# INTEGRALI

Pitanja:

- Je li dana realna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, derivacija neke realne funkcije $g : A \to \mathbb{R}$?

- Riješiti jednadžbu $g' = f$, pri čemu se za dani $f$ traži $g$.

- Ta jednadžba ili nema rješenja ili ih ima beskonačno mnogo. Skup svih pripadnih rješenja ćemo nazvati **(neodređenim) integralom** funkcije $f$ i pritom ćemo govoriti da smo funkciju $f$ **integrirali**.
- integriranje tehnički neusporedivo složeniji račun-postupak od deriviranja, premda se, na neki način, radi o obratnomu računu.

Oznake:

- Jednostavnosti radi nazivom interval i oznakom $I$ obuhvatiti ćemo sve mogućnosti:

$$(a, b)\,,\ (a, \infty)\,,\ (-\infty, b)\,,\ (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

## 1. Neodređeni integral

**Definicija 1.1** Neka je dan interval $I$ i funkcija $f : I \to \mathbb{R}$. Svaku neprekidnu funkciju $F : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I$, nazivamo **primitivnom funkcijom** za funkciju $f$ na intervalu $I$.

**Napomena:**

- Primitivna funkcija za funkciju $f$ se može definirati i malo općenitije (vidjeti: http://www.pmfst.hr/zavodi/matematika/scripta/visa_matematika.pdf, str. 190.));

- Primijetimo da je primitivna funkcija za funkciju $f$, definirana kao u Definiciji 1.1, derivabilna funkcija (kod općenitije definicije to ne mora biti) ;

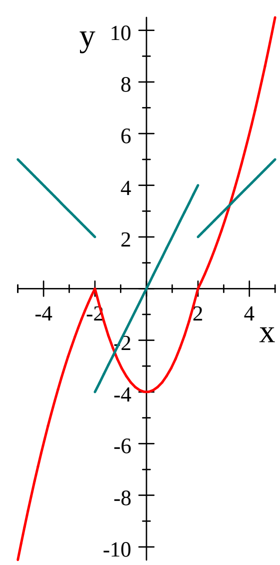
**Primjer 1** Funkcija

$$F:\mathbb{R}\diagdown\{-2,2\}\to\mathbb{R},\quad F(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+2, & x<-2\\ x^2-4, & -2<x<2\\ \dfrac{x^2}{2}-2, & x>2\end{cases},$$

je primitivna funkcija za funkciju

$$f:\mathbb{R}\diagdown\{-2,2\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}-x, & x<-2\\ 2x, & -2<x<2\\ x, & x>2\end{cases},$$

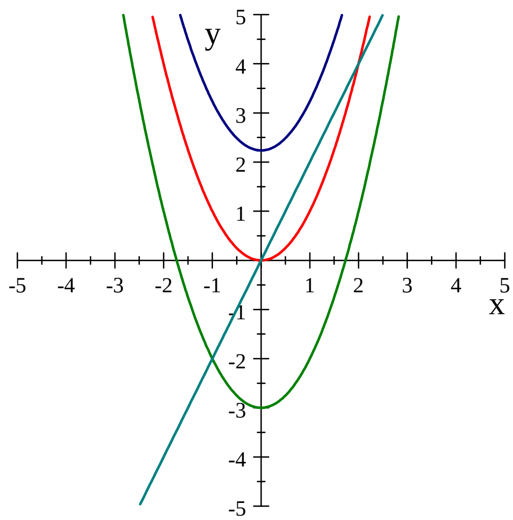
jer je $F'(x)=f(x)$ za svaki $\mathbb{R}\diagdown\{-2,2\}$.



**Primjer 2** Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, su između ostalih i ove funkcije primitivne na $\mathbb{R}$ :

$$F_1(x) = x^2, \quad F_2(x) = x^2 - 3, \quad F_3(x) = x^2 + \sqrt{5},$$

jer je npr. $F_2'(x) = 2x = f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.




**Teorem 1.2** Ako za danu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ postoji primitivna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$, onda je i svaka funkcija $G : I \to \mathbb{R}$, $G = F + C$, gdje je $C \in \mathbb{R}$ konstanta, primitivna za funkciju $f$. Štoviše, ako su $F, G : I \to \mathbb{R}$ primitivne funkcije za $f$, onda je $G = F + C$, za neki $C \in \mathbb{R}$.

(Sažeto: "Primitivna funkcija je jednoznačno određena do na aditivnu konstantu".)

