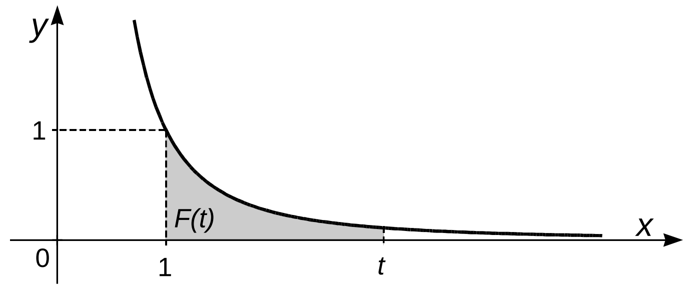
5. Nepravi integral

U definiciji određenog integrala $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pretpostavili smo:

- segment $[a, b]$ je konačan;
- $f(x)$ je na tom segmentu ili neprekidna ili ima konačno uklonjivih prekida ili prekida prve vrste).
  - Ako prvi uvjet ”popravimo” i pretpostavimo da je interval "beskonačan" (neomeđen), dobivamo nepravi integral (I. tipa).
  - Ako drugi uvjet ”popravimo” i pretpostavimo da je $f(x)$ na segmentu $[a, b]$ neograničena (ima konačno prekida druge vrste) dobivamo nepravi integral (II. tipa).

Primjer Promotrimo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2}$ desno od $x = 1$ (Slika 1).



Slika 1

Za $t > 1$ definiramo funkciju

$$F(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{t}.$$

Primjetimo da je $F(t) < 1$ za $t > 1$. Nadalje vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1,$$

pa možemo staviti da je površina (neomeđenog) lika ispod krivulje $y = \frac{1}{x^2}$ (desno od 1) jedanaka 1.

Ovdje leži motiv da nepravi integral funkcije na neomeđenom definicijskom području definiramo na sljedeći način:

Definicija 5.1

a) Ako postoji $\int\limits_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ za $\forall t \geq a$, tada je

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def.}}{=} \lim_{t\to\infty} \int\limits_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Ako postoji $\int\limits_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za $\forall t \leq b$, tada je

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def.}}{=} \lim_{t\to-\infty} \int\limits_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ako limes u a) (u b)), postoji (konačan je), onda kažemo da <u>nepravi integral I. tipa</u> $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, ($\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$), <u>konvergira.</u> U suprotnom kažemo da <u>divergira</u>.

c) Definiramo još <u>nepravi integral I. tipa</u> oblika

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def.}}{=} \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

gdje je a bilo koji realan broj. Ako oba integrala $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ i $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiraju, kažemo da $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ <u>konvergira</u>. U suprotnom (tj. ako barem jedan divergira) kažemo da $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ <u>divergira</u>.

Primjer Izračunati $I = \int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\left(x\mathrm{e}^{x}\right)\Big|_{x=t}^{x=0} - \int_{t}^{0}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}[\underbrace{-t\mathrm{e}^{t}}_{\to 0} - 1 + \underbrace{\mathrm{e}^{t}}_{\to 0}] = -1.$$

Primjer U ovisnosti od $p > 0$ ispitati konvergenciju integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$.

Pokazali smo da je za $p = 2$ integral konvergentan.

Općenito za $p \neq 1$ imamo

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right)\Bigg|_1^t =$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{-p+1}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{konvergentan za } p > 1 \\ \infty, & \text{divergentan za } 0 < p < 1 \end{cases}$$

(vrijedi $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t^{p-1}} = \begin{cases} 0, & p > 1 \\ \infty, & 0 < p < 1 \end{cases}$).

