3. Integriranje nekih elementarnih funkcija

Integralni račun, tj. određivanje primitivnih funkcija je tehnički složen posao.

Poteškoće:

- Primitivna funkcija za (i relativno jednostavnu) elementarnu funkciju ne mora biti elementarna (tada se kaže da je integral **elementarano nerješiv).** Npr.

$$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

  su elementarano nerješivi integrali.

- Kad je primitivna funkcija elementarna funkcija (tada se kaže da je integral **elementarno rješiv**), njezino je određivanje, osim u rijetkim slučajevima (tablični ili njima vrlo slični integrali) vrlo zahtjevno.

Dakle, integralni račun je složeniji nego diferencijalni račun. Derivacija elementarne funkcije je opet elementarna funkcija (i svaku znamo derivirati), dok integral elementarne funkcije ne mora biti elementarna funkcija (a ako i jest, često ju je vrlo teško naći).

3.1. Integriranje racionalnih funkcija

Integral racionalne funkcije je oblika

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,\mathrm{d}x$$

gdje su $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi stupnja m i n, redom, koji nemaju zajedničkih nul-točaka.

Razlikujemo slučajeve:

- $n = 0 \Longrightarrow \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = S(x)$ je polinom (dobivamo sumu tabličnih integrala);

- Ako je $m < n$ onda je $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ prava racionalna funkcija;

- Ako je $m \geq n$ onda, dijeljenjem, dobivamo

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,\mathrm{d}x = \int \left(S(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}\right)\mathrm{d}x$$

  gdje je $S(x)$ polinom a $\frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$ prava racionalna funkcija.

Dakle, dovoljno je pretpostaviti da je $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ prava racionalna funkcija.

Temeljna zamisao jest da se polazna (prava) racionalna funkcija $f = \frac{P_m}{Q_n}$ prikaže kao zbroj jednostavnijih racionalnih funkcija, koje u nazivnicima imaju prirodne potencije linearnih ili kvadratnih faktora iz faktorizacije od Q_n (**rastav na parcijalne razlomke**).

Pritom se rabi tzv. **metoda neodređenih koeficijenata**, koja se, u biti, temelji na činjenici da su dva polinoma jednaka onda i samo onda kad su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Rastav $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ na parcijalne razlomke - postupak:

- Po Osnovnom teoremu algebre, svaki polinom se na jedinstven način može rastaviti (nad $\mathbb{R}$) kao produkt linearnih i kvadratnih članova (s negativnom diskriminantom)

$$Q_n(x) \equiv b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 =$$
$$b_n (x - a_1)^{s_1} \cdots (x - a_r)^{s_r} \left(x^2 + \underbrace{c_1 x + d_1}_{c_1^2 - 4d_1 < 0}\right)^{k_1} \cdots \left(x^2 + \underbrace{c_l x + d_l}_{c_l^2 - 4d_l < 0}\right)^{k_l},$$

- Linearnom polinomu $x - a_j$ koji se pojavljuje s_j puta, pridružuje se s_j parcijalnih razlomaka

$$\frac{A_{j1}}{x-a_j}+\frac{A_{j2}}{\left(x-a_j\right)^2}+...+\frac{A_{js_j}}{\left(x-a_j\right)^{s_j}},$$

a kvadratnom polinomu koji se pojavljuje k_i puta, pridružuje se k_i parcijalnih razlomaka

$$\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+c_ix+d_i}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{\left(x^2+c_ix+d_i\right)^2}+...+\frac{B_{1k_i}x+C_{1k_i}}{\left(x^2+c_ix+d_i\right)^{k_i}}.$$

- Sada je

$$\frac{P_m\left(x\right)}{Q_n\left(x\right)}=\frac{1}{b_n}\left(\frac{A_{11}}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_{1s_1}}{(x-a_1)^{s_1}}+\frac{A_{21}}{x-a_2}+\cdots\right.$$

$$\cdots+\frac{A_{rs_r}}{(x-a_r)^{s_r}}+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+c_1x+d_1}+\cdots+\frac{B_{1k_1}x+C_{1k_1}}{(x^2+c_1x+d_1)^{k_1}}+\cdots$$

$$\left.\cdots+\frac{B_{l1}x+C_{l1}}{x^2+c_lx+d_l}+\cdots+\frac{B_{lk_l}x+C_{lk_l}}{(x^2+c_lx+d_l)^{k_l}}\right)$$

- Nepoznati koeficijenti A_{is_i}, B_{jk_j} i C_{jk_j} se određuju tako da se predhodna jednakost pomnoži polinomom $Q_n\left(x\right)$ i potom izjednače koeficijenti uz iste potencije.

