3. Niz funkcija

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$. Označimo s $\mathbb{R}^D$ skup svih funkcija iz D u $\mathbb{R}$, tj.

$$\mathbb{R}^D = \{f \mid f : D \to \mathbb{R}\}$$

Definicija 13 Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$. Niz funkcija je svaka funkcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^D$, pri čemu je

$$f(n) = f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Funkciju f_n nazivamo $n-$ti član niza.

Niz funkcija označavamo s $\{f_n\}$ ili ponekad sa

$$f_1, f_2, f_3, ..., f_n, ... \quad .$$

Definicija 14 Niz funkcija $\{f_n\}$ konvergira u točki x prema funkciji f_0 ako niz realnih brojeva $\{f_n(x)\}$ konvergira prema $f_0(x)$.

Niz funkcija $\{f_n\}$ konvergira po točkama ili obično prema funkciji f_0 na skupu $A \subseteq D$ ako niz realnih brojeva $\{f_n(x)\}$ konvergira prema $f_0(x)$ za svaki $x \in A$. Simbolički zapisujemo

$$(\forall x \in A)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon.$$

Napomena: n_0 iz definicije ovisi općenito o x i ε.

Definicija 15 Niz funkcija $\{f_n\}$ konvergira jednoliko (ili uniformno) prema funkciji f_0 na skupu $A \subseteq D$ ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall x \in A)\,(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon.$$

Napomena: n_0 iz ove definicije ovisi općenito samo o ε.

Napomena: Niz funkcija koji konvergira uniformno konvergira i po točkama na nekom skupu.

Primjer Neka je zadan niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, tj.

$$x, x^2, ..., x^n, ...$$

Budući je

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \\ div. & x > 1 \text{ i } x \leq -1 \end{cases},$$

onda niz funkcija $\{f_n\}$ konvergira po točkama funkciji

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

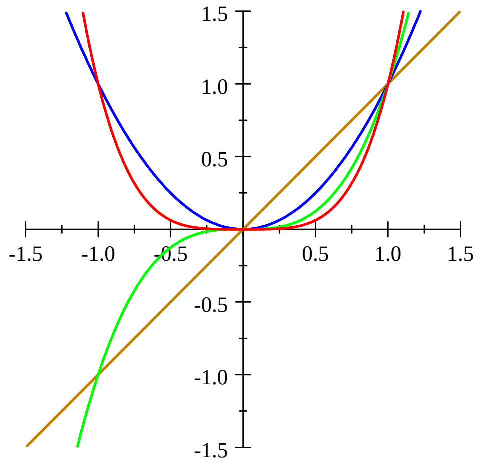
na skupu $A = (-1, 1]$.

Naime, npr. za $0 < x < 1$ vrijedi

$$|x^n - 0| < \varepsilon \Longleftrightarrow n \ln x < \ln \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \Longrightarrow$$

$$n_0 = \left\lfloor \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \right\rfloor + 1.$$

Grafički:



Ako niz neprekidnih funkcija $\{f_n\}$ konvergira uniformno prema funkciji f_0, tada je i f_0 neprekidna funkcija.
Ako konvergencija nije uniformna, tada funkcija f ne mora biti neprekidna funkcija (slučaj u predhodnom primjeru).

Primjer Niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = 1 - \frac{\sin nx}{n},$$

uniformno konvergira prema funkciji $f_0(x) = 1$. (Vidjeti sliku 5 u dodatku)

4. Red funkcija

Definicija 16 Red funkcija je uređeni par $(\{f_n\}, \{s_k\})$ nizova funkcija $\{f_n\}$ i $\{s_k\}$, pri čemu je $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$s_k = f_1 + f_2 + \cdots + f_k = \sum_{n=1}^{k} f_n.$$

Funkciju f_n nazivamo $n-$ti član reda, a funkciju $s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$ $k-$ta parcijalna suma.

Red $(\{f_n\}, \{s_k\})$ kraće zapisujemo kao

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_k + \cdots \ .$$

Definicija 17 Red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$

- konvergira u točki x prema funkciji s ako red realnih brojeva $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira prema $s(x)$, odnosno ako niz realnih brojeva $\{s_k(x)\}$ konvergira prema $s(x)$.

- konvergira po točkama ili obično prema funkciji s na skupu $A \subseteq D$ ako red realnih brojeva $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira prema $s(x)$ za svaki $x \in A$.

- konvergira apsolutno na skupu $A \subseteq D$ ako red realnih brojeva $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konvergira za svaki $x \in A$.

- konvergira uniformno prema funkciji s na skupu $A \subseteq D$ ako niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira uniformno prema funkciji s na skupu A.

Teorem 15 (Weierstrass) Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergira uniformno na skupu $A \subseteq D$ ako ima konvergentnu majorantu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, tj. ako

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad (\forall x \in A) \quad |f_n(x)| \leq a_n \text{ čim je } n \geq n_0.$$

Primjer 1 Ispitajmo za koje $x-$eve red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1-x)^n}$$

apsolutno konvergira. Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^{n-1}}{(1-x)^n} \right|$$

je red s pozitivnim članovim, pa na njega možemo primijeniti Cauchyjev kriterij. Imamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^{n-1}}{(1-x)^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{\frac{n-1}{n}}}{|1-x|} = \frac{|x|}{|1-x|}.$$

Red će apsolutno konvergirati za

$$\frac{|x|}{|1-x|} < 1 \implies x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right).$$

Treba još provjeriti što se događa za $x = \frac{1}{2}$. Za $x = \frac{1}{2}$ polazni red je oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2.$$

Ovaj red divergira jer je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2 \neq 0$. Dakle, polazni red apsolutno konvergira za $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

Primjer 2 Promatrajmo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Za svaki $n \geq 1$ vrijedi

$$\left| \frac{x^n}{n^2} \right| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \iff |x| \leq 1.$$

Budući da je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentan. Dakle, polazni red uniformno konvergira na intervalu $x \in [-1, 1]$.