Ostaje još razmotriti slučaj kada je $p = 1$:

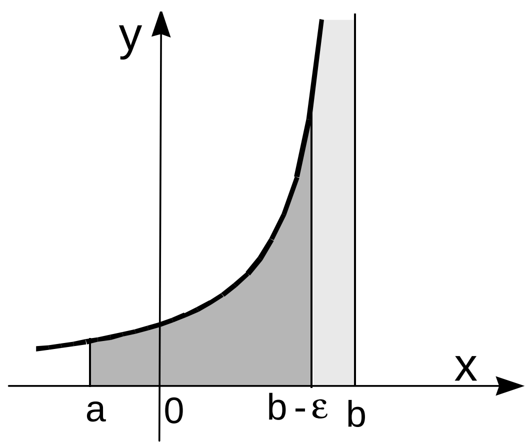
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \infty,$$

pa u ovom slučaju integral divergira.

Definicija 5.3

a) Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a,b)$ i $\lim\limits_{x\to b^{-0}} f(x) = \pm\infty$ (slika 2), tada je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1.a.)$$



slika 2

b) Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na $(a,b]$ i $\lim\limits_{x\to a^{+0}} f(x) = \pm\infty$ tada je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2.b.)$$

Ako limes (1.a) ((2.b.)), postoji (konačan je), onda kažemo da nepravi integral II. tipa $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, ($\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$), konvergira. U suprotnom kažemo da divergira.

c) Ako je $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$ funkcija, osim u točki $c \in (a,b)$ gdje je $\lim\limits_{x\to c^{-0}} f(x) = \pm\infty$ ili $\lim\limits_{x\to c^{+0}} f(x) = \pm\infty$, definiramo nepravi integral II. tipa

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{c+\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.c.}$$

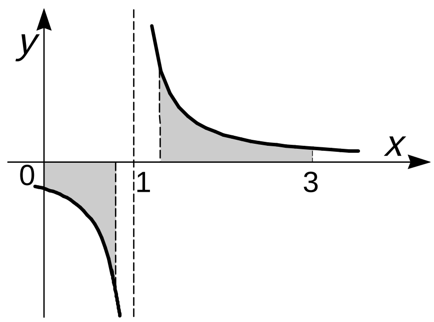
Ako oba limesa u (3.c.) postoje, kažemo da $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira. U suprotnom (tj. ako barem jedan ne postoji) kažemo da $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ divergira.

Primjer Izračunati $I = \int_0^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$.

Malo nepažnje daje

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = (\ln|x-1|)\Big|_{x=1}^{x=3} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2,$$

no to je netočan rezultat. Naime, funkcija $f(x)$ ima u $x = 1$ vertikalnu asimptotu.



Dakle, treba primijeniti (3.a.), tj. izračunati nepravi integral

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{1+\delta}^{3} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Vrijedi

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}[\ln|1-\varepsilon-1| - \ln|-1|] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\underbrace{\ln\varepsilon}_{\to-\infty} - 0] = -\infty$$

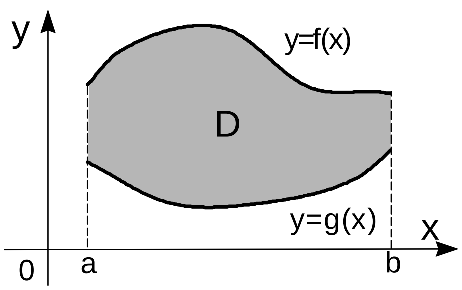
i polazni nepravi integral jest divergentan.

6. Nekoliko primjena određenog integrala

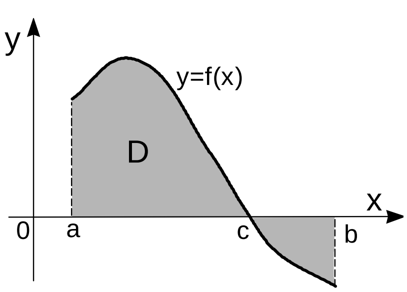
a) Površina ravninskog lika (kvadratura)

- Pokazali smo: ako je f neprekidna i $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$, onda je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ površina ispod krivulje $y = f(x)$ nad segmentom $[a, b]$.