Dokaz:

**Definicija 1.3** Za danu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$, skup svih njezinih primitivnih funkcija na intervalu (ili njihovoj uniji) $I$ nazivamo **neodređenim integralom** funkcije $f$ na intervalu $I$ i označujemo s $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Skraćeno pišemo

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,\ x \in I,$$

gdje $F$ neka (bilo koja) primitivna funkcija za $f$ na $I$, a $C$ oznaka za opću konstantu.

Oznake: funkciju $f$ nazvati **integrandom** (ili **podintegralnom funkcijom**), $x$ - **integracijskom varijablom**, a $C$ - **integracijskom konstantom**.

**Primjer 1**

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,$$

jer je

$$(-\cos x + C)' = \sin x,\ x \in \mathbb{R}.$$

**Primjer 2**

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

jer je

$$(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)\,.$$

**Primjer 3**

$$\int 2|x|\,\mathrm{d}x = \int \left( \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} \right) \mathrm{d}x = \begin{cases} x^2 + C, & x \geq 0 \\ -x^2 + C, & x < 0 \end{cases} \quad ,$$

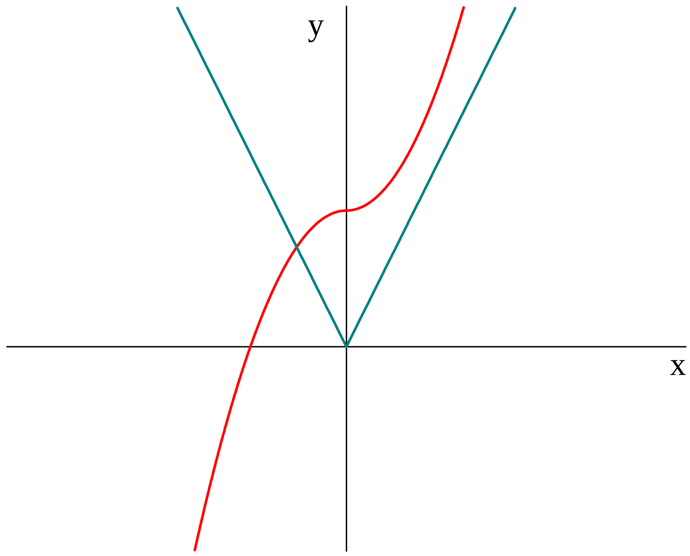
jer je

$$\left( \begin{cases} x^2 + C, & x \geq 0 \\ -x^2 + C, & x < 0 \end{cases} \right)' = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} = 2\,|x|\,, x \in \mathbb{R}.$$

(Funkcija $x \mapsto 2|x|$ nije derivabilna u točki $x = 0$, dok njezina primitivna funkcija

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 + C, & x \geq 0 \\ -x^2 + C, & x < 0 \end{cases}$$

to jest. Ta derivacija je $0$, jer postoje derivacije slijeva i zdesna i obje iščezavaju.)




**Teorem 1.4** Neka je $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, tj. $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I$ Tada na $I$ vrijedi:

**a)** $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$ ("deriviranjem integrala dobivamo integrand");

**b)** $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$ ("diferenciranje poništava integriranje");

**c)** $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$ ("integriranje poništava diferenciranje do na konstantu").

<u>Dokaz:</u> Očit.

**Teorem 1.5** Neka funkcije $f_{1,2} : I \to \mathbb{R}$, dopuštaju primitivne funkcije na intervalu $I$, te neka su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ konstante. Tada i funkcija $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : X \to \mathbb{R}$ dopušta primitivnu funkciju na $I$ i vrijedi

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\,\mathrm{d}x = \lambda_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x + C, \tag{1}$$

tj. neodređeni integral čuva (do na aditivnu konstantu) linearnu kombinaciju.

Dokaz:

**Napomena:** Ubuduće u jednakostima sličnima (1), opću konstantu $C$ najčešće nećemo zapisivati, tj. u takvim "jednakostima" ćemo dopuštati da se lijeva i desna strana smiju razlikovati do na aditivnu konstantu.

Teorem 1.5 očito povlači

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Primjer 1**

$$\int\left(4\cos x+\frac{x^3}{2}-3\right)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} 4\int\cos x\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int x^3\,\mathrm{d}x-3\int\mathrm{d}x$$

$$=4\sin x+\frac{x^4}{8}-3x+C.$$

(Naime, $(\sin x)'=\cos x$, $\left(\dfrac{x^4}{4}\right)'=x^3$ i $(x)'=1$.)

