4. Određeni integral

- Pojam određenog integrala je, povijesno, tijesno povezan s problemom izračunavanje površine "krivocrtnog" ravninskog lika.

- Određeni integral (ali ne i njegov naziv) davno prethodi pojmu neodređenog integrala. Temeljnu ideju (na konkretnim primjerima) je dao starogrčki genij Arhimed.

- Naziv je došao mnogo poslije, kad se shvatila duboka povezanost tih dvaju pojmova (vezu dali - I. Newton i G.W. Leibniz), iako na prvi pogled, po definicijama, ta dva pojma nemaju "ništa" zajedničko.

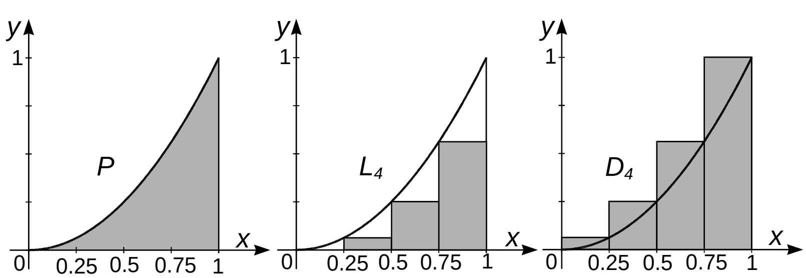
4.1. Problem površine.

<u>Zadatak:</u> Izračunati površinu P ravninskog lika koji je omeđen grafom funkcije $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ i pravcima $y = 0$, $x = 1$.

- Podijelimo segment $[0,1]$ na četiri jednaka dijela duljine.
- Izračunajmo površine L_4 i D_4 koje su zbroj površina pravokutnika, tako da svaki pravokutnik ima bazu duljine $\frac{1}{4}$ i visinu vrijednost funkcije f u lijevom, odnosno, desnom rubu baze. Imamo:

$$L_4 = \frac{1}{4}(0)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.218\,75,$$

$$D_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{4}\right)^2 = \frac{15}{32} = 0.468\,75.$$



Za traženu površinu vrijedi

$$L_4 < P < D_4.$$

Podijelimo li segment $[0, 1]$ na više jednakih dijelova dobit ćemo bolju aproksimaciju. Za L_n i D_n za $n = 10, 20, 100, 1000$ imamo

n	L_n	D_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328350	0.3338335

Dakle, smijemo zaključiti da za traženu površinu P vrijedi:

$$L_n < L_{n'} < P < D_{n'} < D_n, \ n < n'.$$

Izračunajmo sada L_n i D_n i potražimo čemu teže kada $n \to \infty$:

[1]

$$L_n = \frac{1}{n}\left(\frac{0}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right) = \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3},$$

$$D_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}.$$

Prirodno je sada staviti da je tražena površina $P = \frac{1}{3}$.

Formalizirajmo sada prethodni postupak kada je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neka (nenegativna) funkcija:

$$P = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\triangle x,$$

$$P = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x.$$

[1] Koristimo činjenicu da vrijedi: $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

U prethodnim sumama je baza svakog pravokutnika

$$\triangle x = \frac{b-a}{n},$$

a za visinu je uzeta funkcijska vrijednost na lijevom (u L_n - **lijeva integralna** n**-suma**), odnosno desnom kraju (u D_n - **desna integralna** n**-suma**) diobenog segmenta $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \cdots, n$).

Umjesto krajeva možemo odabrati i bilo koju točku $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$, odnosno polovište $\overline{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ (Slika 2), i površinu P možemo aproksimirati sa

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x, \text{ (\textbf{integralna } } n\text{\textbf{-suma}}),$$

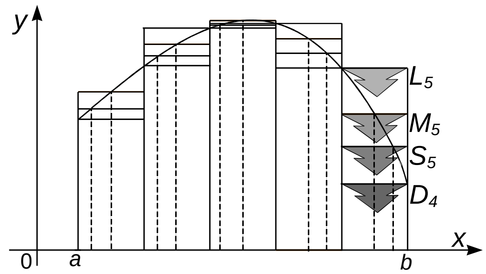
odnosno sa

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) \triangle x, \text{ (\textbf{srednja integralna } } n\text{\textbf{-suma}}),$$

tj. vrijedi

$$P = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x,$$

$$P = \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) \triangle x.$$



Slika 2.

- **Definicija 1.1** Neka je $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ i neka je segment $[a,b]$ točkama $a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b$ podijeljen na n-jednakih dijelova duljine $\triangle x = \frac{b-a}{n}$, te neka je $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. **Određeni integral funkcije** f **od** a **do** b definiramo kao graničnu vrijednost integralnih suma[2] $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x$ i označavamo sa $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x \tag{1}$$

Nazivlje:

- $f(x)$ **integrand**;
- a **donja granica**;
- b **gornja granica**;
- sam postupak računanja nazivamo **integracijom.**

[2] Integralne sume se nazivaju i **Riemannove sume** (po njemačkom matematičaru **Bernhardu Riemannu**, 1826-1866), a ovako definiran integral Riemannov integral. Oznaku $\int$ je uveo Leibniz - izduženi S kao limes suma.