- Nakon što odredimo nepoznate koeficijente dobivamo da se integriranje (prave) racionalne funkcije, $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,\mathrm{d}x$, svodi na izračunavanje sljedeća tri (tipična) neodređena integrala:

$$\int \frac{1}{(x-a)^s}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{x+b}{\left(x^2+cx+d\right)^k}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{(x^2+cx+d)^k}\,\mathrm{d}x,$$

gdje su $s, k \in \mathbb{N}$ i $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- Odabiranjem odgovarajućih supstitucija, dolazimo do (tabličnih) integrala oblika

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \quad \text{i} \quad \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+a^2\right)^k}.$$

Primjer 1 Izračunati integral $\int \frac{5x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{5x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{5}{2}\int \frac{(2x+2)-\frac{6}{5}}{\left(x^2+2x+10\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\tfrac{5}{2}\int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{\left(x^2+2x+10\right)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{5}{2}I_1 - 3I_2$$

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2+2x+10\right)^{-2}(2x+2)\,\mathrm{d}x =$$

$$\left[\begin{array}{l} t = x^2+2x+10 \\ \mathrm{d}t = (2x+2)\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \frac{\left(x^2+2x+10\right)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x^2+2x+10} + C$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\left(x^2+2x+10\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3^4\left(\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x \overset{\frac{x+1}{3}=t}{=}$$

$$= \tfrac{1}{27}\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{27}\left(\frac{t}{2\left(1+t^2\right)} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right) =$$

$$\tfrac{1}{54}\left(\frac{\frac{x+1}{3}}{1+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2} + \operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}\right) + C$$

$$I = \tfrac{5}{2}I_1 - 3I_2 =$$

$$-\tfrac{5}{2}\frac{1}{x^2+2x+10} - \tfrac{1}{18}\left(\frac{3(x+1)}{x^2+2x+10} + \operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}\right) + C$$

Primjer 2 Izračunati integral $\int \frac{x^6-x^3+1}{x^5-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Budući da $\frac{x^6-x^3+1}{x^5-x^2}$ nije prava racionalna funkcija, dijeljenjem dobivamo

$$I = \int \frac{x^6 - x^3 + 1}{x^5 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int x + \frac{1}{x^5 - x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^5 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + I_1$$

Rastav nazivnika na faktore:

$$x^5 - x^2 = x^2\,(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$$

Rastav na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1}$$

povlači

$$\begin{aligned} 1 \;=\; & Ax\,(x-1)\left(x + x^2 + 1\right) + B\,(x-1)\left(x + x^2 + 1\right) \\ & + Cx^2\left(x + x^2 + 1\right) + (Dx + E)\,x^2\,(x-1) \end{aligned}$$

ili

$$1 = (A+C+D)\,x^4 + (B+C-D+E)\,x^3 +$$
$$(C-E)\,x^2 + (-A)\,x - B,$$

što daje sustav

$$A+C+D=0$$
$$B+C-D+E=0$$
$$C-E=0$$
$$-A=0$$
$$-B=1$$

koji ima rješenje

$$A=0, B=-1, C=\frac{1}{3}, D=-\frac{1}{3}, E=\frac{1}{3}.$$

Sada je

$$I_1 = \int \frac{1}{x^5-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x+x^2+1} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x+x^2+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,$$

pa je

$$I=\int \frac{x^6-x^3+1}{x^5-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+I_1=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left(x+x^2+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

3.2 Integriranje kompozicije trigonometrijskih i racionalnih funkcija

Ovaj tip neodređenog integrala se obično označuje s

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x,$$

gdje je R opća oznaka za razlomački izraz (racionalnu funkciju). U trivijalnom slučaju $\int \sin x\,\mathrm{d}x$ i $\int \cos x\,\mathrm{d}x$ dobivamo dva tablična integrala (8) i (9). Nadalje,

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \overset{\cos x=t}{=} -\ln|\cos x|+C,$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x=\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \overset{\sin x=t}{=} \ln|\sin x|+C,$$

$$\int \sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x \overset{\sin x=t}{=} \tfrac{1}{2}\sin^2 x+C.$$

U općem slučaju se integral $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ svodi na integral racionalne funkcije, tj. na $\int \frac{p(t)}{q(t)}\,\mathrm{d}t$, p i q polinomi, koji se onda rješava tehnikom iz prethodnoga razmatranja.

