6. Monotonost i derivacija

Teorem 5 Neka je funkcija f derivabilna na intervalu (a, b). Tada vrijedi:

i) funkcija je rastuća na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$,

ii) funkcija je padajuća na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a, b)$,

iii) ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo rastuća na intervalu (a, b),

iv) ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo padajuća na intervalu (a, b).

Dokaz: Dokažimo prvu tvrdnju, pri čemu treba dokazati oba smjera.

Neka je f rastuća i derivabilna na intervalu (a, b). Trebamo dokazati da je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$. Odaberimo proizvoljni $x \in (a, b)$. Kako je f rastuća, za $\Delta x < 0$ vrijedi $f(x + \Delta x) \leq f(x)$ pa je

$$\lim_{\Delta x \to 0^{-0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

S druge strane, za $\Delta x > 0$ vrijedi $f(x + \Delta x) \geq f(x)$ pa je i

$$\lim_{\Delta x \to 0^{+0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Kako je f derivabilna, to je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0^{-0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^{+0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0. \end{aligned}$$

Točka x je bila proizvoljno odabrana pa zaključujemo da je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$.

Dokažimo drugi smjer. Neka je f derivabilna na intervalu (a, b) i neka je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$. Trebamo dokazati da je f rastuća.
Odaberimo dvije točke $x_1, x_2 \in (a, b)$ takve da je $x_1 < x_2$. Po Lagrangeovom teoremu postoji točka $c \in (x_1, x_2)$ takva da je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0.$$

Kako je $x_2 - x_1 \geq 0$, zaključujemo da je nužno $f(x_2) \geq f(x_1)$, odnosno f je rastuća na intervalu (a, b). S ovim smo dokazali prvu tvrdnju teorema. Dokaz ostalih tvrdnji je sličan.

Obrat tvrdnji iii) i iv) općenito ne vrijedi. Kao primjer zašto kod tih tvrdnji ne vrijedi drugi smjer, možemo uzeti funkciju $f(x) = x^3$ koja je strogo rastuća na čitavom skupu $\mathbb{R}$, ali je $f'(0) = 0$.

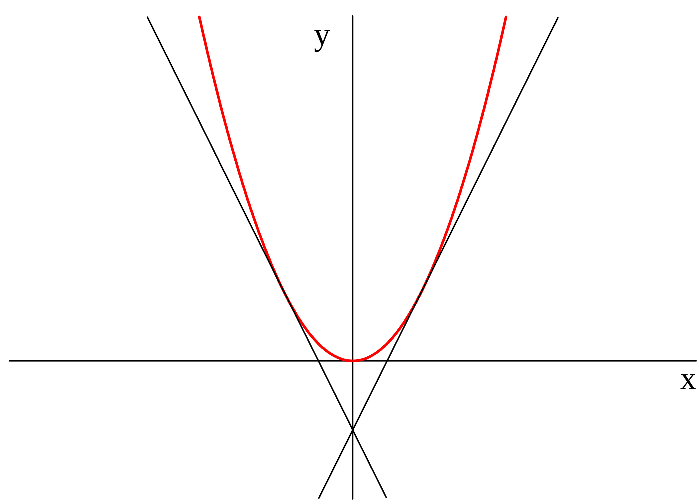
Geometrijska interpretacija:

- Ako je $f : A \to \mathbb{R}$ rastuća na intervalu $(a, b) \subseteq A$, onda tangenta na njen graf, u svakoj točki $x \in (a, b)$, zatvara šiljasti kut α_t s pozitivnim smjerom osi x, tj.

$$k_t = tg\alpha_t = f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

- Ako je $f : A \to \mathbb{R}$ padajuća na intervalu $(a, b) \subseteq A$, onda tangenta na njen graf, u svakoj točki $x \in (a, b)$, zatvara tupi kut α_t s pozitivnim smjerom $x-$osi, tj.

$$k_t = tg\alpha_t = f'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$



7. Ekstremi

Definicija 1

i) Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima lokalni minimum $f(x_0)$ u točki $x_0 \in A$ ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da vrijedi $f(x) > f(x_0)$ za svaki $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$.

ii) Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima lokalni maksimum $f(x_0)$ u točki $x_0 \in A$ ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da vrijedi $f(x) < f(x_0)$ za svaki $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$.