Napomena 1.2 Određeni integral je broj i ne ovisi o x, tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = ...$$

Napomena 1.3 Pokazuje se da limes u Definiciji 1.1 uvijek postoji i jedinstven je, bez obzira na izbor točaka $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Dakle,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x}_{L_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x}_{D_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\Delta x}_{M_n}$$

Ovi limesi postoje i ako je f neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ izuzev u konačno mnogo točaka u kojima ima uklonjivi prekid ili prekid prve vrste.

Napomena 1.4 Općenito određeni integral se definira za bilo koju ograničenu funkciju. Ta definicija je nešto kompliciranija od Definicije 1.1.
Naime, u Definiciji 1.1 pretpostavili smo da je segment $[a, b]$ podijeljen na n jednakih djelova. To je bitno ograničenje.
Međutim, za neprekidne funkcije i funkcije iz Napomene 1.3, te dvije definicije su ekvivalentne.

Napomena 1.5 Ukoliko je $f(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$, Riemannova suma $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$ daje aproksimaciju površine ravninskog lika ispod krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ sumom površina pravokutnika, a integral $\int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ daje pravu površinu P tog lika.

Ukoliko je $f(x) \leq 0$ za $x \in [a, b]$ integral $\int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ daje $-P$, a ukoliko f mijenja predznak na intervalu $[a, b]$ integral $\int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ daje razliku površina.

Napomena 1.6 U Definiciji 1.1 prepostavili smo da je $a < b$. Definicija vrijedi i ako je $b < a$. U tom slučaju je $\Delta x = \frac{a-b}{n} (> 0)$, pa slijedi da je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ukoliko je $a = b$ tada je $\Delta x = 0$, pa očito vrijedi

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Teorem 1.7 (Svojstva određenog integrala)

a) $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)\,,\ \ c \in \mathbb{R}$ konstanta,

b) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$

c) $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$

d) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Dokaz:

Primjer Izračunati $\int_0^1 (4+3x^2)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 (4+3x^2)\,\mathrm{d}x \overset{\textit{T. 1.7, b)}}{=} \int_0^1 4\,\mathrm{d}x + \int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x \overset{\textit{T. 1.7, c)}}{=}$$

$$4(1-0) + 3\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 4 + 3\cdot\tfrac{1}{3} = 5,$$

gdje smo iskoristili rezultat $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ (to je početni primjer na početku ovoga poglavlja).

Napomena 1.8 Iz Definicije 1.1 nadalje slijedi

a) $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b] \implies \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$

b) $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b] \implies$

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

c) $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b] \implies$

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

4.2. Računanje određenog integrala

Teorem 2.1 (**Newton-Leibnizova formula)** Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$. Tada vrijedi *Newton-Leibnizova formula*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{N-L}$$

gdje je F bilo koja primitivna funkcija od f.

Dokaz:

Uobičajena oznaka je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\,\big|_{x=a}^{x=b}$$

Napomena: Newton-Leibnizova formula se može primijeniti i ako je f neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ izuzev u konačno mnogo točaka u kojima ima uklonjivi prekid ili prekid prve vrste (f je po djelovima neprekidna funkcija na $[a, b]$).

Primjer 1 Izračunati $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^2 x\,\mathrm{d}x \overset{(N-L),(4)}{=} \left(\tfrac{1}{2}x^2+1\right)\Big|_{x=1}^{x=2} =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\cdot 2^2+1\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cdot 1^2+1\right) = \frac{3}{2}$$

<u>Uočimo:</u> $f(x)=x$ je neprekidna na $[1,2]$.

Primjer 2 Izračunati $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Izračunajmo neodređeni integral

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u=x \\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sin x + \cos x + C,$$

i imamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x \overset{(N-L)}{=} (x\sin x+\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{2}\pi - 1.$$

<u>Uočimo:</u> $f(x)=x\cos x$ je neprekidna na $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

4.3. Osnovni teorem računa

Osnovni teorem računa dobio je naziv po tome što povezuje diferencijalni s integralnim računom. Osnovni teorem otkrili su nezavisno Newton i Leibniz i on daje precizan odnos između derivacije i integrala.

Teorem 3.1 (Osnovni teorem računa)

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i funkcija $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, definirana sa

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b].$$

Tada je g primitivna funkcija od f.