- Ako je ravninski lik omeđen zatvorenom krivuljom ili se prostire i na donju poluravninu, onda za izračunavanje njegove površine rabimo dva ili više određenih integrala, tj. "snalazimo se" od slučaja do slučaja:

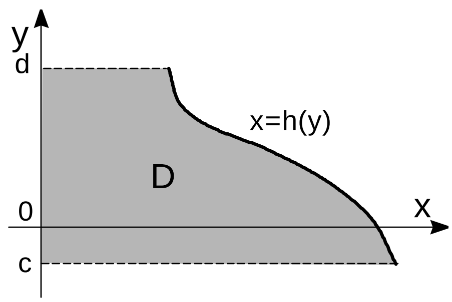


$$P(D) = \int_a^b \left((f(x) - g(x)\right)\,\mathrm{d}x$$



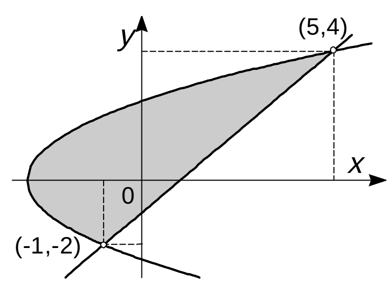
$$P(D) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Kada je krivulja zadana "inverznom" funkcijom, tj. jednadžbom $x = h(y)$, $y \in [c, d]$, površina ravninskog lika D da je sa



$$P(D) = \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Primjer Izračunati površinu lika kojega omeđuju pravac $y = x - 1$ i parabola $y^2 = 2x + 6$



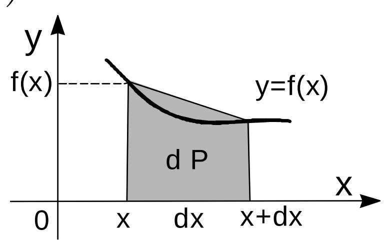
$$P = \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy = \int_{-2}^{4} \left(4 + y - \tfrac{1}{2}y^2\right) dy$$

$$= \left(4y + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{6}y^3\right)\Big|_{y=2}^{y=4} = 18.$$

Napomena: Označimo li u formuli za površinu, $P(D) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, umnožak $f(x)\,\mathrm{d}x$ kao $\mathrm{d}P$, smijemo pisati

$$P(D) = \int_{[a,b]} \mathrm{d}P.$$

Geometrijski se broj $\mathrm{d}P$ smije interpretirati kao površina "infinitezimalnog" ("neizmjerno malog") pseudotrapeza nad segmentom $[x, x+\mathrm{d}x]$, koji se onda smije aproksimirati trapezom s osnovicama $f(x)$ i $f(x) + \Delta f(x)$ i visinom $\mathrm{d}x$.



Zaista,

$$\mathrm{d}P \approx \frac{f(x) + (f(x) + \Delta f(x))}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\Delta f(x)\,\mathrm{d}x}{2} \approx f(x)\,\mathrm{d}x$$

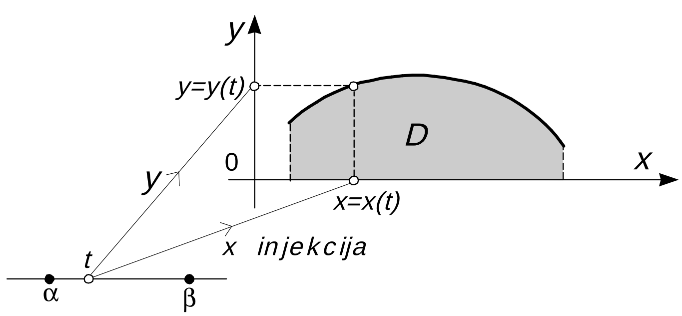
pri čemu smo umnožak $\Delta f(x)\,\mathrm{d}x$ dvaju neizmjerno malih brojeva zanemarili u zbroju s $f(x)\,\mathrm{d}x$. Stoga se o $\mathrm{d}P = f(x)\,\mathrm{d}x$ govori kao o "površinskome elementu" ravninskoga lika D. "Zbrajanjem" (tj. integriranjem) svih površinskih elemenata nad segmentom $[a, b]$ dobivamo traženu površinu $P(D)$.

