NIZOVI I REDOVI

1. Niz realnih brojeva

Definicija 1 Svaku funkciju $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo niz realnih brojeva (kraće niz).
Broj $a(n) \equiv a_n$ nazivamo opći član niza (ili $n-$ti član niza).

Niz obično označavamo sa (a_n) ili $\{a_n\}$ ili ponekad sa

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \ .$$

Primjer

1. Niz čiji je opći član $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ je

$$-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ ... \ , \frac{(-1)^n}{2n+1}, ... \ .$$

2. Niz čiji je opći član

$$a_n = \begin{cases} \frac{1-n}{n}, & n \text{ neparan}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ paran}. \end{cases}$$

je

$$0, \ \frac{1}{2}, \ -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ -\frac{4}{5}, ...$$

Definicija 2 Niz (a_n) za koji vrijedi

$(\exists r \in \mathbb{R})\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ **takvi da** $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_0 \Longrightarrow a_n = r)$

nazivamo stacionarni niz.

Primjer Niz čiji je opći član

$$a_n = \begin{cases} 3n, & n \leq 4, \\ 2, & n > 4 \end{cases}$$

je

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 2,\ 2,\ 2, ...,\ 2,\ ....$$

Dakle, ovo je stacionaran niz.
Uočimo: ovdje je $r = 2, n_0 = 5$ (u oznakama iz Def. 2).

Definicija 3 Za niz $\{a_n\}$ kažemo da je rastući (padajući, strogo rastući, strogo padajući, monoton, strogo monoton) ako je takva pripadna funkcija $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Napomena: Da bi niz $\{a_n\}$ bio rastući nužno je i dovoljno da je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$.
Slično za ostale tvrdnje.

Primjer

1. Niz čiji je opći član $a_n = \frac{1}{n}$ je strogo padajući jer je

$$a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Niz čiji je opći član $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ nije monoton (nije ni padajući ni rastući).

Uočimo: ovdje je za n paran

$$a_n = \frac{1}{n} > a_{n+1} = \frac{-1}{n+1},$$

a za n neparan

$$a_n = \frac{-1}{n} < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

3. Niz čiji je opći član $a_n = 3$ je padajući i rastući, tj. monoton je, jer je

$$a_n \; = \; 3 \geq 3 = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{i}$$

$$a_n \; = \; 3 \leq 3 = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ovo je i stacionaran niz ($r = 3$, $n_0 = 1$).

Definicija 4 Kažemo da je realan broj a granična vrijednost ili limes niza $\{a_n\}$ ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ takav da } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Ako limes postoji kažemo da je niz $\{a_n\}$ konvergentan odnosno da konvergira (prema a). U protivnom kažemo da je divergentan odnosno da divergira.

Napomena: nejednakost (1) se naziva osnovna nejednakost konvergencije niza $\{a_n\}$.

Gornja definicija znači da kod konvergentnog niza $\{a_n\}$, za svaki $\varepsilon > 0$, intreval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ oko granične vrijednosti a ($\varepsilon-$ okolina od a), sadrži beskonačno članova niza, dok se izvan tog intervala nalazi samo konačno mnogo članova niza.

Teorem 1 Svaki niz $\{a_n\}$ ima najviše jednu graničnu vrijednost.

Primjer

1. Za niz čiji je opći član $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0.$$

Pokažimo to koristeći Definiciju 4.

Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $|a_n - a| < \varepsilon$, tj.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2} - 0\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Treba pronaći n_0 (iz Definicije 4). Imamo

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dakle, nejednakost (2) vrijedi za svaki $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, tj. za sve $n \geq \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1 = n_0$.

Napomena: funkcija $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ("najveće cijelo") je definirana na sljedeći način: $\lfloor x \rfloor \equiv k$, $k \in \mathbb{Z}$, gdje je k najveći cijeli broj manji ili jednak x.

Za $\varepsilon = \frac{1}{100}$ je

$$n_0 = \left\lfloor \sqrt{100} \right\rfloor + 1 = 10 + 1 = 11,$$

tj. u intervalu

$$(0-\frac{1}{100},\;\; 0+\frac{1}{100})=(-\frac{1}{100},\frac{1}{100})$$

se nalaze gotovo svi članovi niza $\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$, osim njih konačno mnogo, tj. svi osim prvih 10.