Ako funkcija u točki $x_0 \in A$ ima lokalni minimum ili lokalni maksimum kažemo da u toj točki ima lokalni ekstrem.

Definicija 2 Neka je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $x_0 \in A$.

i) Za točku x_0 kažemo da je stacionarna točka ako je $f'(x_0) = 0,$

ii) Za točku x_0 kažemo da je kritična točka ako je x_0 stacionarna točka ili ako f nije derivabilna u x_0.

Teorem 6 (Nužan uvjet za ekstrem) Neka je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $x_0 \in A$. Ako funkcija f u točki $x_0 \in A$ ima lokalni ekstrem, onda je x_0 kritična točka od f.

Dokaz: Ako funkcija f nije derivabilna u točki x_0, onda je x_0 kritična točka. Ako je f derivabilna u točki x_0 i ima lokalni ekstrem u toj točki, onda po definiciji funkcija f ima u točki x_0 najveću ili najmanju vijednost na nekoj ε-okolini točke x_0. Sada po Fermatovom teoremu vrijedi $f'(x_0) = 0$, pa je x_0 kritična točka.

Obrat ovog teorema općenito ne vrijedi. Dakle, postoje funkcije koje u kritičnoj točki nemaju lokalni ekstrem, ali su kritične točke jedini "kandidati" za ekstrem.

Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da mijenja predznak točki $x_0 \in A$ ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da su vrijednosti funkcije $f(x)$ za $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0)$ stalnog i suprotnog predznaka od vrijednosti funkcije $f(x)$ za $x \in (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$.

Teorem 7 (Dovoljan uvjet za ekstrem) Neka je dana funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in A$ kritična točka od f. Ako derivacija f' mijenja predznak u točki x_0 iz $-$ u $+$ onda je x_0 točka lokalnog minimuma, a ako derivacija f' mijenja predznak u točki x_0 iz $+$ u $-$ onda je x_0 točka lokalnog maksimuma.

Dokaz: Ako derivacija f' mijenja predznak s $-$ na $+$, onda je funkcija f strogo padajuća na intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ i strogo rastuća na intervalu $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Stoga funkcija f ima u točki x_0 lokalni minimum. Ako derivacija f' mijenja predznak s $+$ na $-$, onda na sličan način zaključujemo da funkcija f ima u točki x_0 lokalni maksimum.

Teorem 8 (Dovoljan uvjet za ekstrem) Neka je dana funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in A$ stacionarna točka od f, tako da je f dvaput derivabilna u x_0. Ako je $f''(x_0) \neq 0$ onda funkcija f u točki x_0 ima lokalni ekstrem i to: ako je $f''(x_0) > 0$ onda je x_0 točka lokalnog minimuma, a ako je $f''(x_0) < 0$ onda je x_0 točka lokalnog maksimuma.

Dokaz: Ako je $f''(x_0) > 0$, tada je f'' veća od nule i na nekoj okolini točke x_0. To znači da je prva derivacija f' strogo rastuća na toj okolini. Kako je $f\prime(x_0) = 0$, zaključujemo da je f' negativna lijevo od točke x_0 i pozitivna desno do točke x_0. To pak znači da je funkcija f strogo padajuća lijevo od točke x_0, a strogo rastuća desno od točke x_0, pa je x_0 točka lokalnog minimuma. Na sličan način zaključimo da je x_0 točka lokalnog maksimuma kada je $f''(x_0) < 0$.

Napomena: Može se dogoditi da za $f : A \to \mathbb{R}$ i neku točku $x_0 \in A$ vrijedi: $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 0$. U ovom slučaju se koriste više derivacije za ispitivanje je li u točki x_0 ekstrem.