Na isti način ćemo, poslije, svaki podintegralni izraz pomoću kojega izračunavamo površinu (duljinu, obujam (volumen), ...) zvati analognim imenom. Često se formalnim izračunavanjem tih "elemenata" vrlo lako dolazi do korisnih formula za izračunavanje traženih veličina.

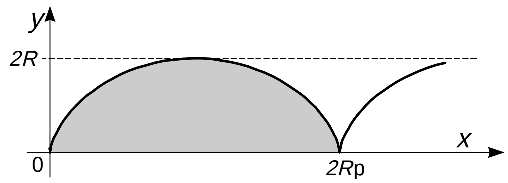
Parametarski zadana krivulja

Ukoliko je krivulja parametarski zadana $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$ ($x(t)$ je injekcija, Slika 5.) tada je površinu na slici naznačenog lika izračunavamo na način

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$



Primjer Izračunati površinu jednog svoda cikloide $x(t) = R(t - \sin t)$, $y(t) = R(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$



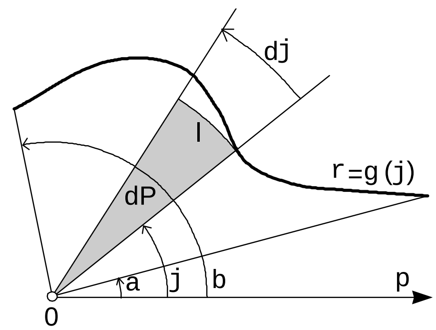
$$P = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} R(1 - \cos t)[R(t - \sin t)]'\,\mathrm{d}t$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,\mathrm{d}t = R^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} &= R^2 \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos t + \tfrac{1}{2}\cos 2t\right)\,\mathrm{d}t \\ &= R^2 \left(\tfrac{3}{2}t - 2\sin t + \tfrac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= 3R^2\pi. \end{aligned}$$

Krivulja zadana u polarnim koordinatama

Neka je ravninska krivulja Γ zadana u polarnim koordinatama jednadžbom $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Izračunajmo ploštinu pseudotrokuta određenoga krivuljom Γ i zrakama $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.



$$(r \to \rho, j \to \varphi, a \to \alpha, b \to \beta)$$

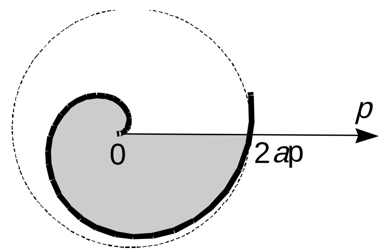
Za "površinski element" uzimamo pripadni kružni isječak od φ do $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ polumjera $g(\varphi)$, tj.

$$\mathrm{d}P = \tfrac{1}{2} l\rho = \tfrac{1}{2}\rho \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \rho = \tfrac{1}{2} g(\varphi)^2 \,\mathrm{d}\varphi,$$

gdje su l i ρ opće oznake, redom, za lučnu duljinu i polumjer. Slijedi

$$P(D) = \tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi)^2 \,\mathrm{d}\varphi.$$

Primjer Izračunati površinu ravninskoga lika D omeđenoga polarnom osi i prvim "zavojem" Arhimedove spirale $\rho = a\varphi,\ a > 0$.