Vidjeti: sliku 1. u dodatku.

<u>Zadatak:</u>

Pokažite:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0:$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0.$

Odredite n_0 za $\varepsilon=\frac{1}{100}$ i $\varepsilon=0.035$.

Definicija 5 Kažemo da niz $\{a_n\}$ <u>divergira prema $+\infty$</u> ako vrijedi

$$(\forall r > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \ \ \text{takav da} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0$$
$$\Longrightarrow a_n > r.$$

Pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Slično, kažemo da niz $\{a_n\}$ <u>divergira prema $-\infty$</u> ako vrijedi

$$(\forall r < 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \ \ \text{takav da} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0$$
$$\Longrightarrow a_n < r.$$

Pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Gornja definicija znači:

- ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, onda je, za svaki $r > 0$, beskonačno članova niza $\{a_n\}$ veće od r, dok je <u>samo konačno mnogo članova niza manje od r.</u>

- ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, onda je, za svaki $r < 0$, beskonačno članova niza $\{a_n\}$ manje od r, dok je samo konačno mnogo članova niza veće od r.

Primjer

1. Za niz čiji je opći član $a_n = n^2$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$$

Pokažimo to koristeći Definiciju 5. Imamo

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots\ .$$

Dakle, za $r > 0$ treba pronaći n_0 (iz Definicije 5). Očito je

$$n_0 = \left\lfloor \sqrt{r} \right\rfloor + 1.$$

Npr. imamo:

- za $r = 18$ je $n_0 = \left\lfloor \sqrt{18} \right\rfloor + 1 = 4 + 1 = 5$ (gotovo svi članovi niza $\left\{n^2\right\}$, osim njih konačno mnogo, tj. svi osim prva 4, su veći od $r = 18$);

- za $r = 95$ je $n_0 = \left\lfloor \sqrt{95} \right\rfloor + 1 = 9 + 1 = 10$ (gotovo svi članovi niza $\left\{n^2\right\}$, osim njih konačno mnogo, tj. svi osim prvih 9, su veći od $r = 95$);

2. Za niz čiji je opći član $a_n = -(2n-1)$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} -(2n-1) = -\infty.$$

Pokažimo to koristeći Definiciju 5. Imamo

$$-1, \ -3, \ -5, \ -7, \ -9, \ \ldots, \ -(2n-1), \ \ldots .$$

Dakle, za $r < 0$ treba pronaći n_0 (iz Definicije 5). Očito je

$$n_0 = \left\lfloor \frac{-r+1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Npr. imamo:

- za $r = -8$ je $n_0 = \lfloor 4.5 \rfloor + 1 = 4 + 1 = 5$ (gotovo svi članovi niza $\{-(2n-1)\}$, osim njih konačno mnogo, tj. svi osim prva 4, su manji od $r = -8$);

- za $r = -11$ je $n_0 = \lfloor 6 \rfloor + 1 = 6 + 1 = 7$ (gotovo svi članovi niza $\{-(2n-1)\}$, osim njih konačno mnogo, tj. svi osim prvih 6, su manji od $r = -11$); .

3. Niz čiji je opći član

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ paran}, \\ n, & n \text{ neparan} \end{cases},$$

tj. niz

$$1,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 5,\ \frac{1}{6},\ 7,\ \ldots .$$

je <u>divergentan u širem smislu.</u>

<u>Uočimo:</u> članovi niza s parnim indeksom n se približavaju 0, dok članovi niza s neparnim indeksom rastu (teže prema $+\infty$). Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

jer je uvijek beskonačno članova niza izvan svake $\varepsilon-$okoline od 0 (gotovo svi s neparnim indeksom), iako unutar te $\varepsilon-$okoline ima beskonačno članova niza. Isto tako

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq +\infty,$$

jer je uvijek beskonačno članova niza manje od r, za svaki $r > 0$, (gotovo svi s parnim indeksom), iako je beskonačno članova niza veće od tog r.

