«. Uvođenje imaginarne jedinice dovodi do poopćenja pojma broja na *kompleksne brojeve*, koji su značajni u algebri i analizi i omogućuju konkretne interpretacije u nekim geometrijskim i fizikalnim pitanjima.

Kompleksni brojevi. Opći oblik kompleksnog broja je $a = \alpha + \beta i$; primaju li α i β sve moguće realne vrijednosti, dobivamo sve moguće kompleksne brojeve a. Broj α nazivamo *realnim dijelom* kompleksnog broja a; β njegovim *imaginarnim dijelom.* Oznake:

$$\alpha = \mathrm{R}(a), \qquad \beta = \mathrm{I}(a)^{**}.$$

Ako je $\beta = 0$, onda je $a = \alpha$ (realni brojevi — poseban slučaj kompleksnih brojeva); ako je $\alpha = 0$, onda je $a = \beta i$ (»*čisto imaginarni*« brojevi).

Geometrijska interpretacija. Slično kao što realne brojeve možemo prikazati tačkama brojevnog pravca, kompleksne brojeve prikazujemo tačkama ravnine: broj $a = \alpha + \beta i$ prikazujemo tačkom kojoj je apscisa α, a ordinata β (sl. 365). Realne brojeve prikazujemo tačkama osi apscisa (*realna os*), čisto imaginarne tačkama osi ordinata (*imaginarna os*). Kako je svaka tačka ravnine potpuno određena radijvektorom te tačke (vidi na str. 604), svakom kompleksnom broju odgovara određeni *vektor* koji leži u ravnini i povučen je od pola u tačku pripadnu kompleksnom broju (sl. 366). Prema tome kompleksne brojeve možemo prikazivati i tačkama i vektorima.



Sl. 365

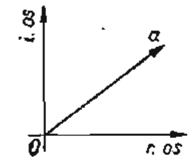
* i od francuskog imaginaire — zamišljeni. U elektrotehnici umjesto i upotrebljavamo slovo j (da ga ne pobrkamo s oznakom i za jakost struje).

** R od francuskog réel (realan), I — imaginaire (imaginaran).

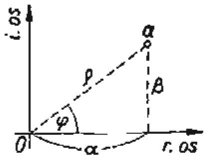
Jednakost kompleksnih brojeva. Po definiciji, dva su kompleksna broja *jednaka* ako su im jednaki posebno realni dijelovi i posebno imaginarni dijelovi. Geometrijski su kompleksni brojevi jednaki ako su jednaki vektori kojima su prikazani. U protivnom slučaju brojevi nisu jednaki; pojmova »veći« i »manji« nema za kompleksne brojeve.

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja. Izraz kompleksnog broja $a = \alpha + \beta i$ nazivamo *algebarskim oblikom*; ako umjesto kartezijskih koordinata tačke koja prikazuje kompleksan broj uvedemo njegove polarne koordinate (str. 227), dobivamo *trigonometrijski oblik* kompleksnog broja (sl. 367)

$$a = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi);$$



Sl. 366



Sl. 367

ρ, tj. duljinu radijvektora pripadne tačke, nazivamo *modulom* ili *apsolutnom vrijednosti* kompleksnog broja (označavamo sa $|a|$), kut φ (u radijanima) nazivamo *argumentom* kompleksnog broja (označavamo sa arg a):

$$\rho = |a|, \qquad \varphi = \arg a.$$

Veza između ρ, φ i α, β ista je kao i među kartezijskim i polarnim koordinatama tačke (vidi na str. 228)

$$\alpha = \rho \cos \varphi, \qquad \beta = \rho \sin \varphi;$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha};$$

pri tome je $0 \leqslant \rho < \infty$, a φ može imati ma koju vrijednost: $-\infty < \varphi + \infty$; za dane kompleksne brojeve argument φ ima neizmjerno mnogo vrijednosti, koje se međusobno razlikuju za $2k\pi$ (k cio broj). *Glavna vrijednost* argumenta je u intervalu $-\pi < \varphi \leqslant +\pi$.

Broj »*nula*« $(0 + 0i)$ ima modul koji je jednak nuli; arg 0 je neodređena veličina.

Eksponencijalni oblik. Često upotrebljavamo ovaj oblik pisanja kompleksnog broja a s modulom ρ i argumentom φ:

$$a = \rho e^{\varphi i} \text{ (eksponencijalni oblik)*}.$$

* Podrobnije o tome vidi na str. 582.

Tako npr. broj $1 + \sqrt{3}i$ možemo napisati ovako:

$$\text{algebarski oblik} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\text{trigonometrijski oblik} \quad = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\text{eksponencijalni oblik} \quad = 2e^{\frac{\pi}{3}i},$$

A također, ako se ne ograničimo na glavnu vrijednost argumenta

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right] = 2e^{\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i}.$$

Konjugirano kompleksni brojevi. Dva kompleksna broja nazivamo *međusobno konjugiranim* (označavamo ih a i $\bar{a}$), ako su im realni dijelovi jednaki, a imaginarni se razlikuju samo po predznacima: $R(\bar{a}) = R(a)$, $I(\bar{a}) = -I(a)$. Geometrijski, konjugirano kompleksne brojeve prikazujemo tačkama koje leže simetrično prema realnoj osi. Moduli konjugirano kompleksnih brojeva su jednaki, a argumenti se razlikuju po predznacima:

$$a = \alpha + \beta i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{\varphi i},$$

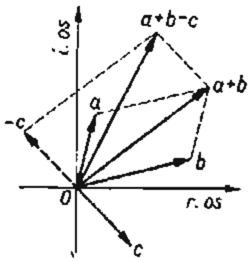
$$\bar{a} = \alpha - \beta i = \rho (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \rho e^{-\varphi i}.$$

2. ALGEBARSKE OPERACIJE

Zbrajanje i oduzimanje dvaju ili više kompleksnih brojeva izvodimo po formuli

$$(\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) - (\alpha_3 + \beta_3 i) + \ldots =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots) + (\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \ldots) i.$$

Da geometrijski dobijemo vektor koji predstavlja zbroj ili razliku dvaju ili više brojeva, treba zbrojiti ili oduzeti vektore koji predstavljaju te brojeve, po pravilima operacija sa vektorima (vidi na str. 604) (sl. 368).



Sl. 368

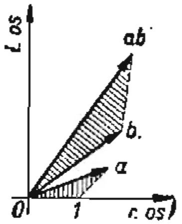
Množenje dvaju kompleksnih brojeva vršimo pomoću formule

$$(\alpha_1 + \beta_1 i) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i) =$$
$$= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) i.$$

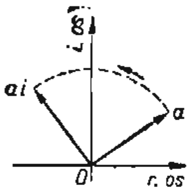
Ako su brojevi zadani u trigonometrijskom obliku, onda

$$[\rho_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)]\,[\rho_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] = \\ = \rho_1\rho_2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

tj. modul produkta jednak je produktu modula, a argument produkta jednak je sumi argumenata faktora. Geometrijski, vektor koji prikazuje produkt a sa b dobivamo vrtnjom vektora a u smislu suprotnom gibanju kazaljke na satu za kut jednak $\arg b$, i povećanjem vektora $|b|$ puta. Produkt ab možemo također dobiti konstrukcijom sličnog trokuta (sl. 369). Napose, kada množimo a sa i, zavrtimo vektor, koji prikazuje a, za $\pi/2$, ne mijenjajući duljinu (sl. 370).



Sl. 369



Sl. 370

Dijeljenje dvaju kompleksnih brojeva definiramo kao operaciju suprotnu množenju. U algebarskom obliku je

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1 i}{\alpha_2 + \beta_2 i} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}\,i.$$

U trigonometrijskom obliku je

$$[\rho_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] : [\rho_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] = \\ = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

tj. modul kvocijenta jednak je kvocijentu modula dividenda i divizora, a argument kvocijenta jednak je razlici njihovih argumenata.

Geometrijski, vektor koji odgovara kvocijentu $\dfrac{a}{b}$ dobivamo vrtnjom vektora koji odgovara broju a, u smislu gibanja kazaljke na satu za kut $\arg b$, skrativši ga $|b|$ puta.

Dijeljenje s nulom je nemoguće.

Opća pravila za četiri aritmetičke operacije. Formalno se računa s kompleksnim brojevima $\alpha + \beta i$ isto tako kao i s običnim binomima, uz uvrštenje $i^2 = -1$. Kada dijelimo kompleksni broj s kompleksnim brojem »rješavamo se imaginarnosti u nazivniku« (analogno otklanjanju iracionalnosti u nazivniku, vidi na str. 148): brojnik i nazivnik pomnožimo s konjugirano kompleksnim nazivnikom, služeći se pri tome jednadžbom $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$ (realan broj).

Primjer pretvaranja:

$$\frac{(3-4i)(-1+5i)^2}{1+3i} + \frac{10+7i}{5i} =$$

$$= \frac{(3-4i)(1-10i-25)}{1+3i} + \frac{(10+7i)i}{5i\cdot i} =$$

$$= \frac{-2(3-4i)(12+5i)}{1+3i} + \frac{7-10i}{5} =$$

$$= \frac{-2(56-33i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} + \frac{7-10i}{5} =$$

$$= \frac{-2(-43-201i)}{10} + \frac{7-10i}{5} =$$

$$= \frac{1}{5}(50+191i) = 10 + 38{,}2i.$$

Potenciranje kompleksnog broja eksponentom n izvodimo po *Moivreovoj formuli*

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi);$$

modul potenciramo sa n, a argument pomnožimo sa n. Moivreova formula upotrebljiva je za bilo koju vrijednost n: cijelu, razlomljenu, pozitivnu, negativnu. Za razlomljeni n treba uzeti u obzir višeznačnost rezultata (vidi dalje).

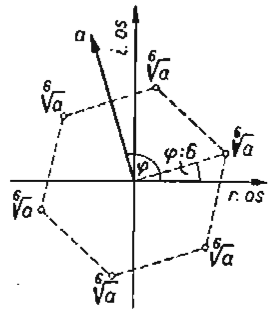
Napose imamo: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ i dalje $i^{4n+k} = i^k$.

Vađenje n-tog korijena, kao operacija inverzna potenciranju, izvodi se po Moivreovoj formuli za razlomljeni eksponent: ako je $a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, onda je

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i potenciranje sa cijelim eksponentom jednoznačne su operacije; vađenje n-tog korijena daje uvijek n različitih vrijednosti.

Ako za $\arg a$ uzmemo vrijednosti φ, $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi, \ldots,$ $\ldots, \varphi + 2(n-1)\pi$, onda će se vrijednosti $\arg \sqrt[n]{a}$ međusobno razlikovati za $2\pi/n$; za dalje vrijednosti k one će se ponavljati. Geometrijski, tačke koje odgovaraju $\sqrt[n]{a}$ vrhovi su pravilnog n-terokuta sa središtem u polu (na sl. 371 nacrtano je 6 vrijednosti $\sqrt[6]{a}$).



Sl. 371

Algebarske funkcije kompleksne varijable. Ako je veličina z kompleksna varijabla (veličina koja prima po volji odaberive vrijednosti $z = x + yi$), onda je rezultat izvršenja određenih algebarskih operacija na z (i, eventualno, nekim konstantama) algebarska funkcija te varijable $w = f(z)$*. Takve su npr. funkcije

$$w = az + b, \quad w = \frac{1}{z}, \quad w = z^2, \quad w = \frac{z+i}{z-i}, \quad w = \sqrt{z^2 - a^2}.$$

3. ELEMENTARNE TRANSCENDENTNE FUNKCIJE

Redovi s kompleksnim članovima. Beskonačan niz kompleksnih brojeva $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ ima limes z ($z = \lim_{n\to\infty} z_n$), akô je počevši od nekog n, $|z - z_n| < \varepsilon$ (po volji malenog pozitivnog broja), tj. ako se počevši od nekog n, sve tačke koje predočuju brojeve $z_n, z_{n+1}, \ldots$, nalaze u krugu polumjera ε sa središtem u z.

* U općenitijem smislu algebarska funkcija w može biti zadana implicitno jednadžbom

$$a_1 z^{m_1} w^{n_1} + a_2 z^{m_2} w^{n_2} + \ldots + a_k z^{m_k} w^{n_k} = 0,$$

koju vrlo često ne možemo riješiti eksplicitno (radikalima) s obzirom na w.

Primjer: $\lim_{n\to\infty} \{\sqrt[n]{a}\} = 1$ za po volji odabran a (ovdje pod $\{\sqrt[n]{a}\}$ razumijevamo onu vrijednost korijena koja ima najmanji argument, vidi sl. 372).

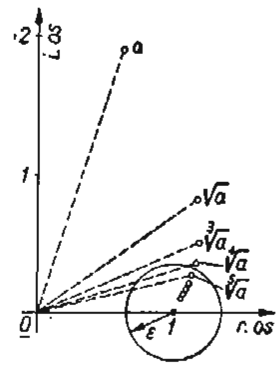
Beskonačan red s kompleksnim brojevima

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

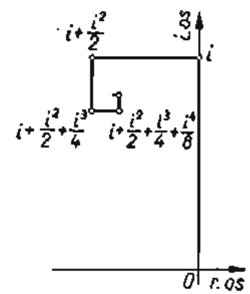
konvergira prema broju s (sumi reda), ako je

$$s = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

U slučaju konvergencije reda konac poligonalne spojnice tačaka koje predočuju brojeve $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ neograničeno se približuje tački s.



Sl. 372



Sl. 373

Primjeri: 1) $\quad i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} + \frac{i^4}{4} + \ldots$

2) $\quad i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{2^2} + \ldots$ (sl. 373).

Red konvergira *apsolutno*, ako konvergira red njegovih modula

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots,$$

i uvjetno, ako sam red konvergira, ali red modula divergira. U primjeru 1) red konvergira uvjetno, a u primjeru 2) konvergira apsolutno.

Red s promjenljivim članovima

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

definira neku funkciju od z za takve vrijednosti z za koje red konvergira.

Red potencija

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

(a_i su kompleksne konstante) konvergira apsolutno ili za sve vrijednosti z (u čitavoj ravnini) ili pak za vrijednosti koje leže unutar nekog *kruga konvergencije* sa središtem u ishodištu; izvan tog kruga red divergira; polumjer tog kruga nazivamo *polumjerom konvergencije* reda*. Npr.: za red $1 + z + z^2 + \ldots$ polumjer konvergencije je $R = 1$.

Obična eksponencijalna funkcija. Po definiciji je

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Taj red konvergira na čitavoj ravnini. Za čisto imaginarni eksponent yi je: $e^{yi} = \cos y + i \sin y$ (*Eulerova formula*) npr. $e^{\pi i} = -1$.

U općem slučaju je

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

tj.

$$\mathrm{R}(e^z) = e^x \cos y, \quad \mathrm{I}(e^z) = e^x \sin y, \quad |e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y.$$

Odatle izlazi *eksponencijalni oblik* kompleksnog broja: $a + bi = \rho e^{\varphi i}$. Funkcija e^z je periodična s periodom $2\pi i$: $e^z = e^{z+2k\pi i}$, npr.: $e^0 = e^{2k\pi i} = 1$, $e^{(2k+1)\pi i} = -1$.

Eulerove formule za kompleksne brojeve:

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z,$$
$$e^{-zi} = \cos z - i \sin z$$

(o trigonometrijskim funkcijama kompleksnog argumenta vidi dalje).

Prirodni logaritam. Po definiciji je

$$w = \mathrm{Ln}\, z, \quad \text{ako je } z = e^w.$$

* Konvergenciju reda u tačkama na samoj kružnici kruga konvergencije treba za svaki pojedini slučaj posebno ispitati.

Ako je $z = \rho e^{\varphi i}$, onda je $\mathrm{Ln}\, z = \ln \rho + i(\varphi + 2k\pi)$, tj. $\mathrm{R}(\mathrm{Ln}\, z) = \ln \rho$, $\mathrm{I}(\mathrm{Ln}\, z) = \varphi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). $\mathrm{Ln}\, z$ je *višeznačna* funkcija. Ako se ograničimo na glavnu vrijednost φ (str. 576) dobivamo *glavnu vrijednost logaritma* (označavamo $\ln z$)

$$\ln z = \ln \rho + \varphi i \qquad (-\pi < \varphi \leqslant +\pi).$$

$\mathrm{Ln}\, z$ egzistira za sve kompleksne brojeve z, osim za nulu.

Opća eksponencijalna funkcija. Po definiciji je $a^z = e^{z \mathrm{Ln}\, a}$ ($a \neq 0$), a^z je *višeznačna* funkcija. Njena glavna vrijednost je $e^{z \ln a}$.

Trigonometrijske i hiperbolne funkcije.

Po definiciji je

$$\left.\begin{aligned}
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i},\\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2},\\
\mathrm{sh}\, z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\\
\mathrm{ch}\, z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.
\end{aligned}\right\} \text{Redovi konvergiraju na čitavoj ravnini.}$$

Funkcije $\sin z$ i $\cos z$ su periodične s periodom 2π, a funkcije $\mathrm{sh}\, z$ i $\mathrm{ch}\, z$ su periodične s periodom $2\pi i$.

Izrazi za funkcije čisto imaginarnog argumenta glase:

$$\sin yi = i\,\mathrm{sh}\, y, \quad \cos yi = \mathrm{ch}\, y, \quad \mathrm{sh}\, yi = i \sin y, \quad \mathrm{ch}\, yi = \cos y.$$

Formule koje vrijede za trigonometrijske i hiperbolne funkcije realnog argumenta (vidi na str. 207 do 209 i 222) vrijede i za funkcije kompleksnog argumenta. Napose se $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{sh}\, z$, $\mathrm{ch}\, z$ za $z = x + yi$ računaju po formulama za $\sin(a + b)$, $\cos(a + b)$, $\mathrm{sh}(a + b)$, $\mathrm{ch}(a + b)$.

Na primjer

$$\cos(x + yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi = \cos x\, \mathrm{ch}\, y - i \sin x\, \mathrm{sh}\, y.$$

i prema tome

$$\mathrm{R}(\cos z) = \cos \mathrm{R}(z)\, \mathrm{ch}\, \mathrm{I}(z),$$
$$\mathrm{I}(\cos z) = -\sin \mathrm{R}(z)\, \mathrm{sh}\, \mathrm{I}(z).$$

Funkcije tg z, ctg z, th z, cth z definirane su formulama

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Arkus-funkcije i Area-funkcije Arc sin z, Arc cos z, Arc tg z, Arc ctg z, Arsh z, Arch z, Arth z, Arcth z definirane su isto tako kao i za realne varijable*. Npr.: $w = \operatorname{Arc} \sin z$, ako je $z = \sin w$.

Te funkcije imaju neizmjerno mnogo vrijednosti, a izražavamo ih logaritmima pomoću formula

$$\operatorname{Arc} \sin z = -i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad \operatorname{Ar} \operatorname{sh} z = \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 + 1}),$$

$$\operatorname{Arc} \cos z = -i \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \operatorname{Ar} \operatorname{ch} z = \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad \operatorname{Ar} \operatorname{th} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z},$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} z = -\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{iz + 1}{iz - 1}; \quad \operatorname{Ar} \operatorname{cth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Glavne vrijednosti Arkus-funkcija i Area-funkcija izražavamo istim formulama sa funkcijom ln (glavna vrijednost logaritma)

$$\operatorname{arc} \sin z = -i \ln (iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad \operatorname{ar} \operatorname{sh} z = \ln (z + \sqrt{z^2 + 1}),$$

$$\operatorname{arc} \cos z = -i \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \operatorname{ar} \operatorname{ch} z = \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad \operatorname{ar} \operatorname{th} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z}{1 - z},$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{ctg} z = -\frac{1}{2i} \ln \frac{iz + 1}{iz - 1}, \quad \operatorname{ar} \operatorname{cth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z + 1}{z - 1}.$$

U tablici navedeni su izrazi za realne i imaginarne dijelove, za module i argumente trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija kompleksne varijable $z = x \pm iy$.

* Str. 214 i 223.

Izrazi R (w) i I (w)

Funkcija $w = f(x \pm iy)$	Realni dio: R (w)	Imaginarni dio: I (w)
$\sin (x \pm iy)$	$\sin x \operatorname{ch} y$	$\pm \cos x \operatorname{sh} y$
$\cos (x \pm iy)$	$\cos x \operatorname{ch} y$	$\mp \sin x \operatorname{sh} y$
$\operatorname{tg} (x \pm iy)$	$\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$	$\pm \dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$
$\operatorname{sh} (x \pm iy)$	$\operatorname{sh} x \cos y$	$\pm \operatorname{ch} x \sin y$
$\operatorname{ch} (x \pm iy)$	$\operatorname{ch} x \cos y$	$\pm \operatorname{sh} x \sin y$
$\operatorname{th} (x \pm iy)$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$	$\pm \dfrac{\sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$

Izrazi $\lvert w \rvert$ i $\arg w$

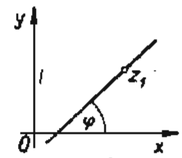
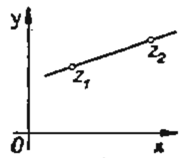
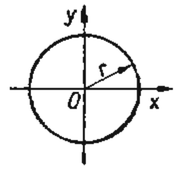
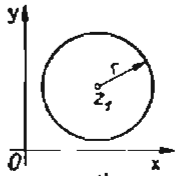
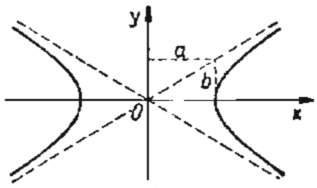
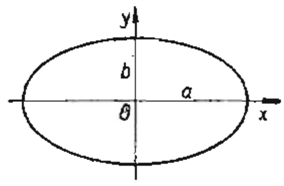
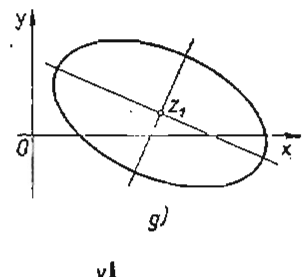
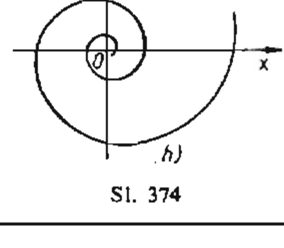
Funkcija $w = f(x \pm iy)$	Modul: $\lvert w \rvert$	Argument: $\arg w$
$\sin (x \pm iy)$	$\sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$	$\pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{ctg} x \operatorname{th} y)$
$\cos (x \pm iy)$	$\sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$	$\mp \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{tg} x \operatorname{th} y)$
$\operatorname{sh} (x \pm iy)$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y}$	$\pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{cth} x \operatorname{tg} y)$
$\operatorname{ch} (x \pm iy)$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y}$	$\pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{th} x \operatorname{tg} y)$

4. JEDNADŽBE KRIVULJA U KOMPLEKSNOM OBLIKU

Kompleksna funkcija realne varijable. Funkcija $z = f(t)$, gdje je $z = x + yi$, a t je realna varijabla predočena tačkama z koje pri promjenljivom t tvore neku krivulju. Parametarske jednadžbe te krivulje jesu: $x = x(t)$, $y = y(t)$; *jednadžba u kompleksnom obliku je*: $z = f(t)$.

Na str. 586 i 587 navedeni su primjeri nekih krivulja izraženih u kompleksnom obliku i prikazanih na sl. 374.

Primjeri nekih krivulja u kompleksnom obliku

Krivulja	Jednadžba	Crtež
1. *Pravac:*		
a) prolazi kroz tačku z_1 i sa osi Ox tvori kut φ	$z = z_1 + te^{\varphi i}$	 a)
b) prolazi kroz dvije tačke z_1 i z_2	$z = z_1 + t\,(z_2 - z_1)$	 b)
2. *Kružnica:*		
c) polumjera r sa središtem u ishodištu koordinata	$z = re^{ti}$	 c)
d) polumjera r sa središtem u tački z_1	$z = z_1 + re^{ti}$	 d)
3. *Hiperbola:*		
e) u normalnom obliku $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$z = a\,\mathrm{ch}\,t + ib\,\mathrm{sh}\,t$ ili $z = ce^t + \bar{c}e^{-t}$, gdje su c i $\bar{c}$ konjugirano kompleksni brojevi $c = \dfrac{a+bi}{2}$, $\bar{c} = \dfrac{a-bi}{2}$	 e)
4. *Elipsa:*		
f) u normalnom obliku $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$z = a\cos t + ib\sin t$ ili $z = ce^{ti} + de^{-ti}$, gdje su $c = \dfrac{a+b}{2}$, $d = \dfrac{a-b}{2}$, tj. po volji odabrani realni brojevi	 f)
g) u općem obliku (središte u tački z_1, osi su zakrenute za neki kut)	$z = z_1 + ce^{ti} + de^{-ti}$ gdje su c i d po volji odabrani kompleksni brojevi, koji određuju duljinu i zakret osi	 g)
5. *Logaritamska zavojnica:*	$z = ae^{bt}$ gdje su a i b po volji odabrani kompleksni brojevi	 h)

Sl. 374

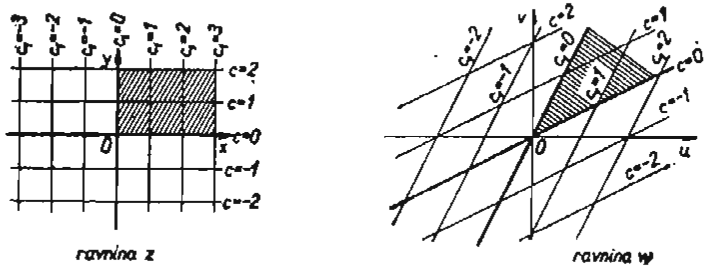
5. FUNKCIJE KOMPLEKSNIH VARIJABLI

Preslikavanje ravnine. Funkcija $w = f(z)$, gdje je $z = x + yi$ i $w = u + vi$, definirana je ako su nam poznate dvije funkcije dviju realnih varijabli

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Funkcija kompleksne varijable preslikava ravninu z u ravninu w*: svaka tačka z_1 prelazi u pripadnu tačku w_1, a geometrijski oblici (krivulje, područja) pri prelazu ravnine z u ravninu w pretvaraju se u drugi oblik. Krivulja $x = x(t)$, $y = y(t)$ prelazi u krivulju $u = u[x(t), \ y(t)]$, $v = v[x(t), \ y(t)]$ (t je parametar).

Koordinatne krivulje $y = c$ prelaze u $u = u(x, c)$, $v = v(x, c)$, gdje je x parametar; koordinatne krivulje $x = c_1$ prelaze u $u = u(c_1, y)$, $v = v(c_1, y)$, gdje je y parametar.



Sl. 375

Primjer preslikavanja: $u = 2x + y$, $v = x + 2y$ (sl. 375). Krivulja $y = c$ prelazi u $u = 2x + c$, $v = x + 2c$, tj. u pravac $v = \frac{u}{2} + \frac{3}{2}c$; analogno krivulje $x = c_1$ prelaze u pravce $v = 2u - 3c_1$; iscrtkano područje prelazi u iscrtkano područje.

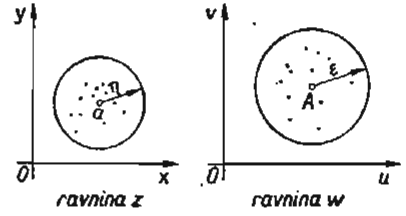
Limes, neprekinutost, derivacija. Pojmove limesa, neprekinutosti i derivacije definiramo za funkcije kompleksne varijable $w = f(z)$ formalno jednako kao i za funkcije realne varijable (vidi na str. 314, 320 i 347).

Kompleksni broj A nazivamo *limesom* funkcije $f(z)$ kada z teži k a

$$A = \lim_{z \to a} f(z), \qquad (*)$$

* Ako je funkcija $w = f(z)$ višeznačna (npr. $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arc\,sin} z$, $\operatorname{Ar\,th} z$ itd.), onda je područje vrijednosti w skup nekoliko ravnina postavljenih jedna na drugu; svaka vrijednost funkcije predočuje se tačkom koja leži na jednoj od ravnina. Te ravnine su međusobno povezane duž neke krivulje i tvore tzv. *višelisnu* ili *Riemannovu plohu*.

ako za po volji odabrani mali pozitivni realni broj ε možemo naći takav realni pozitivni broj η da je za svaki kompleksni broj z (izuzevši možda sam broj a) koji zadovoljava uvjet $|a - z| < \eta$, ispunjen i uvjet $|A - f(z)| < \varepsilon$. Geometrijsko značenje (sl. 376): Svakoj tački z (izuzevši možda tačku a) koja leži unutar kruga polumjera η sa središtem a odgovara u preslikavanju tačka w određena funkcijom $w = f(z)$ koja leži unutar polumjera ε sa središtem A.



Sl. 376

Ako funkcija $w = f(z)$ ima limes kada $z \to a$, a pri tome je

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a) \qquad (**)$$

(tj. limes funkcije jednak je vrijednosti funkcije limesa nezavisne varijable), onda funkciju w nazivamo *neprekinutom* u tački a. Ekvivalentna definicija neprekinutosti je: funkcija $w = f(z)$ neprekinuta je u tački z, ako iz uvjeta $|\Delta z| \to 0$ izlazi uvjet

$$|\Delta w| = |f(z + \Delta z) - f(z)| \to 0 \text{ ili } \lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$$

(infinitezimalnom prirastu argumenta odgovara infinitezimalan prirast funkcije).