Primjer

1.

$$f(x) = x^2, \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Nužan uvjet:

Sada je

$$f'(x) = 2x, \qquad f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

pa f nema točaka u kojima derivacija ne postoji. Odredimo stacionarne točke

$$f'(x) = 2x = 0 \implies x_0 = 0 \text{ (mogući ekstem).}$$

Dovoljan uvjet:

- I. način

$$x < 0 \implies f'(x) = 2x < 0$$

$$x > 0 \implies f'(x) = 2x > 0.$$

Derivacija mijenja predznak iz $-$ u $+$, pa po Teoremu 7, f ima u $x_0 = 0$ lokalni minimum.

- II. način

$$f''(x) = 2, \quad f'' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \implies \quad f''(0) = 2 > 0,$$

pa po Teoremu 8, funkcija u $x_0 = 0$ lokalni minimum.

2.

$$f(x) = x^3, \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

<u>Nužan uvjet:</u>

Sada je

$$f'(x) = 3x^2, \qquad f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

pa f nema točaka u kojima derivacija ne postoji. Odredimo stacionarne točke

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \implies x_0 = 0. \text{ (mogući ekstem)}$$

<u>Dovoljan uvjet:</u>

- <u>I. način</u>

$$x < 0 \implies f'(x) = 3x^2 > 0$$

$$x > 0 \implies f'(x) = 3x^2 > 0.$$

Derivacija ne mijenja predznak u točki $x_0 = 0$, pa po Teoremu 7, f u $x_0 = 0$ nema lokalni ekstrem.

- <u>II. način</u>

$$f''(x) = 6x, \quad f'' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \implies \quad f''(0) = 0,$$

pa po Teoremu 8 ne možemo ništa zaključiti.

3.
$$f\left(x\right)=\sqrt[3]{x^2},\qquad f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

Nužan uvjet:

Sada je
$$f'\left(x\right)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},\qquad f':\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}\longrightarrow\mathbb{R},$$
pa postoji točka $x_0 = 0 \in D_f$ u kojoj derivacija ne postoji. Dakle, $x_0 = 0$ je kritična točka (mogući ekstem). Odredimo sada stacionarne točke

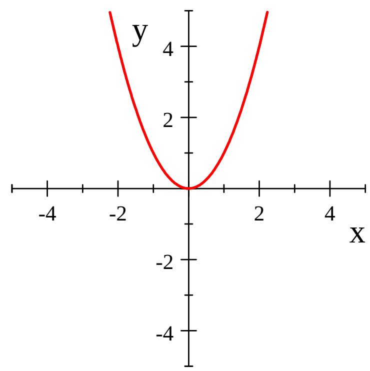
$f'\left(x\right)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}=0 \implies$ nema rješenja, tj. neme stac. točaka.

Dovoljan uvjet:

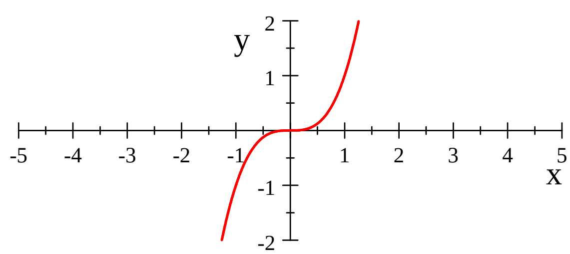
- I. način
$$x < 0 \implies f'\left(x\right)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}<0$$
$$x > 0 \implies f'\left(x\right)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}>0.$$

  Derivacija mijenja predznak iz $-$ u $+$, pa po Teoremu 7, f ima u $x_0 = 0$ lokalni minimum.