Definicija 6 Kažemo da je realan broj r gomilište niza $\{a_n\}$ ako svaka $\varepsilon-$ okolina od r sadrži beskonačno članova tog niza, odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (\exists n' \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da je}$$

$$n' > n \quad \text{i} \quad |a_{n'} - r| < \varepsilon.$$

Najveće gomilište se naziva limes superior i označava s

$$\limsup a_n,$$

a najmanje gomilište se naziva limes inferior i označava

$$\liminf a_n.$$

Napomena: Limes je gomilište, dok gomilište općenito ne mora biti limes.

Ukoliko je niz $\{a_n\}$ konvergentan onda je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup a_n = \liminf a_n.$$

Primjer

1. Za niz čiji je opći član $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ imamo

$$-\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ -\frac{3}{4}, \ \frac{4}{5}, \ -\frac{5}{6}, \ \dots, \ (-1)^n \frac{n}{n+1}, \ \dots .$$

Članovi niza s parnim indeksom n se "gomilaju" oko 1, dok članovi niza s neparnim indeksom "gomilaju" oko -1. Dakle,

$$\liminf a_n = -1, \quad \limsup a_n = 1.$$

2. Za niz čiji je opći član $a_n = \cos n\frac{\pi}{2}$ imamo

$$0, \ -1, \ 0, \ 1, \ 0, \ -1, \ 0, \ 1, \ 0, \ \dots, \ \cos n\frac{\pi}{2}, \ \dots .$$

Članovi niza s neparnim indeksom n se "gomilaju" oko 0, dok članovi niza s parnim indeksom oblika $4k-2$ "gomilaju" oko -1, a članovi niza s parnim indeksom oblika $4k$ "gomilaju" oko 1. Dakle, skup svih gomilišta je

$$\{-1, \ 0, \ 1\},$$

pa je

$$\liminf a_n = -1, \quad \limsup a_n = 1.$$

Možemo proširiti pojam gomilišta s $+\infty$ i $-\infty$.

Za $+\infty$ kažemo je gomilište niza $\{a_n\}$ ako

$$(\forall r > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (\exists n' \in \mathbb{N}) \ \ \text{takav da je}$$

$$n' > n \quad \text{i} \quad a_{n'} > r.$$

Za $-\infty$ kažemo je gomilište niza $\{a_n\}$ ako

$$(\forall r < 0)\,(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (\exists n' \in \mathbb{N}) \ \ \text{takav da je}$$

$$n' > n \quad \text{i} \quad a_{n'} < r.$$

Primjer

Niz čiji je opći član

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ paran,} \\ n, & n \text{ neparan} \end{cases},$$

tj. niz

$$1,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 5,\ \frac{1}{6},\ 7,\ \ldots\ .$$

ima dva gomilišta 0 i $+\infty$. Članovi niza s parnim indeksom n se "gomilaju" oko 0, dok članovi niza s neparnim indeksom rastu ("gomilaju se" prema $+\infty$). Dakle,

$$\liminf a_n = 0, \quad \limsup a_n = +\infty.$$

Definicija 7 Podniz niza $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ je svaka kompozicija $a \circ n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdje je $n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija (niz u $\mathbb{N}$).

Dakle, podniz nekog niza $\{a_n\}$ je ponovno niz. Općenito, $k-$ti član podniza $a \circ n$ je

$$(a \circ n)(k) = a(n(k)) = a_{n(k)} = a_{n_k}.$$

Uočimo: podniz niza $\{a_n\}$ je niz

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4}, ..., \; a_{n_k}, ...$$

tj. niz $\{a_{n_k}\}$ sastavljen od članova niza $\{a_n\}$ tako da vrijedi $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k$ ... .

Primjer

1. Za niz čiji je opći član $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$, tj. niz

$$-\frac{1}{2}, \; \frac{2}{3}, \; -\frac{3}{4}, \; \frac{4}{5}, \; -\frac{5}{6}, \; ... \, , \; (-1)^n \frac{n}{n+1}, \; ... \, .$$

ima dva konvergentna podniza $a_{2k} = \frac{2k}{2k+1}$ i $a_{2k-1} = -\frac{2k-1}{2k}$. Vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1, \quad \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1.$$

Uočimo:

$$\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \ldots,$$

tj. $a_2, a_1, a_5, a_4, a_4, \ldots$, nije podniz (indeks strogo ne raste).