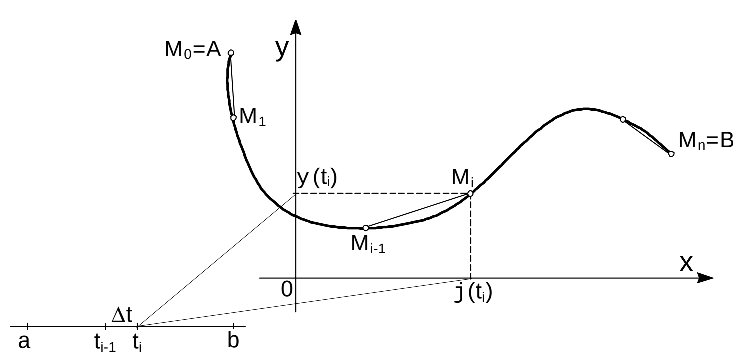
$$P(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\varphi^2\,\mathrm{d}\varphi = \left(\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\varphi^3}{3}\right)\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

b) Duljina ravninskog luka (rektifikacija)

Neka je ravninski luk $\Gamma \equiv \widehat{AB}$ (dopuštamo i $B = A$) zadan parametarskim jednadžbama

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [a, b],$$

pri čemu su φ i ψ neprekidno derivabilne funkcije i $A = (\varphi(a), \psi(a))$ i $B = (\varphi(b), \psi(b))$.



Neka je:

- $D_n = \{a = t_0, \cdots, t_n = b\}$ rastav segmenta $[a, b]$ na n-jednakih dijelova.
- Bijekcija (do na rub) $r : [a, b] \to \widehat{AB}$, $r(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, pridružuje svakom rastavu $D_n = \{t_0, \cdots, t_n\}$ točkovni skup $\{M_0, \cdots, M_n\}$ na Γ, $M_0 = A = r(t_0 = a)$, $\cdots$, $M_n = B = r(t_n = b)$.

Točke M_i dijele luk Γ na n podlukova $\widehat{M_{i-1}M_i}$, $i = 1, \cdots, n$. Spojimo li svaki par susjednih točaka, M_{i-1} i M_i, dužinom, dobivamo poligonalnu crtu "upisanu" luku Γ. Pridijelimo sada svakom rastavu D_n broj

$$\sum_{i=1}^{n} d(M_{i-1}, M_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}$$

$$\overset{L.t.s.v}{=} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\tau_i)\triangle t)^2 + (\psi'(\tilde{\tau}_i)\triangle t)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'(\tau_i)^2 + \psi'(\tilde{\tau}_i)^2}\triangle t \simeq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'(\tau_i)^2 + \psi'(\tau_i)^2}\triangle t,$$

pri čemu su $\tau_i, \tilde{\tau}_i \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$, $i = 1, \cdots, n$.

Prehodni izraz možemo interpretirati kao integralnu sumu, a broj

$$
\begin{aligned}
L(\Gamma) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'(\tau_i)^2 + \psi'(\tau_i)^2} \triangle t \\
&= \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} \, \mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

kao **duljinu luka** $\widehat{AB}$.

Primjer Izračunati duljinu L jednog luka cikloide $x(t) = R(t - \sin t)$, $y(t) = R(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$
\begin{aligned}
L &= 2\int_0^\pi \sqrt{[R(1-\cos t)']^2 + [R(t-\sin t)']^2} \, \mathrm{d}t \\
&= 2R\int_0^\pi \sqrt{[(1-\cos t)']^2 + [(t-\sin t)']^2} \, \mathrm{d}t \\
&= 2R\int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + (1-\cos t)^2} \, \mathrm{d}t \\
&= 2R\int_0^\pi \sqrt{2 - 2\cos t} \, \mathrm{d}t = 2R\int_0^\pi \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}} \, \mathrm{d}t \\
&= 4R\int_0^\pi \sin\frac{t}{2} \, \mathrm{d}t = -8R\cos\frac{t}{2}\Big|_{t=0}^{t=\pi} = 8R
\end{aligned}
$$