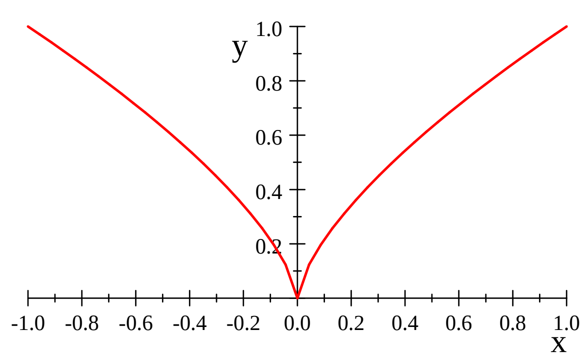
- II. način Teorem 8 ne možemo koristiti.



$$y = x^2$$



$$y = x^3$$



$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

Globalni ekstrem

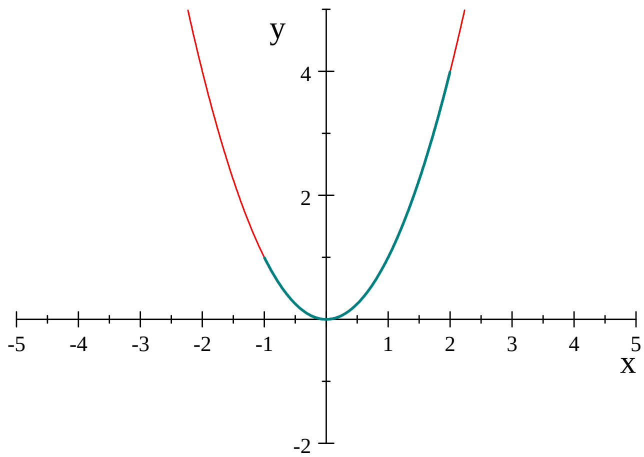
Definicija 3
Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima globalni minimum $f(x_0)$ u točki $x_0 \in A$ ako je $f(x_0) \leq f(x)$ za svaki $x \in A$.

Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima globalni maksimum $f(x_0)$ u točki $x_0 \in A$ ako je $f(x_0) \geq f(x)$ za svaki $x \in A$.

Ako funkcija u točki $x_0 \in A$ ima globalni minimum ili globalni maksimum kažemo da u toj točki ima globalni ekstrem.

Neprekidna funkcija f na segmentu $[a, b]$ ima globalni ekstrem ili u točki lokalnog ekstrema ili na rubu intervala.

Primjer Treba naći globalni ekstrem funkcije $f(x) = x^2$ na segmentu $[-1, 2]$.



Sa slike je vidljivo da će globalni minimum biti u točki $x_1 = 0$ (lokalni ekstrem), a globalni maksimum u točki $x_2 = 2$ (rub intervala). Pokažimo to.

Budući je funkcija $f(x) = x^2$ neprekidna na segmentu $[-1, 2]$, kandidati za globalni ekstrem su točke lokalnih ekstrema i rubovi intervala.

Odredimo najprije lokalne ekstreme. Imamo

$$f(x) = x^2, \qquad f : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R} \implies$$

$$f'(x) = 2x = 0 \implies x_0 = 0 \in [-1, 2]$$ (mogući ekstem).

Kako je

$$f''(x) = 2 \implies f''(0) = 2 > 0,$$

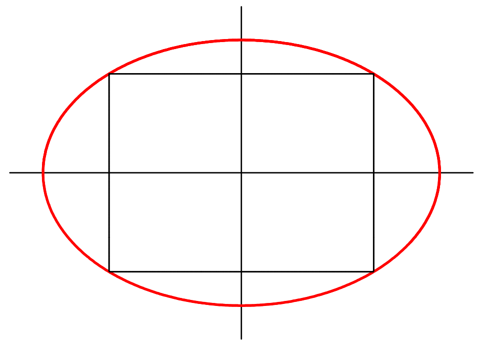
onda f ima u $x_0 = 0$ lokalni minimum.