Derivacijom $w' = f'(z)$ zadane funkcije $w = f(z)$ nazivamo funkciju koja je za zadanu vrijednost z definirana jednadžbom

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \qquad (***)$$

Funkciju koja u zadanoj tački ima limes $(***)$ nazivamo *derivabilnom*, a također i *monogenom* ili *holomorfnom* u toj tački. Geometrijski smisao modula i argumenta derivacije funkcije kompleksne varijable vidi na str. 592.

Analitičke funkcije. Ako je funkcija $w = f(z)$ derivabilna u svim tačkama nekog kruga sa središtem z_0 (ma kako malog polumjera) nazivamo je *analitičkom u tački* z_0; funkciju nazivamo *analitičkom u suvislom području* (vidi na str. 328) ako je ona analitička u svim tačkama tog područja. Nuždan i dovoljan* uvjet da funkcija $u + vi = f(x + yi)$ bude analitička je

* Za dovoljnost treba još da su parcijalne derivacije u Cauchy-Riemannovom uvjetu neprekinute u promatranom području.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\textit{Cauchy-Riemannov uvjet}).$$

Npr. funkcija $w = z^2$ ($u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$) posvuda je analitička; funkcija $w = u + vi$ definirana jednadžbama $u = 2x + y$, $v = x + 2y$, nije nigdje analitička. U slučaju analitičke funkcije $w = u + vi$ funkcije u i v su *harmonijske funkcije* realnih varijabli x i y, tj. zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu (vidi na str. 637). Ako poznamo harmonijsku funkciju u možemo s tačnošću do aditivne konstante odrediti njenu *konjugiranu* harmonijsku funkciju v iz Cauchy-Riemannova uvjeta

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \varphi(x), \text{ gdje je } \frac{d\varphi}{dx} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial u}{\partial x} dy\right).$$

Analogno možemo iz v odrediti u.

Tačke u kojima je funkcija analitička nazivamo *regularnim* tačkama. Ako je funkcija analitička u nekom području, izuzevši u nekim tačkama toga područja, onda te tačke nazivamo *singularnim*. Primjere i klasifikaciju singularnih tačaka vidi na str. 592. Elementarne funkcije (algebarske i transcendentne vidi na str. 310) su analitičke na čitavoj ravnini, s izuzetkom nekih izoliranih singularnih tačaka.

Analitičke funkcije imaju u svim regularnim tačkama derivacije bilo kojega reda. Derivacije elementarnih funkcija kompleksne varijable računamo po istim pravilima kao i derivacije istih funkcija realnih varijabli.

Modul analitičke funkcije. U različitim pitanjima teorije i upotrebe funkcija kompleksne varijable od bitne je važnosti apsolutna veličina (modul) funkcije

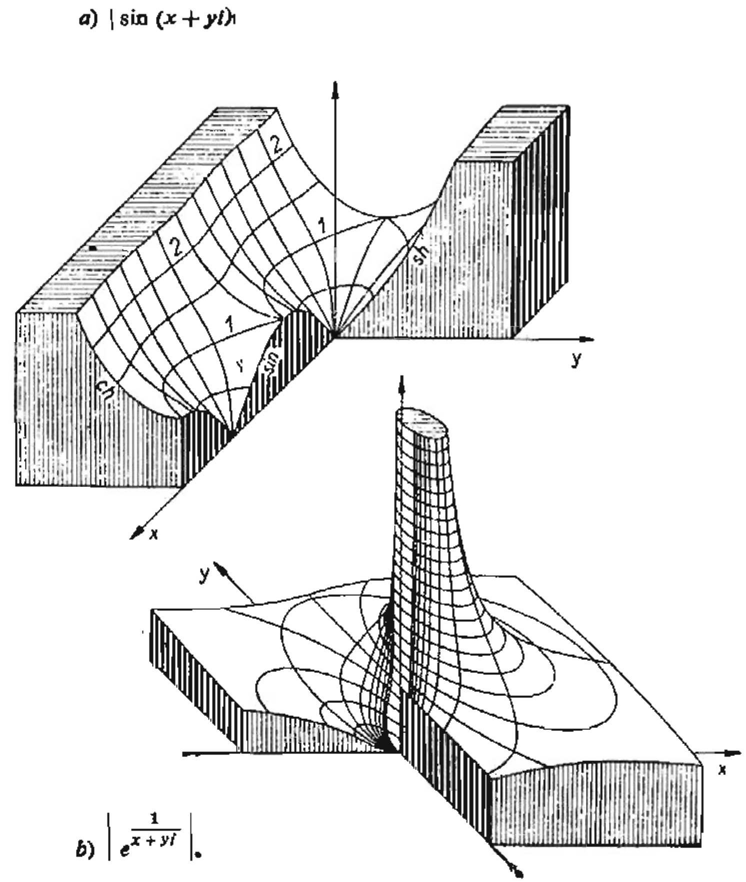
$$|w| = |f(z)| = \sqrt{[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2} = \varphi(x, y).$$

Ploha $|w| = \varphi(x, y)$, gdje je $|w|$ aplikata u tački $z = x + yi$, naziva se *reljefom* funkcije. Npr. za funkciju $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$ je

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$$

Na sl. 377*a* prikazan je reljef te funkcije; na sl. 377*b* prikazan je reljef funkcije

$$w = e^{1/z}.$$



Sl. 377

Kako je modul funkcije pozitivna veličina, reljef funkcije je uvijek iznad ravnine z, osim za tačke $|f(z)| = 0$, tj. $f(z) = 0$. Takve vrijednosti z (korijeni jednadžbe $f(z) = 0$) nazivamo nultačkama funkcije $f(z)$.

Funkciju nazivamo *ograđenom* u danom području ako egzistira takav pozitivni broj N da je $|f(z)| < N$ za svaku tačku z u tom području, a *neograđenom* ako takav broj N ne postoji.

Osnovni teoremi o modulu analitičkih funkcija:

1) Ako je $w = f(z)$ analitička funkcija u zatvorenom području, onda njen modul postiže maksimum na rubu tog područja.

2) Ako je $w = f(z)$ analitička u čitavoj ravnini i ograđena, onda je ta funkcija konstanta: $f(z) = \text{const}$ (*Liouvilleov teorem*).

Singularne tačke. Ako je $w = f(z)$ analitička u okolini tačke $z = a$* i ograđena u toj okolini, moguća su ova dva slučaja:

1) $f(a) = \lim\limits_{z \to a} f(z)$. U tom slučaju je funkcija $f(z)$ analitička u samoj tački a.

2) $f(a)$ ima drugu vrijednost ili funkcija nije definirana u tački a. Takva tačka a je singularna i naziva se *uklonjivom singularnom tačkom* zato, što zamjenom vrijednosti $f(a)$ brojem $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ možemo funkciju načiniti analitičkom i u toj tački a**.

Ako je funkcija $w = f(z)$ analitička u okolini tačke $z = a$, a nije ograđena u toj okolini, onda je tačka a singularna tačka. Pri tome su moguća ova dva slučaja:

1) $|f(z)| \to \infty$ ako se z približava tački a po bilo kojem putu. Takvu tačku a nazivamo *polom*. U tome slučaju pišemo $f(a) = \infty$. O redu pola vidi na str. 600.

2) Kada se z približava tački a, $|f(z)|$ ne teži k ni jednom broju: niz $f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_n), \ldots$ ima različite limese, ovisno o izboru tačaka z_n koje se približavaju tački a. Takvu tačku a nazivamo *bitno singularnom tačkom****.

Primjer: Za funkciju $w = \dfrac{1}{z - a}$ tačka a je pol; za funkciju $w = e^{1/z}$ tačka 0 je bitno singularna (vidi sl. 377, *b*).

Konformna preslikavanja. Preslikavanje ravnine po analitičkoj funkciji u okolini tačke z, za koju je $w' \neq 0$, ima ova važna svojstva: Neizmjerno mali vektori svih smjerova, koji izlaze iz te tačke: 1) povećavaju (ili umanjuju) svoju duljinu jedan te isti broj puta, naime $|w'|$ puta (s tačnošću do infinitezimalnih veličina višeg reda) i 2) vrte sa za jedan te isti kut jednak arg w'. Na taj se način likovi u neizmjerno malom području preslikavaju u sebi slične likove i zadržavaju oblik (sl. 378). Takvo preslikavanje nazivamo *konformnim preslikavanjem*. Likovi konačne veličine se izobličuju, ali se kutovi između dviju krivulja ne mijenjaju (*čuvanje kutova*, sl. 379). Napose, koordinatne krivulje $x = \text{const}$ i $y = \text{const}$ u konformnom preslikavanju pretvaraju se u dvije porodice međusobno okomitih krivulja.

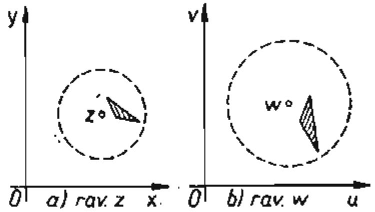
Tako pomoću analitičkih funkcija možemo dobiti mnoštvo pravokutnih sistema krivocrtnih koordinata.

* Tj. unutar po volji malenog kruga sa središtem u tački a, izuzevši možda same te tačke.

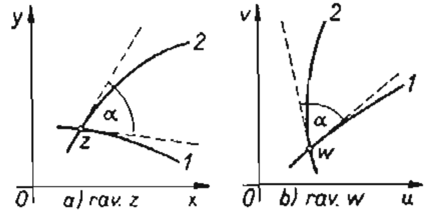
** Taj slučaj analogan je uklonljivoj prekinutosti funkcije realne varijable (vidi na str. 323).

*** U tome slučaju možemo odabrati takav način približavanja z k tački a, da se $f(z)$ približava po volji odabranom kompleksnom broju.

Obrnuto, za po volji odabrano konformno preslikavanje postoji neka ortogonalna mreža krivulja koja se preslikava u ortogonalnu kartezijsku mrežu. U primjeru $u = 2x + y$, $v = x + 2y$

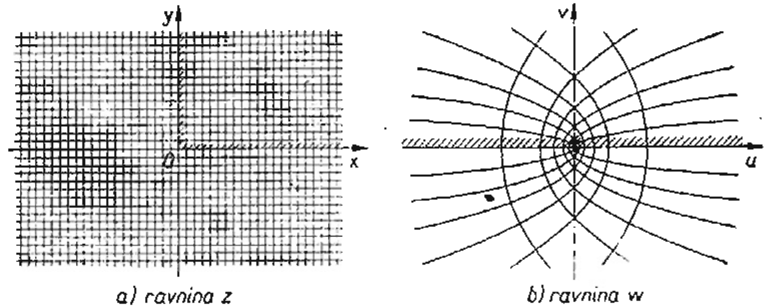


Sl. 378



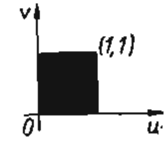
Sl. 379

(str. 590) ortogonalnost je narušena; u primjeru $w = z^2$ je sačuvana; koordinatne krivulje prelaze u dvije porodice konfokalnih parabola (sl. 380). U tački $z = 0$ imamo $w' = 0$, konformnost je narušena. Prvi koordinatni kvadrant prelazi u gornju poluravninu.



Sl. 380

Konformna preslikavanja primjenjujemo u elektrotehnici, hidrodinamici, aerodinamici i drugim oblastima primjene. Dalje (str. 594 i 595) je naveden pregled najčešće upotrebljavanih konformnih preslikavanja, zajedno sa crtežom one pravokutne mreže krivulja (*izotermna mreža*) koja se preslikava u kartezijsku pravokutnu mrežu. Crtkano su označeni rubovi područja koje se preslikava u gornju poluravninu. Područje koje se preslikava u kvadrat s vrhovima (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) crno je ispunjeno (sl. 381).



Sl. 381

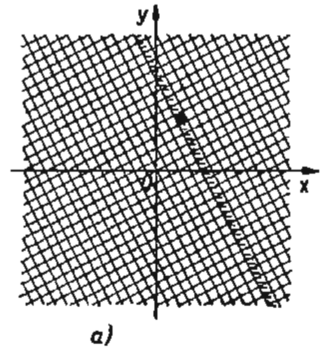
6. JEDNOSTAVNIJA KONFORMNA PRESLIKAVANJA

Funkcije i njihova svojstva	Ortogonalna mreža koja se preslikava u ortogonalnu kartezijsku mrežu

a) *Linearna funkcija:*

$$w = az + b \quad (a = \rho e^{\varphi i}).$$

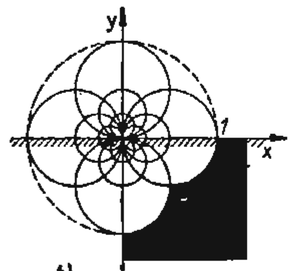
Transformaciju možemo rastaviti na troje: $t = e^{\varphi i} z$ je vrtnja ravnine za kut φ, $s = \rho t$ je rastezanje na ρ-struko uz održanje sličnosti, $w = s + b$ je pomak paralelan vektoru b. Kao rezultat likovi se ravnine z preslikavaju u sebi slične likove, a uz to se zakrenu i pomaknu. Tačke $z_1 = \frac{b}{1-a}$ i $z_2 = \infty$ prelaze samo u sebe.



a)

b) *Inverzija:* $w = \frac{1}{z}$.

Tačka z s radijvektorom ρ i polarnim kutom φ preslikava se u tačku s radijvektorom $1/\rho$ i kutom $(-\varphi)$. Transformacija se sastoji od inverzije na jediničnoj kružnici* i zrcaljenja na osi Ox. Kružnice prelaze u kružnice (pri čemu se pravac smatra posebnim slučajem kružnice sa polumjerom ∞). Tačka 0 prelazi u ∞, a tačke 1 i -1 ostaju na mjestu. Konformnost je narušena za $z=0$.



b)

c) *Razlomljena linearna funkcija:*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Transformaciju možemo rastaviti na troje:

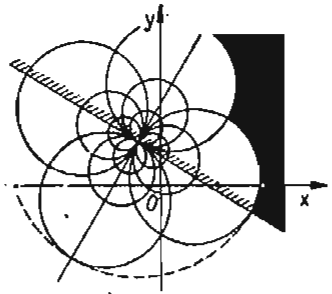
$t = cz + d$ (linearna funkcija),

$s = \frac{1}{t}$ (inverzija),

$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} s$ (linearna funkcija).

Razlomljena linearna funkcija preslikava kružnicu u kružnicu (pri čemu se pravac smatra kao specijalan slučaj kružnice); dvije tačke koje zadovoljavaju jednadžbu

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$ ostaju na mjestu.



c)

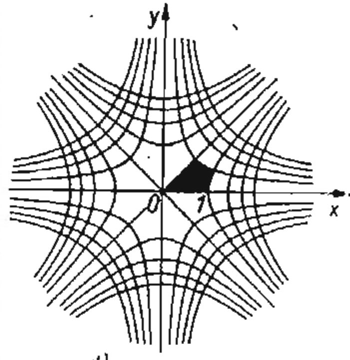
Slika 382

* *Inverzijom* s obzirom na zadanu kružnicu polumjera R nazivamo transformaciju tačaka ravnine, pri kojoj tačka M_1 udaljena d_1 od središta kruga prelazi u tačku M_2 na istoj poluzraci OM_1 (ili njezinom produženju) na udaljenosti $OM_2 =$

Funkcije i njihova svojstva	Ortogonalna mreža koja se preslikava u ortogonalnu kartezijsku mrežu

d) *Kvadratna funkcija:* $w = z^2$.

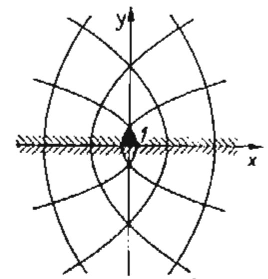
Čitava ravnina z prelazi u dvostruku ravninu w. Izotermnu mrežu ravnine z sačinjavaju dvije porodice hiperbola $u = x^2 - y^2$ i $v = 2xy$. Konformnost je narušena za $z = 0$. Fiksne tačke su 0 i 1.



d)

e) *Kvadratni korijen:* $w = \sqrt{z}$.

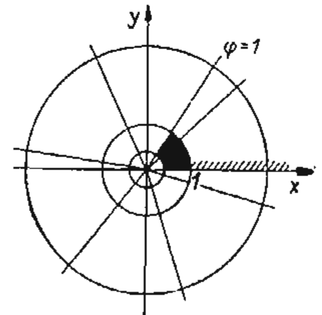
Funkcija je dvoznačna; čitava ravnina preslikava se: 1) u gornju poluravninu, 2) u donju poluravninu. Izotermnu mrežu ravnine z sačinjavaju dvije porodice konfokalnih parabola sa žarištem u ishodištu i osima usmjerenim u pozitivnom i negativnom smjeru osi Ox. Konformnost je narušena za $z = 0$. Fiksne tačke su 0 i $+1$.



e)

f) *Logaritam:* $w = \operatorname{Ln} z$,

$u = \ln \rho$, $v = \varphi + 2k\pi$; izotermnu mrežu tvore kružnice $\ln \rho = \text{const}$ i poluzrake $\varphi = \text{const}$, tj. mreža je polarna. Funkcija ima neizmjerno mnogo vrijednosti; za glavnu vrijednost logaritma čitava ravnina prelazi u prugu omeđenu pravcima $v = -\pi$ i $v = +\pi$ (uključivo posljednji).



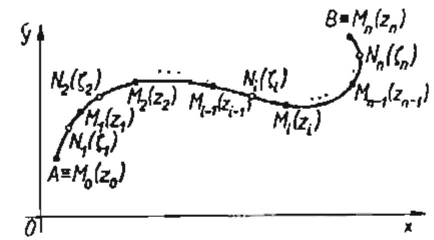
f)

Slika 382

$= d_2 = \frac{R^2}{d_1}$ pri tome tačka M_2 prelazi u tačku M_1. Tačke izvan kružnice prelaze u tačke unutar kružnice i obrnuto.

7. INTEGRALI U KOMPLEKSNOM PODRUČJU

Definicija. Integralom funkcije kompleksne varijable $w = f(z)$ po luku $\widehat{AB}$ krivulje na ravnini z (»put integracije«) nazivamo kompleksni broj koji dobivamo na ovaj način (sl. 383):



Sl. 383

1) luk $\widehat{AB}$ dijelimo na n odsječaka sa po volji odabranim djelištima

$$M_1(z_1),\ M_2(z_2),\ \ldots,\ M_{n-1}(z_{n-1})^*$$

[stavljamo $A \equiv M_0(z_0)$, $B \equiv M_n(z_n)$];

2) unutar (ili na rubu) svakog odsječka $\widehat{M_{i-1}M_i}$ po volji odaberemo tačku $N_i(\zeta_i)$;

3) u tačkama ζ_i izračunamo vrijednosti funkcije $f(z)$ i pomnožimo ih s pripadnom razlikom $z_i - z_{i-1}$ (prirastom argumenta);

4) n dobivenih produkata $f(\zeta_i)\cdot(z_i - z_{i-1})$ zbrojimo;

5) potražimo limes sume $\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\cdot(z_i - z_{i-1})$, kada svaki prirast argumenta teži k nuli. Ako taj limes egzistira i ne ovisi ni o izboru tačaka M_i ni o izboru tačaka N_i, nazivamo ga integralom funkcije $f(z)$ po luku $\widehat{AB}$ i označujemo ga

$$\int_{\widehat{AB}} f(z)\,\mathrm{d}z. \qquad (*)$$

Svojstva. Integral $(*)$ ima ista svojstva kao i krivuljni integral drugog tipa (vidi na str. 484): promjenom smjera puta integracije integral mijenja predznak; ako se put integracije rastavi na nekoliko dijelova, vrijednost integrala jednaka je sumi integrala po pojedinim dijelovima.

* Kompleksni broj u zagradama iza oznake tačke jednak je vrijednosti kompleksne varijable koju prikazuje ta tačka.

Procjena integrala. Ako je duljina puta $\widehat{AB}$ jednaka s i za z na tom putu apsolutna veličina $f(z)$ nije veća od pozitivnog broja M [$|f(z)| \leq M$], onda je

$$\left|\int_{\widehat{AB}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq Ms.$$

Izračunavanje integrala. Ako je podintegralna funkcija $f(z)$ u obliku $u(x, y) + iv(x, y)$ i put integracije $\widehat{AB}$ određen parametarski sa $x = x(t)$, $y = y(t)$, a vrijednost t za početak A i kraj B puta integracije je t_A i t_B, onda je integral $(*)$ izražen krivuljnim integralom funkcija realnih varijabli

$$\int_{\widehat{AB}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\widehat{AB}} u(x, y)\,\mathrm{d}x - v(x, y)\,\mathrm{d}y + i\int_{\widehat{AB}} v(x, y)\,\mathrm{d}x + u(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

koje računamo po pravilima navedenim na str. 483 i 484.

Nezavisnost integrala od puta. Da integral $(*)$ funkcije kompleksne varijable, definirane u nekom jednostruko suvislom* području, ne bi ovisio o putu koji spaja dvije fiksirane tačke $A(z_A)$ i $B(z_B)$, nužno je i dovoljno da je funkcija analitička u tome području, tj. da je za nju ispunjen Cauchy-Riemannov uvjet (vidi na str. 590). Ako uz te ispunjene uvjete fiksiramo početnu tačku $A_0(z_0)$, a krajnju tačku puta integracije $M(z)$ načinimo promjenljivom, onda je

$$\int_{\widehat{A_0M}} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z),$$

pri čemu je $F'(z) = f(z)$; funkciju $F(z)$ nazivamo *primitivnom funkcijom* analitičke funkcije $f(z)$. Primitivna funkcija ovisi o izboru početne tačke A_0; opći oblik svih primitivnih funkcija od $f(z)$ je

$$F(z) + C = \int f(z)\,\mathrm{d}z \quad (\textit{neodređeni integral}).$$

Neodređeni integrali elementarnih funkcija kompleksne varijable računaju se po istim formulama kao i integrali istih funkcija realnih varijabli.

Osnovna formula integralnog računa. Integral $(*)$ analitičke funkcije $f(z)$ jednak je prirastu primitivne funkcije pri prelazu od početne tačke puta do konačne:

$$\int_{\widehat{AB}} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_B) - F(z_A).$$

* O jednostruko suvislom području vidi na str. 328. U slučaju višestruko suvislog područja uvjet može biti i neispunjen.

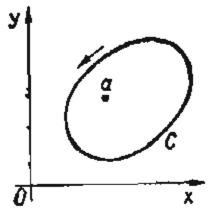
Integral po zatvorenoj krivulji C funkcije $f(z)$ koja je analitička za čitavo jednostruko suvislo područje ograničeno tim putom jednak je nuli (Cauchyjev teorem): ako to područje ima singularnih tačaka, integral računamo po teoremu residuâ (vidi na str. 601). Napose za funkciju $f(z) = \frac{1}{z-a}$, koja ima jedinu singularnu tačku $z = a$, integral po zatvorenoj krivulji koja okružuje tu tačku u smislu suprotnom gibanju kazaljke na satu (sl. 384) jest

$$\int_{\overset{\frown}{C}} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

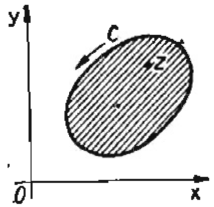
Cauchyjeve formule. Ako je funkcija $f(z)$ analitička u nekom jednostruko suvislom području, onda su, njena vrijednost u bilo kojoj tački z tog područja, a također i vrijednosti njenih derivacija ma kojega reda, izražene vrijednostima te funkcije po zatvorenoj krivulji C, koja okružuje tu tačku (sl. 385), ovim *Cauchyjevim formulama*

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\overset{\frown}{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\overset{\frown}{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta, \\ f''(z) = \dfrac{2}{2\pi i}\displaystyle\int_{\overset{\frown}{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\,d\zeta, \ldots, f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{\overset{\frown}{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta, \end{array}\right\} \quad (*)$$

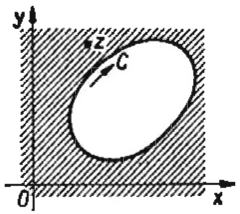
gdje je ζ varijabla integracije, a integracija se vrši po putu C u smislu suprotnom gibanju kazaljke na satu.



Sl. 384



Sl. 385



Sl. 386

Ako je funkcija $f(z)$ analitička u čitavom dijelu ravnine koja se nalazi izvan zatvorene krivulje C, onda su vrijednost $f(z)$ i vrijednosti njenih derivacija u po volji odabranoj tački z tog područja (sl. 386) izražene tim istim formulama $(*)$, ali se integracija vrši u smislu gibanja kazaljke na satu $\overset{\frown}{C}$.

Cauchyjevim formulama možemo izračunati i vrijednosti nekih određenih integrala.

Primjer: Uzmimo da je $f(z) = e^z$ (funkcija analitička na čitavoj ravnini), a put integracije C je kružnica sa središtem u z i polumjerom r (njegova jednadžba je $\zeta = z + re^{i\varphi}$, vidi na str. 586); po posljednjoj od formula $(*)$ tada dobivamo

$$e^z = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\overset{\frown}{C}} \frac{e^\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{e^{z + re^{i\varphi}}}{r^{n+1}\,e^{i\varphi(n+1)}}\,ire^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} e^{z + r\cos\varphi + ir\sin\varphi - in\varphi}d\varphi,$$

odakle je

$$\frac{2\pi r^n}{n!} = \int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi + i(r\sin\varphi - n\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}[\cos(r\sin\varphi - n\varphi)]\,d\varphi + i\int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}[\sin(r\sin\varphi - n\varphi)]\,d\varphi.$$

Kako je imaginarni dio jednak nuli, dobivamo vrijednost integrala

$$\int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi = \frac{2\pi r^n}{n!}.$$

8. RAZVOJ ANALITIČKIH FUNKCIJA U REDOVE POTENCIJA

Taylorov red. Svaka funkcija $f(z)$, analitička unutar nekog kruga sa središtem a, može se u svim tačkama unutar tog kruga na jednoznačan način izraziti u obliku reda potencija

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n;$$

gdje je koeficijent razvoja c_n kompleksni broj određen formulom

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Tako je

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots \qquad (\textit{Taylorov red}).$$

Razvoj funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ u redove potencija vidi na str. 582 i 583.

Laurentov red. Svaka funkcija $f(x)$, analitička unutar nekog vijenca između dvije koncentrične kružnice sa središtem a*, može se na jednoznačan način izraziti u obliku reda potencija

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \begin{cases} c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \\ \qquad \dots + c_n(z-a)^n + \dots \\ \dots + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_{-2}(z-a)^{-2} + \dots \\ \qquad \dots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \dots \qquad (*) \end{cases}$$

(*Laurentov red*), gdje su koeficijenti razvoja c_n kompleksni brojevi određeni formulama

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{\frown}{C}} (\zeta - a)^{-n-1} f(\zeta)\,d\zeta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

($\overset{\frown}{C}$ je neka zatvorena krivulja unutar vijenca, koja okružuje tačku a u smislu suprotnom gibanju kazaljke na satu).

Singularne tačke. Ako je funkcija $f(z)$ analitička u okolini tačke a**, onda karakter tačke a određujemo po obliku razvoja funkcije u Laurentov red $(*)$ u okolini te tačke na ovaj način:

1) Ako red $(*)$ ne sadrži članove s negativnim potencijama $z - a$ ($c_n = 0$ za $n < 0$), onda Laurentov red prelazi u Taylorov red***; funkcija $f(z)$ je analitička i u samoj tački, ako je $f(a) = c_0$ ili je a uklonjiva singularna tačka.

2) Ako red $(*)$ ima konačan broj članova s negativnim potencijama od $z - a$ ($c_m \neq 0$ i svi $c_n = 0$ za $n < m < 0$), onda je tačka a pol (vidi str. 592) funkcije $f(z)$ (*pol* m-*tog reda*).

---

* Polumjer unutarnjeg kruga može biti jednak nuli i tada vijenac prelazi u krug iz koga je izuzeta jedna tačka — njegovo središte.

** Vidi opasku na str. 592.

*** Njeni koeficijenti u tome slučaju, na osnovu Cauchyjevih formula (str. 598), jesu

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{\frown}{C}} (\zeta - a)^{-n-1} f(\zeta)\,d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

3) Ako red $(*)$ ima neizmjerno mnogo članova s negativnim potencijama od $z - a$, onda je tačka a *bitno singularna tačka* (vidi na str. 592).