Točnost **tablice osnovnih integrala** (na definicijskim područjima podintegralnih funkcija) lako se provjeri deriviranjem:

$$\int 0\cdot\,\mathrm{d}x=C; \tag{2}$$

$$\int\mathrm{d}x=x+C; \tag{3}$$

$$\int x^r\,\mathrm{d}x=\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C,\quad r\neq-1; \tag{4}$$

$$\int x^{-1}\,\mathrm{d}x\equiv\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C; \tag{5}$$

$$\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C; \tag{6}$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}a^x+C,\quad 0<a\neq1; \tag{7}$$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C; \tag{8}$$

$$\int \operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C \tag{8'}$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C; \tag{9}$$

$$\int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C \tag{9'}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C; \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, \mathrm{d}x = \operatorname{th} x + C; \tag{10'}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C; \tag{11}$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cth} x + C; \tag{11'}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C; \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + C; \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C; \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C; \qquad (15)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C. \qquad (16)$$

Neodređene integrale od (2) do (16) nazivamo **tabličnim integralima**.

## 2. Osnovne integracijske metode

Neodređene integrale elementarnih funkcija što se mogu prikazati kao linearne kombinacije podintegralnih funkcija iz tablice gore, lako određujemo primjenom Teorema 1.5. U takvim slučajevima kažemo da smo funkciju integrirali **izravno (ili neposredno)**.

### Primjer 1

$$\int \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int x^{\frac{7}{6}}\,\mathrm{d}x \overset{(4)}{=} \frac{12}{13}x^2\sqrt[6]{x} + C;$$

**Primjer 2**

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, \mathrm{d}x \overset{(1)}{=}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} \overset{(10),(11)}{=} \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Skup svih izravno integrabilnih funkcija proširujemo primjenom dvaju jednostavnih postupaka: uvođenjem nove varijable **(supstitucija)** i prepoznavanjem diferencijala nekog umnoška (**parcijalna integracija**).

Supstitucija se sastoji u tomu da se nekom dopustivom zamjenom integracijske varijable ili podintegralnog izraza polazni integral svede na neke od onih tabličnih. O tomu govore dva iduća teorema.

**Teorem 2.1** Neka za funkciju $f$ postoji neka primitivna funkcija na intervalu $I$. Nadalje, neka je $\varphi : J \to I$, $J$ - interval, strogo monotona i derivabilna surjekcija. Tada je

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C, \tag{17}$$

gdje je $\Phi$ primitivna funkcija za funkciju $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na $J$. Drugačijim zapisom,

$$\int \left((f \circ \varphi) \cdot \varphi'\right)(t)\,\mathrm{d}t = \int f\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(t) + C.$$

<u>Dokaz:</u>

**Napomena:**

- Teorem 2.1 jamči da se, pod navedenim uvjetima, zadani integral smije rješavati zamjenom $x = \varphi(t)$ i $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, tj.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \equiv$$

$$= \Phi(t) + C = \Phi\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C = F(x) + C.$$

- Temeljna zamisao je u tomu da se nađe zamjenska funkcija $\varphi$, koja će polučiti funkciju $\phi = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, tako da integral $\int \phi(t)\,\mathrm{d}t$ bude "tehnički" bitno jednostavniji (što bliži nekom tabličnom integralu) od polaznoga (netabličnog) $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Naravno, idealno je ako se "iz prve" za $\int \phi(t)\,\mathrm{d}t$ dobije neki tablični integral.

- Obično zamjenske funkcije koje su pogodne za pojednostavljenje podintegralnog izraza na svojim definicijskim područjima ne zadovoljvaju uvjete Teorema 1.15, pa uzimamo njihova suženja koja zadovoljavaju te uvjete.

**Primjer 1**

$$\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = t^6,\ t > 0 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = \int \frac{1+t^2}{t^3} \cdot 6t^5\,\mathrm{d}t =$$

$$\int 6(t^4+t^2)\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} 6\int t^4\,\mathrm{d}t + 6\int t^2\,\mathrm{d}t \overset{(4)}{=}$$

$$6 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} \overset{t=\sqrt[6]{x}}{=} \frac{6}{5} \cdot \sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} + C$$

**Teorem 2.2** Neka je $G$ primitivna funkcija za funkciju $g$ na intervalu $J$, tj. $G'(t) = g(t)$, $t \in J$, te neka je $\psi : I \to J$, $I$ - interval, derivabilna funkcija. Tada je

$$\int g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)\,\mathrm{d}x = G(\psi(x)) + C. \tag{18}$$

Dokaz: Promotrimo funkcije $f(x) = g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$ i $F(x) = G(\psi(x))$. Budući je $G'(t) = g(t), t \in J$ imamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= (G(\psi(x)))' = G'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) \\ &= g(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = f(x) \end{aligned}$$

za svaki $x \in I$, a to se i tvrdilo.