<u>Dokaz:</u>

Tvrdnju teorema možemo zapisati na sljedeći način:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Napomena 3.2 Sa $g(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ često se definiraju funkcije neophodne u fizici, kemiji, statistici,.... Ovog oblika su npr. funkcije

$$S(x) = \int\limits_0^x \sin\frac{\pi t^2}{2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{Frenselova funkcija (optika)}$$

$$\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{Sinus integralni (elektronika)}$$

Napomena 3.3 Newton-Leibnitzova formula

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

napišemo li je drugačije, također povezuje integral i derivaciju

$$\int\limits_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \qquad (F' = f).$$

ovo znači da ako uzmemo prvo derivaciju, a potom integraciju, opet se vraćamo na polaznu funkciju F, sada u obliku $F(b) - F(a)$.

Zbog ove veze, u literaturi Osnovni teorem integralnoga računa je često dan u sljedećem obliku:

Osnovni teorem računa:

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, tada vrijedi:

i) Ako je $g(x) = \int\limits_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ tada je $g'(x) = f(x)$,

ii) $\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, gdje je F primitivna funkcija od f, tj. $F' = f$.

Primjer 1 Izračunati derivaciju funkcije

$$g(x) = \int_{-1}^{x} (t^2 - 1)^{20}\, \mathrm{d}t.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\int_{-1}^{x} (t^2 - 1)^{20}\, \mathrm{d}t \right) \overset{T3.1}{=} (x^2 - 1)^{20}$$

Primjer 2 Izračunati derivaciju funkcije

$$g(x) = \int_{2}^{\frac{1}{x}} \sin^4 t\, \mathrm{d}t.$$

$$g(x) = \int_2^{\frac{1}{x}} \sin^4 t \,\mathrm{d}t = \left[u\,(x) = \frac{1}{x} \right] = \int_2^{u} \sin^4 t \,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} g(u\,(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \left(\int_2^{u} \sin^4 t \,\mathrm{d}t \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \stackrel{T3.1}{=}$$

$$= \sin^4 u \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2} \sin^4 \frac{1}{x}$$

4.4. Supstitucija i parcijalna integracija u određenom integralu

Do sada smo kod izračunavanja određenog integrala primjenjivali Newton-Leibnizovu formulu: izračunali smo neodređeni integral i potom izračunali vrijednosti primitivne funkcije u rubnim točkama integracijskog segmenta.

Druga mogućnost, koja se prakticira, jest da se primjeni supstitucija ili parcijalna integracija u određenom integralu.

Teorem 4.1 Neka za (neprekidnu) funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ postoji neka primitivna funkcija na intervalu $I = [a,b]$. Nadalje, neka je $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ (ili $\varphi : [\beta,\alpha] \to [a,b]$) strogo monotona i neprekidno derivabilna surjekcija, tako da je $\varphi(\alpha) = a$ i $\varphi(\beta) = b$, tada je

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{sup}$$

<u>Dokaz:</u>

Primjer Izračunati površinu P kruga radijusa R.
Račun daje

$$\tfrac{1}{4}P = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = \underbrace{R\cos t}_{\varphi(t)} \\ 0 \to \frac{\pi}{2}, R \to 0 \end{bmatrix} =$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{R^2 - R^2\cos^2 t}(-R\sin t)\,\mathrm{d}t = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 t}\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2t)\,\mathrm{d}t =$$

$$R^2 \tfrac{1}{2}\left(t - \tfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{4}R^2\pi,$$

poznatu formulu za površinu kruga $P = R^2\pi$.

Teorem 4.2 Neka se (neprekidna) funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dade napisati u obliku $f(x) = g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$, gdje je g neka neprekidna funkcija i ψ neka neprekidno derivabilana funkcija. Tada je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{sup}$$

<u>Dokaz:</u>

Primjer Izračunati integral $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^5 x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \psi(x) = \sin x = t \\ 0 \to 0,\ \frac{3\pi}{2} \to -1 \end{bmatrix} =$$

$$\int_0^{-1} t^5 \cdot\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t^6}{6}\right)\Big|_0^{-1} = \frac{1}{6}$$

Parcijalna integracija se prenosi direktno:

Teorem 4.3 Ako su funkcije $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidno derivabilne, onda vrijedi

$$\int_a^b g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)h(x)]\big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b h(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primjer Izračunati $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \; \mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x \; \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = \operatorname{arctg} x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{array} \right] =$$

$$= (x \operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \tfrac{\pi}{4} - \left(\tfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right)\Big|_0^1 = \tfrac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

Napomena: Ukoliko funkcija ima neku simetriju (parna, neparna funkcija), te ako su granice integracije simetrične obzirom na ishodište, tada vrijedi:

- $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ ukoliko je f parna funkcija;
- $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ukoliko je f neparna funkcija.

Primjer Vrijedi

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2+x^4}\,\mathrm{d}x = 0$$

jer je podintegralna funkcija neparna (i neprekidna na $[-1,1]$).