U slučaju 2) i 3) koeficijent c_{-1} za $(z-a)^{-1}$ u Laurentovom redu nazivamo ***residuumom*** funkcije $f(z)$ u tački $z = a$.

$$\text{Residuum } f(z)_{z=a} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{\frown}{C}} f(\zeta)\,d\zeta. \qquad (**)$$

Teorem residuâ. Iz definicije $(**)$ izlazi ovaj teorem, pomoću koga možemo izračunati integral po zatvorenoj krivulji koja okružuje singularnu tačku (str. 598): integral

$$\int_{\overset{\frown}{C}} f(z)\,dz$$

funkcije $f(z)$, koja je analitička u čitavom jednostrukom suvislom području unutar zatvorene krivulje uzete u smislu suprotnom gibanju kazaljke na satu, izuzevši u konačnom broju tačaka a_1, a_2, …, a_k (sl. 387), jednak je produktu $2\pi i$ sa sumom residuâ u svim tim singularnim tačkama

$$\int_{\overset{\frown}{C}} f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res} f(z)_{z=a_1} + \operatorname{Res} f(z)_{z=a_2} + \dots + \operatorname{Res} f(z)_{z=a_k}\right].$$

Residuum za pol m-tog reda možemo izračunati po formuli

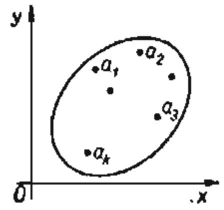
$$\operatorname{Res} f(z)_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[f(z)\cdot(z-a)^m] \right|_{z=a}. \qquad (1)$$

Ako je $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, gdje su $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ funkcije analitičke u tački $z = a$, a a je jednostruki korijen (vidi str. 158) jednadžbe $\psi(z) = 0$ [tj. $\psi(a) = 0$, $\psi'(a)' \neq 0$], onda je tačka $z = a$ pol (prvog reda) funkcije $f(z)$, i formula (1) daje

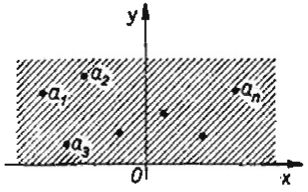
$$\operatorname{Res}\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right]_{z=a} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \qquad (2)$$

Ako je a m-struki korijen jednadžbe $\psi(z = 0)$ [tj. $\psi(a) = \psi'(a) = \dots = \psi^{(m-1)}(a) = 0$, $\psi^{(m)}(a) \neq 0$], onda je tačka $z = a$ pol m-tog reda funkcije $f(z)$.

Primjena pri računanju određenih integrala. Pomoću teorema residuâ možemo naći neke određene integrale funkcija realnih varijabli. Ako je $f(z)$ funkcija analitička u čitavoj gornjoj poluravnini uključivši i realnu os, s izuzetkom konačnog broja singularnih tačaka $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$, koje leže iznad realne osi (sl. 388),



Sl. 387



Sl. 388

a »nula« je višestruki korijen jednadžbe $f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$, višestrukosti $m \geqslant 2$*, onda je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res} f(z)_{z=a_i}. \qquad (*)$$

Primjer: Izračunaj integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

Jednadžba $f\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3} = \dfrac{x^6}{(x^2+1)^3} = 0$ ima šesterostruki korijen $x = 0$. U gornjoj poluravnini funkcija $w = \dfrac{1}{(1+z^2)^3}$ ima jedinu singularnu tačku $z = i$, koja je pol trećeg reda**.

Po formuli (1) dobivamo

$$\operatorname{Res} \frac{1}{(1+z^2)^3}_{z=i} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-i)^3}{(1+z^2)^3}\right]_{z=i}.$$

Izračunamo li $\dfrac{d^2}{dz^2}\left(\dfrac{z-i}{1+z^2}\right)^3 = \dfrac{d^2}{dz^2}(z+i)^{-3} = 12(z+i)^{-5}$,

dobivamo

$$\operatorname{Res} \frac{1}{(1+z^2)^3_{z=i}} = 6(z+i)^{-5}_{z=i} = \frac{6}{(2i)^5} = -\frac{3}{16}i.$$

U skladu s formulom (*) izlazi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right) = \frac{3}{8}\pi.$$

---

* Vidi na str. 158.

** Jednadžba $(1+z^2)^3 = 0$ ima dva trostruka korijena: i i $-i$.

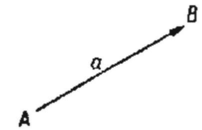
II. VEKTORSKI RAČUN

A. VEKTORSKA ALGEBRA I VEKTORSKE FUNKCIJE SKALARA

1. OSNOVNI POJMOVI

Skalarne i vektorske veličine. Veličine kojih vrijednosti možemo izraziti pozitivnim ili negativnim brojevima (»skalarima«) nazivamo *skalarnim* (masa, temperatura, rad itd.); veličine pak kojih se vrijednosti određuju kako dimenzijama, tako i smjerom u prostoru, nazivamo *vektorskim* (sila, brzina, ubrzanje, napetost električkog i magnetskog polja itd.) i možemo ih predočiti vektorima.

Vektor je odsječak (sl. 389) koji ima određenu duljinu i smjer (oznake su $\vec{AB}$, **a**, **b**, **c**, ..., ponekad $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ili $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ...). *A* je *početak*, *B* je *kraj* ili šiljak vektora; duljina vektora **a** (*modul* ili apsolutna vrijednost) označuje se sa *a* ili $|\mathbf{a}|$. *Nulvektor* (0) je vektor kojemu se početak i završetak podudaraju; njegov je modul jednak 0, a smjer neodređen. Dva vektora, **a** i **b**, smatramo *jednakim* ako su im moduli jednaki i ako se podudaraju u smjeru (tj. vektori koji su paralelni i orijentirani u istu stranu*).



Sl. 389

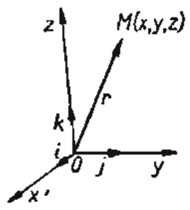
Kolinearni vektori su paralelni s jednim te istim pravcem, *komplanarni* su paralelni s jednom te istom ravninom. Međusobno *suprotni* vektori jednaki su po duljini i suprotnog smjera: $\vec{AB} = \mathbf{a}$ i $\vec{BA} = -\mathbf{a}$. *Jedinični vektori* su oni kojima je modul jednak 1; jedinični vektor, kojemu se smjer podudara sa smjerom vektora **a**,

---

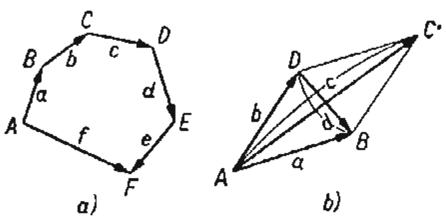
* Prema ovoj definiciji vektor se ne mijenja ako ga prenesemo paralelno samom sebi, tako da početak padne u po volji odabranu tačku prostora. Ovakvi vektori tvore sistem *slobodnih* vektora. U nekim pitanjima mehanike razmatraju se vektori kojih je početak pričvršćen u određenoj tački prostora (sistem *vezanih* vektora) ili se može prenijeti samo u one tačke koje leže na pravcu duž smjera vektora (sistem *kliznih* vektora).

označuje se sa $\mathbf{a}^\circ$ i naziva *ortom* tog smjera. Vektor $\mathbf{a}$ možemo izraziti u obliku: $\mathbf{a} = a \cdot \mathbf{a}^\circ$, gdje je a modul vektora $\mathbf{a}$. Jedinični vektori koji imaju smjer pravokutnih koordinatnih osi Ox, Oy, Oz (u smjeru porasta koordinata)* označuju se sa $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (sl. 390).

Radijvektor tačke. Vektor OM kojeg se početak podudara sa ishodištem, a kraj se nalazi u tački M (vidi sl. 390) potpuno određuje tu tačku i naziva se *radijvektorom* tačke M (označuje se sa $\mathbf{r}$). Ishodište O u tom se slučaju naziva *polom*.



Sl. 390



Sl. 391

Linearne kombinacije vektora. *Zbroj* nekoliko vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}, \ldots, \mathbf{e}$ je vektor $\mathbf{f} = \overrightarrow{AF}$, koji zatvara poligonalni potez $ABCDEF$, sastavljen od sumanda vektora (sl. 391, *a*); zbroj dvaju vektora $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ i $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ (sl. 391, *b*) je vektor $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$, tj. dijagonala paralelograma $ABCD$. Osnovna su svojstva zbroja

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Razlikom $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ nazivamo zbroj vektora $\mathbf{a}$ i $-\mathbf{b}$ (dijagonala DB na slici 391, *b*); $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{d}$; svojstva razlike: $\mathbf{a} - \mathbf{a} = 0$ (nulvektor), $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$.

Produkt skalara i vektora ($\alpha\mathbf{a}$ ili $\mathbf{a}\alpha$) nazivamo vektor kolinearan s vektorom $\mathbf{a}$; njegova je duljina jednaka $|\alpha|\, a$, a smjer se podudara sa smjerom $\mathbf{a}$ za $\alpha > 0$ i suprotan je za $\alpha < 0$; svojstva tog su produkta

$$\alpha\mathbf{a} = \mathbf{a}\alpha, \qquad \alpha\beta\mathbf{a} = \beta\alpha\mathbf{a}, \qquad (\alpha + \beta)\,\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a},$$
$$\alpha\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}.$$

Linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{d}$ s koeficijentima $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ (skalarnim) je vektor

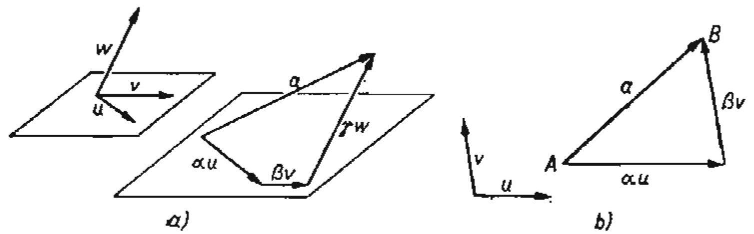
$$\mathbf{k} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \ldots + \delta\mathbf{d}. \qquad (*)$$

* U ovoj glavi je primijenjen desni sistem koordinata (vidi str. 246).

Po volji odabrani vektor $\mathbf{a}$ možemo jednoznačno rastaviti na zbroj triju vektora, koji su paralelni trima zadanim (nekomplanarnim) vektorima $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ (sl. 392, *a*)

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}; \qquad (**)$$

sumande $\alpha\mathbf{u}$, $\beta\mathbf{v}$, $\gamma\mathbf{w}$ nazivamo *komponentama*, a skalarne faktore α, β, γ *koeficijentima* tog rastava. Vektore koji su paralelni s jednom ravninom možemo predočiti u obliku $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$, gdje su $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ dva zadana nekolinearna vektora (sl. 392, *b*).



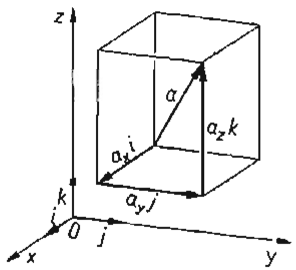
Sl. 392

Koordinate vektora. *Pravokutne Descartesove koordinate.* Suglasno formuli $(**)$ svaki vektor $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ u prostoru može biti jednoznačno rastavljen na zbroj vektora paralelnih jediničnim vektorima $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ (vidi str. 603)

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}; \qquad (1)$$

Skalare a_x, a_y i a_z nazivamo *pravokutnim Descartesovim koordinatama* vektora $\mathbf{a}$ u sistemu $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$; to se bilježi ovako

$$\mathbf{a}\,\{a_x, a_y, a_z\}; \qquad (2)$$



Sl. 393

oznaka (2) je ekvivalentna oznaci (1). Pravokutne Descartesove koordinate vektora su projekcije tog vektora na koordinatne osi Ox, Oy i Oz (sl. 393).

Pri paralelnom pomaku vektora njegove se koordinate ne mijenjaju.

Koordinate linearne kombinacije nekoliko vektora jednake su isto takvim linearnim kombinacijama koordinata tih vektora; iz vektorske jednadžbe (*) izlaze tri skalarne jednadžbe

$$\left.\begin{aligned} k_x &= \alpha a_x + \beta b_x + \ldots + \delta d_x, \\ k_y &= \alpha a_y + \beta b_y + \ldots + \delta d_y, \\ k_z &= \alpha a_z + \beta b_z + \ldots + \delta d_z. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Napose, za koordinate zbroja ili razlike vektora $\mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b}$ dobivamo

$$c_x = a_x \pm b_x, \quad c_y = a_y \pm b_y, \quad c_z = a_z \pm b_z. \qquad (4)$$

Descartesove pravokutne koordinate radijvektora $\mathbf{r}$ tačke $M(x, y, z)$ jednake su koordinatama te tačke

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z; \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Afine koordinate. Kao poopćenje pravokutnih Descartesovih koordinata vektora dobivamo njegove afine koordinate u sistemu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$; a^1, a^2, a^3 su koeficijenti rastava vektora $\mathbf{a}$ u smjeru triju zadanih nekomplanarnih vektora $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \qquad (1')$$

ili u ekvivalentnom pisanju

$$\mathbf{a}\,\{a^1, a^2, a^3\}^*. \qquad (2')$$

Formule (1′) i (2′) prelaze u (1) i (2) za $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ i $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Analogno, za koordinate linearne kombinacije vektora (*) i za zbroj ili razliku vektora (4) vrijede formule

$$\left.\begin{aligned} k^1 &= \alpha a^1 + \beta b^1 + \ldots + \delta d^1, \\ k^2 &= \alpha a^2 + \beta b^2 + \ldots + \delta d^2, \\ k^3 &= \alpha a^3 + \beta b^3 + \ldots + \delta d^3; \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

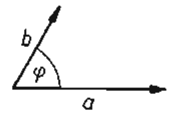
$$c^1 = a^1 \pm b^1, \quad c^2 = a^2 \pm b^2, \quad c^3 = a^3 \pm b^3. \qquad (4')$$

2. MNOŽENJE VEKTORA

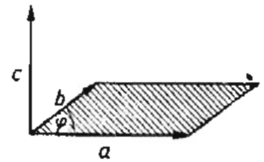
Skalarni produkt vektora. *Skalarnim produktom* vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (označujemo ga sa $\mathbf{ab}$) naziva se skalar određen jednadžbom $\mathbf{ab} = ab\cos\varphi$, gdje je φ kut između vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, pomaknutih tako da imaju zajedničku početnu tačku (sl. 394).

* Gornje indekse ne smijemo pomiješati s eksponentima potencija. Takvo označivanje koeficijenta podesno je zato što su skalari a^1, a^2, a^3 kontravarijantne koordinate vektora $\mathbf{a}$ (vidi str. 612).

Vektorski produkt vektora. *Vektorskim produktom* vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (označuje se sa $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ili $[\mathbf{ab}]$) nazivamo vektor $\mathbf{c}$ kojemu je duljina jednaka $ab \sin\varphi$ (tj. jednaka je površini paralelograma konstruiranog na vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ kao stranicama) i koji ima smjer okomit na $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, i to tako da tri vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ tvore desnu trojku (tj. ako sva tri vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ imaju isti početak, tada najkraća vrtnja od $\mathbf{a}$ do $\mathbf{b}$, uz pretpostavku da promatrač gleda sa šiljka vektora $\mathbf{c}$, ima obrnuti smisao vrtnje kazaljke na satu, vidi sl. 395).



Sl. 394



Sl. 395

Svojstva vektorskih produkata

$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ (zakon komutacije), ali $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (pri zamjeni faktora vektorski produkt mijenja svoj smjer u suprotni);

$\alpha(\mathbf{ab}) = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}$ i $\alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (zakon asocijacije s obzirom na skalarni faktor α);

$\mathbf{a}(\mathbf{bc}) \neq (\mathbf{ab})\mathbf{c}$ i $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ (u ovim slučajevima ne vrijedi zakon asocijacije);

$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$ i $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (zakon distribucije)

$\mathbf{ab} = 0$, ako je $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ (uvjet okomitosti vektora);

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, ako je $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ (uvjet kolinearnosti vektora).

$\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2 = a^2$, ali je $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

Linearne kombinacije vektora možemo množiti kao skalarne polinome, s tom razlikom da za vektorski produkt izmjena faktora (na primjer pri stezanju istovrsnih članova) mijenja predznak.

Primjeri: 1) $(3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 2\mathbf{c})(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 4\mathbf{c}) = 3\mathbf{a}^2 + 5\mathbf{ba} - 2\mathbf{ca} - 6\mathbf{ab} - 10\mathbf{b}^2 + 4\mathbf{cb} - 12\mathbf{ac} - 20\mathbf{bc} + 8\mathbf{c}^2 =$
$= 3\mathbf{a}^2 - 10\mathbf{b}^2 + 8\mathbf{c}^2 - \mathbf{ab} - 14\mathbf{ac} - 16\mathbf{bc}$.

2) $(3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 2\mathbf{c}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 4\mathbf{c}) = 3\mathbf{a} \times \mathbf{a} + 5\mathbf{b} \times \mathbf{a} - 2\mathbf{c} \times \mathbf{a} - 6\mathbf{a} \times \mathbf{b} - 10\mathbf{b} \times \mathbf{b} + 4\mathbf{c} \times \mathbf{b} - 12\mathbf{a} \times \mathbf{c} -$

$$-20\mathbf{b}\times\mathbf{c}+8\mathbf{c}\times\mathbf{c}=0-5\mathbf{a}\times\mathbf{b}+2\mathbf{a}\times\mathbf{c}-6\mathbf{a}\times\mathbf{b}+0-$$
$$-4\mathbf{b}\times\mathbf{c}-12\mathbf{a}\times\mathbf{c}-20\mathbf{b}\times\mathbf{c}+0=-11\mathbf{a}\times\mathbf{b}-10\mathbf{a}\times\mathbf{c}-$$
$$-24\mathbf{b}\times\mathbf{c}=11\,\mathbf{b}\times\mathbf{a}+10\mathbf{c}\times\mathbf{a}+24\mathbf{c}\times\mathbf{b}.$$

Višestruki vektorski produkti. *Dvostruki vektorski produkt* $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ je vektor komplanaran sa **b** i **c**, koji možemo izračunati po formuli

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab}).$$

Mješoviti produkt $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{c}$ je broj koji je jednak volumenu paralelepipeda, konstruiranog na vektorima **a**, **b** i **c**, uzetom s predznakom »+«, ako **a**, **b** i **c** čine desnu trojku i predznakom »—« ako čine lijevu trojku (vidi naprijed). Zagrade i znak množenja kod mješovitog produkta obično izostavljamo: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{c}=\mathbf{abc}$.

$\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}=-\mathbf{acb}=-\mathbf{bac}=-\mathbf{cba}$ (zamjena dvaju faktora mijenja predznak mješovitog produkta: ciklička zamjena svih triju faktora ne mijenja predznak).

Formule za »složene produkte«

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{ac})(\mathbf{bd})-(\mathbf{bc})(\mathbf{ad})\quad\text{(Lagrangeov identitet)}$$

$$\mathbf{abc}\cdot\mathbf{efg}=\begin{vmatrix}\mathbf{ae} & \mathbf{af} & \mathbf{ag}\\ \mathbf{be} & \mathbf{bf} & \mathbf{bg}\\ \mathbf{ce} & \mathbf{cf} & \mathbf{cg}\end{vmatrix}$$

Izražavanje produkata u pravokutnim Descartesovim koordinatama. Ako su vektori **a**, **b** i **c** zadani u pravokutnim Descartesovim koordinatama

$$\mathbf{a}\,\{a_x, a_y, a_z\},\qquad \mathbf{b}\,\{b_x, b_y, b_z\},\qquad \mathbf{c}\,\{c_x, c_y, c_z\},$$

tada produkte vektora izračunavamo po ovim formulama

Skalarni produkt $\mathbf{ab}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$ (1)

Vektorski produkt

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\,\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\,\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\mathbf{k}=$$
$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (2)$$

$$\textit{Mješoviti produkt}\ \ \mathbf{abc}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} \qquad (3)$$

Izražavanje produkata u afinim koordinatama. *Metrički koeficijenti i recipročni vektori.* Ako su poznate afine koordinate dvaju vektora **a** i **b** u sistemu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+a^3\mathbf{e}_3,\qquad \mathbf{b}=b^1\mathbf{e}_1+b^2\mathbf{e}_2+b^3\mathbf{e}_3,$$

tada je za izračunavanje skalarnog produkta

$$\mathbf{ab}=a^1b^1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+a^2b^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+a^3b^3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3+(a^1b^2+a^2b^1)\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+$$
$$+(a^2b^3+a^3b^2)\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3+(a^3b^1+a^1b^3)\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \qquad \text{(A)}$$

ili vektorskog produkta

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a^2b^3-a^3b^2)\,\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3+(a^3b^1-a^1b^3)\,\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1+$$
$$+(a^1b^2-a^2b^1)\,\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 \qquad \text{(B)}$$

$$(\text{jer je } \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3=0)$$

nužno znati iznose produkata parova koordinatnih vektora, tj. za skalarni produkt šest brojeva (*metrički koeficijenti*)

$$g_{11}=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1,\qquad g_{22}=\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2,\qquad g_{33}=\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,$$
$$g_{12}=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1,\qquad g_{23}=\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2,\qquad g_{31}=\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3;$$

a za vektorski produkt tri vektora (*recipročni vektori* s obzirom na $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$)

$$\mathbf{e}^1=\Omega\,(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3),\qquad \mathbf{e}^2=\Omega\,(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1),\qquad \mathbf{e}^3=\Omega\,(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2),$$

gdje koeficijent Ω, koji je jednak recipročnoj vrijednosti miješanog produkta koordinatnih vektora

$$\Omega=\frac{1}{\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3},$$

uvodimo radi pojednostavnjenja daljnjih formula.

»Tablice produkata« koordinatnih vektora

Skalarni produkt

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	g_{11}	g_{12}	g_{13}
$\mathbf{e}_2$	g_{21}	g_{22}	g_{23}
$\mathbf{e}_3$	g_{31}	g_{32}	g_{33}

$(g_{kl}=g_{lk})$

Vektorski produkt

multiplikatori

multiplikandi		$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
	$\mathbf{e}_1$	0	$\mathbf{e}^3/\Omega$	$-\mathbf{e}^2/\Omega$
	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}^3/\Omega$	0	$\mathbf{e}^1/\Omega$
	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}^2/\Omega$	$-\mathbf{e}^1/\Omega$	0

U pravokutnim Descartesovim koordinatama ($\mathbf{e}_1=\mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3=\mathbf{k}$) metrički koeficijenti su ovi:

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$$
$$g_{12}=g_{23}=g_{31}=0$$
$$\Omega=\frac{1}{\mathbf{ijk}}=1;$$

Recipročni vektori $\mathbf{e}^1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}^2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}^3 = \mathbf{k}$ podudaraju se s koordinatnim vektorima, a tablice produkata imaju oblik

Skalarni produkt

	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

Vektorski produkt

multiplikandi \ multiplikatori	i	j	k
i	0	k	—j
j	—k	0	i
k	j	—i	0

Skalarni produkt u koordinatama. U skladu s formulom (A) vrijedi

$$\mathbf{ab} = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} g_{mn} a^m a^n = g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta *. \qquad (1'')$$

Za pravokutne Descartesove koordinate formula (1″) prelazi u (1) na str. 608.

Vektorski produkt u koordinatama. U skladu s formulom (B) vrijedi

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3} \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3} [(a^2b^3 - a^3b^2)\,\mathbf{e}^1 +$$

$$+ (a^3b^1 - a^1b^3)\,\mathbf{e}^2 + (a^1b^2 - a^2b^1)\,\mathbf{e}^3]. \qquad (2'')$$

Za pravokutne Descartesove koordinate formula (2″) prelazi u (2) na str. 608.

Mješoviti produkt u koordinatama je

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \qquad (3'')$$

Za pravokutne Descartesove koordinate formula (3″) prelazi u (3) na str. 608.

---

* Posljednji dio jednadžbe (1″) skraćeno je pisanje zbroja uzeto iz tenzorskog računa: umjesto cijelog zbroja napisan je jedan njegov tipični član, pri čemu se podrazumijeva da indeks koji se u tom članu dva puta susreće (jedanput gore, a drugi put dolje) i koji je označen grčkim slovom (»*indeks zbrajanja*«), prolazi sve vrijednosti od 1 do 3. Na taj je način

$$g_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta = g_{11}a^1b^1 + g_{12}a^1b^2 + g_{13}a^1b^3 + g_{21}a^2b^1 + g_{22}a^2b^2 + g_{23}a^2b^3 +$$
$$+ g_{31}a^3b^1 + g_{32}a^3b^2 + g_{33}a^3b^3.$$

Vektorske jednadžbe

x je nepoznat vektor, **a**, **b**, **c**, **d** su poznati vektori, x, y, z su nepoznati skalari, α, β, γ su poznati skalari

Jednadžba	Rješenje
1) $\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$	$\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$
2) $\mathbf{x}\alpha = \mathbf{a}$	$\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{a}}{\alpha}$
3) $\mathbf{xa} = \alpha$	Jednadžba je neodređena. Ako sve vektore **x** koji zadovoljavaju tu jednadžbu prenesemo tako da imaju zajedničku početnu tačku, tada će njihovi šiljci ležati u ravnini koja je okomita na vektor **a**. Jednadžbu 3) nazivamo *vektorskom jednadžbom te ravnine*
4) $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ $(\mathbf{b} \perp \mathbf{a})$	Jednadžba je neodređena. Ako sve vektore **x** koji zadovoljavaju tu jednadžbu prenesemo tako da imaju zajedničku početnu tačku, tada će njihovi šiljci ležati na pravcu koji je paralelan s vektorom **a**. Jednadžbu 4) nazivamo *vektorskom jednadžbom* tog *pravca*
5) $\begin{cases} \mathbf{xa} = \alpha \\ \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} \perp \mathbf{a}) \end{cases}$	$\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{a}\alpha + \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{a^2}$
6) $\begin{cases} \mathbf{xa} = \alpha \\ \mathbf{xb} = \beta \\ \mathbf{xc} = \gamma \end{cases}$	$\mathbf{x} = \dfrac{\alpha(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \beta(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{abc}} =$ $= \alpha\tilde{\mathbf{a}} + \beta\tilde{\mathbf{b}} + \gamma\tilde{\mathbf{c}}$, gdje su $\tilde{\mathbf{a}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}$ vektori recipročni s obzirom na **a**, **b** i **c** (vidi str. 608)
7) $\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$	$x = \dfrac{\mathbf{dbc}}{\mathbf{abc}}$, $y = \dfrac{\mathbf{adc}}{\mathbf{abc}}$, $z = \dfrac{\mathbf{abd}}{\mathbf{abc}}$
8) $\mathbf{d} = x(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + y(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + z(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$	$x = \dfrac{\mathbf{da}}{\mathbf{abc}}$, $y = \dfrac{\mathbf{db}}{\mathbf{abc}}$, $z = \dfrac{\mathbf{dc}}{\mathbf{abc}}$

3. KOVARIJANTNE I KONTRAVARIJANTNE KOORDINATE VEKTORA

Definicije. Afine koordinate a^1, a^2, a^3 vektora **a** u sistemu $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ definiramo formulom

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = a^\alpha\mathbf{e}_\alpha{}^*.$$

Nazivamo ih također *kontravarijantnim koordinatama* tog vektora, za razliku od njegovih *kovarijantnih koordinata* koje su koeficijenti rastava vektora po trima vektorima $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$, recipročnim s obzirom na $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (vidi str. 608). Kovarijantne koordinate vektora **a** označujemo sa a_1, a_2 i a_3

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3 = a_\alpha\mathbf{e}^\alpha.$$

U sistemu pravokutnih Descartesovih koordinata kovarijantne koordinate vektora podudaraju se s kontravarijantnim.

Izražavanje koordinata pomoću skalarnih produkata. Kovarijantna koordinata vektora **a** jednaka je skalarnom produktu tog vektora s pripadnim koordinatnim vektorom

$$a_1 = \mathbf{a}\mathbf{e}_1, \quad a_2 = \mathbf{a}\mathbf{e}_2, \quad a_3 = \mathbf{a}\mathbf{e}_3. \qquad \text{(a)}$$

Kontravarijantna koordinata vektora **a** jednaka je skalarnom produktu tog vektora s pripadnim recipročnim vektorom

$$a^1 = \mathbf{a}\mathbf{e}^1, \quad a^2 = \mathbf{a}\mathbf{e}^2, \quad a^3 = \mathbf{a}\mathbf{e}^3. \qquad \text{(b)}$$

Za pravokutne Descartesove koordinate formule (a) i (b) se podudaraju

$$a_x = \mathbf{a}\mathbf{i}, \quad a_y = \mathbf{a}\mathbf{j}, \quad a_z = \mathbf{a}\mathbf{k}.$$

Izražavanje skalarnog produkta pomoću koordinata. Formula (1″) na str. 610 izražava skalarni produkt dvaju vektora pomoću njihovih kontravarijantnih koordinata. U kovarijantnim koordinatama njoj odgovara formula $\mathbf{ab} = g^{\alpha\beta}a_\alpha a_\beta$,

gdje su $g^{mn} = \mathbf{e}^m\mathbf{e}^n$ metrički koeficijenti u sistemu recipročnih vektora; oni su povezani s koeficijentima g_{mn} ovim relacijama:

$$g^{mn} = \frac{(-1)^{m+n}A^{mn}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}},$$

gdje je A^{mn} minor determinante u nazivniku koji dobivamo nakon izostavljanja retka i stupca u kojem se nalazi element g_{mn}.

Ako je vektor **a** zadan pomoću kontravarijantnih koordinata, **a b** pomoću kovarijantnih, tada je njihov skalarni produkt jednak

$$\mathbf{ab} = a^1b_1 + a^2b_2 + a^3b_3 = a^\alpha b_\alpha$$

i analogno

$$\mathbf{ab} = a_\alpha b^\alpha.$$

* Vidi napomenu na str. 610.