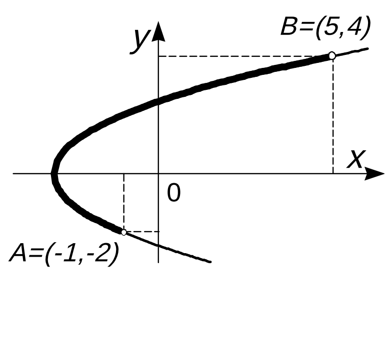
Ako je ravninski luk Γ zadan jednadžbom $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, pri čemu je funkcija f neprekidno derivabilna, onda iz parametrizacije $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$, dobivamo

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Analogno, ako je ravninski luk Γ zadan jednadžbom $x = g(y)$, $y \in [c, d]$, pri čemu je funkcija g neprekidno derivabilna, onda iz parametrizacije $x = g\,(t)$, $y = t$, $t \in [c, d]$, dobivamo

$$L(\Gamma) = \int_c^d \sqrt{1 + g'(y)^2}\,\mathrm{d}y.$$

Primjer Izračunati duljinu luka parabole $y^2 = 2x + 6$ određenog točkama $A = (-1, -2)$ i $B = (5, 4)$.



$$L(\Gamma) = \int_c^d \sqrt{1 + g'(y)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-2}^{4} \sqrt{1 + \left[\left(\frac{y^2-6}{2}\right)'\right]^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{4} \sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left[y\sqrt{y^2+1} + \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)\right]\Bigg|_{y=-2}^{y=4} \approx 12.071.$$

Ako je, pak, luk Γ zadan (jednadžbom) u polarnim koordinatama

$$\rho = g(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta],$$

g neprekidno derivabilna, onda parametrizacija

$$x = g(\varphi)\cos\varphi, y = g(\varphi)\sin\varphi,$$

daje $(x')^2 + (y')^2 = g(\varphi)^2 + g'(\varphi)^2$. Slijedi,

$$L(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{g(\varphi)^2 + g'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Primjer Izračunati duljinu prvog zavoja Arhimedove spirale $\rho = a\varphi,\ a > 0$

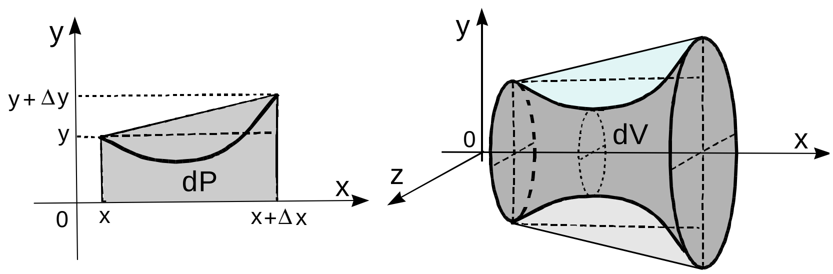
$$L(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g(\varphi)^2 + g'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(a\varphi\right)^2 + \left[(a\varphi)'\right]^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\varphi\right)^2 + \left[(\varphi)'\right]^2}\,\mathrm{d}\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)\right] \approx 21.256a$$

c) Volumen rotacijskog tijela (kubatura)

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i nenegativna funkcija. Tada graf G_f posve određuje pseudotrapez nad segmentom $[a, b]$. Vrtnjom oko x-osi taj pseudotrapez oblikuje geometrijsko tijelo koje nazivamo **rotacijskim tijelom**.



Za dostatno mali $\mathrm{d}x$, pripadni njegov dio određen segmentom $[x, x+\mathrm{d}x] \subseteq [a, b]$ aproksimirat ćemo krnjim stošcem visine $\mathrm{d}x$ i baznih polumjera $f(x)$ i $f(x+\mathrm{d}x) = f(x) + \Delta f(x)$. Za pripadni "volumenski element" tada dobivamo:

$$\mathrm{d}V = \frac{\pi\,\mathrm{d}x}{3}[f(x)^2 + f(x)(f(x) + \Delta f(x)) + (f(x) + \Delta f(x))^2]$$

$$= \frac{\pi\,\mathrm{d}x}{3}\left[3f(x)^2 + 3f(x)\cdot\Delta f(x) + (\Delta f(x))^2\right] \approx \pi f(x)^2\,\mathrm{d}x,$$

gdje smo pribrojnike $3f(x)\cdot\Delta f(x)$ i $(\Delta f(x))^2$ ispustili jer su zanemarivo mali prema $3f(x)^2$.