**Napomena:**
Teorem 2.2 kazuje da ako se u podintegralnoj funkciji $f(x)$ prepozna izraz oblika $g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$ i ako znamo da je $\int g(t)\ \mathrm{d}t = G(t) + C$, onda je

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= G(\psi(x)) + C = G(\psi(x)) + C.$$

**Primjer 1**

$$\int \cos 5x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{5} \cos 5x \cdot 5 \,\mathrm{d}x = [t = 5x;\ \mathrm{d}t = 5\,\mathrm{d}x] =$$

$$\frac{1}{5}\int \cos t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\sin t + C = \frac{1}{5}\sin 5x + C.$$

**Primjer 2**

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^r} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^r} = [t = 1 + x^2;\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x] =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^r} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln|t| + C, & r = 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-r+1}}{-r+1} + C, & r \neq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, & r = 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{-r+1}}{-r+1} + C, & r \neq 1 \end{cases}$$

**Napomena:** Vrijedi općenito

$$\int \frac{h'(x)}{h(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|h(x)| + C$$

i

$$\int (h(x))^r \, h'(x) \, \mathrm{d}x = \frac{(h(x))^{r+1}}{r+1} + C, \ r \neq -1.$$

**Parcijalna integracija** se sastoji u tomu da se pogodnim izborom realnih funkcija $x \mapsto g(x)$ i $x \mapsto h(x)$, takvih da je $g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$, i primjenom diferencijala na produktnu funkciju $x \mapsto g(x)h(x)$, integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ili bitno pojednostavni ili da postane nepoznanicom u lako rješivoj jednadžbi.

**Teorem 2.3** Ako su funkcije $g, h : I \to \mathbb{R}$, neprekidno derivabilne, onda vrijedi

$$\int g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = g(x)h(x) - \int h(x)g'(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (19)$$

Dokaz:

**Napomena:** Uobičajilo se uvesti pokrate $g(x) = u$ i $h(x) = v$ pa formula (19) ima i zapis

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

## Primjer 1

$$\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \;=\; \begin{bmatrix} u = x;\; \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x;\; v = \displaystyle\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \end{bmatrix} \overset{(19)}{=}$$

$$=\; x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

## Primjer 2

$$I = \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \mathrm{e}^x,\, \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin x \,\mathrm{d}x, v = \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$-\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{c} u = \mathrm{e}^x,\, \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos\, \mathrm{d}x,\; v = \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x \end{array} \right.$$

$$-\mathrm{e}^x \cos x + \left( \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x \right) = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - I$$

Sada imamo

$$I = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - I \;\Longrightarrow$$

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \left(\sin x - \cos x\right) + C$$

**Primjer 3 - Rekurzivna formula**

Odredimo, za svaki $n \in N$, integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} \equiv I_n.$$

Za $n = 1$ se radi o tabličnomu integralu (12),tj. $I_1 = \mathrm{arctg} x + C$.

Neka je $n \geq 2$. Tada je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n},$$

tj.

$$I_n = I_{n-1} - \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

Primijenimo parcijalnu integraciju na

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n},\ n \geq 2,$$

uzevši

$$u \;=\; x;\; \mathrm{d}u = \mathrm{d}x;\; \mathrm{d}v = \frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^n};$$

$$v \;=\; \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^n} = \frac{-1}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}}.$$

Slijedi,

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^n} = \frac{-x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^{n-1}} =$$

$$\frac{-x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Dobili smo, dakle, **rekurzivnu formulu**[1]

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Primjerice, za $n = 2$ i $n = 3$ je, redom,

[1] **Rekurzivne formule** omogućuju da se integral koji ovisi o prirodnom broju $n \in \mathbb{N}$ (ili $n \in \mathbb{Z}$) svede na integral (ili integrale) istog oblika, ali s manjim indeksom, npr. $n-1$ ili $n-2$.

$$I_2 \equiv \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2} I_1$$

$$= \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C,$$

$$I_3 \equiv \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3}{4} I_2 =$$

$$\frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3x}{8\left(1+x^2\right)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C.$$