4. GEOMETRIJSKE PRIMJENE VEKTORSKE ALGEBRE

Naziv	Vektorska formula	Koordinatna formula (u pravokutnim Descartesovim koordinatama)
Duljina vektora **a**	$a = \sqrt{\mathbf{a}^2}$	$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
Površina paralelograma konstruiranog na **a** i **b**	$S = \lvert\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rvert$	$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}$
Volumen paralelepipeda konstruiranog na **a**, **b** i **c**	$V = \lvert\mathbf{abc}\rvert$	$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
Kut između **a** i **b**	$\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{ab}}{\sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2}}$	$\cos\varphi = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

Primjenu u analitičkoj geometriji (vektorske jednadžbe ravnine i pravca) vidi na str. 252 do 259 i na str. 611.

5. VEKTORSKA FUNKCIJA SKALARNE VARIJABLE

Definicija. Varijabilni vektor $\mathbf{a}$ nazivamo *vektorskom funkcijom* skalarne varijable t ako svakoj vrijednosti t odgovara određena vrijednost vektora $\mathbf{a}$.

Oznaka: $\mathbf{a} = \mathbf{f}(t)$

Koordinatno zadavanje vektorske funkcije

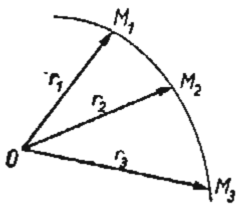
$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

sastoji se u zadavanju triju skalarnih funkcija jedne nezavisne varijable

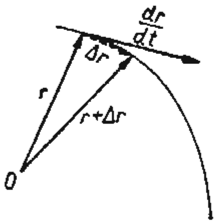
$$a_x = f_x(t), \quad a_y = f_y(t), \quad a_z = f_z(t).$$

Ako predočimo varijabilni vektor u obliku radijvektora $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ tačke M, tada pri promjenljivom t tačka M opisuje prostornu krivulju (sl. 396), tzv. *hodograf* vektorske funkcije; u koordinatama se on zadaje sa tri jednadžbe

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$



Sl. 396



Sl. 397

Derivacija vektorske funkcije $\mathbf{a} = \mathbf{f}(t)$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t}$$

predstavlja novu vektorsku funkciju od t. Geometrijski smisao derivacije radijvektora: $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ je vektor koji t a n g i r a hodograf u dotičnoj tački (sl. 397); duljina $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ovisi o izboru parametra t. Ako je t vrijeme, tada funkcija $\mathbf{r}(t)$ određuje gibanje tačke M u prostoru, a $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ po veličini i po smjeru brzinu toga gibanja. Ako je t duljina luka hodografa (od neke njegove tačke do M), tada je $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1.$

Pravila diferenciranja vektora

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \ldots$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi\mathbf{a}) = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{a} + \varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (\varphi \text{ je skalarna funkcija od } t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{ab}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b} + \mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad \text{(faktore ne smijemo izmijeniti, vidi str. 606)}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}[\varphi(t)] = \frac{d\mathbf{a}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Ako je $\mathbf{r}$ j e d i n i č n i v e k t o r, tada je $\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ (tangenta je okomita na radijvektoru, hodograf je *sferna krivulja*).

Taylorov red za vektorske funkcije

$$\mathbf{a}(t + h) = \mathbf{a}(t) + h\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} + \ldots + \frac{h^n}{n!}\frac{d^n\mathbf{a}}{dt^n} + \ldots$$

Konvergencija ovog reda (i bilo kojeg s vektorskim članovima) određuje se isto tako kao i konvergencija reda s kompleksnim članovima (vidi str. 581). O razvoju vektorske funkcije u Taylorov red ima smisla govoriti samo tada, kada taj red konvergira.

Diferencijal funkcije $\mathbf{a}(t)$ je definiran jednadžbom

$$d\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \Delta t.$$

B. TEORIJA POLJA

6. SKALARNO POLJE

Funkcije tačke. Skalarna veličina U, koja poprima određene vrijednosti u svakoj tački M prostora, naziva se skalarnom *funkcijom tačke* ili *skalarnim poljem* $U = U(M)$ (na primjer polje temperature, potencijala, gustoće u nehomogenoj sredini itd.). Polje može biti određeno pomoću skalarne funkcije vektorskog argumenta $\mathbf{r}$ (radijvektora tačke M uz izabrani pol O, vidi str. 604)

$$U = U(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Polje koje je definirano samo za tačke neke ravnine nazivamo *ravninskim**.

Centralno i aksijalno polje. Ako funkcija poprima jednake vrijednosti za sve tačke koje se nalaze na istim udaljenostima od nekog centra $C(\mathbf{r}_1)$, tada se polje naziva *centralnim* ili *sfernim*. U zavisi samo od udaljenosti $\overline{CM} = r$, na primjer: $U = r$ (udaljenost tačke od pola), $U = \frac{c}{r^2}$ (polje koje izražava osvijetljenost u svakoj tački pri centralnom izvoru svjetla), općenito

$$U = f(r). \tag{2}$$

Ako funkcija prima jednake vrijednosti za sve tačke koje se nalaze na jednakim udaljenostima od nekog pravca (*osi polja*), tada polje nazivamo *aksijalnim* ili *cilindarskim*.

Polje zadano u koordinatama. Ako odredimo tačku M njezinim koordinatama (Descartesovim x, y, z, cilindarskim ρ, φ, z ili sfernim r, Θ, φ**) dobivamo skalarno polje (1) u obliku funkcije triju varijabli

$$U = \Phi(x, y, z), \quad U = \Psi(\rho, \varphi, z) \quad \text{ili} \quad U = X(r, \Theta, \varphi), \tag{1a}$$

a za ravninsko polje u vidu funkcije sa dvije varijable (u Descartesovim ili polarnim koordinatama)

$$U = \Phi(x, y) \quad \text{ili} \quad U = \Psi(\rho, \varphi) \tag{1b}$$

(funkcije U u (1a) i (1b) uzimamo da su jednoznačne i neprekinute posvuda, osim za pojedine *tačke, krivulje i ravnine prekinutosti*). Izražavanje centralnog polja u koordinatama

$$U = U\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = U\left(\sqrt{\rho^2 + z^2}\right) = U(r), \tag{2a}$$

aksijalnog $\quad U = U\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = U(\rho) = U(r \sin \Theta);$ (3)

za izučavanje centralnih polja najzgodnije su sferne, a za aksijalna cilindarske koordinate.

Nivo-plohe i nivo-linije. Tačke za koje funkcija (1) prima jednu te istu vrijednost

$$U = \text{const}, \tag{4}$$

tvore u prostoru *nivo-plohu*, kojoj jednadžba u koordinatama glasi

$$U = \Phi(x, y, z) = \text{const}, \quad U = \Psi(\rho, \varphi, z) = \text{const},$$
$$U = X(r, \Theta, \varphi) = \text{const}. \tag{4a}$$

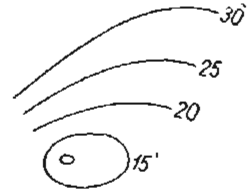
* Ponekad ravninskim poljem nazivamo polje definirano za tačke prostora koje ima svojstvo da za sve tačke bilo kojeg pravca, paralelnog nekom smjeru prostora, funkcija U ima istu vrijednost. Takvo je polje ispravnije nazivati *planparalelnim;* njegovo se proučavanje svodi na proučavanje polja u ravnini okomitoj na taj smjer.

** Vidi str. 247.

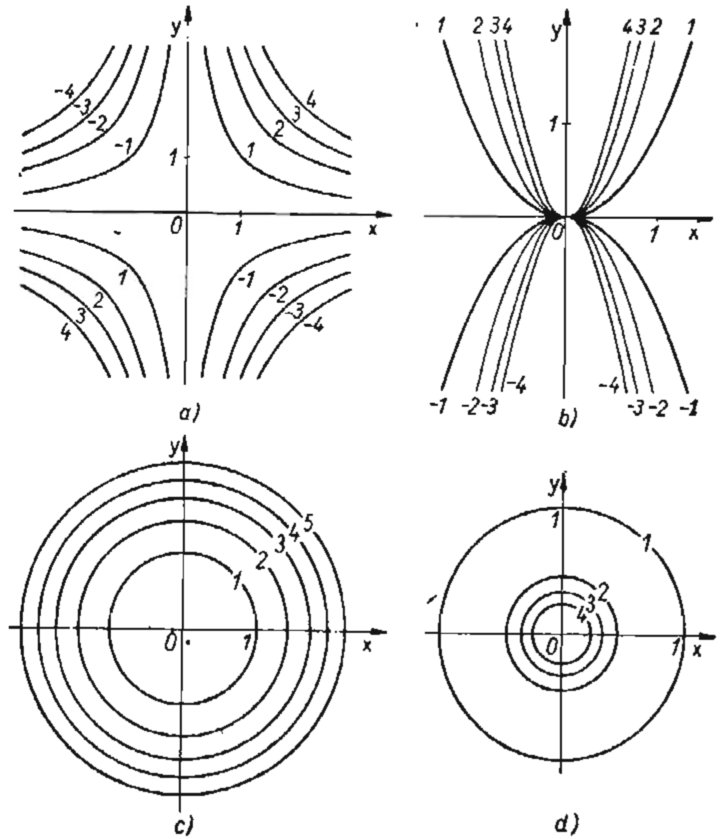
Za različite const $= U_0, U_1, U_2, \ldots$ dobivaju se različite plohe; kroz svaku tačku polja prolazi jedna takva ploha (osim za tačke u kojima funkcija U nije jednoznačno definirana).

Primjeri: 1) Za polje $U = \mathbf{cr} = c_x x + c_y y + c_z z$ nivo-plohe su paralelne ravnine. 2) Za polje $U = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ nivo-plohe su slični i slično smješteni elipsoidi.

Nivo-plohe centralnog polja su koncentrične kugle, ravnine nivo-plohe aksijalnog polja su koaksijalni valjci.



Sl. 398



Sl. 399

Za ravninsko polje jednadžba $U = \text{const}$ predstavlja *nivo-liniju*

$$U(x, y) = \text{const}, \quad U(\rho, \varphi) = \text{const}. \tag{4b}$$

Na slikama se nivo-linije redovno crtaju za određene jednake intervale vrijednosti U, i uz svaku od njih se napiše pripadna numerička vrijednost U (sl. 398). Na primjer: izobare na sinoptičkim kartama ili horizontale (krivulje istih visina) na topografskim kartama. U posebnim slučajevima nivo-linije mogu degenerirati u izolirane tačke, a nivo-plohe u tačke i krivulje.

Primjeri (sl. 399): a) $U = xy$, b) $U = \frac{y}{x^2}$, c) $U = r^2$, d) $U = \frac{1}{r}$.

7. VEKTORSKO POLJE

Vektorska funkcija tačke. Vektorsku veličinu V koja prima određenu vrijednost u svakoj tački M prostora nazivamo *vektorskom funkcijom tačke* ili *vektorskim poljem* $\mathbf{V} = \mathbf{V}(M)$ (na primjer polje brzina čestica tekućine koja struji, polje sila, električko ili magnetsko polje, itd.) Polje može biti određeno pomoću vektorske funkcije vektorskog argumenta $\mathbf{r}$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}).$$

Vektorsko polje je *ravninsko*, ako sve vrijednosti $\mathbf{r}$ i $\mathbf{V}$ leže u istoj ravnini.*

Tipovi vektorskih polja s kojima se često susrećemo

a) *Centralno vektorsko polje* (sl. 400, *a*) za koja svi vektori $\mathbf{V}$ leže na pravcima kroz određenu tačku (*centar*). Ako premjestimo pol u centar, tada takvo polje određujemo formulom $\mathbf{V} = f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}$; svi vektori $\mathbf{V}$ imaju smjer radijvektora $\mathbf{r}$. Ovo se polje može podesnije izraziti formulom

$$\mathbf{V} = \varphi(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r};$$

$\varphi(\mathbf{r})$ je duljina vektora $\mathbf{V}$, a $\frac{\mathbf{r}}{r}$ je njegov jedinični vektor.

b) *Sferno vektorsko polje* (sl. 400, *b*): $\mathbf{V} = \varphi(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ je važan poseban slučaj centralnog polja u kome duljina vektora $\mathbf{V}$ ovisi samo o udaljenosti $|\mathbf{r}|$, npr. Newtonovo gravitaciono polje (također Coulombovo polje)

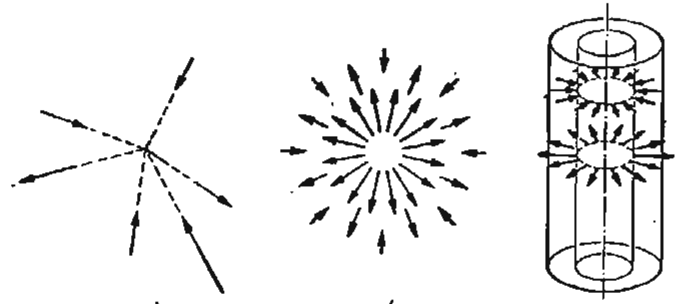
---

* Vidi napomenu* na str. 616. Analogno vrijedi i za vektorsko polje.

$$\mathbf{V} = \frac{c}{r^3}\mathbf{r} = \frac{c}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

(za ravninsko polje nazivamo taj slučaj *kružnim poljem*).

c) *Cilindarsko vektorsko polje* (sl. 400, *c*) u kojemu svi vektori $\mathbf{V}$ 1) leže na pravcima koji okomito sijeku određeni pravac (os), 2) za tačke koje se nalaze na istim udaljenostima od osi, vektori



a) *b)* *c)*

Sl. 400

su jednaki po apsolutnoj vrijednosti i usmjereni su ili od osi ili k osi. Ako premjestimo pol na os polja, određenu jediničnim vektorom $\mathbf{c}$, tada je takvo polje određeno formulom $\mathbf{V} = \varphi(\rho)\frac{\mathfrak{r}}{\rho}$, gdje je $\mathfrak{r}$ vektor, koji je projekcija vektora $\mathbf{r}$ na ravninu okomitu na os: $\mathfrak{r} = \mathbf{c} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{c})$. Ako presiječemo to polje ravninama okomitim na os, dobivamo jednaka kružna polja.

Polje zadano u koordinatama. Vektorsko polje (1) možemo definirati pomoću tri skalarna polja $V^1(\mathbf{r})$, $V^2(\mathbf{r})$ i $V^3(\mathbf{r})$, koja su koeficijenti rastava vektora $\mathbf{V}$ po trima bilo kojim nekomplanarnim vektorima $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{V} = V^1\mathbf{e}_1 + V^2\mathbf{e}_2 + V^3\mathbf{e}_3. \tag{2}$$

Ako za te vektore uzmemo koordinatne jedinične vektore $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, a koeficijente V^1, V^2, V^3 izrazimo Descartesovim koordinatama x, y, z, tada je

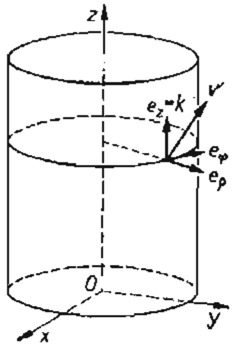
$$\mathbf{V} = V_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + V_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + V_z(x, y, z)\,\mathbf{k}, \tag{2a}$$

tj. vektorsko je polje definirano pomoću triju skalarnih funkcija i triju varijabli (zadavanje polja u *Descartesovim koordinatama*). *U cilindarskim i sfernim koordinatama* jedinični vektori $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ $(= \mathbf{k})$ (sl. 401) i $\mathbf{e}_r \left(= \frac{\mathbf{r}}{r}\right)$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\Theta$ (sl. 402) diraju koordinatne linije u svakoj tački, a koeficijenti su izraženi pripadnim koordinatama:

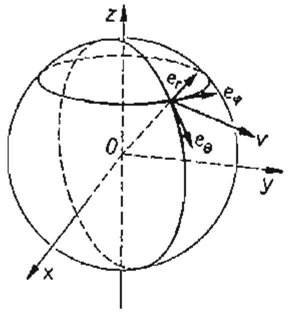
$$\mathbf{V} = V_\rho(\rho, \varphi, z)\,\mathbf{e}_\rho + V_\varphi(\rho, \varphi, z)\,\mathbf{e}_\varphi + V_z(\rho, \varphi, z)\,\mathbf{e}_z, \qquad (2b)$$

$$\mathbf{V} = V_r(r, \varphi, \Theta)\,\mathbf{e}_r + V_\varphi(r, \varphi, \Theta)\,\mathbf{e}_\varphi + V_\Theta(r, \varphi, \Theta)\,\mathbf{e}_\Theta. \qquad (2c)$$

U ovim slučajevima jedinični vektori mijenjaju svoj smjer pri prelazu od zadane tačke u drugu, ostajući međusobno okomiti.



Sl. 401



Sl. 402

Formule za prijelaz s jednog sistema na drugi

a) *Izražavanje Descartesovih koordinata pomoću cilindarskih*

$$V_x = V_\rho \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi, \quad V_y = V_\rho \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi, \quad V_z = V_z.$$

b) *Izražavanje cilindarskih koordinata pomoću Descartesovih*

$$V_\rho = V_x \cos\varphi + V_y \sin\varphi, \quad V_\varphi = -V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi, \quad V_z = V_z.$$

c) *Izražavanje Descartesovih koordinata pomoću sfernih:*

$$V_x = V_r \sin\Theta\cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi + V_\Theta \cos\varphi\cos\Theta,$$

$$V_y = V_r \sin\Theta\sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi + V_\Theta \sin\varphi\cos\Theta,$$

$$V_z = V_r \cos\Theta - V_\Theta \sin\theta.$$

d) *Izražavanje sfernih koordinata pomoću Descartesovih*

$$V_r = V_x \sin\Theta\cos\varphi + V_y \sin\Theta\sin\varphi + V_z \cos\Theta,$$

$$V_\varphi = -V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi,$$

$$V_\Theta = V_x \cos\Theta\cos\varphi + V_y \cos\Theta\sin\varphi - V_z \sin\Theta.$$

Izražavanje sfernog vektorskog polja Descartesovim koordinatama

$$\mathbf{V} = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k});$$

izražavanje cilindarskog polja Descartesovim koordinatama

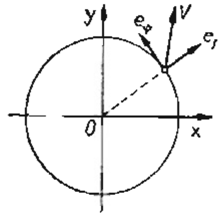
$$\mathbf{V} = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}).$$

Najpraktičnije su za proučavanje sfernih polja sferne koordinate $[\mathbf{V} = V(r)\,\mathbf{e}_r]$, a za proučavanje cilindarskih polja cilindarske. $[\mathbf{V} = V(\rho)\,\mathbf{e}_\rho]$. Ako je polje ravninsko, tada je

$$\mathbf{V} = V_x(x, y)\,\mathbf{i} + V_y(x, y)\,\mathbf{j} = V_\rho(x, y)\,\mathbf{e}_\rho + V_\varphi(x, y)\,\mathbf{e}_\varphi$$

(sl. 403), a za kružno polje

$$\mathbf{V} = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)(x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) = \psi(\rho)\,\mathbf{e}_\rho.$$



Sl. 403

Sl. 404

Strujnice. Krivulja Γ, kod koje u svakoj njenoj tački $M(\mathbf{r})$ vektor $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ tangira Γ, naziva se strujnica vektorskog polja $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ (sl. 404). Kroz svaku tačku polja prolazi jedna strujnica; strujnice se međusobno ne presijecaju (izuzetak su tačke u kojima funkcija V nije definirana ili je $\mathbf{V} = 0$). Ako se radi o polju sila, govorimo o *silnicama*.

Primjeri: Strujnice centralnog polja su pravci koji centar spajaju s tačkom polja; strujnice polja $\mathbf{V} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$ su kružnice koje leže u ravninama okomitim na vektor $\mathbf{c}$ i koje imaju centre na osi paralelnoj sa $\mathbf{c}$.

Diferencijalne jednadžbe strujnica polja izraženog u Descartesovim koordinatama glase

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}; \quad \text{za ravninsko polje} \quad \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}*.$$

* Rješavanje ovih diferencijalnih jednadžbi vidi na str: 509 i 521.

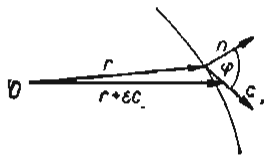
8. GRADIJENT

Derivacijom skalarnog polja $U = U(\mathbf{r})$ u zadanoj tački $\mathbf{r}$ po vektoru $\mathbf{c}$ nazivamo limes kvocijenta

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{U(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{c}) - U(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad \text{(sl. 405)}.$$

Derivacijom polja $U = U(\mathbf{r})$ u zadanoj tački $\mathbf{r}$ u smjeru jediničnog vektora $\mathbf{c}^0$ nazivamo derivaciju $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}$. Derivacije po vektoru $\mathbf{c}$ i njegovom jediničnom vektoru $\mathbf{c}^0$ u zadanoj tački međusobno su povezane odnosom

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}.$$



Sl. 405

$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}$ pokazuje brzinu prirasta funkcije U u smjeru $\mathbf{c}^0$ u svakoj tački; od svih derivacija u zadanoj tački po različitim jediničnim vektorima najveća je derivacija $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$ u smjeru normale $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ je jedinični vektor normale) na nivo-plohu u toj tački (u smjeru porasta funkcije U); derivaciju po jediničnom vektoru u bilo kom drugom smjeru izražavamo formulom

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \cos(\mathbf{c}^0, \mathbf{n}) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \cos \varphi.$$

Gradijent polja $U(r)$ (označava se: grad U ili ∇U*) je vektor definiran u svakoj tački polja, koji ima smjer normale na nivo-plohu (u smjeru porasta funkcije U) i duljinu koja je jednaka $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$.

Derivacija $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}$ jednaka je projekciji grad U na smjer $\mathbf{c}^0$;

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0} = \mathbf{c}^0 \operatorname{grad} U.$$

Koordinate gradijenta

U Descartesovom sistemu

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k},$$

* O simbolu ∇ (nabla) vidi na str. 632.

u sistemu cilindarskih koordinata

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_z,$$

u sistemu sfernih koordinata

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \Theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \Theta}\mathbf{e}_\Theta.$$

U onim tačkama polja gdje su nivo-linije, povučene u skladu s uvjetom na str. 618, gušće, apsolutna veličina gradijenta je veća; u tačkama maksimuma i minimuma polja [u njima nivo-plohe degeneriraju u tačku] grad $U = 0$.

Diferencijal skalarnog polja je totalni diferencijal funkcije U (vidi str. 350)

$$\mathrm{d}U = \operatorname{grad} U \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

Pravila za izračunavanje gradijenta*:

$$\operatorname{grad} c = 0, \quad \operatorname{grad}(U_1 + U_2) = \operatorname{grad} U_1 + \operatorname{grad} U_2,$$

$$\operatorname{grad}(cU) = c \operatorname{grad} U, \quad \operatorname{grad}(U_1 U_2) = U_1 \operatorname{grad} U_2 + U_2 \operatorname{grad} U_1,$$

$$\operatorname{grad} \varphi(U) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}U}\operatorname{grad} U, \quad \operatorname{grad}(\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2) = (\mathbf{V}_1 \operatorname{grad})\mathbf{V}_2 +$$

$$+ (\mathbf{V}_2 \operatorname{grad})\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_2 \times \operatorname{rot} \mathbf{V}_1{}^{**}.$$

Posebno je grad $(\mathbf{r}\mathbf{c}) = \mathbf{c}$.

Gradijent centralnog polja: grad $U(r) = U'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ (sferno polje);

posebno je grad $r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ (polje jediničnih vektora).

Gradijent kao derivacija po volumenu. Derivacija skalarnog polja po volumenu (vidi str. 629) je vektor koji je gradijent tog polja; ovo svojstvo možemo uzeti za određivanje gradijenta:

$$\operatorname{grad} U = \lim_{v \to 0} \frac{\oint_\Sigma U \mathrm{d}\mathbf{S}}{v}.$$

* Ovdje i dalje su c i $\mathbf{c}$ konstante.

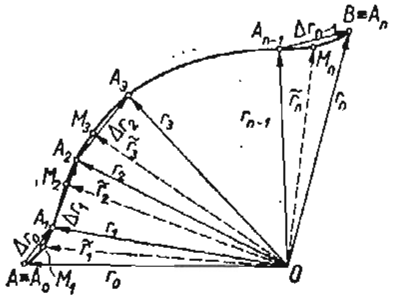
** O izrazima $(\mathbf{V} \operatorname{grad})\mathbf{W}$ i $\operatorname{rot} \mathbf{V}$ vidi na str. 633 i 630.

9. KRIVULJNI INTEGRAL I POTENCIJAL U VEKTORSKOM POLJU*

Definicija. Krivuljnim integralom vektorske funkcije $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ po putu $\widehat{AB}$ [oznaka $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$] nazivamo skalar P koji dobivamo na ovaj način:

1) Put $\widehat{AB}$ (sl. 406) razdijelimo tačkama $A_1(\mathbf{r}_1)$, $A_2(\mathbf{r}_2)$, ..., ..., $(A_{n-1})(\mathbf{r}_{n-1})$ $(A \equiv A_0,\ B \equiv A_n)$ na n malih odsječaka, koje približno izražavamo vektorima $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} = \Delta\mathbf{r}_{i-1}$.

2) Unutar (ili na granici) svakog elementarnog luka $\widehat{A_{i-1}A}$ izabiremo po volji tačku M_i, koja ima radijvektor $\tilde{\mathbf{r}}_i$.



Sl. 406

3) Vrijednosti funkcije $\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)$ u tim izabranim tačkama skalarno pomnožimo sa $\Delta\,\mathbf{r}_{i-1}$.

4) Svih n dobivenih produkata zbrojimo.

5) Izračunamo limes dobivenog zbroja $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)\,\Delta\mathbf{r}_{i-1}$, kada dužina svakog elementarnog vektora $\Delta\mathbf{r}_{i-1}$ teži k nuli (i stoga $n \to \infty$).

Ako taj limes postoji i ne ovisi o izboru tačaka A_i i M_i, tada se on naziva krivuljnim integralom

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \lim_{\substack{\Delta\mathbf{r}\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)\,\Delta\mathbf{r}_{i-1}.$$

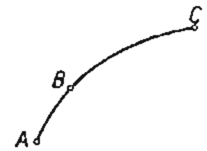
Ako je funkcija $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ neprekinuta**, a luk $\widehat{AB}$ neprekinut i ima neprekinutu tangentu, tada krivuljni integral $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ egzistira.

* To je poglavlje vektorsko izlaganje krivuljnog integrala drugog tipa općeg oblika (vidi str. 483).

** Za neprekinutost vektorske funkcije $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ potrebna je neprekinutost svih triju skalarnih funkcija, koje su koeficijenti u rastavu $\mathbf{V}$ po vektorima $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$.

Mehanički smisao integrala. Ako je polje $\mathbf{V}$ polje sila, tada je $P = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ jednak *radu* koji sila $\mathbf{V}$ proizvede pri pomicanju materijalne tačke po putu $\widehat{AB}$.

Svojstva krivuljnog integrala



Sl. 407

a) $\int_{\widehat{ABC}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \int_{\widehat{BC}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$;

b) $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = -\int_{\widehat{BA}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ (sl. 407);

c) $\int_{\widehat{AB}} [\mathbf{V}(\mathbf{r}) + \mathbf{W}(\mathbf{r})]\,d\mathbf{r} = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \int_{\widehat{AB}} \mathbf{W}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$;

d) $\int_{\widehat{AB}} c\,\mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = c\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$.

Izračunavanje krivuljnog integrala, zadanog u Descartesovim koordinatama, svodi se na izračunavanje krivuljnog integrala drugog tipa općeg oblika (vidi str. 483 do 485)

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{\widehat{AB}} (\mathbf{V}_x\,dx + \mathbf{V}_y\,dy + \mathbf{V}_z\,dz).$$

Cirkulacijom vektorskog polja nazivamo krivuljni integral tog polja po zatvorenoj konturi (označujemo ga sa $\oint_C \mathbf{V}\,d\mathbf{r}$, gdje je C zatvorena krivulja).

Konzervativno (ili *potencijalno*) polje je vektorsko polje kod kojega je krivuljni integral $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r}$ neovisan od puta koji povezuje A i B, već ovisi samo o položaju tačaka A i B. Cirkulacija u konzervativnom polju je uvijek jednaka nuli. Konzervativno polje je uvijek *bezvrtložno:*

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0 \tag{1}$$

(vidi str. 635); ova jednakost je nuždan i dovoljan uvjet za konzervativnost polja uz neprekinutost parcijalnih derivacija koordinata polja. U Descartesovim koordinatama:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x},\quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y},\quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial z}\,* \tag{1a}$$

[za ravninsko polje vrijedi samo prva jednakost (1a)].

* Ovo je *uvjet integrabilnosti* (vidi str. 486).

Potencijal konzervativnog polja. Ako u konzervativnom polju fiksiramo početnu tačku $A(\mathbf{r}_0)$ i mijenjamo konačnu tačku $B(\mathbf{r})$, tada je integral $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ $\left[\text{označuje se sa } \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\right]$ skalarna funkcija od $\mathbf{r}$: $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r})$, a skalarno polje $\varphi(\mathbf{r})$ nazivamo *potencijalnom funkcijom* ili *potencijalom polja* $\mathbf{V}(\mathbf{r})$*. Potencijal polja je određen do po volji odaberive aditivne konstante, koja ovisi o donjoj granici $\mathbf{r}_0$. *Razlika potencijala je*

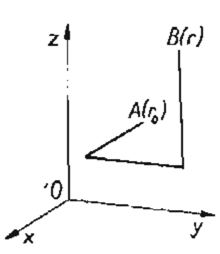
$$\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$

Veza gradijenta, krivuljnog integrala i potencijala. Ako je $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} U(\mathbf{r})$, tada je $U(\mathbf{r})$ potencijal polja $\mathbf{V}(\mathbf{r})$** i obrnuto.

