

DERIVACIJE I PRIMJENE

1. Derivacija

- diferencijalni ili infinitezimalni račun - jedan od najvažnijih djelova matematičke analize;
- velika primjena u tehnici;
- derivacija - mjera promjene;
- pojam derivacije - 17 st. (I. Newton - problem određivanja trenutne brzine i G.W. Leibnitz - problem određivanja tangente u bilo kojoj točki krivulje)

Definicija 1.1 Kažemo da je funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u točki $x_0 \in A$ ako postoji limes

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \quad ((1))$$

Broj $f'(x_0)$ nazivamo derivacija funkcije f u točki x_0 .

Za funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je derivabilna na skupu $B \subseteq A$ ako je derivabilna u svakoj točki tog skupa.

Za funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, kažemo da je derivabilna ako je derivabilna na cijelom području definicije A (tj. ako je $B = A$).

Ako je $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ derivabilna na skupu $B \subseteq A$ onda postoji funkcija

$$f'|_B : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow f'(x),$$

koju nazivamo derivacija funkcije f na skupu B .

Ako je $B = A$ onda govorimo o derivaciji $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Derivabilnu funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ kojoj je derivacija $f' : A \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nazivamo neprekidno derivabilna funkcija ili glatka funkcija.

Napomena: Ako je $x_0 \in A$ izolirana točka ($\exists \delta > 0$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (A \setminus \{x_0\}) = \emptyset$), onda derivacija $f'(x_0)$ ne postoji, premda je funkcija definirana u toj točki.

Uvedimo oznake:

$$x - x_0 = \Delta x \quad \text{- prirast nezavisne varijable}$$

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x) = \Delta y \quad \text{- prirast funkcije } f \text{ u točki } x_0.}$$

Budući $x \rightarrow x_0$ ako i samo ako $\Delta x \rightarrow 0$, onda je

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{ili}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad \text{ili} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Primjer

- Ispitajmo derivabilnost funkcije $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i nema izoliranih točaka).

Neka je $x_0 \in \mathbb{R} = D_f$ (bilo koja točka). Tada je

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) = 0$, pa je derivacija ove funkcije $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$. **Kraće:** $(c)' = 0$.

- Ispitajmo derivabilnost funkcije $f(x) = x^2$.
($f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i nema izoliranih točaka).

Neka je $x_0 \in \mathbb{R} = D_f$ (bilo koja točka). Tada je

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0. \end{aligned}$$

Dakle za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) = 2x$, pa derivacija ove funkcije $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

Kraće: $(x^2)' = 2x$.

- Ispitati derivabilnost funkcije $f(x) = \sin x$.
(sami - knjiga I.Slapničar, str.164.). ($\forall x \in \mathbb{R}$,
 $(\sin x)' = \cos x$)
- Ispitati derivabilnost funkcije $f(x) = \cos x$. ($\forall x \in \mathbb{R}$,
 $(\cos x)' = -\sin x$)
- Ispitati derivabilnost funkcije $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.
($\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$). (Uputa: koristiti binomni teorem!)

- Ispitati derivabilnost funkcije $f(x) = a^x$. (sami - knjiga I.Slapničar, str.172.) ($\forall x \in \mathbb{R}, (a^x)' = a^x \ln a$).

Specijalno: $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$

Uočimo: Ako je $f(x) = x^2$ (funkcija), onda je $f'(x) = 2x$ (funkcija). Sada je

$$f(1) = 1^2 = 1 \text{ (broj)} \quad \text{i} \quad f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \text{ (broj)}.$$

S druge strane vrijedi

$$(f(1))' = (1)' = 0 \text{ (derivacija konstante),}$$

Dakle,

$$2 = f'(1) \neq (f(1))' = 0,$$

ili općenito

$$f'(x_0) \neq (f(x_0))'.$$

Geometrijska interpretacija derivacije - problem tangente (Leibnitzov pristup)

Neka je jednačbom $y = f(x)$ u ravnini zadan graf funkcije (krivulja), pri čemu je $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilna funkcija.

Problem: Tražimo algebarsku jednačbu tangente u nekoj točki dane krivulje.