Najopćenitija zamjenska funkcija jest

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \equiv t \quad (x = 2\operatorname{arctg} t). \tag{s1}$$

Ona povlači:

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \;\; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \;\; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{s2}$$

Primjer 1 Izračunati integral $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\,\mathrm{d}x \overset{(s1),(s2)}{=} \int \frac{1}{3t^2 + 2t + 2}\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{(t+\frac{1}{3})^2 + \frac{5}{9}}\,\mathrm{d}t \overset{t+\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}u}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg} u =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C$$

Ako je funkcija R "parna", tj. ako je

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

moguće je to svođenje provesti zamjenskom funkcijom

$$t = \operatorname{tg} x \quad (x = \operatorname{arctg} t) \tag{ss1}$$

koja povlači:

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\ \ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}. \tag{ss2}$$

Primjer 2 Izračunati integral $\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{\textit{(ss1),(ss2)}}{=}$$

$$\int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 2\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}\sqrt{\frac{1}{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+2t-1}\,\mathrm{d}t =$$

$$\int \frac{1}{(t+1)^2-2}\,\mathrm{d}t \overset{t+1=\sqrt{2}u}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \overset{\textit{(14)}}{=}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\frac{t+1}{\sqrt{2}}-1}{\frac{t+1}{\sqrt{2}}+1}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1-\sqrt{2}+\operatorname{tg} x}{1+\sqrt{2}+\operatorname{tg} x}\right| + C.$$

ili

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1)\cos^2 x} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} x = t \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \end{bmatrix} =$$

$$\int \frac{1}{(t+1)^2-2}\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1-\sqrt{2}+\operatorname{tg} x}{1+\sqrt{2}+\operatorname{tg} x}\right| + C$$

Napokon, u najjednostavnijim slučajevima

$$\int R(\sin x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x \quad \text{i}$$
$$\int R(\cos x)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

rabimo, redom, zamjenske funkcije

$$t = \sin x,\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(sss1)}$$
$$t = \cos x,\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(sss2)}$$

Primjer Izračunati integral $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x \overset{\text{(sss2)}}{=} \int \frac{-1}{(2+t)\,(1-t^2)}\,\mathrm{d}t =$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{3}}{t+2} + \frac{\frac{1}{6}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$\tfrac{1}{3}\ln|t+2|+\tfrac{1}{6}\ln|t-1|-\tfrac{1}{2}\ln|t+1|=\tfrac{1}{6}\ln\left|\frac{(t+2)^2(t-1)}{(t+1)^3}\right|=$$

$$\tfrac{1}{6}\ln\left|\frac{(\cos x+2)^2(\cos x-1)}{(\cos x+1)^3}\right|+C.$$

Promatrani se integral može izračunati i ovako:

$$\int\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x \overset{(s1),(s2)}{=} \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1+t^2}}\,\mathrm{d}t=\ldots$$

$$=\tfrac{1}{3}\ln\left|t\left(t^2+3\right)\right|=\tfrac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\right)\right|+C.$$

Napomena: Primijetimo da se izračunavanjem neodređenog integrala različitim metodama (ili samo različitim zamjenskim funkcijama) mogu dobiti "različite" primitivne funkcije. Ali, kao što znamo, one se mogu razlikovati do na aditivnu konstantu. To npr. znači da su na svakom intervalu $I\subset\mathbb{R}$, na kojemu su oba rezultata iz predhodnog primjera definirana, ona i međusobno jednaka do na aditivnu konstantu. Vrijedi:

$$\tfrac{1}{6}\ln\left|\frac{(\cos x+2)^2(\cos x-1)}{(\cos x+1)^3}\right|=\tfrac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\right)\right|+\tfrac{1}{3}\ln 2$$

3.3 Integriranje nekih iracionalnih funkcija

Primitivna funkcija za iracionalnu funkciju nije, općenito, elementarna funkcija, tj. neodređeni integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ iracionalne funkcije f **nije**, općenito, **elementarno rješiv**. Razmatrat ćemo samo neke elementarno rješive tipove neodređenih integrala iracionalnih funkcija:

- $$\int R\left(x^{\frac{m_1}{n_1}}, \cdots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)\,\mathrm{d}x, \quad m_i, n_i, k \in \mathbb{N}, i = 1, \cdots, k.$$

  (auditorne vježbe)

- $$\int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)\,\mathrm{d}x,$$

  $m_i, n_i, k \in \mathbb{N}, i = 1, \cdots, k,$ (auditorne vježbe).