Izračunavanje potencijala U konzervativnog polja $V = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$, zadanog u Descartesovim koordinatama ekvivalentno je zadatku izračunavanja funkcije U iz njenog totalnog diferencijala: $dU = V_x dx + V_y dy + V_z dz$ [V_x, V_y, V_z moraju zadovoljavati uvjet (1a)]; U određujemo iz sistema jednadžbi

$$\frac{\partial U}{\partial x} = V_x, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = V_y, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = V_z.$$

Praktički se potencijal izračunava integriranjem po poligonskom potezu (sl. 408) sastavljenog od odsječaka koji su paralelni koordinatnim osima (vidi izračunavanje primitivne funkcije na str. 486)



Sl. 408

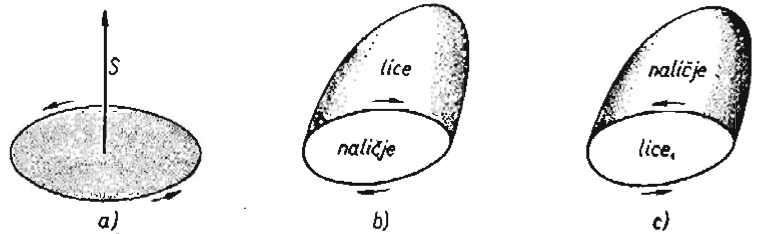
$$U = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r} = U(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^{x} V_x(x, y_0, z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} V_y(x, y, z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} V_z(x, y, z)\,dz.$$

* To je *primitivna funkcija* (vidi str. 486). U fizici *potencijalom* $\varphi(\mathbf{r})$ u tački $\mathbf{r}$ nazivamo ponekad veličinu suprotnog predznaka: »$-\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$«.

** Ili »minus potencijal polja $\mathbf{V}(\mathbf{r})$« (vidi prethodnu napomenu).

10. PLOŠNI INTEGRALI*

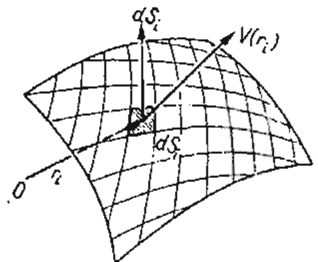
Vektorom ravne površine Σ koja je omeđena zatvorenom krivuljom C duž koje je određen pozitivni smisao, nazivamo vektor $\mathbf{S}$ (sl. 409, *a*) kojemu je modul jednak veličini S površine Σ, a smjer mu je izabran okomito na Σ tako, da se od njegovog šiljka gledano pozitivno obilaženje površine prikazuje u suprotnom smislu gibanja kazaljke na satu. Na taj je način izbor pozitivnog smisla na



Sl. 409

rubu površine povezan s izborom *lica* površine (tj. strane od koje ide vektor $\mathbf{S}$); ova se veza prenosi na po volji odabranu zakrivljenu površinu omeđenu nekim rubom (sl. 409, *b* i *c*).

Tri oblika integrala po površini Σ (omeđenoj nekim rubom ili zatvorenom plohom). *Plošnim integralima* u skalarnom ili vektorskom polju nazivamo veličine koje se dobivaju na ovaj način: 1) Ploha Σ na kojoj je izbrano lice (sl. 410) razdijeli se na po volji odabran način na n malih (»elementarnih«) površina dS_i, koje su sve približno ravne, a pripadni vektor površine označavamo sa $d\mathbf{S}_i$ (pri tome, u slučaju zatvorene plohe, pozitivni obilazak površina uzimamo tako da lice od kojeg polazi vektor $d\mathbf{S}_i$ bude vanjska strana). 2) Unutar (ili na granici) svake površine izabiremo po volji tačku $\mathbf{r}_i$. 3) Izračunamo produkte: u slučaju skalarnog polja $U(\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{S}_i$, a u slučaju vektorskog polja $\mathbf{V}(\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{S}_i$ ili $\mathbf{V}(\mathbf{r}_i) \times d\mathbf{S}_i$. 4) Produkti izračunani za svaku površinu zbrajaju se. 5) Prelazimo k limesu za $n \to \infty$ i $dS \to 0$**:



Sl. 410

* Ovo poglavlje je vektorsko tumačenje teorije plošnog integrala drugog tipa općeg oblika (vidi str. 504).

** Površina teži k nuli u smislu napomene** na str. 488.

A. *Tok skalarnog polja*

$$\mathbf{P} = \lim_{dS_i \to 0} \sum U(\mathbf{r}_i)\, d\mathbf{S}_i = \int_\Sigma U(\mathbf{r})\, d\mathbf{S}.$$

B. *Skalarni tok vektorskog polja*

$$Q = \lim_{dS_i \to 0} \sum \mathbf{V}(\mathbf{r}_i)\, d\mathbf{S}_i = \int_\Sigma \mathbf{V}(r)\, d\mathbf{S}.$$

C. *Vektorski tok vektorskog polja*

$$\mathbf{R} = \lim_{dS_i \to 0} \sum \mathbf{V}(\mathbf{r}_i) \times d\mathbf{S}_i = \int_\Sigma \mathbf{V}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S}^*.$$

Izračunavanje integrala po plohi u Descartesovim koordinatama svodi se na izračunavanje plošnih integrala drugog tipa (vidi str. 501) i provodi se po ovim formulama:

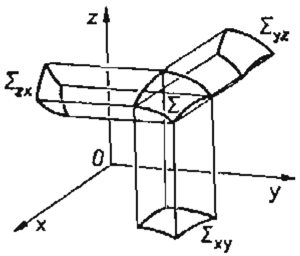
A. $\int_\Sigma U\, d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_{yz}} U\, dy\, dz\, \mathbf{i} + \iint_{\Sigma_{zx}} U\, dz\, dx\, \mathbf{j} + \iint_{\Sigma_{xy}} U\, dx\, dy\, \mathbf{k}.$

B. $\int_\Sigma \mathbf{V}\, d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_{yz}} V_x\, dy\, dz + \iint_{\Sigma_{zx}} V_y\, dz\, dx + \iint_{\Sigma_{xy}} V_z\, dx\, dy.$

C. $\int_\Sigma \mathbf{V} \times d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_{yz}} (V_z \mathbf{j} - V_y \mathbf{k})\, dy\, dz +$

$+ \iint_{\Sigma_{zx}} (V_x \mathbf{k} - V_z \mathbf{i})\, dz\, dx +$

$+ \iint_{\Sigma_{xy}} (V_y \mathbf{i} - V_x \mathbf{j})\, dx\, dy.$



Sl. 411

Svaki se dvostruki integral proteže na površinu koja je projekcija Σ na koordinatne ravnine** (sl. 411), pri čemu u izrazima koji su pod znakom integrala treba jednu od varijabli (x, y ili z) izraziti sa dvije druge iz jednadžbe plohe Σ.

Primjeri: A) $\mathbf{P} = \int_\Sigma xyz\, d\mathbf{S}$ po dijelu ravnine $x + y + z = 1$ zatvorenom između tri koordinatne ravnine (lice je gornja strana). Imamo

* Za svaki od tih integrala vrijedi teorem egzistencije, analogan onom na str. 503 (tačnu formulaciju izostavljamo).

** Projekcija se uzima s predznakom »+« ili »—« (vidi str. 502).

$$\mathbf{P} = \iint_{yz} (1 - y - z)\, yz\, dy\, dz\, \mathbf{i} + \iint_{zx} (1 - x - z)\, xz\, dz\, dx\, \mathbf{j} + \iint_{xy} (1 - x - y)\, xy\, dx\, dy\, \mathbf{k};$$

$$\iint_{yz} (1 - y - z)\, yz\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} (1 - y - z)\, yz\, dy\, dz = \frac{1}{120};$$

ostala dva integrala izračunamo analogno. Rezultat je

$$\mathbf{P} = \frac{1}{120}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

B) $Q = \int_\Sigma \mathbf{r}\, d\mathbf{S} = \iint_{yz} x\, dy\, dz + \iint_{zx} y\, dz\, dx + \iint_{xy} z\, dx\, dy$ po istoj plohi. $\iint_{xy} z\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx = \frac{1}{6}$; ostala dva integrala izračunamo analogno; $Q = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

C) $\mathbf{R} = \int_\Sigma \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \int_\Sigma (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times (dy\, dz\, \mathbf{i} + dz\, dx\, \mathbf{j} + dx\, dy\, \mathbf{k})$ po istoj plohi. Analogna izračunavanja daju $\mathbf{R} = 0$.

Integrale po zatvorenoj plohi označavamo

$$\oint_\Sigma U\, d\mathbf{S}, \quad \oint_\Sigma \mathbf{V}\, d\mathbf{S}, \quad \oint_\Sigma \mathbf{V} \times d\mathbf{S}.$$

11. PROSTORNO DERIVIRANJE

Definicija. *Prostornim derivacijama* skalarnog ili vektorskog polja u tački $\mathbf{r}$ nazivamo veličine triju oblika koje dobivamo ovako:
1) tačka $\mathbf{r}$ polja $U(\mathbf{r})$ ili $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ okruži se zatvorenom plohom Σ;
2) izračunamo integral po plohi Σ $\left(\oint_\Sigma U\, d\mathbf{S},\ \oint_\Sigma \mathbf{V}\, d\mathbf{S} \text{ ili } \oint_\Sigma \mathbf{V} \times d\mathbf{S}\right)$.
3) nađemo limes kvocijenta toga integrala s volumenom v prostora unutar plohe Σ, kada taj volumen v teži k nuli (u smislu navedenom u napomeni na str. 488).

Prostorna derivacija skalarnog polja je njegov gradijent (vidi str. 623), a prostorne derivacije vektorskog polja dovode do pojmova divergencije i rotacije.

12. DIVERGENCIJA VEKTORSKOG POLJA

Definicija. *Divergencijom* polja $\mathbf{V}$ (označuje se sa div $\mathbf{V}$ ili $\nabla\,\mathbf{V}$*) nazivamo skalar koji je definiran u svakoj tački polja i koji je prostorna derivacija tog polja:

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \lim_{v\to 0}\frac{\int_{\Sigma}\mathbf{V}\,d\mathbf{S}}{v}.$$

Formule za izračunavanje divergencije

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \text{(u Descartesovim koordinatama);}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \text{(u cilindarskim koordinatama);}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r)\right] + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\Theta\, V_\Theta)\right]$$

(u sfernim koordinatama);

Pravila za izračunavanje divergencije

$$\operatorname{div}\mathbf{c} = 0, \quad \operatorname{div}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \operatorname{div}\mathbf{V}_1 + \operatorname{div}\mathbf{V}_2, \quad \operatorname{div}(c\mathbf{V}) = c\operatorname{div}\mathbf{V},$$

$$\operatorname{div}(U\mathbf{V}) = U\operatorname{div}\mathbf{V} + \mathbf{V}\operatorname{grad}U \left[\text{posebno, } \operatorname{div} r\mathbf{c} = \frac{\mathbf{r}\,\mathbf{c}}{r}\right],$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2) = \mathbf{V}_2\operatorname{rot}\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1\operatorname{rot}\mathbf{V}_2.$$

Divergencija centralnog polja:

$$\operatorname{div}\mathbf{r} = 3, \qquad \operatorname{div}\varphi(r)\,\mathbf{r} = 3\varphi(r) + r\varphi'(r).$$

13. ROTACIJA VEKTORSKOG POLJA

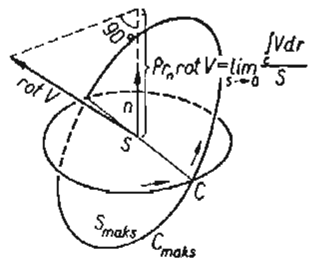
Definicije. *Rotacija* (također *rotor*) polja $\mathbf{V}$ (označava se rot $\mathbf{V}$, curl $\mathbf{V}$ ili $\nabla\times\mathbf{V}$*) je vektor definiran u svakoj tački polja kao prostorna derivacija tog polja uzeta sa suprotnim predznakom

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = -\lim_{v\to 0}\left(\frac{1}{v}\int_{\Sigma}\mathbf{V}\times d\mathbf{S}\right)^{**}.$$

* O simbolu ∇ (nabla) vidi na str. 632.

** Predznak »minus« možemo odstraniti ako uzmemo faktore pod integralom obrnutim redom: $\int d\mathbf{S}\times\mathbf{V}$ (vidi str. 607).

Druga definicija: *rotacijom* polja $\mathbf{V}$ nazivamo vektor koji dobivamo na ovaj način: 1) kroz zadanu tačku $\mathbf{r}$ položimo malu površinu S (sl. 412); 2) izračunamo cirkulaciju $\oint_C \mathbf{V}\,d\mathbf{r}$ (vidi str. 625) duž ruba koji omeđuje tu plohu; 3) promatramo kvocijent te cirkulacije i površine S kada S teži k nuli stežući se u tačku $\mathbf{r}$, pri čemu



Sl. 412

položaj površine ostaje nepromijenjen; 4) mijenjanjem smjera vektora te površine ustanovljujemo smjer u kome dobiveni limes dostiže maksimum; 5) u tački $\mathbf{r}$ određujemo vektor rot $\mathbf{r}$, kojemu je modul jednak dobivenom maksimumu, a smjer se podudara sa smjerom vektora površine $S_{\max}$

$$|\operatorname{rot}\mathbf{V}| = \lim_{S\to 0}\frac{\int_{(C_{\max})}\mathbf{V}\,d\mathbf{r}}{S_{\max}}; \quad \left.\begin{matrix}\text{projekcija rot } \mathbf{V} \text{ na}\\ \text{normalu površine } S\end{matrix}\right\} = \lim_{S\to 0}\frac{\int_C \mathbf{V}\,d\mathbf{r}}{S}.$$

Rotacija potencijalnog polja jednaka je nuli (izlazi iz teorema Stokesa, str. 635).

Koordinate rotacije

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

u Descartesovim koordinatama

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi +$$

$$+ \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z \quad \text{u cilindarskim koordinatama}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \left[\frac{1}{r\sin\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\, V_\varphi) - \frac{\partial V_\Theta}{\partial\varphi}\right)\right]\mathbf{e}_r +$$
$$+ \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r V_\Theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\Theta}\right]\mathbf{e}_\varphi +$$
$$+ \left[\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\, V_\varphi)\right)\right]\mathbf{e}_\Theta \text{ u sfernim koordinatama.}$$

Pravila za izračunavanje rotacije

$$\operatorname{rot}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \operatorname{rot}\mathbf{V}_1 + \operatorname{rot}\mathbf{V}_2, \qquad \operatorname{rot}(c\mathbf{V}) = c\operatorname{rot}\mathbf{V},$$
$$\operatorname{rot}(U\mathbf{V}) = U\operatorname{rot}\mathbf{V} + \operatorname{grad} U \times \mathbf{V}, \qquad \operatorname{rot}(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) =$$
$$= (\mathbf{V}_2 \operatorname{grad})\mathbf{V}_1 - (\mathbf{V}_1 \operatorname{grad})\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \operatorname{div}\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_2 \operatorname{div}\mathbf{V}_1{}^{*}.$$

Vrtložnim krivuljama polja **V** nazivamo strujnice polja rot **V** (str. 623).

14. OPERATORI ∇ (HAMILTONOV), $(a\nabla)$ I Δ (LAPLACEOV)

Hamiltonov operator ∇ (nabla) je simbolički vektor koji zamjenjuje simbole gradijenta, divergencije i rotacije:

$$\nabla U = \operatorname{grad} U, \qquad \nabla\mathbf{V} = \operatorname{div}\mathbf{V}, \qquad \nabla \times \mathbf{V} = \operatorname{rot}\mathbf{V};$$

njegova primjena pojednostavnjuje izračunavanja u vektorskoj analizi. Izraz Hamiltonova operatora u Descartesovim koordinatama je

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Ako formalno pomnožimo taj vektor sa skalarom U ili s vektorom **V** (skalarno ili vektorski) izražene u Descartesovim koordinatama, dobivamo formule za gradijent (str. 622), divergenciju (str. 630) i rotaciju (str. 630) u Descartesovim koordinatama.

Pravila za izračunavanje s operatorom ∇. a) Ako ∇ stoji ispred linearne kombinacije $\Sigma\, a_i X_i$, gdje su a_i konstante, a X_i funkcije tačke (bez obzira bile one skalarne ili vektorske), tada je

$$\nabla(\Sigma\, a_i X_i) = \Sigma\, a_i \nabla X_i.$$

b) Ako ∇ stoji ispred produkta funkcije tačaka X, Y, Z (skalarnih ili vektorskih), tada se on primjenjuje po redu na svaku od tih funkcija (nad njih u tom slučaju stavljamo znak ↓), a rezultati se zbrajaju:

$$\nabla(XYZ) = \nabla(\overset{\downarrow}{X}YZ) + \nabla(X\overset{\downarrow}{Y}Z) + \nabla(XY\overset{\downarrow}{Z}).$$

* O izražavanju V grad vidi str. 633.

Zatim dobivene produkte transformiramo po pravilima vektorske algebre tako da iza operatora ∇ stoji samo faktor s znakom ↓ ; taj znak nakon izračunavanja izostavljamo.

Primjeri: 1) $\operatorname{div}(U\mathbf{V}) = \nabla(U\mathbf{V}) = \nabla(\overset{\downarrow}{U}\mathbf{V}) + \nabla(U\overset{\downarrow}{\mathbf{V}}) =$

$= \mathbf{V}\cdot\nabla U + U\cdot\nabla\mathbf{V} = \mathbf{V}\operatorname{grad} U + U\operatorname{div}\mathbf{V}.$

2) $\operatorname{div}(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) = \nabla(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{V}_1} \times \mathbf{V}_2) + \nabla(\mathbf{V}_1 \times \overset{\downarrow}{\mathbf{V}_2}) =$

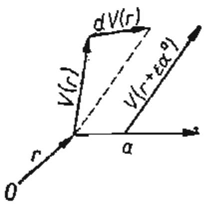
$= \nabla\, \overset{\downarrow}{\mathbf{V}_1}\mathbf{V}_2 + \nabla\, \mathbf{V}_1\overset{\downarrow}{\mathbf{V}_2} = \mathbf{V}_2\nabla\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1\nabla\mathbf{V}_2 =$

$= \mathbf{V}_2(\nabla \times \mathbf{V}_1) - \mathbf{V}_1(\nabla \times \mathbf{V}_2) = \mathbf{V}_2\operatorname{rot}\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1\operatorname{rot}\mathbf{V}_2.$

Operator (a∇). Pri izračunavanju pojavljuje se ponekad operatorski izraz $(\mathbf{a}\nabla) = a_x\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + a_y\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$. Vektor $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{V} =$ $= (\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{V}$ nazivamo *gradijentom vektorskog polja* **V** po vektoru **a**; on je jednak derivaciji vektora **V** po vektoru **a**

$$(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{V} = (\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{V} =$$
$$= |\mathbf{a}|\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbf{V}(\mathbf{r}+\varepsilon\mathbf{a}^\circ) - \mathbf{V}(\mathbf{r})}{\varepsilon}$$

(sl. 413).



Sl. 413

Primjer: $\operatorname{grad}(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2) = \nabla(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{V}_1}\mathbf{V}_2) + \nabla(\mathbf{V}_1\overset{\downarrow}{\mathbf{V}_2}).$

Prema formuli $\mathbf{b}(\mathbf{ac}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c} + \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (vidi str. 607)

$$\operatorname{grad}(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2) = (\mathbf{V}_2\nabla)\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \times (\nabla \times \mathbf{V}_1) + (\mathbf{V}_1\nabla)\mathbf{V}_2 +$$
$$+ \mathbf{V}_1 \times (\nabla \times \mathbf{V}_2) = (\mathbf{V}_2\operatorname{grad})\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \times \operatorname{rot}\mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_1\operatorname{grad})\mathbf{V}_2 +$$
$$+ \mathbf{V}_1 \times \operatorname{rot}\mathbf{V}_2.$$

Izraz (a∇) **V** možemo pretvoriti prema formuli

$$2(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{V} = \operatorname{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{a}) + \operatorname{grad}(\mathbf{aV}) + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V} - \mathbf{V}\operatorname{div}\mathbf{a} -$$
$$- \mathbf{a} \times \operatorname{rot}\mathbf{V} - \mathbf{V} \times \operatorname{rot}\mathbf{a}.$$

Dvostruka primjena ∇; operator Δ

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \nabla(\nabla \times \mathbf{V}) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0, \\ 2)\ \nabla \times (\nabla U) = \operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0, \\ 3)\ \nabla(\nabla U) = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = \Delta U \end{array}\right\}\ \text{za svako polje.}$$

Δ (također i $\nabla\nabla$, ∇^2) je *Laplaceov operator*; njegov izraz u koordinatama je:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \text{ (Descartesove koordinate)},$$

$$\Delta U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \text{ (cilindarske koordinate)},$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\Theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2} + \frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\Theta \frac{\partial U}{\partial \Theta}$$
(sferne koordinate).

4) $\nabla(\nabla\mathbf{V})$ = grad div $\mathbf{V}$ i 5) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})$ = rot rot $\mathbf{V}$ međusobno su povezani formulom: $\nabla(\nabla\mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \Delta\mathbf{V}$. Ovdje je $\Delta\mathbf{V} = (\nabla\nabla)\mathbf{V}$ Laplaceov operator, primijenjen na vektor $\mathbf{V}$

$$\Delta \mathbf{V} = \Delta V_x \mathbf{i} + \Delta V_y \mathbf{j} + \Delta V_z \mathbf{k} = \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.$$

15. INTEGRALNI TEOREMI*

Teorem Ostrogradski-Gaussa

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{V}\, d\mathbf{S} = \int_{v} \operatorname{div} \mathbf{V}\, dv$$

izriče da je skalarni tok polja $\mathbf{V}$ kroz zatvorenu plohu Σ jednak integralu divergencije $\mathbf{V}$ protegnutom po prostoru v, koji je obuhvaćen unutar Σ.

U Descartesovim koordinatama

$$\iint_{\Sigma} (V_x\, dy\, dz + V_y\, dz\, dx + V_z\, dx\, dy) = \iiint_{v} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

(V_x, V_y, V_z su funkcije triju varijabli: x, y i z).

* Vidi str. 505 i 506.

Stokesov teorem

$$\oint_{C} \mathbf{V}\, d\mathbf{r} = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{V}\, d\mathbf{S}$$

izriče da je cirkulacija polja po krivulji C jednaka toku rotora kroz po volji uzetu plohu Σ, omeđenu rubom C*.

U Descartesovim koordinatama

$$\int_{C} (V_x\, dx + V_y\, dy + V_z\, dz) = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Za ravninsku zatvorenu krivulju (*Greenova formula*)

$$\int_{C} (V_x\, dx + V_y\, dy) = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\, dy$$

(V_x i V_y su funkcije dviju varijabli x i y.)

Greenovi teoremi

1) $\int_{\Sigma} U_1 \operatorname{grad} U_2\, d\mathbf{S} = \int_{v} (U_1 \Delta U_2 + \operatorname{grad} U_1 \operatorname{grad} U_2)\, dv$,

2) $\int_{\Sigma} (U_1 \operatorname{grad} U_2 - U_2 \operatorname{grad} U_1)\, d\mathbf{S} = \int_{v} (U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1)\, dv$

(U_1 i U_2 su skalarna polja, Σ je ploha koja omeđuje prostor v). Napose je (za $U_1 = 1$)

3) $\int_{\Sigma} \operatorname{grad} U\, d\mathbf{S} = \int_{v} \Delta U\, dv$.

U Descartesovim koordinatama teorem 3) poprima ovaj oblik:

$$\oint_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x} dy\, dz + \frac{\partial U}{\partial y} dz\, dx + \frac{\partial U}{\partial z} dx\, dy = \int_{v} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) dv.$$

16. BEZVRTLOŽNA I SOLENOIDALNA VEKTORSKA POLJA

Brezvrtložnim poljem V nazivamo polje za koje je rotor posvuda jednak 0. Ako je rot $\mathbf{V} = 0$, tada je $\mathbf{V}$ = grad U; funkciju U (potencijal $\mathbf{V}$)** u bilo kojoj tački M možemo izraziti formulom

* Tačnije vidi na str. 505.
** Ili »minus potencijal V«, vidi napomenu** na str. 626.

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\operatorname{div}\mathbf{V}\,\mathrm{d}v}{r},\tag{1}$$

gdje je r udaljenost volumenskog elementa $\mathrm{d}v$ od M; integral se proteže na cijeli prostor*.

Solenoidalnim poljem V nazivamo polje kojemu je divergencija posvuda jednaka 0. Ako je $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$, tada postoji takvo solenoidalno polje $\mathbf{W}$ (*vektorski potencijal* $\mathbf{V}$) da je $\mathbf{V} = \operatorname{rot}\mathbf{W}$ i

$$\mathbf{W} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\operatorname{rot}\mathbf{V}\,\mathrm{d}v}{r};\tag{2}$$

r ima isto značenje kao i u formuli (1); integral se proteže na cijeli prostor**.

Svako vektorsko polje $\mathbf{V}$ koje dovoljno brzo pada pri odmicanju u neizmjernost, može se jednoznačno rastaviti na zbroj brezvrtložnog polja $\mathbf{V}_1$ i solenoidalnog polja $\mathbf{V}_2$ ($\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$), koja se određuju ovim formulama:

$$\mathbf{V}_1 = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\int\frac{\operatorname{div}\mathbf{V}\,\mathrm{d}v}{r},\quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int\frac{\operatorname{rot}\mathbf{V}\,\mathrm{d}v}{r}.$$

Polje s tačkastim izvorima. *Newtonovo polje* (*Coulombovo polje*) $\mathbf{E} = \frac{e}{r^3}\mathbf{r}$ je bezvrtložno posvuda, a također solenoidalno posvuda, s izuzetkom pola 0 (izvora polja). Njegov potencijal je $U = -\frac{e}{r}$***. Skalarni tok $\oint_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$ jednak je nuli, ako ploha S ne uključuje unutar sebe izvor, i jednak je $4\pi e$, ako je izvor unutra; veličinu e nazivamo *izdašnost* (ili *intenzitet*) izvora.

Newtonovo polje s izvorom u tački $\mathbf{r}_1$ je

$$\mathbf{E} = \frac{e_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1);$$

s nekoliko izvora $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots$ intenzitet kojih je $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots$:

$$\mathbf{E} = \sum\frac{e_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i).$$

* Formula (1) vrijedi ako je divergencija polja **V** derivabilna i pri odmicanju u neizmjernost dovoljno brzo pada.

** Formula (2) vrijedi ako je rotacija polja **V** derivabilna i pri odmicanju u neizmjernost dovoljno brzo pada.

*** Ili $+\frac{e}{r}$; vidi napomenu** na str. 626.

Tok $\oint_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$ jednak je nuli, ako ploha S ne uključuje unutar sebe izvore, i jednak $4\pi\Sigma' e_i$, ako su izvori unutra (Σ' se proteže na izvore koji su unutar S).

17. LAPLACEOVA I POISSONOVA JEDNADŽBA

Laplaceova jednadžba. Određivanje skalarnog polja U, za koje je $\Delta U = 0$ ($\operatorname{div}\operatorname{grad} U = 0$), dovodi do *Laplaceove jednadžbe*, tj. do parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

ili u ravnini

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Funkcije koje zadovoljavaju tu jednadžbu (neprekinute i s neprekinutim parcijalnim derivacijama prvog i drugog reda) nazivamo *Laplaceovim* ili *harmonijskim funkcijama.* Ako su poznate vrijednosti harmonijske funkcije u tačkama zatvorene plohe Σ, tada je time potpuno određena vrijednost te funkcije u svim tačkama unutar te plohe; njihovo određivanje predstavlja Dirichletov problem. Ako su na zatvorenoj plohi poznate vrijednosti harmonijske funkcije U i njene derivacije $\frac{\partial U}{\partial n}$ u smjeru normale (vanjske) te plohe, tada vrijednosti U_M u tački M unutar plohe izračunavamo po formuli

$$U_M = \frac{1}{4\pi}\oint_\Sigma \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \frac{1}{4\pi}\oint_\Sigma \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}U\,\mathrm{d}S,$$

gdje je r udaljenost elementa $\mathrm{d}S$ od tačke M.

Poissonova jednadžba. Određivanje skalarnog polja U iz dane divergencije $\rho(x, y, z)$ njegova gradijenta dovodi do *Poissonove jednadžbe*

$$\Delta U = \rho(x, y, z)$$

ili

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \rho(x, y, z).$$

Ako je ρ neprekinuta funkcija i ako je poznato da za $r \to \infty$ (tj. pri odmicanju tačke u neizmjernost) funkcija U teži k nuli i to dovoljno brzo, tada je rješenje Poissonove jednadžbe *Newtonov potencijal* funkcije ρ definiran formulom

$$U_M = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho\, dv}{r},$$

gdje je r udaljenost elementa volumena dv od tačke M; integracija se proteže na cijeli prostor.