Sada imamo tri kandidata za globalni ekstrem.

x	$f(x)$	
0	0	globalni minimum
-1	1	
2	4	globalni maksimum

Primjena: Geometrijski ekstrem (kod rješavanja nekih geometrijskih ili fizikalnih problema).

Primjer U elipsu s poluosima a i b upišite pravokutnik maksimalne površine.



Prema slici je

$$P = 4xy \quad \text{i} \quad 0 \leq x \leq a.$$

Budući $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ povlači $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, onda je

$$P = P(x) = 4\frac{b}{a} \cdot x\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad x \in [0, a].$$

Za $x = 0$ i $x = a$ je $P_{\min} = 0$, tj. dobivamo minimalnu površinu. Budući je

$$P'(x) = 4\frac{b}{a} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{a\sqrt{(-x^2 + a^2)}},$$

onda je $P'(x) = 0$ za $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ i $P''(x_0) < 0$.
Tada je $y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}b$, pa je

$$P_{\max} = 4\frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}b = 2ab.$$

8. Zakrivljenost

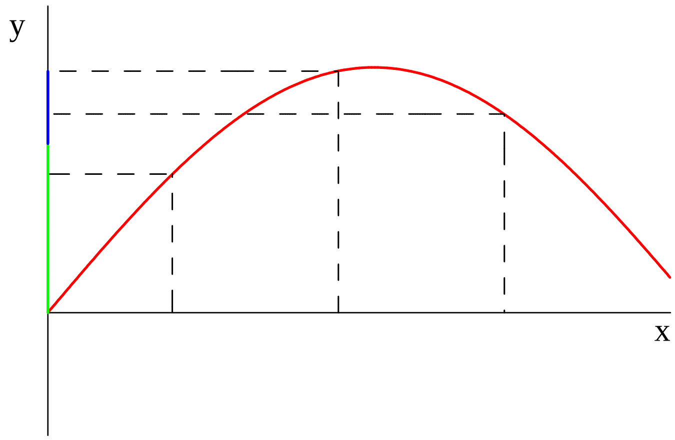
Definicija 4 Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna na intervalu $(a, b) \subseteq A$ ako za proizvoljne točke $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$, vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

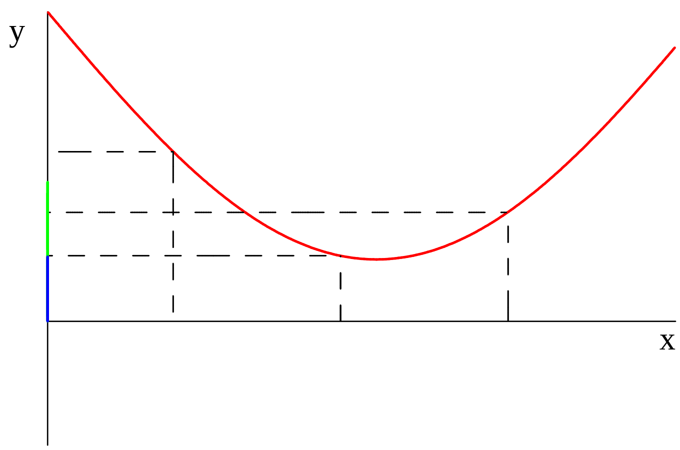
Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da je konkavna na intervalu $(a, b) \subseteq A$ ako za proizvoljne točke $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$, vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

U slučaju strogih nejednakosti, za funkciju f kažemo da je strogo konveksna odnosno strogo konkavna.