- $$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x.$$

  (auditorne vježbe)

• **Binomni integral**, tj.

$$\int x^s (a + bx^r)^p \, \mathrm{d}x, \quad p, r, s \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Općenito, on nije elementarno rješiv. Skup svih elementarno rješivih binomnih integrala karakterizira ovaj teorem:

Teorem 3.1 Binomni integral (1) je elementarno rješiv onda i samo onda, ako je barem jedan od brojeva

$$p, \ \frac{s+1}{r}, \ \frac{s+1}{r} + p$$

cijeli broj.

<u>Dokaz:</u>

Dakle, imamo sljedeće supstitucije:

$p \in \mathbb{Z} \implies x = t^n, \ n -$ (najmanji) zajed. nazivnik od s i r;

$\dfrac{s+1}{r} \in \mathbb{Z} \implies a + bx^r = t^n, \ n -$ nazivnik od p;

$\dfrac{s+1}{r} + p \in \mathbb{Z} \implies ax^{-r} + b = t^n, \ n -$ nazivnik od p;

Primjer Izračunati integral $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{x^4\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{c} p=-\frac{1}{2},\, s=-4,\, r=2 \\ p\notin\mathbb{Z},\, \dfrac{s+1}{r}=\frac{-3}{2}\notin\mathbb{Z}, \\ \dfrac{s+1}{r}+p=-2\in\mathbb{Z} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c} x^{-2}+1=t^2 \\ -2x^{-3}\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = \int\left(1-t^2\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$t-\frac{t^3}{3} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)^3 = \frac{2x^2-1}{3x^2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}+C$$

3.4. Integriranje reda funkcija

Pod **integralom** (konvergentnog) **reda funkcija** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ smatramo neodređeni integral (ako postoji) pripadne sume

$$x \mapsto s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Budući da, općenito, s nije elementarna funkcija, to je izračunavanje integrala

$$\int s(x)\,\mathrm{d}x \equiv \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)\,\mathrm{d}x$$

vrlo netrivijalni zadatak. Ipak, u posebnom slučaju jednoliko konvergentnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ neprekidnih funkcija f_n, integral reda funkcija dopušta integriranje **"član po član"**.

Teorem 4.1 *Neka su $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ preslikavanja, $n \in \mathbb{N}$, i neka red funkcija $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jednoliko konvergira prema funkciji*

$$s : [a,b] \to \mathbb{R},\ s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

onda s dopušta primitivnu funkciju na $[a,b]$ i ona se može dobiti integriranjem "član po član", tj.

$$\int s(x)\,\mathrm{d}x \equiv \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

Posebice, za red potencija $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na njegovu intervalu konvergencije vrijedi

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C.$$

Integriranjem redova funkcija i posebice, redova potencija mogu se izračunati mnogi elementarno nerješivi integrali.

Primjer 1 Izračunajmo neodređeni integral funkcije

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Budući je

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in\mathbb{R},$$

vrijedi

$$\mathrm{e}^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Prema tomu,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\right)\mathrm{d}x \overset{\text{T 4.1.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+C.\end{aligned}$$

Primjer 2 Izračunajmo neodređeni integral funkcije

$$g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Vrijedi

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

pa je

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Uočimo da red funkcija na desnoj strani konvergira i u točki $x = 0$ i to prema broju 1. Budući je i $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, red funkcija

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

konvergira prema (neprekidnoj) funkciji

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Funkcije f i g imaju istu primitivnu funkciju na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Slijedi,

$$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right)\mathrm{d}x \overset{\text{T 4.1.}}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + C.$$

Primjer 3 Razvijmo u red potencija (ne rabeći Maclaurinovu formulu) funkciju

$$\operatorname{arctg}|_{[-1,1]} : [-1,1] \to \mathbb{R}.$$

Prisjetimo se, prvo, sume geometrijskoga reda

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \equiv 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2},\ |x| < 1.$$

Drugo, derivacija $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, pa je

$$(\operatorname{arctg} x)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Prema tomu,

$$\operatorname{arctg} x = \int (\operatorname{arctg} x)' \, \mathrm{d}x + C = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) \mathrm{d}x + C$$

$$\stackrel{\text{T 4.1.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n} \, \mathrm{d}x + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Budući je $\operatorname{arctg} 0 = 0$, to je $C = 0$. Osim toga, primijetimo da red funkcija

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

konvergira i u točkama $x = -1$ i $x = 1$. Postavlja se pitanje, konvergira li on u tim točkama, redom, prema funkcijskim vrijednostima $\operatorname{arctg}(-1)$ ($= -\frac{\pi}{4}$) i $\operatorname{arctg} 1$ ($= \frac{\pi}{4}$) ili prema nekim drugim točkama (?). Pokazuje se da vrijedi

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$