III. FOURIEROVI REDOVI (HARMONIJSKA ANALIZA)

1. OPĆA PRAVILA

Osnovni pojmovi. U nizu problema (diferencijalne jednadžbe, teorija titranja) treba zamijeniti zadanu periodičnu funkciju $f(x)$ s periodom T tačno ili približno trigonometrijskom sumom

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \ldots + a_n \cos n\omega x +$$
$$+ b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \ldots + b_n \sin n\omega x,$$

gdje je $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (ako je $T = 2\pi$, onda je $\omega = 1$). Aproksimacija $s_n(x)$ za $f(x)$ je najbolja (u smislu navedenom na str. 640) ako za koeficijente a_k i b_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ izaberemo *Fourierove koeficijente* zadane funkcije

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cos k\omega x \, dx = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos k\omega x \, dx =$$
$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} [f(x) + f(-x)] \cos k\omega x \, dx,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \sin k\omega x \, dx = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin k\omega x \, dx =$$
$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} [f(x) - f(-x)] \sin k\omega x \, dx$$

(Eulerove formule).

Ako $s_n(x)$ pri $n \to \infty$, za neki skup vrijednosti x, teži k određenom limesu $s(x)$, onda za te x imamo konvergentni *Fourierov red* zadane funkcije $f(x)$

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \ldots + a_n \cos n\omega x + \ldots + b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \ldots + b_n \sin n\omega x + \ldots$$

Fourierov red možemo napisati i u ovom obliku:

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + A_1 \sin(\omega x + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega x + \varphi_2) + \ldots + A_n \sin(n\omega x + \varphi_n) + \ldots,$$

gdje je $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ i $\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k}$.

U kompleksnom obliku Fourierov red glasi:

$$s(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x},$$

gdje je

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{za } n > 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & \text{za } n < 0. \end{cases}$$

Određivanje Fourierova reda zadane funkcije $f(x)$ zadatak je *harmonijske analize.*

Osnovna svojstva Fourierovih redova

1) Pri približnoj zamjeni funkcije $f(x)$ trigonometrijskom sumom

$$s_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^n \alpha_k \cos k\omega x + \sum_1^n \beta_k \sin k\omega x$$

srednja kvadratna pogreška (vidi str. 665)

$$\delta^2 = \int_0^T \frac{1}{T}[f(x) - s_n(x)]^2 dx$$

bit će najmanja ako za koeficijente α_k i β_k uzmemo Fourierove koeficijente dane funkcije.

2) Za svaku ograđenu i u intervalu $0 < x < T$ (vidi str. 322) po odsječcima naprekinutu funkciju Fourierov red *konvergira* u smislu sredine prema zadanoj funkciji, tj.

$$\int_0^T [f(x) - s_n(x)]^2 dx \to 0 \quad \text{za} \quad n \to \infty.$$

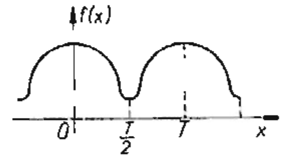
Iz konvergencije u smislu sredine izlazi da je

$$\frac{2}{T}\int_0^T [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (\textit{Parsevalova jednadžba}).$$

3) Ako funkcija $f(x)$ zadovoljava *Dirichletove uvjete*, tj.: a) interval u kojem je funkcija definirana možemo razdijeliti na konačan broj intervala, tako da je u svakom $f(x)$ neprekinuta i monotona, i b) u svakoj tački prekinutosti $f(x)$ egzistira $f(x+0)$ i $f(x-0)$ (vidi str. 322), onda Fourierov red za tu funkciju *konvergira*, njegova suma jednaka je $f(x)$ u tačkama neprekinutosti funkcije $f(x)$, a u tačkama prekinutosti je jednaka $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$.

4) Ako je periodična funkcija $f(x)$ neprekinuta sa svojim derivacijom do uključivo k-tog reda, onda $a_n n^k \to 0$ i $b_n n^k \to 0$ kada $n \to \infty$.

Simetrija. Ako je $f(x)$ *parna* funkcija, tj. $f(-x) = f(x)$ (*simetrija* I vrste, sl. 414), onda je

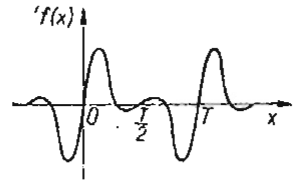


Sl. 414

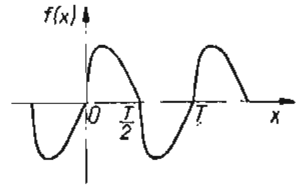
$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x) \cos k \frac{2\pi x}{T} dx$$

i $\quad b_k = 0 \ (k = 0, 1, 2, \ldots).$

Ako je $f(x)$ *neparna* funkcija, tj. $f(-x) = -f(x)$ (*simetrija II vrste*, sl. 415), onda je



Sl. 415



Sl. 416

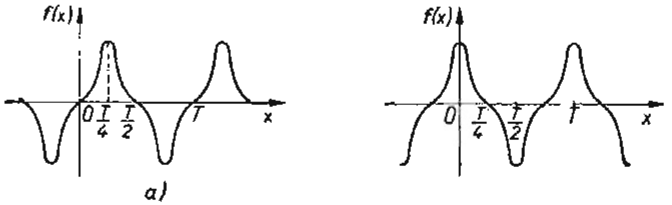
$$a_k = 0 \quad \text{i} \quad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x) \sin k \frac{2\pi x}{T} dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ako je $\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x)$ (*simetrija III vrste*, sl. 416), onda je

$$\left.\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(2k+1)\frac{2\pi x}{T}\,dx, \quad a_{2k}=0 \\ b_{2k+1} &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(2k+1)\frac{2\pi x}{T}\,dx, \quad b_{2k}=0 \end{aligned}\right\} \quad (k=0,1,2,\ldots).$$

Ako je funkcija neparna, a pored toga ima simetriju III vrste (*simetrija vrste* IV *a*, sl. 417, *a*), onda je

$$a_k = b_{2k} = 0 \quad \text{i} \quad b_{2k+1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(x)\sin(2k+1)\frac{2\pi x}{T}\,dx \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$



Sl. 417

Ako je funkcija parna, a pored toga ima simetriju III vrste (*simetrija vrste* IV b, sl. 417, *b*), onda je

$$b_k = a_{2k} = 0 \quad \text{i} \quad a_{2k+1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(x)\cos(2k+1)\frac{2\pi x}{T}\,dx \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Razvoj neperiodične funkcije u Fourierov red. Svaku funkciju $f(x)$ koja u intervalu $0 \leqslant x \leqslant l$ zadovoljava Dirichletove uvjete (vidi str. 641) možemo u tom intervalu razviti u konvergentne redove oblika

1) $f_1(x) =$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{2\pi x}{l} + a_2\cos 2\frac{2\pi x}{l} + \ldots + a_n\cos n\frac{2\pi x}{l} + \ldots +$$

$$+ b_1\sin\frac{2\pi x}{l} + b_2\sin 2\frac{2\pi x}{l} + \ldots + b_n\sin n\frac{2\pi x}{l} + \ldots$$

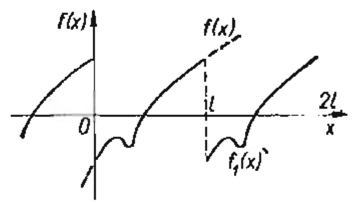
ili

2) $$f_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{l} + a_2\cos 2\frac{\pi x}{l} + \ldots + a_n\cos n\frac{\pi x}{l} + \ldots$$

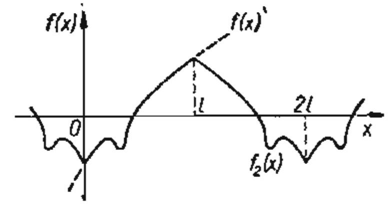
ili

3) $$f_3(x) = b_1\sin\frac{\pi x}{l} + b_2\sin 2\frac{\pi x}{l} + \ldots + b_n\sin n\frac{\pi x}{l} + \ldots$$

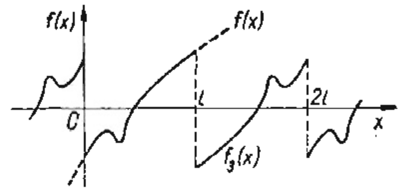
Funkcija $f_1(x)$ je periodična s periodom $T = l$, i poklapa se sa $f(x)$* u intervalu $0 < x < l$ (sl. 418). Koeficijente razvoja dobivamo po Eulerovim formulama (vidi str. 639) za $\omega = \frac{2\pi}{l}$. Funkcija $f_2(x)$ je periodična s periodom $T = 2l$, ima simetriju I vrste, a u intervalu $0 \leqslant x \leqslant l$ poklapa se sa $f(x)$ (sl. 419). Koeficijente razvoja $f_2(x)$ dobivamo po formulama za simetriju I vrste pri $T = 2l$. Funkcija $f_3(x)$ je periodična s periodom $T = 2l$, ima simetriju II vrste,



Sl. 418



Sl. 419



Sl. 420

a u intervalu $0 < x < l$ poklapa se sa $f(x)$ (sl. 420). Koeficijente razvoja $f_3(x)$ dobivamo po formulama simetrije II vrste pri $T = 2l$.

Fourierov integral. Ako funkcija $f(x)$ na po volji odaberivom konačnom intervalu zadovoljava Dirichletove uvjete (vidi str. 641)

* U tačkama prekinutosti smatramo da je $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$.

i, pored toga, integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ konvergira (vidi str. 465), onda vrijedi formula *(Fourierov integral)*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\,du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-iut}dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt$$

(u tačkama prekinutosti uzimamo da je $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$). Tu formulu možemo shvatiti kao limes formule razvoja u trigonometrijski red neperiodične funkcije $f(x)$ u intervalu $(-l, +l)$ kada $l \to -\infty$. Dok Fourierov red predočuje periodičnu funkciju (s periodom T) u obliku sume harmonijskih titranja s frekvencijama $u_n = n\frac{2\pi}{T}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i amplitudama A_n, Fourierov integral u izvjesnom smislu predočuje funkciju $f(x)$ u obliku sume neizmjerno velikog broja titranja s neprekinuto promjenljivom frekvencijom u. Kažemo da Fourierov integral daje razvoj funkcije u *neprekinut spektar*, pri čemu frekvenciji n odgovara *gustoća spektra*

$$g(u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-iut}\,dt.$$

Fourierov integral dobiva jednostavniji oblik ako je $f(x)$ parna funkcija

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \cos ux\,du \int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt,$$

i ako je $f(x)$ neparna funkcija

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \sin ux\,du \int\limits_{0}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt.$$

Primjer: Za parnu funkciju $f(x) = e^{-|x|}$ dobivamo da je gustoća spektra jednaka

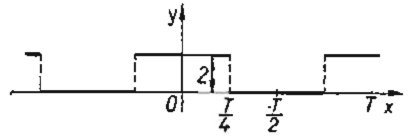
$$g(u) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}\cos ut\,dt = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{u^2+1}, \quad \text{tj.} \quad e^{-|x|} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos ux}{u^2+1}\,du.$$

2. TABLICA NEKIH RAZVOJA U FOURIEROV RED

Ovdje su prikazani razvoji u trigonometrijski red nekih jednostavnijih funkcija zadanih u određenom intervalu i dalje periodički produženih. Pored razvoja nacrtan je odgovarajući graf. Mnoge jednostavne funkcije možemo svesti na ove iz tablice promjenom mjerila kako u smjeru osi Ox, tako i u smjeru Oy, a također i translacijom koordinatnih osi. Npr. funkciju s periodom T (sl. 421), zadanu uvjetima

$$y = 2\left(0 < x < \frac{T}{4}\right),$$

$$y = 0\left(\frac{T}{4} < x < \frac{T}{2}\right),$$



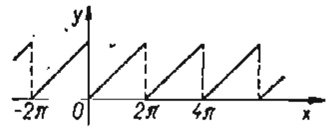
Sl. 421

$f(-x) = f(x)$, svodimo na oblik 5 $(a = 1$, vidi tablicu) supstitucijom varijabli $Y = y - 1$, $X = \frac{2\pi x}{T} + \frac{\pi}{2}$. Kako je $\sin(2n+1)\left(\frac{2\pi x}{T} + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n\cos(2n+1)\frac{2\pi x}{T}$, zamjenom varijabli u redu (5) dobivamo za našu funkciju

$$y = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{2\pi x}{T} - \frac{1}{3}\cos 3\frac{2\pi x}{T} + \frac{1}{5}\cos 5\frac{2\pi x}{T} - \ldots\right).$$

---

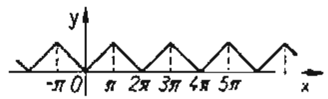
1) $y = x$ za $0 < x < 2\pi$



$$y = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right)$$

---

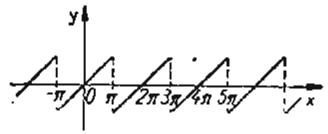
2) $y = x$ za $0 \leqslant x \leqslant \pi$



$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

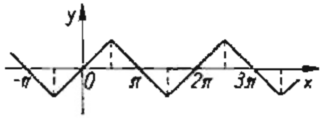
---

3) $y = x$ za $-\pi < x < \pi$



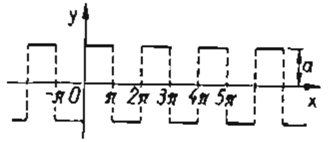
$$y = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$$

4) $y = x$ za $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$



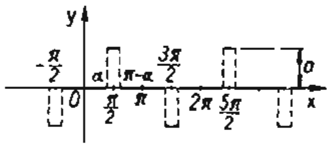
$$y = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots\right)$$

5) $y = a$ za $0 < x < \pi$



$$y = \frac{4a}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right)$$

6) $y = 0$ za $0 \leqslant x < \alpha$ i za $\pi - \alpha < x \leqslant \pi$,
$y = a$ za $\alpha < x < \pi - \alpha$



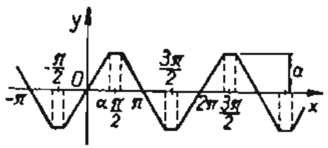
$$y = \frac{4a}{\pi}\left(\cos\alpha \sin x + \frac{1}{3}\cos 3\alpha \sin 3x + \frac{1}{5}\cos 5\alpha \sin 5x + \dots\right)$$

7) $y = \frac{ax}{\alpha}$ za $0 \leqslant x \leqslant \alpha$,

$y = a$ za $\alpha \leqslant x \leqslant \pi - \alpha$,

$y = \frac{a(\pi - x)}{\alpha}$ za $\pi - \alpha \leqslant x \leqslant \pi$

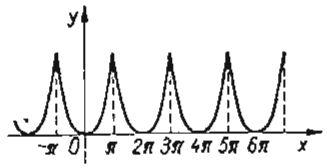
$$y = \frac{4}{\pi}\frac{a}{\alpha}\left(\sin\alpha \sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3\alpha \sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5\alpha \sin 5x + \dots\right)$$



Napose za $\alpha = \frac{\pi}{3}$:

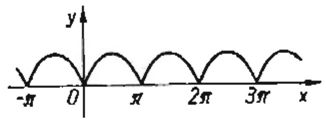
$$y = \frac{6\sqrt{3}a}{\pi^2}\left(\sin x - \frac{1}{5^2}\sin 5x + \frac{1}{7^2}\sin 7x - \frac{1}{11^2}\sin 11x + \dots\right)$$

8) $y = x^2$ za $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$



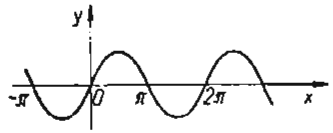
$$y = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right)$$

9) $y = x(\pi - x)$ za $0 \leqslant x \leqslant \pi$



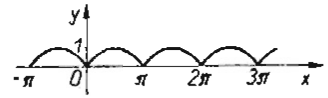
$$y = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots\right)$$

10) $y = x(\pi - x)$ za $0 \leqslant x \leqslant \pi$



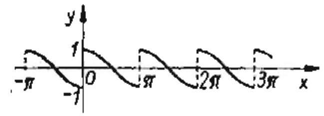
$$y = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3^3}\sin 3x + \frac{1}{5^3}\sin 5x + \dots\right)$$

11) $y = \sin x$ za $0 \leqslant x \leqslant \pi$



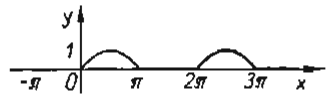
$$y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \dots\right)$$

12) $y = \cos x$ za $0 < x < \pi$



$$y = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2\sin 2x}{1\cdot 3} + \frac{4\sin 4x}{3\cdot 5} + \frac{6\sin 6x}{5\cdot 7} + \dots\right)$$

13) $y = \sin x$ za $0 \leqslant x \leqslant \pi$,
$y = 0$ za $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$



$$y = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \dots\right)$$

14) $y = \cos ux$ za $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

$$y = \frac{2u \sin u\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2u^2} - \frac{\cos x}{u^2-1} + \frac{\cos 2x}{u^2-4} - \frac{\cos 3x}{u^2-9} + \ldots\right]$$

(u je po volji odaberiv cio broj)

15) $y = \sin ux$ za $-\pi < x < \pi$

$$y = \frac{2 \sin u\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1-u^2} - \frac{2 \sin 2x}{4-u^2} + \frac{3 \sin 3x}{9-u^2} - \ldots\right)$$

(u je po volji odaberiv cio broj)

16) $y = x \cos x$ za $-\pi < x < \pi$

$$y = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{4 \sin 2x}{1 \cdot 3} - \frac{6 \sin 3x}{3 \cdot 5} + \frac{8 \sin 4x}{5 \cdot 7} - \ldots$$

17) $y = -\ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)$ za $0 < x \leqslant \pi$

$$y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots$$

18) $y = \ln\left(2 \cos \frac{x}{2}\right)$ za $0 \leqslant x < \pi$

$$y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \ldots$$

19) $y = \frac{1}{2}\ln \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ za $0 < x < \pi$

$$y = \cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \ldots$$

Mnoge formule za razvoj funkcija u trigonometrijske redove možemo dobiti iz redova potencija za funkcije kompleksne varijable. Npr. iz razvoja

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots \quad (|z| < 1)$$

ako stavimo

$$z = ae^{i\varphi}$$

i odijelimo realni i imaginarni dio, dobivamo

$$\left.\begin{aligned} 1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \ldots + a^n \cos n\varphi + \ldots &= \\ &= \frac{1 - a\cos\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}, \\ a\sin\varphi + a^2 \sin 2\varphi + \ldots + a^n \sin n\varphi + \ldots &= \\ &= \frac{a\sin\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}. \end{aligned}\right\} |a| < 1.$$

3. PRIBLIŽNA HARMONIJSKA ANALIZA

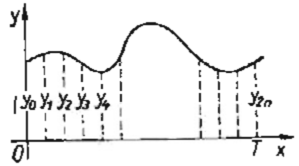
Besselove formule. Približno računanje koeficijenata Fourierovih redova zasniva se na zamjeni Eulerovih integrala (vidi str. 639) sa sumama po jednoj od formula približnog integriranja. Najpogodnija je trapezna formula (vidi na str. 457). Pomoću nje možemo dobiti ove *Besselove formule* za približnu harmonijsku analizu. Neka je period T podijeljen na $2n$ jednakih dijelova (sl. 422), apscise djelišta su $x_k = \frac{kT}{2n}$, ordinate u djelištima su $f(x_k) = y_k$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$. Tada je približno

$$na_0 = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k,$$

$$na_m = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \cos\frac{km\pi}{n},$$

$$nb_m = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \sin\frac{km\pi}{n}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n$$

(pri tome je uvijek $b_n = 0$).



Sl. 422

Ako sastavimo trigonometrijsku sumu

$$s_r(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{r} a_k \cos k\frac{2\pi x}{T} + \sum_{k=1}^{r} b_k \sin k\frac{2\pi x}{T}, \quad r < n,$$

onda ta suma daje najbolje približenje u smislu metode najmanjih kvadrata (vidi str. 666) za funkciju zadanu ordinatama y_k $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$, ako njene koeficijente računamo po Besselovim formulama. Za slučaj $r = n$ trigonometrijska suma

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{2\pi x}{T} + a_2 \cos 2\frac{2\pi x}{T} + \ldots + \frac{a_n}{2}\cos n\frac{2\pi x}{T} +$$

$$+ b_1 \sin\frac{2\pi x}{T} + b_2 \sin 2\frac{2\pi x}{T} + \ldots + b_{n-1}\sin(n-1)\frac{2\pi x}{T},$$

kojoj su koeficijenti računani po Besselovim formulama, za $x = x_k$ prima zadane vrijednosti y_k, i stoga rješava zadaću *trigonometrijske interpolacije* za periodičnu funkciju (vidi str. 667).

Šablone i uređaji. Pri računanju po Besselovim formulama primjenjujemo specijalne računske sheme i šablone. Ovdje su dane sheme za harmonijsku analizu ako period podijelimo na 12 dijelova odnosno na 24 dijela.

Ako je funkcija $f(x)$ zadana grafički, onda za približnu grafičku analizu, pored primjene Besselovih formula, možemo upotrijebiti specijalne uređaje nazvane *harmonijskim analizatorima*. Šiljkom analizatora prođemo grafom zadane funkcije, nakon čega specijalni računski uređaji daju približne vrijednosti Fourierovih koeficijenata.

Sheme za približnu harmonijsku analizu

Shema I. *Period T podijeljen je na* 12 *jednakih dijelova*. Ordinate djelišta su: $y_0, y_1, \ldots, y_{11}$. Sume i razlike nalazimo po shemi

$\pm$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	s_0	s_1	s_2	s_3	d_1	d_2	d_3
		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7		s_6	s_5	s_4		d_5	d_4	
Sume	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	δ_1	δ_2	δ_3
Razlike		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5		τ_0	τ_1	τ_2		γ_1	γ_2	

Daljnje računanje provodimo po shemi

	Članovi s kosinusima								Članovi sa sinusima					
1	σ_0 σ_2	σ_1 σ_3	τ_0		σ_0	$-\sigma_3$	τ_0	τ_2	δ_3				δ_1	δ_3
1 — 0,134 (= 0,866)				τ_1						δ_2	γ_1	γ_2		
0,5			τ_2		$-\sigma_2$	σ_1			δ_1					
Sume	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
Sume I + II	$6a_0$*		$6a_1$		$6a_2$		—		$6b_1$		$6b_2$		—	
Razlike I — II	$6a_6$*		$6a_5$		$6a_4$		$6a_3$		$6b_5$		$6b_4$		$6b_3$	

* Treba imati u vidu da u formuli interpolacijskog trigonometrijskog polinoma nema a_0 i a_n, nego $a_0/2$ i $a_n/2$.

Pri računanju po toj shemi umjesto σ, τ, δ i γ treba uvrstiti dotične veličine pomnožene s faktorima koji su s lijeve strane u istom retku (umjesto 0,866 napisano je 1 — 0,134, jer prilikom upotrebe logaritamskog računala možemo tačnije pomnožiti sa 0,134 nego sa 0,866).

Shema II. *Period T podijeljen je na* 24 *dijela*. Ordinate djelišta $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{23}$ pišemo ovako:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & y_2 & y_4 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{12} \\ & y_{22} & y_{20} & y_{18} & y_{16} & y_{14} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} y_3 & y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{13} & y_{15} \\ & y_1 & y_{23} & y_{21} & y_{19} & y_{17} & \end{array}$$

Za svaku grupu ordinata posebno računamo po prije napisanoj shemi za 12 ordinata. Označimo koeficijente dobivene od prve grupe ordinata sa A_k i B_k, a od druge grupe sa A'_k i B'_k. Pošto $\bar{A}_k$ i $\bar{B}_k$ izračunamo po formulama

$$\bar{A}_0 = A'_0,\quad \bar{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A'_1 - B'_1),\quad \bar{A}_2 = -B_2,\quad A_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A'_3 + B'_3),$$

$$\bar{A}_4 = -A_4,\qquad \bar{A}_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A'_5 - B'_5),$$

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A'_1 + B'_1),\qquad \bar{B}_2 = A'_2,\qquad \bar{B}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A'_3 - B'_3),$$

$$\bar{B}_4 = -B'_4,\qquad \bar{B}_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A'_5 + B'_5),\qquad \bar{B}_6 = -A'_6.$$

(zapravo ne treba računati $\bar{A}_k$ i $\bar{B}_k$, nego te vrijednosti pomnožene sa 6, vidi dolje), naći ćemo sume i razlike koje daju tražene koeficijente

	$6A_0$	$6A_1$	$6A_2$	$6A_3$	$6A_4$	$6A_5$	$6A_6$
	$6\bar{A}_0$	$6\bar{A}_1$	$6\bar{A}_2$	$6\bar{A}_3$	$6\bar{A}_4$	$6\bar{A}_5$	
Sume	$12a_0$*	$12a_1$	$12a_2$	$12a_3$	$12a_4$	$12a_5$	$12a_6$
Razlike	$12a_{12}$*	$12a_{11}$	$12a_{10}$	$12a_9$	$12a_8$	$12a_7$	
	$6\bar{B}_1$	$6\bar{B}_2$	$6\bar{B}_3$	$6\bar{B}_4$	$6\bar{B}_5$	$6\bar{B}_6$	
	$6B_1$	$6B_2$	$6B_3$	$6B_4$	$6B_5$		
Sume	$12b_1$	$12b_2$	$12b_3$	$12b_4$	$12b_5$	$12b_6$	
Razlike	$12b_{11}$	$12b_{10}$	$12b_9$	$12b_8$	$12b_7$		

* Vidi napomenu s prethodne stranice.

Sinteza. Pod *sintezom* obično razumijevamo računanje vrijednosti periodične funkcije $f(x)$ zadane svojim Fourierovim redom. Ako se u granicama dopustive tačnosti u Fourierovom redu možemo ograničiti na prvih šest harmonika (tj. smatrati da je $a_k = b_k = 0$ za $k > 6$), onda računanje numeričkih vrijednosti $y_k = f(x_k)$ u tačkama $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ koje dijele period na 12 jednakih dijelova možemo provoditi pomoću sheme I sa str. 650. Za to treba na mjesto $s_0, s_1, \ldots, s_6$ staviti zadane koeficijente $a_0, a_1, \ldots, a_6$, a na mjesto $d_1, d_2, \ldots, d_5$ koeficijente $b_1, b_2, \ldots, b_5$ (koeficijent b_6 odbacujemo, jer dotični član reda ne utječe na vrijednost funkcije u razmatranim tačkama) i računati po shemi do kraja. Brojeve koje dobivamo u dva posljednja retka tablice sa str. 650 (umjesto $6a_0, 6a_1, \ldots, 6a_6, 6b_1, \ldots, 6b_5$) označit ćemo sa $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_6, \beta_1, \ldots, \beta_5$. Da bismo dobili tražene vrijednosti funkcija treba samo zbrajati i oduzimati po ovoj shemi

	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	
Sume	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
Razlike		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	

ŠESTI DIO

OBRADA OPAŽANJA

I. OSNOVI TEORIJE VJEROJATNOSTI I TEORIJA POGREŠAKA

1. TEORIJA VJEROJATNOSTI

Slučajni događaji. Ako se pri zadanim uvjetima neki događaj može dogoditi ili ne dogoditi, nazivamo ga *slučajnim*. Kvantitativna ocjena mogućnosti pojave zadanog slučajnog događaja jest njegova *vjerojatnost*.

Definicija vjerojatnosti. Ako uz neke uvjete mora nastupiti jedan od n nespojivih slučajnih događaja, a pri tome nema nikakvih osnova očekivanju da je jedan od njih u prednosti pred drugim, govorimo da ti događaji imaju istu vjerojatnost, nednaku $p = \frac{1}{n}$.

Ako je neki slučajni događaj A posljedica nekog od m događaja od ukupno n mogućih događaja (nespojivih i jednako vjerojatnih), onda *vjerojatnošću* događaja A nazivamo broj $p = \frac{m}{n}$. Nemogućem događaju odgovara vjerojatnost 0, a sigurnom događaju vjerojatnost 1. Vjerojatnost nekog događaja nalazi se između 0 i 1.

Zbrajanje i množenje vjerojatnosti. Vjerojatnost da se pojavi bilo koji (bez razlike koji) od međusobno nespojivih događaja jednaka je *sumi vjerojatnosti* tih događaja. Vjerojatnost istovremene pojave nekoliko događaja jednaka je *produktu vjerojatnosti* tih događaja. Ako pri tome događaji nastupaju jedan za drugim, pri računanju vjerojatnosti svakog događaja treba uzeti u obzir mogućnost utjecaja svih događaja koji su ranije nastupili. Npr. u kutiji se nalazi 5 crnih, 3 bijele i 2 crvene kugle. Vjerojatnost da ćemo izvući bijelu kuglu je 0,3; vjerojatnost da ćemo izvući crvenu kuglu je 0,2; vjerojatnost da ćemo izvući bijelu ili crvenu kuglu je 0,3 + + 0,2 = 0,5. Vjerojatnost da ćemo izvući jednu za drugom bijelu pa crvenu kuglu je $0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$, ako prvu izvučenu kuglu vratimo natrag, a $0{,}3 \cdot \frac{2}{9} = 0{,}067$, ako izvučenu kuglu ne vratimo.