2. Promotrimo niz čiji je opći član $a_n = q^n$, tj. niz

$$q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ q^5,\ \ldots\ ,\ q^n,\ \ldots\ .$$

Ovaj niz nazivamo <u>geometrijski niz.</u> Razlikujemo slučajeve:

- $|q| < 1 \Longrightarrow$ niz konvergira i $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0;$

- $|q| > 1 \Longrightarrow$ niz divergira:
  - za $q > 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty;$

  - za $q < -1$ niz ima dva "gomilišta" $+\infty$ i $-\infty$;
- $q = 1 \Longrightarrow$ niz konvergira (stacionaran niz) i $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1;$

- $q = -1 \Longrightarrow$ niz divergira (ima dva gomilišta 1 i -1).

Svojstva konvergentnih (pod)nizova

Teorem 2 Niz $\{a_n\}$ ima gomilište r ako i samo ako postoji barem jedan podniz koji konvergira prema r.

Teorem 3 Ako je niz $\{a_n\}$ konvergentan, tada je i svaki podniz $\{a_{n_k}\}$ konvergentan i vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Teorem 4 Svaki konvergentan niz je omeđen.
Dokaz:

Teorem 5 Svaki niz ima monoton podniz.
Dokaz:

Teorem 6 Svaki monoton i omeđen niz je konvergentan. Posebno, svaki rastući niz koji je omeđen odozgo je konvergentan, te svaki padajući niz koji je omeđen odozdo je konvergentan.
Dokaz:

Teorem 7 (Bolzano - Weierstrassov) Svaki omeđen niz ima konvergentan podniz.
Dokaz:

Primjer

1. Niz

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

je strogo rastući, tj. može se pokazati da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \overset{knjiga}{\cdots} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.$$

Također, može se pokazati da je niz (a_n) omeđen odozgo, tj. da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \overset{knjiga}{\cdots} < 3.$$

Dakle, po Teoremu 5 niz $\{a_n\}$ konvergira. Limes tog niza označavamo s

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

2. Pokažimo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0. \tag{L1}$$

Razlikujemo slučajeve:

- $a = 1 \Longrightarrow$ niz konvergira (stacionaran niz) i

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1;$$

- $a > 1$

Pokažimo (L1) koristeći Definiciju 4 (def. limesa). Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $|a_n - a| < \varepsilon$, tj.

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon.$$

Treba pronaći n_0 (iz Definicije 4). Imamo

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| \;<\; \varepsilon \iff \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \iff \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon \iff$$

$$\frac{1}{n}\ln a \;<\; \ln(1+\varepsilon) \quad\iff\quad n > \frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$$

$$\Longrightarrow \quad n \geq \left\lfloor \frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)} \right\rfloor + 1 = n_0.$$

• $0 < a < 1$

Pokažimo (L1) koristeći Definiciju 4 (def. limesa). Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $|a_n - a| < \varepsilon$, tj.

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon.$$

Treba pronaći n_0 (iz Definicije 4). Imamo

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| \;<\; \varepsilon \;\Leftrightarrow\; 1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \sqrt[n]{a} > 1 - \varepsilon \;\overset{0<\varepsilon<1}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1}{n}\ln a \;>\; \ln(1-\varepsilon) \;\Leftrightarrow\; n > \frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}$$

$$\Longrightarrow \quad n \geq \left\lfloor \frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)} \right\rfloor + 1 = n_0.$$

<u>Uočimo:</u> za $\varepsilon \geq 1$ je $n_0 = 1$.

3. Može se pokazati

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Svojstva limesa

Teorem 8 Neka su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konvergentni. Tada vrijedi:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

iv) ako za svaki n vrijedi $b_n\neq 0$ i ako je $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, tada je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n},$$

v) ako za svaki n vrijedi $a_n>0$ i ako je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>0$, tada je

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}=\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

Teorem 9 Ako za nizove $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ postoji $n_0\in\mathbb{N}$ takav da za $n\geq n_0$ vrijedi $a_n\leq b_n\leq c_n$ i ako je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$, tada je i

$$\lim_{n\to\infty}b_n=a.$$