2. Red realnih brojeva

Red realnih brojeva na neki način poopćenje (konačnog) zbrajanja na "zbrajanje" beskonačno (prebrojivo) pribrojnika.

Definicija 8 Red realnih brojeva je uređeni par $((a_n), (s_k))$ realnih nizova (a_n) i (s_k), pri čemu je

$$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Broj a_n nazivamo $n-$ti član reda, broj $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ nazivamo $k-$ta parcijalna suma, a niz (s_k) niz parcijalnih suma.

Red $(\{a_n\}, \{s_k\})$ kraće zapisujemo kao

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots \ .$$

Definicija 9 Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da konvergira ako konvergira niz pripadnih parcijalnih suma (s_k). U tom slučaju graničnu vrijednost

$$\lim_{k\to\infty} s_k = s$$

nazivamo sumom reda i pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Još se koriste izrazi: red je konvergentan ili niz $\{a_n\}$ je zbrojiv ili sumabilan.
Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne konvergira kažemo da divergira.

Dva pitanja:

1. Da li red konvergira?

2. Ako red konvergira, kolika mu je suma?

Primjer Red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \quad q \in \mathbb{R}.$$

nazivamo <u>geometrijski red</u>. Uočimo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Ispitajmo konvergenciju geometrijskog reda u ovisnosti o $q \in \mathbb{R}$. Uočimo da je ovdje

$$a_n = q^{n-1} \quad \text{i} \quad s_k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1}.$$

Razlikujemo slučajeve:

- $q = 1 \Longrightarrow s_k = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = k$
  $\Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} s_k = \lim\limits_{k\to\infty} k = +\infty$, red divergira;

- $q = -1 \Longrightarrow s_k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{k-1} \Longrightarrow$

$$s_k = \begin{cases} (1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) = 0, & k \text{ paran} \\ (1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + 1 = 1, & k \text{ neparan} \end{cases}$$

Dakle, niz (s_k) je niz

$$1,\ 0,\ 1,\ 0, \ldots, 1,\ 0,\ 1, ...$$

Ovaj niz ima dva gomilišta 1 i 0, dakle divergira, pa red divergira.

- $q \neq \pm 1 \implies$ (suma kon. geom. reda) $\implies$

$$s_k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1} = \frac{1-q^k}{1-q} \implies$$

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1-q^k}{1-q} = \frac{1}{1-q} \lim_{k\to\infty} \left(1-q^k\right) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1-q} \cdot (1-0) = \frac{1}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{divergira} & |q| > 1. \end{cases} .$$

Dakle red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konvergira za $|q| < 1$, a inače (za $|q| \geq 1$) divergira.

Primjer Red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

konvergira i suma mu je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

Teorem 10 (nužan uvjet konvergencije) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira onda je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz: Neka je

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

pri čemu je (s_n) niz parcijalnih suma. Kako limes niza ne ovisi o pomicanju indeksa za konačan broj mjesta, vrijedi $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Budući je $s_n = s_{n-1} + a_n$ sada imamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0\end{aligned}$$

i teorem je dokazan.

Tvrdnja teorema je ekvivalentna tvrdnji:

Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

Obrat ovog teorema općenito ne vrijedi. Dakle, postoje redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ za koje vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a divergentni su, ali su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ za koje vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ jedini "kandidati" za konvergenciju.

Primjer Red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

je divergentan (vidjeti u knjizi Primjer 6.10 str. 229.), iako je $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Primjer Red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}$$

je divergentan (po Teoremu 10) jer je je $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1 \neq 0$.

Kriteriji konvergencije

Definicija 10 Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je red s pozitivnim članovima ako je $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 11 Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dva reda s pozitivnim članovima. Kažemo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ majoranta reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ minoranta reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_0$ povlači $a_n \leq b_n$.

Primjer Promatrajmo redove (s pozitivnim članovima)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Budući je za svaki $n \geq 1$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

onda je npr. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ minoranta reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, a npr. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ majoranta reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Teorem 11 (Kriteriji konvergencije) Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dva reda s pozitivnim članovima. Tada vrijedi:

i) Poredbeni kriterij I Red je konvergentan ako ima konvergentnu majorantu, a divergentan ako ima divergentnu minorantu.

ii) Poredbeni kriterij II Neka je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = r.$$

Tada vrijedi:

a) ako je $0 < r < +\infty$, tada oba reda ili konvergiraju ili divergiraju;

b) ako je $r = 0$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira;

c) ako je $r = 0$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira;

d) ako je $r = +\infty$ i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira;

e) ako je $r = +\infty$ i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira, tada i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

iii) <u>D'Alambertov kriterij</u> Neka je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Ako je $q < 1$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a ako je $q > 1$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

iv) <u>Cauchyjev kriterij</u> Neka je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Ako je $q < 1$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a ako je $q > 1$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

v) Raabeov kriterij Neka je

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=q.$$

Ako je $q>1$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a ako je $q<1$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Primjer 1 Ispitajmo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ koristeći činjenicu da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

Poredbeni kriterij I: Budući je $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ za svaki $n \geq 1$, to je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentana minoranta reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, pa red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira.

Poredbeni kriterij II: Neka je $a_n=\frac{1}{n}$ i $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Sada je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$$

pa budući da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, onda i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira (po b)).

Slično se pokaže da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, za $0 < p < 1$ divergira, jer je za svaki $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}.$$

Može se pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, za $p > 1$ konvergira (teže).

Primjer 2 Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ koristeći činjenicu da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

Poredbeni kriterij II: Neka je $a_n = \frac{1}{n}$ i $b_n = \frac{1}{2n-1}$. Sada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = 2,$$

pa budući da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, onda i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ divergira (po a)).

Primjer 3 Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

D'Alambertov kriterij: Imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1,$$

pa red konvergira.

Primjer 4 Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Cauchyjev kriterij: Imamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

pa red konvergira.

Apsolutna konvergencija

Definicija 12 Za red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da <u>apsolutno konvergira</u> ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Teorem 12 Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, tada i konvergira.

Obrat ovog teorema općenito ne vrijedi, tj. ima konvergentnih redova koji nisu apsolutno konvergentni.

Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira onda smijemo "grupirati i komutirati sumande", tj. "redosljed zbrajanja" ne utječe na sumu reda.

Primjer 1 Ispitajmo apsolutnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

Budući je

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \right| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

onda je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

(konvergentni) geometrijski red ($q = \frac{1}{2}$). Dakle, red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ apsolutno konvergira, pa po Teoremu 12, i konvergira**.**

Nađimo sumu tog reda. Budući da red konvergira, možemo grupirati i komutirati članove reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^7} + \quad \cdots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \quad \cdots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \quad \cdots\right) =$$

$$= S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}S,$$

gdje je

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

pa je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{1}{2}S = \frac{2}{3}.$$

Primjer 2 Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

konvergira (kasnije ćemo pokazati), ali apsolutno divergira jer je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergentni red.

Alternirani redovi

Za red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je alternirani red ako je $\operatorname{sgn} a_n = -\operatorname{sgn} a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Teorem 13 (Lebnitz) Alternirani red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako vrijedi:

i) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ takav da $n \geq n_0$ povlači $|a_{n+1}| \leq |a_n|$,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Primjer Ispitajmo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots .$$

Ovo je alternirani red. Imamo:

i) za $n \geq 1$ vrijedi

$$|a_{n+1}| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = |a_n| ,$$

ii)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0,$$

pa, po Lebnitzovom kriteriju, red konvergira.