Ponovljena ispitivanja. Ako načinimo n neovisnih ispitivanja, a pri svakom je vjerojatnost da nastupi događaj A jednaka p, onda je vjerojatnost da se događaj A pojavi m puta jednaka

$$p_{m,n} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \tag{1}$$

Ta vjerojatnost bit će najveća za $np + p - 1 \leqslant m < np + p$. Za velike m i n možemo dobiti približnu vrijednost $p_{m,n}$, pomoću Stirlingove formule (vidi na str. 184)

$$p_{m,n} \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \tag{2}$$

gdje je $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, $x = \frac{m-np}{\sigma}$.

Za male vrijednosti p tačnije vrijednosti daje *Poissonova formula*

$$p_{m,n} \approx \frac{y^m}{m!} e^{-y}, \text{ gdje je } y = np^*. \tag{3}$$

Ako broj pokusa n raste, najvjerojatnija *učestalost (frekvencija)* $\frac{m}{n}$ događaja A približavat će se vjerojatnosti p toga događaja. Pri tome se vjerojatnost da će učestalost događaja A ležati između

$$p - \frac{a\sigma}{n} \quad \text{i} \quad p + \frac{a\sigma}{n},$$

približava limesu koji je jednak

$$\Phi(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-x^2/2}\,dx. \quad (\textit{Laplaceov teorem}).$$

Funkciju $\Phi(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-x^2/2}\,dx$ nazivamo *Gaussovim integralom vjerojatnosti*** (tablice za $\Phi(x)$ vidi na str. 88 i 89).

* Kada je p blizu jedinice također upotrebljavamo Poissonovu formulu s time, da promatramo događaj suprotan događaju A (»ne A«), koji ima malu vjerojatnost $q = 1 - p$.

** Integralom vjerojatnosti često nazivamo funkciju

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \Phi(x\sqrt{2}).$$

Primjeri: 1) Kakva je vjerojatnost da se pri 400 bacanja kovanog novca učestalost pojava glave razlikuje od vjerojatnosti $p = 1/2$ za manje od $1/25$, tj. da je broj pojave glava uključen između 216 i 184? Kako je $\sigma = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 10$ i $\frac{a\sigma}{n} = \frac{1}{25}$, onda je $a = \frac{400}{10 \cdot 25} = 1{,}6$. Nepoznata vjerojatnost po Laplaceovu teoremu je $\approx \Phi(1{,}6) = 0{,}8904$.

2) Neka je vjerojatnost da se izradi pogrešan proizvod jednaka 0,01. Kakva je vjerojatnost da u partiji od 100 komada neće biti više od 3 pogrešna? Nepoznata vjerojatnost jednaka je $p = p_{0,100} + p_{1,100} + p_{2,100} + p_{3,100}$. Po Poissonovoj formuli ($y = 1$) dobivamo $p = \frac{1}{e}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = 0{,}9810$. Primjena Gaussova integrala u danom primjeru daje pregrube rezultate ($p = 0{,}928$). Ništa bolji rezultat ($p = 0{,}938$) ne dobivamo ni pomoću formule (2). Tačna vrijednost je $p = 0{,}9816$.

Zakon velikih brojeva. Posljedica Laplaceovog teorema: S vjerojatnošću koja je po volji blizu k 1, možemo očekivati da će se pri dovoljno velikom broju pokusa učestalost događaja A po volji malo razlikovati od njene vjerojatnosti (*zakon velikih brojeva — Bernoullijev teorem*).

Slučajne veličine. *Slučajnom veličinom* nazivamo varijablu kojoj je vrijednost ovisna o slučaju. Primjeri slučajnih veličina: broj pogodaka u cilj uz zadani broj hitaca, broj bodova pri kockanju, brzina molekula plina.

Za karakterizaciju slučajne veličine moramo znati skup mogućih vrijednosti te veličine, a i vjerojatnosti s kojima se te vrijednosti mogu pojaviti. Ti podaci tvore zakon *razdiobe* slučajnih veličina. Ako slučajna varijabla A može imati bilo koju vrijednost u nekom intervalu (a, b) (takva slučajna veličina naziva se *neprekinutom*), onda je vjerojatnost da veličina A dobije neku određenu vrijednost x jednaka nuli, jer je broj mogućih slučajeva neizmjeran. Ako smatramo da je za svaki mali dio, na intervalu (a, b) dopustivih vrijednosti varijable A, vjerojatnost da A padne na taj dio proporcionalna njegovoj duljini, slučajnu veličinu A možemo karakterizirati tako da zadamo vjerojatnost $\psi(x)\,dx$ toga, da je $x < A < x + dx$. Funkciju $\psi(x)$ nazivamo *gustoćom razdiobe vjerojatnosti* slučajne veličine A. Iz teorema o zbrajanju vjerojatnosti izlazi da je vjerojatnost upadanja A u interval od x_0 do x_1 jednaka $\int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\,dx$. Kako slučajna varijabla uvijek ima neku vrijednost, to je $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx = 1$.

Srednja (prosječna) vrijednost slučajne veličine. Ako slučajna veličina x može imati vrijednost $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s pripadnim vjerojatnostima $p_1, p_2, \ldots, p_n$, onda *srednjom (prosječnom) vrijednošću* veličine x (njenom *matematičkom nadom*) nazivamo

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Za neprekinutu slučajnu veličinu y s gustoćom rasporeda vrijednosti $\psi(y)$ matematička nada je

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\psi(y)\,dy.$$

Primjeri: 1) Na lutriji od 1000 srećaka ima jedan zgoditak od 1000 rubalja, 10 zgoditaka po 100 rubalja i 100 zgoditaka po 20 rubalja. Zakon raspodjele slučajne veličine a zgoditaka po jednoj srećki (u rubljima) naveden je u tablici

a_i	1000	100	20	0
p_i	0,001	0,01	0,1	0,889

Matematička nada a je $\bar{a} = 1000 \cdot 0{,}001 + 100 \cdot 0{,}01 + 20 \cdot 0{,}1 = 4$ (rublja).

2) Maxwellov zakon razdiobe (u kinetičkoj teoriji plinova): $\psi(v) = 4\sqrt{\frac{k^3}{\pi}}\, v^2 e^{-kv^2}$; vjerojatnost da je brzina molekula homogenog plina koji je u toplinskoj ravnoteži, između v i $v + dv$, jest $\psi(v)\,dv$ (k je pozitivna konstanta). Srednja vrijednost brzine je

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v\psi(v)\,dv = \frac{2}{\sqrt{k\pi}} \text{ (vidi str. 475)}$$

Disperzija. *Disperzijom* slučajne veličine nazivamo srednju vrijednost kvadrata odstupanja slučajne veličine od njene srednje vrijednosti.

Primjer: Za gore navedeni Maxwellov zakon razdiobe disperzija iznosi

$$\overline{(v-\bar{v})^2} = \int_0^{\infty} (v-\bar{v})^2\psi(v)\,dv = \int_0^{\infty} v^2\psi(v)\,dv - (\bar{v})^2 = \frac{3}{2k} - \frac{4}{\pi k} = \frac{0{,}227}{k}.$$

U ovom primjeru dobivena jednakost $\overline{(v-\bar{v})^2} = \overline{v^2} - (\bar{v})^2$ je identitet i obično se upotrebljava za izračunavanje disperzije.

2. TEORIJA POGREŠAKA

Slučajne pogreške. Veličine koje dobivamo iz pokusa neizbježno sadrže pogreške uvjetovane raznim uzrocima. Među njima treba razlikovati *sistematske* i *slučajne pogreške.* Sistematske pogreške uzrokovane su uzrocima koji djeluju na potpuno određen način, a uvijek ih možemo ukloniti ili ih možemo dovoljno tačno predviđati (npr. pogreške uzrokovane netačnim baždarenjem uređaja, pogreške zbog vanjskih uvjeta pokusa i sl.). Slučajne pogreške izaziva u pravilu veoma velik broj zasebnih uzroka, koji u svakom pojedinom mjerenju različito djeluju. Potpuno isključiti te pogreške nemoguće je; možemo ih uzimati u obzir samo *prosječno*, a za to treba poznavati zakone kojima su potčinjene slučajne pogreške. Mjerenu veličinu označavat ćemo sa A, a slučajnu pogrešku pri mjerenju sa x. Kako pogreška x može imati bilo koje vrijednosti, ona je neprekinuta slučajna veličina koju potpuno karakterizira njen zakon raspodjele (vidi na str. 655). Gustoća razdiobe vjerojatnosti $\varphi(x)$ slučajne pogreške mora u većini slučajeva, kako pokazuju pokusi, imati ova svojstva: 1) $\varphi(x)$ je *parna* funkcija; $\varphi(-x) = \varphi(x)$, tj. pogreške suprotnih predznaka jednako su vjerojatne. 2) $\varphi(x)$ za $x > 0$ je *monotono silazna funkcija*, tj. pogreške veće po apsolutnoj vrijednosti manje su vjerojatne. 3) Matematičko očekivanje apsolutne veličine pogreške, tj. $2\int_0^{\infty} x\varphi(x)\,dx$, konačna je veličina. Određene zakone razdiobe možemo dobiti na temelju nekih dodatnih uvjeta.

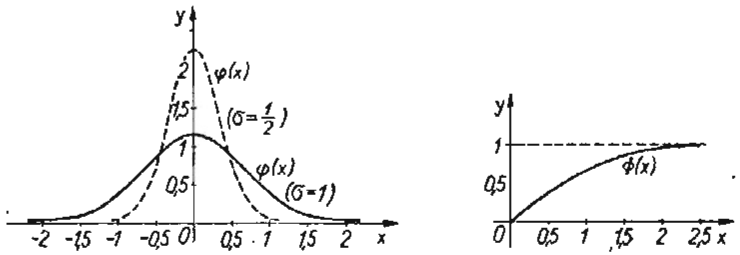
Normalni zakon razdiobe. Mjera tačnosti. Najjednostavniji i većinom dovoljno tačan prikaz realnosti je tzv. *normalni zakon razdiobe pogrešaka*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Taj zakon razdiobe možemo dobiti iz različitih teoretskih pretpostavki, napose iz zahtjeva da je najvjerojatnija vrijednost nepoznate veličine, za koju smo neposrednim mjerenjem dobili niz jednako tačnih vrijednosti, aritmetička sredina tih vrijednosti. Veličina σ^2 je *parametar* normalnog zakona: ona može imati bilo koju vrijednost. Kako je

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = 0 \text{ i } \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\,dx = \sigma^2, \text{ onda je}$$

$\sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ disperzija pogreške x. Povećanjem σ^2 umanjuje se maksimum $\varphi(x)$ koji odgovara $x = 0$ i jednak je $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Kako pri tome površina ispod grafa $\varphi(x)$ (sl. 423) ostaje nepromijenjena



Sl. 423

($= 1$, vidi str. 656), s povećanjem disperzije povećava se vjerojatnost većih pogrešaka. Vjerojatnost da pogreška x po apsolutnoj veličini ne pređe a, u slučaju normalnog zakona je

$$\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Veličina $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ koja je linearna kombinacija slučajnih veličina $x_1, x_2, \ldots, x_n$, s normalnim zakonom razdiobe i disperzijama $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ podvrgava se normalnom zakonu s disperzijom σ^2:

$$\sigma^2 = \lambda_1^2\sigma_1^2 + \lambda_2^2\sigma_2^2 + \ldots + \lambda_n^2\sigma_n^2.$$

Za karakteriziranje normalnog zakona razdiobe, pored disperzije, primjenjujemo još neke veličine; i to:

1) *Prosta srednja pogreška* η, koja izražava matematičku nadu apsolutne veličine pogreške.

$$\eta = \overline{|x|} = 2\int_0^{\infty} x\,\varphi(x)\,dx.$$

2) *Srednja kvadratna pogreška*, ili *standard* σ, jednaka je kvadratnom korijenu disperzije.

3) *Vjerojatna pogreška* r je veličina sa svojstvom, da je vjerojatnost pogreške koja ne prelazi r po apsolutnoj veličini jednaka $1/2$

$$\int_{-r}^{+r} \varphi(x)\,dx = \Phi\left(\frac{r}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}.$$

4) *Mjera tačnosti:* $h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$. Sve te veličine međusobno su povezane ovim odnosima*:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,h} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma = \frac{r}{\rho\sqrt{\pi}}, \qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}\,h} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\eta = \frac{r}{\sqrt{2}\,\rho},$$

$$r = \frac{\rho}{h} = \rho\sqrt{2}\,\sigma = \rho\sqrt{\pi}\,\eta, \qquad h = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma} = \frac{\rho}{r}.$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071 = \frac{1}{1{,}4142}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5642, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}7979 = \frac{1}{1{,}2533}, \right.$$

$$\left. \rho = 0{,}4769, \ \rho\sqrt{2} = 0{,}6745 = \frac{1}{1{,}4826}, \ \rho\sqrt{\pi} = 0{,}8454 = \frac{1}{1{,}1829}\right).$$

Određivanje disperzije prema podacima pokusa. Ako smo za bilo koju veličinu A neposrednim mjerenjem dobili n vrijednosti a_i jednake tačnosti i ako se pogreške veličine A podvrgavaju normalnom zakonu razdiobe, onda će najvjerojatnija vrijednost A biti *aritmetička sredina*

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Označimo sa ε_i odstupanje opažane vrijednosti a_i (za svako opažanje) veličine A od aritmetičke sredine a: $\varepsilon_i = a_i - a$.

Za određivanje disperzije normalnog zakona razdiobe pogrešaka služimo se u tom slučaju formulom

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n-1} \ **$$

---

* Veličinu ρ odredit ćemo iz jednadžbe $\Phi(\rho\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$.

** U teoriji vjerojatnosti i matematičkoj statistici za označavanje sumiranja često se služimo Gaussovim oznakama: $[\varepsilon\varepsilon]$ umjesto $\Sigma\,\varepsilon_i^2$, $[ab]$ umjesto $\Sigma\,a_i b_i$ itd.

ili određujemo σ po srednjoj pogrešci, koju nalazimo po formuli

$$\eta = \frac{\Sigma |\varepsilon_i|}{\sqrt{n(n-1)}} \approx \frac{\Sigma |\varepsilon_i|}{n - \frac{1}{2}}.$$

Ako se vrijednosti σ, koje dobivamo na dva načina, međusobno znatno razlikuju, to nam pokazuje da u tom slučaju ne možemo primijeniti normalni zakon razdiobe.

Ako su pojedine vrijednosti a_i veličine A dobivene s raznom tačnošću koja je karakterizirana srednjom kvadratnom pogreškom σ_i, onda je najvjerojatnija veličina A *težinska sredina*

$$a = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n},$$

gdje su težine w_i brojevi obrnuto proporcionalni kvadratima odgovarajućih srednjih kvadratnih pogrešaka. Srednja kvadratna pogreška pojedine vrijednosti a_i s težinom w_i je

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i^2}{(n-1) w_i}},$$

gdje je ε_i odstupanje a_i od srednje težine. Suglasno s formulom za disperziju određujemo linearne kombinacije srednje kvadratne pogreške, aritmetičke sredine i težinske sredine po formulama

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n(n-1)}} \quad \text{i} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i^2}{(n-1)(w_1 + w_2 + \ldots + w_n)}}.$$

Primjer: Neposrednim mjerenjem izmjerili smo 5 puta nutarnji (d) i vanjski (D) promjer valjkaste posude. Rezultati mjerenja uneseni su u ovu tablicu

Broj opažanja (i)	d	D	ε_{d_i}	$\varepsilon^2_{d_i}$	ε_{D_i}	$\varepsilon^2_{D_i}$
1	17,3	22,7	0,06	0,0036	−0,08	0,0064
2	17,0	22,8	−0,24	0,0576	0,02	0,0004
3	17,3	23,0	0,06	0,0036	0,22	0,0484
4	17,4	22,8	0,16	0,0256	0,02	0,0004
5	17,2	22,6	−0,04	0,0016	−0,18	0,0324
$\sum_i$	86,2	113,9	0,56*	0,0920	0,52*	0,0880

* U tome stupcu izračunana je suma apsolutnih vrijednosti.

Kada nađemo aritmetičke sredine $d = 17{,}24$ i $D = 22{,}78$, izračunat ćemo odstupanja ε_{d_i} i ε_{D_i}. Po prije navedenim formulama naći ćemo za pojedino mjerenje d

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}0920}{4}} = 0{,}152 \quad \text{ili} \quad \eta = \frac{0{,}56}{\sqrt{20}} = 0{,}125 \text{ (što daje } \sigma = 0{,}157\text{)};$$

za pojedino mjerenje D

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}0880}{4}} = 0{,}148 \quad \text{ili} \quad \eta = \frac{0{,}52}{\sqrt{20}} = 0{,}116 \text{ (što daje } \sigma = 0{,}146\text{)}.$$

Podudarnost vrijednosti σ dobivenih na dva načina potpuno zadovoljava. Aritmetičke sredine su

$$\sigma_d = \frac{0{,}152}{\sqrt{5}} = 0{,}068, \qquad \sigma_D = \frac{0{,}148}{\sqrt{5}} = 0{,}066.$$

Za debljinu stijene posude $m = \frac{1}{2}(D - d) = 2{,}77$ srednja kvadratna pogreška je

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{4}\sigma^2_d + \frac{1}{4}\sigma^2_D} = 0{,}047.$$

Metoda najmanjih kvadrata. Ako pokusima odredimo vrijednost f_i nekih funkcija

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

nepoznatih veličina $x_1, \ldots, x_n$, onda za određivanje tih veličina moramo riješiti sistem *uvjetnih jednadžbi*

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Općenito govoreći taj sistem je nespojiv (pri $m > n$) i za nepoznate veličine tražimo najvjerojatnije vrijednosti. Ako pogreške veličine $f_1, f_2, \ldots, f_n$ imaju normalnu razdiobu (što se obično pretpostavlja), onda će za najvjerojatniji sistem vrijednosti nepoznanica suma kvadrata odstupanja $\varepsilon_i = \varphi_i - f_i$ biti najmanja. Ako su uvjetne jednadžbe linearne

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 + \ldots + l_1 x_n &= f_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + l_2 x_n &= f_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m x_1 + b_m x_2 + \ldots + l_m x_n &= f_m, \end{aligned}$$

onda zahtjev minimuma (vidi str. 370) sume kvadrata odstupanja svodimo na sistem linearnih *normalnih jednadžbi**

$$\begin{aligned}
[aa]\,x_1 + [ab]\,x_2 + \ldots + [al]\,x_n &= [af], \\
[ba]\,x_1 + [bb]\,x_2 + \ldots + [bl]\,x_n &= [bf], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[la]\,x_1 + [lb]\,x_2 + \ldots + [ll]\,x_n &= [lf].
\end{aligned}$$

Da se dobije k-ta normalna jednadžba, treba svaku uvjetnu jednadžbu pomnožiti s koeficijentom uz x_k i sve jednadžbe zbrojiti.

U slučaju linearnih zavisnosti obično nalazimo grube približne vrijednosti $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ traženih vrijednosti $x_1, \ldots, x_n$ i razvijamo $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ u red po potencijama $\xi_1 = x_1 - x_1^0, \ldots, \xi_n = x_n - x_n^0$. Odbacimo članove više od prvog reda pa dobivamo linearne uvjetne jednadžbe pomoću kojih određujemo najvjerojatnije vrijednosti popravaka ξ_i.

Navedena metoda prikladna je za slučaj kada sve vrijednosti imaju jednaku tačnost. U protivnom slučaju svaka uvjetna jednadžba mora biti prethodno pomnožena s težinom, obrnuto proporcionalnom sa srednjom kvadratnom pogreškom odgovarajuće vrijednosti f_i.

Primjer: Mjerenje električnog otpora R bakrenog štapa pri različnim temperaturama ($t\,°C$) dala su rezultate navedene u prva dva stupca ove tablice

t	R	t^2	tR	R izračunat
19,1	76,30	364,8	1457,3	76,26
25,0	77,80	625,0	1945,0	77,96
30,1	79,75	906,0	2400,5	79,43
36,0	80,80	1296,0	2908,8	81,13
40,0	82,35	1600,0	3294,0	82,28
45,1	83,90	2034,0	3783,9	83,76
50,0	85,10	2500,0	4255,0	85,16
Σ 245,3	566,0	9325,8	20044,5	

Ako tražimo ovisnost R od t u obliku $R = a + bt$, onda za određivanje konstanti a i b dobivamo sedam jednadžbi oblika

$$R_i = a + bt_i,$$

gdje su t_i i R_i pripadne vrijednosti za t i R.

* O Gaussovim oznakama vidi opasku** na str. 659.

Normalne jednadžbe će biti

$$7a + [t]\,b = [R], \quad [t]\,a + [t^2]\,b = [tR]$$

ili

$$7a + 245{,}3b = 566{,}0 \quad 245{,}3a + 9325{,}8b = 20044{,}5.$$

Ako ih riješimo, dobivamo $a = 70{,}76$ i $b = 0{,}288$. Vrijednosti R izračunane po formuli $R = 70{,}76 + 0{,}288\,t$ dane su u posljednjem stupcu tablice.

II. EMPIRIJSKE FORMULE I INTERPOLACIJA

1. PRIBLIŽNO PREDOČIVANJE FUNKCIONALNE ZAVISNOSTI

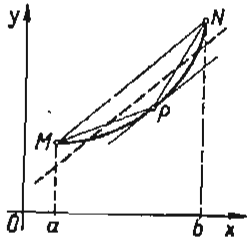
Postavljanje problema. U mnogo slučajeva treba za funkciju zadanu samo tablicama ili grafom naći analitički izraz koji približno predočuje tu funkciju. Sličan problem se može pojaviti i za funkciju zadanu formulom, ako je formula veoma složena ili neprikladna za traženu svrhu (npr. funkciju moramo integrirati, a njen integral ne možemo izraziti elementarnim funkcijama). Formule koje izražavaju funkcionalnu zavisnost dobivenu pokusom u obliku tablice ili grafa nazivamo *empirijskim formulama*. Za približno izražavanje zadane funkcije $f(x)$ obično izabiremo funkciju *aproksimacije* (približenja) $\varphi(x)$ određenog oblika, npr. tražimo $\varphi(x)$ u obliku polinoma

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

ili u obliku

$$\varphi(x) = Ae^{rx} + Be^{sx} + \ldots \text{ itd.}$$

i zahtijevamo da se funkcija $\varphi(x)$ što bolje približava $f(x)$ u nekom određenom intervalu ($a \leqslant x \leqslant b$). Koju najbolju aproksimaciju ćemo dobiti, ovisi o načinu na koji ocjenjujemo aproksimaciju funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$.



Sl. 424

Jednolika aproksimacija. Teoretski je za najbolju aproksimaciju potrebno da maksimum veličine $|f(x) - \varphi(x)|$ u intervalu $a \leqslant x \leqslant b$, u kome treba postići približan izraz $f(x)$, bude najmanji [u usporedbi s drugim izrazom $\varphi(x)$]. No ne postoji metoda kojom bismo efektivno postizavali takve *jednolike aproksimacije*, osim u pojedinim posebnim slučajevima. Tako npr. ako u intervalu $a < x < b$ funkcija $f(x)$ ima drugu derivaciju koja zadržava predznak, linearnu funkciju najbolje jednolike aproksimacije u tom intervalu dobivamo ovako (sl. 424): Na grafu funkcije $y = f(x)$ je tačka P, u kojoj je tangenta paralelna tetivi MN. Pravac koji spaja sredine tetiva MP i PN je graf tražene linearne funkcije.

Jednoliku aproksimaciju primjenjujemo uglavnom u teoretskim razmatranjima. Teoriju takvih približenja znatno je razradio P. L. Čebišev.

Aproksimacija po metodi najmanjih kvadrata. Najčešće se upotrebljava takva aproksimacija $\varphi(x)$ za koju veličina

$$M = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 \, dx.$$

ima najmanju vrijednost.

Ako parcijalne derivacije od M po parametrima koji određuju funkciju $\varphi(x)$ (vidi str. 370) izjednačimo s nulom, dobivamo jednadžbe kojima možemo naći najbolje (u navedenom smislu) vrijednosti tih parametara. Veličinu $\delta = \sqrt{M : (b - a)}$ nazivamo tada *srednjom kvadratnom pogreškom*.

Ako funkciju $\varphi(x)$ tražimo u obliku linearne kombinacije nekih zadanih funkcija

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$

(npr. $\varphi(x)$ je polinom ako je $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = x, \ldots, \varphi_n = x^n$, ili trigonometrijski polinom ako je $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = \cos x$, $\varphi_2 = \sin x, \ldots, \varphi_{2n-1} = \cos nx$, $\varphi_{2n} = \sin nx$), onda za određivanje $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dobivamo sistem linearnih jednadžbi

$$\frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial a_k} = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\, dx - \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\, dx = 0.$$

Taj sistem poprima naročito jednostavan oblik kada funkcija $\varphi_i(x)$ ima svojstvo *ortogonalnosti* u intervalu (a, b), tj.

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\, dx = 0 \qquad \text{za } i \neq k^*.$$

U tom slučaju je

$$a_k \int_a^b [\varphi_k(x)]^2 \, dx = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\, dx \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

(vidi Eulerove formule na str. 639). U vezi s tim pojednostavnjenjem, ako treba naći polinom aproksimacije $b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$, prikladnije je transformirati zadani interval (a, b) u $(-1, +1)$ uvrštenjem $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$ i tražiti taj polinom u obliku

---

* Dva primjera ortogonalnih sistema funkcija
1) $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots; \sin x, \ldots, \sin nx, \ldots$ na intervalu $(0, 2\pi)$.
2) Legendreovi polinomi $P_l(x)$ na intervalu $(-1, +1)$ (vidi str. 544).

$$\varphi(t) = a_0 P_0(t) + a_1 P_1(t) + \ldots + a_n P_n(t),$$

gdje su $P_k(t)$ Legendreovi polinomi.

Primjer: Naći najbolju aproksimaciju za $y = \sin x$ u obliku polinoma drugog stupnja u intervalu $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Zamjenom nezavisne varijable $x = \frac{\pi}{2}(t+1)$, prenesemo interval $(0, \pi)$ u $(-1, +1)$. Tražimo aproksimaciju u obliku

$$\varphi = a_0 + a_1 P_1(t) + a_2 P_2(t).$$

Tada je (vidi na str. 427)

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \sin\frac{\pi}{2}(t+1)\,dt = \frac{2}{\pi}, \quad a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} t\sin\frac{\pi}{2}(t+1)\,dt = 0,$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}(t+1)\,dt = \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right).$$

Odatle je

$$\sin x \approx \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}980 - 0{,}418\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Aproksimacija u pojedinim tačkama. U mnogo slučajeva, a naročito kada je funkcija $f(x)$ zadana grafom ili tablično, stupanj približenja ocjenjujemo po razlici $f(x) - \varphi(x)$ u ranije odabranim pojedinim tačkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$, a ne u svim tačkama intervala (a, b) u kome funkciju $f(x)$ treba aproksimativno izraziti. Funkciju $\varphi(x)$ smatramo najboljom aproksimacijom funkcije $f(x)$ (po metodi najmanjih kvadrata), ako za nju $S = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2$ ima najmanju vrijednost u odnosu na druge funkcije, među kojima smo odabrali traženu aproksimaciju*. Ako je $\varphi(x)$ potpuno određena parametrima $k, l, m, \ldots$, onda ćemo najbolju (u navedenom smislu) vrijednost tih parametara naći pomoću rješenja sistema jednadžbi

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial m} = 0, \ldots$$

* Kao i ranije, možemo definirati također najbolju aproksimaciju kao takvu, za koju je maksimum $|f(x_i) - \varphi(x_i)|$ najmanji; u praksi je traženje aproksimacije ovom metodom teško.

Ako je broj parametara koji određuju funkciju $\varphi(x)$ jednak broju odabranih tačaka $(n + 1)$, onda, općenito govoreći, $\varphi(x)$ možemo odabrati tako da je $\varphi(x_i) = f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ako riješimo taj sistem od $n+1$ jednadžbe sa $n+1$ nepoznanicom. Tada funkciju $\varphi(x)$ nazivamo *funkcijom interpolacije*, a proces traženja i računanja vrijednosti $\varphi(x)$ interpolacijom.

Najraširenija je *parabolna interpolacija* u kojoj za funkciju interpolacije odabiremo polinom $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Za periodične funkcije primjenjujemo *trigonometrijsku interpolaciju* (vidi na str. 650).

Aproksimacija po metodi srednjih vrijednosti, vidi na str. 673.

2. PARABOLNA INTERPOLACIJA

Opći slučaj. Kako god bila zadana funkcija $f(x)$ i bile odabrane čvorne tačke interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$, uvijek postoji jedan i samo jedan polinom n-tog stupnja $\varphi_n(x)$ koji u tim tačkama prima iste vrijednosti kao i $f(x)$: $\varphi(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Pri traženju polinoma interpolacije možemo se poslužiti *Lagrangeovom formulom*

$$\varphi_n(x) = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + \ldots + L_n(x) f_n,$$

gdje je

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

i

$$f_i = f(x_i).$$

Ako treba izračunati vrijednost $\varphi_n(x)$ za bilo koji određeni x, možemo se koristiti ovom unakrsnom shemom, koja je naročito pogodna pri upotrebi računskog stroja:

$$\begin{array}{lllll}
x_0 - x & f_0 & & & \\
x_1 - x & f_1 & (f_0, f_1) & & \\
x_2 - x & f_2 & (f_0, f_2) & (f_0, f_1, f_2) & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
x_n - x & f_n & (f_0, f_n) & (f_0, f_1, f_n) & \ldots (f_0, f_1, \ldots, f_n).
\end{array}$$

Svaki simbol $(f_0, f_1, \ldots, f_k)$ označava vrijednost u tački x polinoma interpolacije, konstruiranog po čvorovima $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Te brojeve računamo stupac za stupcem ovako: Brojeve stupca (f_0, f_k) dobivamo po formuli

$$(f_0, f_k) = \frac{(x_0 - x) f_k - (x_k - x) f_0}{(x_0 - x) - (x_k - x)}.$$

Svaki daljnji stupac dobivamo iz prethodnog po istoj shemi, npr.

$$(f_0, f_1, f_k) = \frac{(x_1 - x)(f_0, f_k) - (x_k - x)(f_0, f_1)}{(x_1 - x) - (x_k - x)} \text{ itd.}$$

Poredak čvorova možemo po volji odabrati.