Neka je $x, x_0 \in A$ i $x \neq x_0$. Točkama $D(x_0, f(x_0))$ i $T(x, f(x))$ je određena sekanta (pravac) s_T . Koeficijent smjera sekante s_T je

$$k_{s_T} = \operatorname{tg}(\alpha_{s_T}) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ako točku D fiksiramo, a točka T se (po grafu) "približava" (teži) točki D , tj. ako $x \rightarrow x_0$, onda se sekanta s_T približava tangenti t u točki D . Dakle,

$$k_t = \lim_{T \rightarrow D} k_{s_T} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

tj. koeficijent smjera tangente t na graf funkcije f u točki $D(x_0, f(x_0))$ jednak je derivaciji funkcije f u točki x_0 .

Jednačba tangente sada glasi

$$t \dots y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Točku $D(x_0, f(x_0))$ nazivamo diralište.

Normala n u točki $D(x_0, f(x_0))$ na graf funkcije f je pravac kroz D okomit na tangentu t . Jednadžba normale glasi

$$n \dots y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

Primjer Odredite jednadžbu tangente i normale na parabolu $y = x^2$ u točki s apscisom $x_0 = -1$.

$$f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x$$

Sada je

$$f(-1) = (-1)^2 = 1,$$

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2,$$

pa je

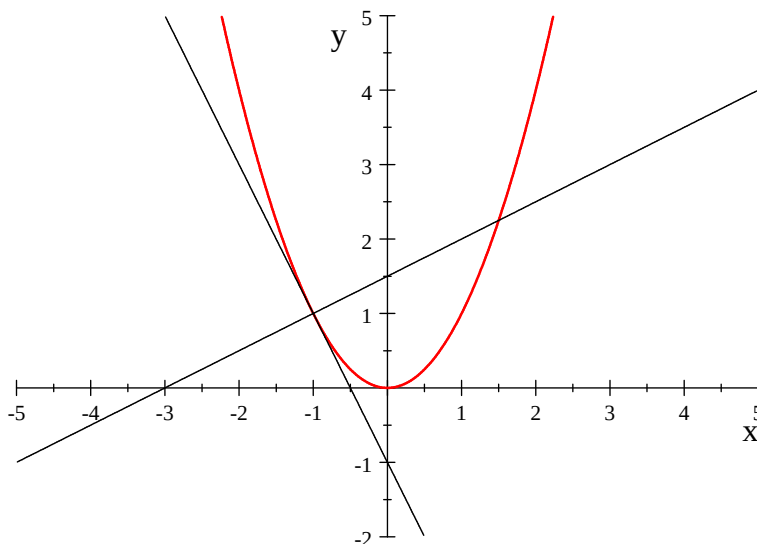
$$t \dots y - 1 = -2(x - (-1)),$$

$$n \dots y - 1 = -\frac{1}{-2}(x - (-1)),$$

tj.

$$t \dots y = -2x - 1$$

$$n \dots y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



Teorem 1.2 Ako je funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in A$, onda je i neprekidna u toj točki.

Dokaz: Budući je funkcija f derivabilna u točki $x_0 \in A$, onda je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \stackrel{\text{der.}}{=} f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, pa je f neprekidna u x_0 .

Obrat ovog teorema općenito ne vrijedi. Dakle, postoje funkcije koje su neprekidne u nekoj točki

domene, ali nisu derivabilne u toj točki.

Pomoću limesa slijeva i zdesna definiramo:

Definicija 1.3 Kažemo da je $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$,

- derivabilna slijeva u točki $x_0 \in A$ ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_{-0}(x_0).$$

Broj $f'_{-0}(x_0)$ nazivamo derivacija slijeva funkcije f u točki x_0

- derivabilna zdesna u točki $x_0 \in A$ ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_{+0}(x_0).$$

Broj $f'_{+0}(x_0)$ nazivamo derivacija zdesna funkcije f u točki x_0

Funkcija f je derivabilna u točki $x_0 \in A$ ako i samo ako je f derivabilna slijeva i zdesna u točki x_0 i ako je $f'_{-0}(x_0) = f'_{+0}(x_0)$.