5. Red potencija

Red funkcija oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad a_n \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

se naziva red potencija.

Ovdje je $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n (x - x_0)^n$.

Svakom redu oblika (1) pridjeljuje se njegov radijus konvergencije $\rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \{+\infty\}$ koji se definira kao:

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{ili} \quad \rho = \frac{1}{\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}.$$

Napomena: Red potencija oblika (1) konvergira (po točkama) na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.

Teorem 16 Red potencija oblika (1) konvergira apsolutno i jednoliko na svakom segmentu $[x_0 - r, x_0 + r]$, gdje je $r < \rho$, a divergira na skupu $\mathbb{R} \setminus [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$.

Primjer Odredite radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}. \tag{2}$$

Imamo

$$a_n = \frac{1}{n} \implies \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \frac{n}{n+1} \quad \to \ 1,$$

pa je

$$\rho = \frac{1}{\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dakle, red potencija (2) konvergira na intrevalu $(0, 2)$, apsolutno i jednoliko konvergira na svakom segmentu $[1-r, 1+r]$, $r < 1$, a divergira na skupu $\mathbb{R} \setminus [0, 2]$.
Za $x = 0$ imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

pa red (uvjetno) konvergira. Za $x = 2$ imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n},$$

pa red divergira. Dakle, red potencija (2) konvergira na intrevalu $[0, 2)$, a divergira na skupu $\mathbb{R} \setminus (0, 2]$.

6. Taylorov red

Teorem 17 Neka funkcija f ima na intervalu (a, b) derivaciju do $n+1$ reda. Tada za proizvoljnu točku $x_0 \in (a, b)$ i za svaki $x \in (a, b)$ vrijedi

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \tag{3}$$

gdje je

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \tag{4}$$

za $0 < \theta < 1$.

Napomena:

Formulu (3) nazivamo Taylorova formula, a (4) Lagrangeov oblik ostatka.

Teorem 18 Neka funkcija f ima na intervalu (a,b) derivacije proizvoljnog reda. Tada za proizvoljnu točku $x_0 \in (a,b)$ i za svaki $x \in (a,b)$ vrijedi

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \tag{5}$$

ako i samo ako niz ostataka $\{R_n(x)\}$ teži prema 0 za svaki $x \in (a,b)$.

Red potencija (5) se naziva Taylorov red ili Taylorov razvoj funkcije f u točki x_0.
Taylorov razvoj funkcije f u točki $x_0 = 0$ naziva se MacLaurinov razvoj,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Teorem 19 Taylorov red elementarne funkcije f u svakoj točki x svog područja konvergencije konvergira prema $f(x)$.

Primjer Odredimo MacLaurinov razvoj funkcije $f(x) = \cos x$. Imamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \implies f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos x \implies f''(0) = -1 \\ f'''(x) &= \sin x \implies f'''(0) = 0 \\ f^{iv}(x) &= \cos x \implies f^{iv}(0) = 1 \\ f^{v}(x) &= -\sin x \implies f^{v}(0) = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zaključujemo

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{Z} \\ (-1)^k & n = 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

pa je

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{-1}{6!}x^6 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \end{aligned}$$

na intervalu na kojem ovaj red konvergira.

Odredimo područje konvergencije reda

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

Imamo

$$a_k=\frac{(-1)^k}{(2k)!}\quad\Longrightarrow\quad\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}}{\frac{(-1)^k}{2k!}}\right|=$$

$$=\frac{(2k)!}{(2k+2)(2k+2)(2k)!}=\frac{1}{(2k+2)(2k+1)}\quad\to\ 0,$$

pa je

$$\rho=\frac{1}{\limsup\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}=\left(\frac{1}{0}\right)=+\infty.$$

Dakle, red konvergira na cijelom $\mathbb{R}$. Sad imamo

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\quad\text{za svaki } x\in\mathbb{R}.$$

Područje apsolutne konvergencije može se odrediti i koristeći D'Alambertov kriterij.
Za red

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

je

$$f_k(x) = \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

pa po D'Alambertov kriteriju imamo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|f_{k+1}(x)|}{|f_k(x)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(2k+2)!}|x|^{2k+2}}{\frac{1}{2k!}|x|^{2k}} =$$

$$= |x|^2 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} = 0 < 1,$$

pa red konvergira apsolutno na cijelom $\mathbb{R}$, pa i konvergira na cijelom $\mathbb{R}$ (Po Teoremu 12).

Slično se pokaže

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R};$$

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{za svaki } x \in (-1, 1].$$

Vidjeti slike 7, 8, 9, 10 u dodatku.

Primjer S kolikom točnošću

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

aproksimira funkciju $f(x) = \cos x$ za $|x| \leq 1$. Po formuli (3) imamo

$$\cos x = \cos 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + R_5(x)$$

gdje je

$$R_5(x) = \frac{x^6}{6!} \cdot f^{vi}(0 + \theta(x - 0)) = \frac{x^6}{6!}(-\cos\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

Budući je za $|x| \leq 1$

$$|R_5(x)| = \left| \frac{x^6}{6!}(-\cos\theta x) \right| = \frac{|x|^6}{6!} |\cos\theta x| \leq \frac{|x|^6}{6!} \leq \frac{1}{6!} < 0.0013,$$

onda je za $|x| \leq 1$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \pm 0.0013.$$

Specijalno

$$\begin{aligned} \cos\frac{1}{2} &= 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \pm 0.0013 \\ &= 0.8776 \pm 0.0013. \end{aligned}$$