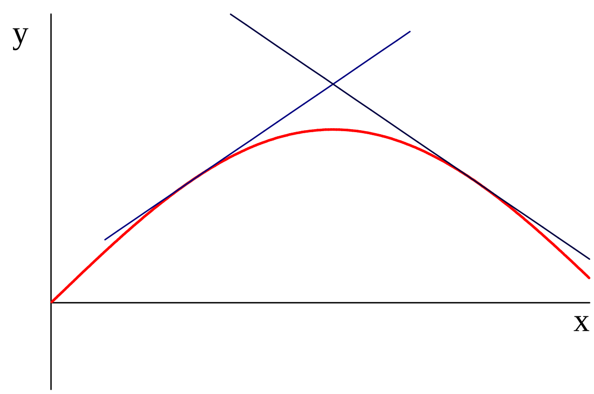
graf strogo konkavne funkcije



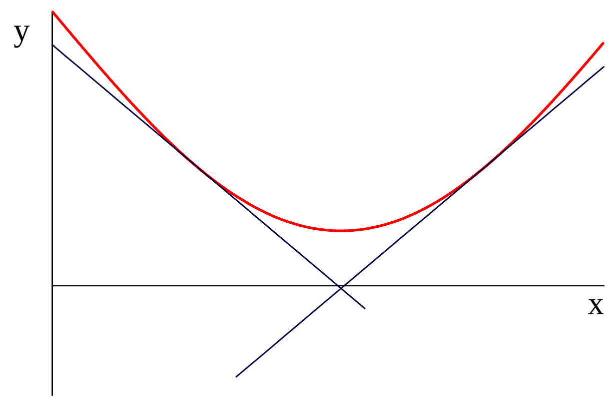
graf strogo konveksne funkcije

Geometrijska interpretacija:

- Ako je $f : A \to \mathbb{R}$ konveksna na intervalu $(a, b) \subseteq A$, onda se njen graf nalazi iznad tangente u svakoj točki $x \in (a, b)$.
- Ako je $f : A \to \mathbb{R}$ konkavna na intervalu $(a, b) \subseteq A$, onda se njen graf nalazi ispod tangente u svakoj točki $x \in (a, b)$.



graf strogo konkavne funkcije i tangenta



graf strogo konveksne funkcije i tangenta

Teorem 9 Neka je funkcija f dvaput derivabilna na intervalu (a, b). Tada vrijedi:

i) funkcija je konveksna na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$,

ii) funkcija je konkavna na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a, b)$,

iii) ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo konveksna na intervalu (a, b),

iv) ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo konkavna na intervalu (a, b).

Obrat tvrdnji iii) i iv) općenito ne vrijedi.

Definicija 4 Za neprekidno derivabilnu funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da ima infleksiju u točki $x_0 \in A$ ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je funkcija f na intr-ervalu $(x_0 - \varepsilon,\ x_0)$ strogo konveksna, a na intervalu $(x_0,\ x_0 + \varepsilon)$ strogo konkavna ili obrnuto.
Točku $(x_0, f(x_0))$ nazivamo točkom infleksije grafa funkcije f.

Teorem 10 (Nužan uvjet za postojanje infleksije)
Ako funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima infleksiju u točki $x_0 \in A$ i ako $f''(x_0)$ postoji, onda je $f''(x_0) = 0$.

Obrat ovog teorema općenito ne vrijedi.

Teorem 11 (Dovoljan uvjet za postojanje infleksije)
Neka je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ dvaput derivabilna na nekoj okolini $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ točke $x_0 \in A$ osim možda u točki x_0. Ako f'' mijenja predznak u točki x_0 onda f u točki x_0 ima infleksiju.

Teorem 12 Neka je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima na nekoj okolini $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ točke $x_0 \in A$ neprekidne derivacije do uključivo reda n, za $n \geq 3$. Neka je

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{i} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ako je n neparan, tada funkcija f ima infleksiju u točki x_0.

Ako je još $f'(x_0) = 0$ i ako je n paran, tada funkcija f ima ekstrem u točki x_0 i to lokalni minimum za $f^{(n)}(x_0) > 0$ i lokalni maksimum za $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Primjer

1.

$$f(x) = x^3, \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Nužan uvjet:

Sada je

$$f'(x) = 3x^2, \qquad f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$f''(x) = 6x, \qquad f'' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Imamo

$f''(x) = 6x = 0 \implies x_0 = 0.$ (moguća infleksija)

Dovoljan uvjet:

- I. način

$$x < 0 \implies f''(x) = 6x < 0$$

$$x > 0 \implies f''(x) = 6x > 0.$$

Druga derivacija mijenja predznak u točki $x_0 = 0$, pa po Teoremu 11, f u $x_0 = 0$ ima infleksiju.