2. Pravila deriviranja

Teorem 2.1 (pravila deriviranja) Neka su funkcije $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabilne na skupu $B \subseteq A$. Tada za svaki $x \in B$ vrijedi

i) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x);$

ii) $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x);$

iii) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0.$

Dokaz:

i) sami;

ii) sami;

iv) sami - knjiga I.Slapničar, str.167.

iii) Neka je $x_0 \in B$ (bilo koja točka). Tada je

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x_0 + \Delta x) - (f \cdot g)(x_0)}{\Delta x} = \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x} = \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} + \right. \\&\quad \left. + \frac{f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x} \right] \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} g(x_0 + \Delta x) + \\&\quad + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} f(x_0) = \\&= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)\end{aligned}$$

iii)' Posebno,

$$(cf)'(x) = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 + c \cdot f'(x) = cf'(x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Primjer

$$\begin{aligned} (tgx)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \cos x \neq 0 \end{aligned}$$

Slično:

$$(ctgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \dots = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad \sin x \neq 0$$

Teorem 2.2 (derivacija kompozicije) Ako je funkcija f derivabilna u točki $x_0 \in D_f$ i funkcija g derivabilna u točki $y_0 = f(x_0) \in D_g$, tada je kompozicija $h = g \circ f$ derivabilna u točki x_0 i vrijedi

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Primjer 1 Treba naći $h'(x)$, ako je $h(x) = \cos(\sin x)$.
Imamo

$$h(x) = (g \circ f)(x), \quad f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x$$

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ (bilo koja točka) i $\sin x_0 = y_0$. Tada je, po Teoremu 1.3,

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= (\cos y_0)' \cdot (\sin x_0)' = -\sin y_0 \cdot \cos x_0 \\ &= -\sin(\sin x_0) \cdot \cos x_0, \end{aligned}$$

tj.

$$(\cos(\sin x))' = -\sin(\sin x) \cdot \cos x.$$

Teorem 2.3 (derivacija inverzne funkcije) Neka je $f : A \longrightarrow B$ bijekcija, neka je f derivabilna u točki $x_0 \in A$ i $f'(x_0) \neq 0$. Ako je pripadna inverzna funkcija $f^{-1} : B \longrightarrow A$ neprekidna u točki $y_0 = f(x_0) \in B$, tada je

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Primjer 1 Funkcija

$$f(x) = x^2, \quad f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

je bijekcija i f je derivabilna ($f'(x) = 2x, \forall x \geq 0$).
 Budući je

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad f^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty),$$

onda je za $x \in [0, \infty)$

$$x^2 = y \iff x = \sqrt{y}.$$

Iz Teorema 1.4 slijedi

$$(\sqrt{y})' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad y > 0,$$

pa je

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Primjer 2 Funkcija

$$f(x) = \sin x, \quad f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

je bijekcija i f je derivabilna ($f'(x) = \cos x$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$).

Budući je

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

onda je za $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\sin x = y \iff x = \arcsin y$$

Iz Teorema 1.4 slijedi

$$\begin{aligned} (\arcsin y)' &= (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad y \in (-1, 1), \end{aligned}$$

pa je

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Slično:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0$$

Deriviranje implicitno zadane funkcije

Neka je funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, zadana implicitno sa $F(x, y) = 0$ i neka je f derivabilna u točki $x \in A$. Tražimo $f'(x)$. Uvedimo oznake:

$$y = f(x) \quad \text{i} \quad y' = f'(x).$$

Postupak: formalno deriviramo $F(x, y) = 0$ i koristimo teorem o derivaciji kompozicije.

Primjer 1 Jednadžbom

$$2^y - xy + x^2 - 2 = 0$$

je zadana jedna (ili više) funkcija f . Tražimo f' i $f'(0)$. Uvedimo oznake:

$$y = f(x) \quad \text{i} \quad y' = f'(x).$$

Sada imamo:

$$(2^y - xy + x^2 - 2)' = 0' \implies$$

$$2^y \ln 2 \cdot y' - y - xy' + 2x + 0 = 0 \implies$$

$$y' (2^y \ln 2 - x) = -2x + y \implies$$

$$y' = \frac{-2x + y}{2^y \ln 2 - x}.$$

Ako je $y_0 = f(0)$, onda je

$$2^{y_0} - 0 \cdot y_0 + 0^2 - 2 = 0 \implies$$

$$2^{y_0} = 2 \implies y_0 = 1.$$

Ako je $y'_0 = f'(0)$, tada je

$$y'_0 = \frac{-2 \cdot 0 + y_0}{2^{y_0} \ln 2 - 0},$$

tj.

$$f'(0) = \frac{-2 \cdot 0 + 1}{2^1 \ln 2 - 0} = \frac{1}{2 \ln 2} = \frac{1}{\ln 4}.$$

Primjer 2 Treba odrediti jednadžbu tangente na elipsu

$$4(x-1)^2 + 3y^2 = 12 \implies \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

u točki $T(1, y_0 < 0)$.