Primjer: Treba izračunati sin 50°, koristeći se decimalnim vrijednostima sinusa 0°, 30°, 45°, 60°, 90°. Unakrsna shema ima u tom slučaju ovaj oblik:

—50	0,00000				
—20	0,50000	0,83333			
— 5	0,70711	0,78568	0,7 6980		
10	0,86603	0,72169	0,7 5890	66 17	
40	1,00000	0,55556	0,7 4074	66 57	04

Ako su prvi brojevi u bilo kojem stupcu jednaki (u navedenom primjeru su odijeljeni) ne moramo ih uvoditi u dalji račun. Tako npr. u posljednjem stupcu dobivamo posljednje cifre rezultata

$$\frac{10 \cdot 57 - 40 \cdot 17}{10 - 40} = 04.$$

Konačno je sin 50° = 0,76604.

Ekvidistantni čvorovi. Tablice diferencija. Čest je slučaj kada su interpolacijski čvorovi na jednakoj udaljenosti. Konstantnu veličinu $h = x_{i+1} - x_i$ nazivamo tada *korakom* zadane tablice vrijednosti $f(x)$; $y_k = x_0 + hk$. (Tu oznaku zadržavamo i za $k < 0$).

Prve diferencije funkcije s obzirom na zadani korak h određujemo po formulama

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x); \qquad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i.$$

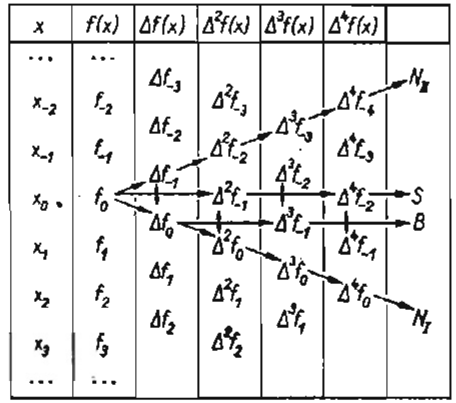
Diferencije prvih diferencija tvore *druge diferencije*

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x + h) - \Delta f(x); \qquad \Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i.$$

Isto tako određujemo i diferencije viših redova. Diferencije možemo izraziti i zadanim vrijednostima funkcija:

$$\Delta^k f_0 = f_k - k f_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} f_{k-2} - \ldots \pm f_0$$

[simbolički: $\Delta^k f_0 = (E - 1)^k f_0$, ako označimo $E^i f_0 = f_i$]. Za interpolacije po zadanim vrijednostima funkcija sastavljamo *tablicu diferencija* prema ovoj shemi:



U toj tablici je svaki broj (osim onih u prva dva stupca) diferencija dvaju brojeva prethodnog stupca, koji su za pola retka niže i za pola retka više od njega*. Prilikom sastavljanja tablice moramo imati u vidu da pogreške u prvom stupcu, koje po apsolutnoj vrijednosti nisu veće od ε, mogu uzrokovati pogreške do 2ε u drugom, do 4ε u trećem, a do $2^{m-1}\varepsilon$ u četvrtom stupcu. Zato čak i neznatne pogreške (npr. pogreške zaokruživanja) u vrijednostima funkcija mogu znatno utjecati na diferencije viših redova. Računanje diferencija treba obustaviti ako su svi brojevi nekog stupca međusobno gotovo jednaki (»diferencije konstanata«). Diferencije m-tog reda su konstante za polinome m-tog stupnja. Zato njihova približna konstantnost pokazuje da danu funkciju možemo dovoljno tačno prikazati polinomom m-tog stupnja. (Za tablicu na str. 671 $m = 3$; četvrte diferencije su suvišne.)

Formule interpolacije s diferencijama. Polinom interpolacije možemo naći pomoću diferencija po jednoj od ovih formula $\left(\text{uvodimo oznaku } u = \frac{x - x_0}{h}\right)$:

* Primjer takove sheme vidi na str. 671.

$$N_{\mathrm{I}}(x)=f_0+u\Delta f_0+\frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 f_0+\ldots+\frac{u(u-1)\ldots(u-n+1)}{n!}\Delta^n f_0,$$

$$N_{\mathrm{II}}(x)=f_0+u\,\Delta f_{-1}+\frac{u(u+1)}{2}\Delta^2 f_{-2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{u(u+1)\ldots(u+n-1)}{n!}\Delta^n f_{-n}$$

(*Newtonove formule*)

$$S(x)=f_0+u\frac{\Delta f_0+\Delta f_{-1}}{2}+\frac{u^2}{2}\Delta^2 f_{-1}+\frac{u(u^2-1)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 f_{-2}+\Delta^3 f_{-1}}{2}+$$

$$+\frac{u^2(u^2-1)}{4!}\Delta^4 f_{-2}+\ldots+\frac{u^2(u^2-1)\ldots[u^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n} f_{-n}$$

(*Stirlingova formula*)

$$B(x)=f_0+u\,\Delta f_0+\frac{u(u-1)}{2}\,\frac{\Delta^2 f_{-1}+\Delta^2 f_0}{2}+$$

$$+\frac{u(u-1)(u-0{,}5)}{3!}\Delta^3 f_{-1}+\frac{u(u^2-1)(u-2)}{4!}\,\frac{\Delta^4 f_{-2}+\Delta^4 f_{-1}}{2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(u-0{,}5)\,u\,(u^2-1)\ldots[u^2-(n-1)^2]\,(u-n)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} f_{-1}.$$

(*Besselova formula*)

Newtonove formule daju polinom interpolacije ako je x_0 prvi, odnosno posljednji interpolacijski čvor, dok je za Besselovu i Stirlingovu formulu x_0 srednji ili jedan od srednjih interpolacijskih čvorova. Diferencije koje upotrebljavamo za računanje po ovoj ili drugoj formuli navedene su u tablici na str. 669. Interpolacijske formule uglavnom upotrebljavamo za računanje međuvrijednosti funkcija zadanih tablično. Prikladnim izborom x_0 možemo uvijek postići $|u|<1$. Za $|u|\leqslant 0{,}25$ najsvrsishodnija je primjena Stirlingove formule, za $0{,}25\leqslant u\leqslant 0{,}75$ pak Besselove formule. Newtonove formule upotrebljavamo tada, kada ne možemo upotrijebiti Stirlingovu ili Besselovu formulu, tj. kada x leži blizu početka ili završetka tablice.

Primjer: Izračunajmo za $x=22$ vrijednost funkcije $f(x)$, zadane prema tablici na str. 671*.

Kako smo već i napomenuli, ovdje ćemo se ograničiti na treće diferencije. Ako uzmemo da je $x_0=20$, onda je $u=\dfrac{22-20}{5}=0{,}4$.

* U tablici diferencija obično ne pišemo decimalne zareze nego diferencije izražavamo u jedinicama mjesne vrijednosti posljednje značajne znamenke.

Po Besselovoj formuli je

$$f(22)=25{,}34+0{,}4\cdot 9{,}82-\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{2}\,\frac{1{,}72+1{,}99}{2}+$$

$$+\frac{0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}1}{6}\cdot 0{,}27=29{,}05.$$

Po Stirlingovoj formuli je

$$f(22)=25{,}34+0{,}4\cdot\frac{8{,}10+0{,}82}{2}+\frac{0{,}16}{2}\cdot 1{,}72-$$

$$-\frac{0{,}4\cdot 0{,}84}{6}\cdot\frac{0{,}34+0{,}27}{2}=29{,}04.$$

Po prvoj Newtonovoj formuli je

$$f(22)=25{,}34+0{,}4\cdot 9{,}82-\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{2}\cdot 1{,}99+$$

$$+\frac{0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 1{,}6}{6}\cdot 0{,}32=29{,}05.$$

Ako bismo se ograničili na druge diferencije, onda bismo po formuli B dobili 29,05, po formuli S 29,06, a po formuli N 29,03.

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0				
		487			
5	4,87		78		
		565		29	
10	10,52		107		2
		672		31	
15	17,24		138		3
		810		34	
20	25,34		172		—7
		982		27	
25	35,16		199		5
		1181		32	
30	46,97		231		1
		1412		33	
35	61,09		264		
		1676			
40	77,85				

Pogreška interpolacije. Ako je $f(x)$ zadana analitički i ima u promatranom intervalu dovoljno neprekinutih derivacija, onda je pogreška dobivena zamjenom $f(x)$ polinomom interpolacije po Langrengeovoj formuli

$$f(x) - \varphi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n),$$

gdje je ξ neka međuvrijednost između najvećeg i najmanjeg od brojeva $x, x_0, x_1, \dots, x_n$. Za formule diferencija vrijedi

$$f(x) - N_{\mathrm{I}}(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot u(u-1)\dots(u-n),$$

$$f(x) - N_{\mathrm{II}}(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot u(u+1)\dots(u+n),$$

$$f(x) - S(x) = \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(\xi)\cdot u(u^2-1)\dots(u^2-n^2),$$

$$f(x) - B(x) = \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi)\cdot u(u^2-1)\dots(u^2-n^2)(u-n-1).$$

(Broj članova u $N_{\mathrm{I}}(x)$, $N_{\mathrm{II}}(x)$, $S(x)$ i $B(x)$ izabiremo jednak kao i na str. 670; ξ je neka međuvrijednost među čvorovima interpolacije, a različita je u raznim formulama; ξ ovisi o x.)

Primjena formula za interpolaciju. Formule interpolacije možemo upotrijebiti za približno integriranje i diferenciranje. U tu svrhu zadanu funkciju $f(x)$ zamijenimo polinomom interpolacije $\varphi(x)$ i na njemu vršimo odgovarajuće operacije. Tako npr. primjenom Stirlingove formule interpolacije možemo dobiti ovu formulu za aproksimativne vrijednosti derivacije od $f(x)$ za $x = x_0$:

$$\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} - \frac{1}{6}\frac{\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2}}{2} + \frac{1}{30}\frac{\Delta^5 f_{-2} + \Delta^5 f_{-3}}{2} - \dots\right].$$

Najprikladnije formule za integriranje dobivamo iz formula interpolacije danih na str. 458.

3. POSTAVLJANJE EMPIRIJSKIH FORMULA

Usporedba grafova. Proces postavljanja empirijskih formula za funkcijske zavisnosti $y = f(x)$ dobivenih pokusom dijelimo na dva dijela: najprije odaberemo oblik formule, a tek nakon toga ustanovimo brojčane vrijednosti parametara za koje je aproksimacija prema zadanoj funkciji najbolja. Ako nema nekih teoretskih rasuđivanja u pogledu izbora oblika formule, onda funkcijsku zavisnost obično izabiremo što jednostavnije, uspoređujući njezin graf s grafom zadane funkcije. Kako nas može zavarati sličnost grafova ustanovljena odoka, moramo nakon izbora formule najprije po metodi *izravnavanja* provjeriti, možemo li je primijeniti, a tek onda odrediti vrijednosti parametara.

Metoda izravnavanja sastoji se u ovome: uz pretpostavku da je među y i z zavisnost određenog oblika, određujemo neke veličine $X = \varphi(x, y)$ i $Y = \psi(x, y)$, koje su uz pretpostavljenu vezu linearno zavisne $\left(\text{npr. ako je } y = \frac{x}{a+bx}, \text{ tada odabiremo } X = x,\ Y = \frac{x}{y} \text{ ili } X = \frac{1}{x},\ Y = \frac{1}{y}\right)$. Ako za zadane vrijednosti x i y izračunamo pripadne vrijednosti X i Y i grafički ih prikažemo, možemo vidjeti da li je zavisnost među X i Y blizu linearnoj zavisnosti (padaju li pripadne tačke približno na pravac), i prema tome da li je odabrana formula primjenljiva ili nije.

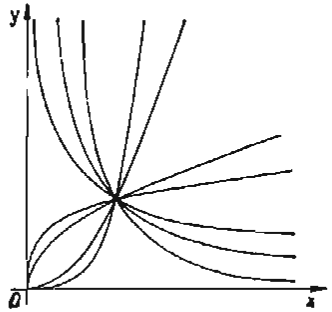
Upute za usporedbu nekih jednostavnijih formula navedene su dalje, s upozorenjima na pripadne grafove; vidi na str. 674 do 679. *Primjer* vidi na str. 679.

Određivanje parametara. Najtačnija metoda za određivanje parametara je metoda najmanjih kvadrata (vidi str. 661 i 667). U većini slučajeva možemo uspješno primijeniti i jednostavnije metode, napose *metodu srednjih vrijednosti*. Ako po toj metodi dobivena formula nije dovoljno tačna možemo je poboljšati metodom najmanjih kvadrata, pri čemu nam poznavanje približnih vrijednosti parametara omogućuje da računanje ne postane preglomazno (vidi str. 662). Metodom srednjih vrijednosti najprije određujemo linearnu zavisnost među »izravnanim« parametrima X i Y: $Y = aX + b$. U tu svrhu jednadžbe $Y_i = aX_i + b$ za dane parove vrijednosti X_i i Y_i dijelimo na dvije jednake (ili gotovo jednake) skupine po redu porasta varijabli X_i ili Y_i. Zbrajanjem jednadžbi svake skupine dobivamo dvije jednadžbe, iz kojih određujemo a i b. Ako X i Y izrazimo početnim varijablama, dobivamo traženu zavisnost među x i y. Ako pri tome još nisu svi parametri određeni, moramo tu metodu ponoviti, i izravnavanje izvršiti s drugim veličinama $\overline{X}$ i $\overline{Y}$ (vidi npr. formulu XIII, str. 679). *Primjer* vidi na str. 679.

Najviše upotrebljavane empirijske formule. Navodimo neke jednostavnije formule s pripadnim grafovima. Na svakom crtežu nacrtano je nekoliko krivulja za razne vrijednosti parametara u formulama (proučavanje utjecaja promjene parametara na oblik krivulja vidi u poglavlju »Grafovi«, str. 90 do 112). Prilikom proučavanja grafova moramo uvijek imati u vidu da se pri upotrebi empirijskih formula koristimo samo dijelom krivulje koji pripada nekom intervalu u kojem se mijenja nezavisna varijabla. Zato, npr., ne smijemo misliti da je formula $y = ax^2 + bx + c$ (vidi dalje) prikladna samo onda, ako krivulja ima maksimum ili minimum.

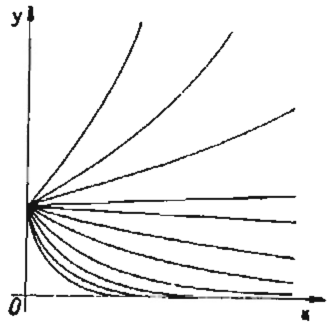
I. $y = ax^b$. Graf vidi na sl. 6, 12, 15 i 16, a objašnjenja na str. 92, 98 i 99. Izravnavamo $X = \lg x$ i $Y = \lg y$:

$$Y = \lg a + bX.$$



II. $y = ae^{bx}$. Graf vidi na sl. 17, a objašnjenja na str. 100. Izravnavamo x i $Y = \lg y$:

$$Y = \lg a + b \lg e \cdot x.$$



III. $y = ax^b + c$. Graf je isti kao i za formulu I, ali pomaknut u smjeru osi Oy. Ako je zadano b, izravnavamo $X = x^b$ i y:

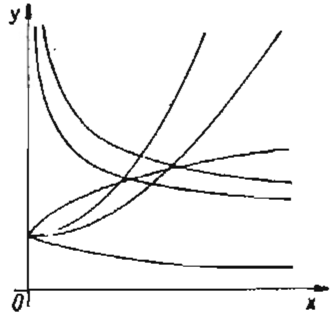
$$y = aX + c.$$

Ako je b nepoznat, izjednačujemo $X = \lg x$ i $Y = \lg (y - c)$,

$$Y = \lg a + bX,$$

odredivši najprije c. Za to na grafu zadane funkcije potražimo tri tačke s apscisama x_1, x_2 i $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ i ordinatama y_1, y_2, y_3 (x_1 i x_2 po volji odaberemo) i uzimamo

$$c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}\,^{*}.$$

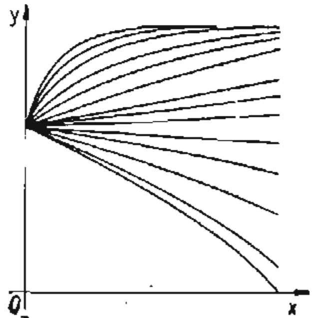


IV. $y = ae^{bx} + c$. Grafovi su isti kao i za formule II, pomaknuti u smjeru osi Oy. Izravnavamo $Y = \lg (y - c)$ i x:

$$Y = \lg a + b \lg e \cdot x,$$

odredivši najprije c. Za to na grafu zadane funkcije potražimo tri tačke s apscisama x_1, x_2 i $x_3 = 1/2\,(x_1 + x_2)$ (x_1 i x_2 odabiremo po volji) i ordinatama y_1, y_2 i y_3 i uzimamo

$$c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}\,^{**}.$$

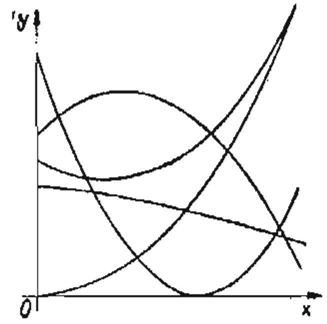


* Kada odredimo a i b možemo ponovo odabrati c jednak srednjoj vrijednosti veličina $y - ax^b$.

** Kada odredimo a i b možemo ponovo odabrati c jednak srednjoj vrijednosti veličina $y - ae^{bx}$.

V. $y = ax^2 + bx + c$. Graf vidi na sl. 3, a objašnjenja na str. 90. Ako na grafu zadane funkcije odaberemo neku tačku (x_1, y_1), onda izravnavamo x i $Y = \frac{y - y_1}{x - x_1}$:

$$Y = (b + ax_1) + ax.$$



Ako zadane vrijednosti x tvore aritmetičku progresiju s diferencijom h, onda izravnavamo $Y = \Delta y$ i x:

$$Y = (bh + ah^2) + 2ahx.$$

U oba slučaja nakon određivanja a i b nalazimo c iz jednadžbe

$$\Sigma y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x + nc,$$

gdje je n broj zadanih vrijednosti x, po kojima sumiramo.

VI. $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. Graf vidi na sl. 8, a objašnjenje na str. 93. Na grafu zadane funkcije odabiremo neku tačku (x_1, y_1) i izravnavamo $Y = \frac{x - x_1}{y - y_1}$ i x:

$$Y = A + Bx.$$

Ovdje se ograničujemo na određivanje A i B i pišemo dobivenu formulu u obliku

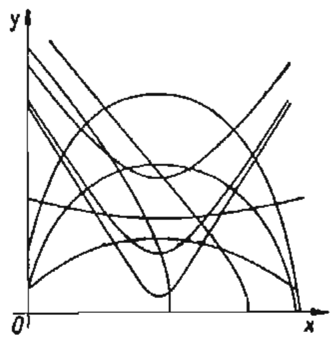
$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{A + Bx}.$$

Ponekad se možemo ograničiti na formule oblika

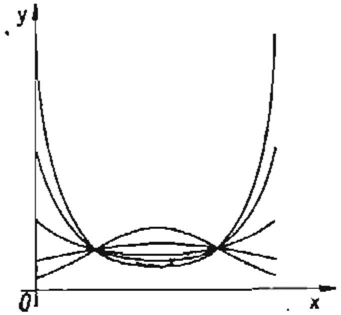
$$y = \frac{x}{cx + d} \quad \text{ili} \quad y = \frac{1}{cx + d}.$$

Tada izravnavamo $X = \frac{1}{x}$ i $Y = \frac{1}{y}$ ili x i $Y = \frac{x}{y}$; u prvom slučaju, a x i $Y = \frac{1}{y}$ u drugom.

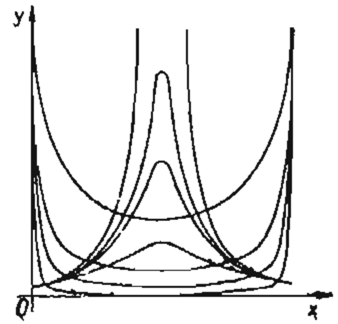
VII. $y^2 = ax^2 + bx + c$. Graf vidi na sl. 14, a objašnjenje na strani 99. Ako uvedemo novu varijablu $\bar{y} = y^2$, dalje možemo računati kao po formuli V.



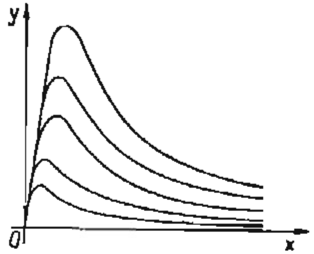
VIII. $y = ae^{bx + cx^2}$ ili $\lg y = \lg a + \lg e \cdot bx + \lg e \cdot cx^2$. Graf vidi na slici 21, a objašnjenja na str. 103. Uvođenjem nove varijable $\bar{y} = \lg y$ taj slučaj svodimo na formulu V.



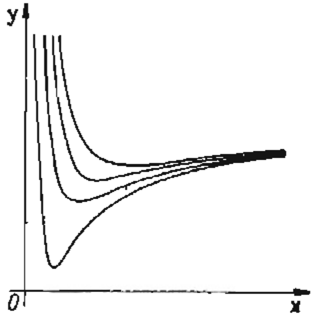
IX. $y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$. Graf vidi na slici 10, a objašnjenja na str. 95. Uvođenjem nove varijable $y = \frac{1}{y}$ taj slučaj svodimo na formulu V.



X. $y = \dfrac{x}{ax^2 + bx + c}$. Graf vidi na sl. 11, a objašnjenje na str. 96. Uvođenjem nove varijable $\bar{y} = \dfrac{x}{y}$ ovaj slučaj svodimo na formulu V.



XI. $y = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$. Graf vidi na sl. 9, a objašnjenje na str. 94. Uvođenjem nove varijable $\bar{x} = \dfrac{1}{x}$ taj slučaj svodimo na formulu V.



XII. $y = ax^b e^{cx}$. Graf vidi na sl. 22, a objašnjenje na str. 104. Ako zadane vrijednosti x tvore aritmetičku progresiju s diferencijom h, onda izravnavamo

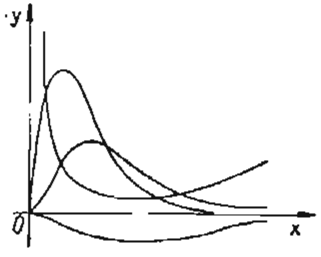
$$Y = \Delta \lg y \quad \text{i} \quad X = \Delta \lg x:$$

$$Y = hc \lg e + bX.$$

Ako dane vrijednosti x tvore geometrijsku progresiju s nazivnikom q, onda izravnavamo $Y = \Delta_1 \lg y$ i x:

$$Y = b \lg q + c\,(q - 1) \lg e \cdot x$$

($\Delta_1 \lg y$ je diferencija dviju postupnih vrijednosti $\lg y$). Nakon određivanja b i c logaritmiramo zadanu jednadžbu i dobivamo $\lg a$ analogno kao što je nađen c za formulu V.



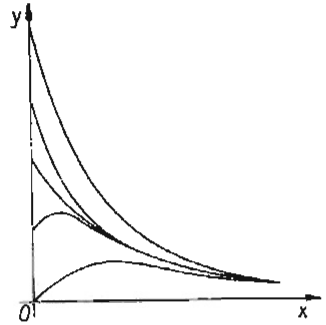
XIII. $y = ae^{bx} + ce^{dx}$. Graf vidi na sl. 20, a objašnjenje na str. 102. Ako vrijednosti x tvore aritmetičku progresiju s diferencijom h, a y, y_1 i y_2 su neke tri postupne vrijednosti dane funkcije, onda izravnavamo

$$Y = \frac{y_2}{y} \quad \text{i} \quad X = \frac{y_1}{y}:$$

$$Y = (e^{bh} + e^{dh})\, X - e^{bh} \cdot e^{dh}.$$

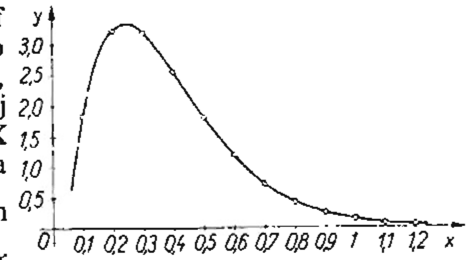
Kada odredimo a i b iz te jednadžbe, izravnavamo $\bar{Y} = ye^{-dx}$ i $\bar{X} = e^{(b-d)x}$:

$$\bar{Y} = a\bar{X} + c.$$

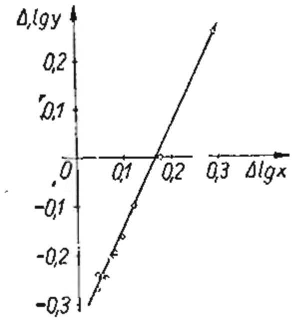


Primjer: Treba naći empirijsku formulu zavisnosti među x i y po tablici na str. 680 (prva dva stupca).

Kada konstruiramo graf funkcije (sl. 425) i usporedimo ga s grafovima sa str. 674...680, uvjerit ćemo se da za dani slučaj možemo upotrijebiti formule X ili XII. Za formulu X treba izjednačiti $\Delta \dfrac{x}{y}$ i x, a račun pokazuje da zavisnost među x i $\Delta \dfrac{x}{y}$ nije linearna. Da bismo provjerili prikladnost formule XII konstruiramo graf zavisnosti među $\Delta \lg x$ i $\Delta \lg y$ (za $h = 0{,}1$; sl. 426), a također među $\Delta_1 \lg y$ i x (za $q = 2$; sl. 427). U oba slučaja vidimo da je poklapanje s pravcem zadovoljavajuće, pa prema tome uzimamo da je $y = ax^b e^{cx}$.



Sl. 425



Sl. 426.

Da bismo odredili konstante a, b i c tražimo linearnu zavisnost među x i $\Delta_1 \lg y$ po metodi srednjih vrijednosti. Zbrajanjem uvjetnih jednadžbi

$$\Delta_1 \lg y = b \lg 2 + cx \lg e,$$

po skupinama (svaka od tri jednadžbe) dobivamo

$$-0{,}292 = 0{,}903\,b + 0{,}2606\,c,$$

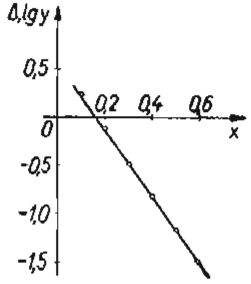
$$-3{,}392 = 0{,}903\,b + 0{,}6514\,c,$$

odakle je $b = 1{,}966$ i $c = -7{,}932$. Da bismo odredili a, zbrojimo sve jednadžbe oblika

$$\lg y = \lg a + b \lg x + c \lg e \cdot x,$$

što daje

$$-2{,}670 = 12 \lg a - 6{,}529 - 26{,}87,$$



Sl. 427

odakle $\lg a = 2{,}561$ i $a = 364$. Vrijednosti y izračunane po formuli $y = 364\,x^{1{,}966}\,e^{-7{,}932\,x}$, navedene su u posljednjem stupcu ove tablice.

x	y	$\frac{x}{y}$	$\Delta \frac{x}{y}$	$\lg x$	$\lg y$	$\Delta \lg x$	$\Delta \lg y$	$\Delta_1 \lg y$	y izrač.
0,1	1,78	0,056	0,007	—1,000	0,250	0,301	0,252	—0,232	1,78
0,2	3,18	0,063	0,031	—0,699	0,502	0,176	+0,002	—0,097	3,15
0,3	3,19	0,094	0,063	—0,523	0,504	0,125	—0,099	—0,447	3,16
0,4	2,54	0,157	0,125	—0,398	0,405	0,097	—0,157	—0,803	2,52
0,5	1,77	0,282	0,244	—0,301	0,248	0,079	—0,191	—1,134	1,76
0,6	1,14	0,526	0,488	—0,222	0,057	0,067	—0,218	—1,455	1,14
0,7	0,69	1,014	0,986	—0,155	—0,161	0,058	—0,237	—	0,70
0,8	0,40	2,000	1,913	—0,097	—0,398	0,051	—0,240	—	0,41
0,9	0,23	3,913	3,78	—0,046	—0,638	0,046	—0,248	—	0,23
1,0	0,13	7,69	8,02	0,000	—0,886	0,041	—0,269	—	0,13
1,1	0,07	15,71	14,29	0,041	—1,155	0,038	—0,243	—	0,07
1,2	0,04	30,0	—	0,079	—1,398	—	—	—	0,04

ABECEDNO KAZALO

A

B

C

Č

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

R

S

Š

T