- II. način

$$f'''(x) = 6, \implies f'''(0) = 6 \neq 0,$$

pa po Teoremu 12 ($n = 3$), f ima u $x_0 = 0$ infleksiju.

2.

$$f(x) = x^4, \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Nužan uvjet:

Sada je

$$f'(x) = 4x^3, \qquad f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$f''(x) = 12x^2, \qquad f'' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

Imamo

$f''(x) = 12x^2 = 0 \implies x_0 = 0$ (moguća infleksija).

Dovoljan uvjet:

- I. način

$$x < 0 \implies f''(x) = 12x^2 > 0$$

$$x > 0 \implies f'(x) = 12x^2 > 0.$$

Druga derivacija ne mijenja predznak u $x_0 = 0$, pa po Teoremu 11, f u $x_0 = 0$ nema infleksiju.

- II. način

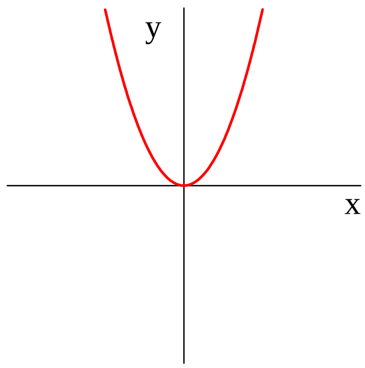
$$\begin{aligned} f'''(x) &= 24x, \implies f'''(0) = 24 \cdot 0 = 0, \\ f^{iv}(x) &= 24, \implies f^{iv}(0) = 24 \neq 0, \end{aligned}$$

pa po Teoremu 12 ($n = 4$), f nema u $x_0 = 0$ infleksiju.

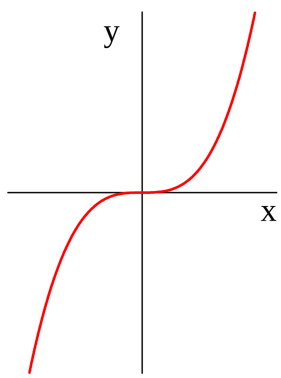
Napomena: Točka $x_0 = 0$ je stacionarna točka od f ($f'(0) = 4 \cdot 0^3 = 0$) i vrijedi

$$f''(0) = f'''(0) = 0, \qquad f^{iv}(0) = 24 > 0,$$

pa f, po Teoremu 12 ($n = 4$), ima u $x_0 = 0$ lokalni minimum.



$$y = x^4$$



$$y = x^3$$

9. Ispitivanje toka i crtanje grafa funkcije

Ispitivanje toka funkcije $y = f(x)$ sastoji se od sljedećih koraka:

1. **Prirodno područje definicije** $D(f)$ (potrebno je poznavati elementarne funkcije i rješavanje jednadžbi i nejednadžbi),

2. **Provjeriti ima li funkcija neka specijalna svojstva** (parnost-neparnost, periodičnost,...),

3. **Asimptote (vertikalne, horizontalne i kose) i ponašanje funkcije na rubovima područja definicije** (limesi),

4. **Nul-točke** (riješiti jednadžbu $f(x) = 0$),

5. **Ekstremi** (nužan i dovoljan uvjet - prva derivacija $f'(x)$),

6. **Intervali monotonosti** (predznak prve derivacije $f'(x)$),

7. **Točke infleksije** (nužan i dovoljan uvjet - druga derivacija $f''(x)$),

8. **Intervali zakrivljenosti** (predznak druge derivacije $f''(x)$),

9. **Skiciranje grafa funkcije** (na osnovi informacija iz točaka 1. - 8. + tablica toka).