Dakle, treba naći $y(1)$ i $y'(1)$. Imamo:

$$\left(4(x-1)^2 + 3y^2\right)' = (12)' \implies$$

$$8(x-1) + 6yy' = 0 \implies$$

$$y' = -\frac{8(x-1)}{6y}.$$

Imamo

$$4(1-1)^2 + 3y_0^2 = 12 \implies$$

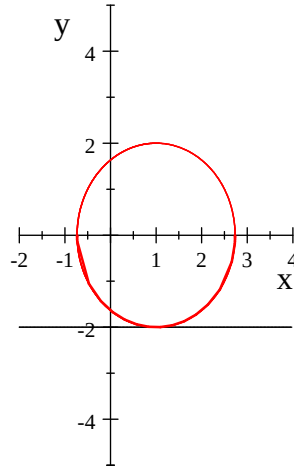
$$y_0^2 = 4 \implies y_0 = \pm 2.$$

Dakle, $T(1, -2)$. Sada je

$$y'_0 = -\frac{8(1-1)}{6y_0} = -\frac{8(1-1)}{6 \cdot (-2)} = 0,$$

pa je jednadžba tangente

$$t \dots y - (-2) = 0 \cdot (x - 1) \implies y = -2.$$



$$\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1, \quad y = -2,$$

Primjer 3 Treba naći $f'(x)$, ako je $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Imamo

$$(x^r)' = (e^{r \ln x})' \stackrel{T.2.2}{=} e^{r \ln x} \cdot (r \ln x)' = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^{r-1}$$

Prisjetimo se: Prirodno područje definicije funkcije $f(x) = x^r$ ovisi o realnom broju $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Ako je $r \in \mathbb{N}$, onda je $D_f = \mathbb{R}$;
- Ako je $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, onda je $D_f = \mathbb{R}$ ili $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ili $D_f = (0, \infty)$ ili $D_f = [0, \infty)$;
- Ako je $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, onda uzimamo $D_f = (0, \infty)$ za $r < 0$ i $D_f = [0, \infty)$ za $r > 0$.

Logaritamsko deriviranje

Tražimo $h'(x)$, ako je $h(x)$ funkcija oblika

$$h(x) = (f(x))^{g(x)}.$$

Postupak:

- Uvedemo oznaku

$$y = (f(x))^{g(x)};$$

- Logaritmujemo gornji izraz i dobivamo

$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x);$$

- Deriviramo (vodeći računa da je $\ln y$ složena funkcija - kompozicija)

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x);$$

- Dobivamo

$$y' = y \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right) \implies$$

$$h'(x) = (f(x))^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

Primjer 2 Tražimo $h'(x)$, ako je $h(x)$ funkcija oblika

$$h(x) = (\sin x)^{\cos x}.$$

Uvedemo oznaku

$$y = (\sin x)^{\cos x};$$

Logaritmiramo gornji izraz i dobivamo

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x;$$

Deriviramo

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x;$$

Dobivamo

$$y' = y \cdot \left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) \implies$$

$$h'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right)$$

Derivacije elementarnih funkcija

U sljedećeoj tablici, sve derivacije elementarnih funkcija definirane su tamo gdje i funkcije. U slučajevima gdje to ne vrijedi dano je područje definicije derivacije.

$$(c)' = 0, \quad (\text{po definiciji})$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{po definiciji})$$

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad (\text{po Trm 2.2})$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (\text{po definiciji})$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (\text{po definiciji})$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\text{po Trm 2.3})$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\text{po Trm 2.3})$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\text{po definiciji})$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\text{po definiciji})$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\text{po Trm 2.1})$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\text{po Trm 2.1})$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1), \quad (\text{po Trm 2.3})$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1), \quad (\text{po Trm 2.3})$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\text{po Trm 2.3})$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (\text{po Trm 2.3})$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\text{po Trm 2.1 i Trm 2.2})$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\text{po Trm 2.1 i Trm 2.2})$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\text{po Trm 2.1})$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad (\text{po Trm 2.1})$$

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (\text{po Trm 2.3})$$

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1, \quad (\text{po Trm 2.3})$$

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\text{po Trm 2.3})$$

$$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\text{po Trm 2.3})$$