(Ovo povlači da smo za promatrani "volumenski element" smjeli odabrati i valjak visine $\mathrm{d}x$ i baznog polumjera $f(x)$.)

Prema tomu, traženi volumen rotacijskoga tijela jest

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Primjer Izračunati volumen kugle.

Kuglu smijemo smatrati rotacijskim tijelom, pri čemu podrazumijevamo da se odgovarajući polukrug vrti oko svoga promjera. Promatrajmo kružnicu $x^2 + y^2 = R^2$. Dovoljno je promatrati samo funkciju

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, x \in [-R, R] \,.$$

Dobivamo

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \,\mathrm{d}x = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{x=-R}^{x=R} = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

što je poznata formula za izračunavanje volumena kugle radijusa R.

Ako je krivulja Γ zadana parametarskim jednadžbama

$$x = \varphi(t), y = \psi(t),\ t \in [a, b],$$

i ako je $\psi \geq 0$ i φ neprekidno derivabilna, onda je volumen pripadnoga rotacijskog (oko x-osi, nad $[a, b]$) tijela dan formulom

$$V_x = \pi \int_a^b \psi(t)^2 \varphi'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Primjer Izračunajmo volumen tijela dobivenog rotacijom prvog svoda cikloide $x(t) = R(t - \sin t)$, $y(t) = R(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$V = \pi \int_a^b \psi(t)^2 \varphi'(t) \, \mathrm{d}t$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} [R(1 - \cos t)]^2 \left[R(t - \sin t)'\right] \, \mathrm{d}t$$

$$= \pi R^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \, \mathrm{d}t = 5\pi R^3.$$

Ako je, pak, krivulja Γ zadana polarnom jednadžbom

$$\rho = g(\varphi), \ \varphi \in [\alpha, \beta],$$

g neprekidno derivabilna, onda parametrizacija

$$x = g(\varphi)\cos\varphi, y = g(\varphi)\sin\varphi,$$

daje

$$\mathrm{d}x = (g'(\varphi)\cos\varphi - g(\varphi)\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Slijedi,

$$V_x = \pi \int_\alpha^\beta g(\varphi)^2\,[g'(\varphi)\cos\varphi - g(\varphi)\sin\varphi]\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Primjer Izračunati volumen kugle.

Promatrajmo dio kružnice $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$, čija je polarna jednadžba: $\rho = R$, $\varphi \in [0, \pi]$. Parametrizacija

$$x = R\cos\varphi, y = R\sin\varphi,$$

daje

$$\mathrm{d}x = -R\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

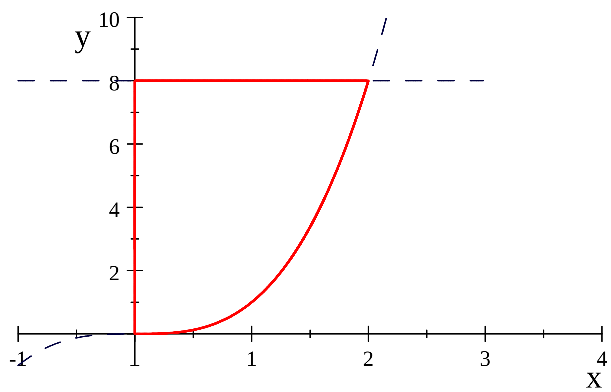
Slijedi,

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_\pi^0 R^2\,[-R\sin\varphi]\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \cdots \\ &= R^3\pi\left(\cos\varphi - \frac{1}{3}(\cos\varphi)^3\right)\Bigg|_{\varphi=\pi}^{\varphi=0} = \frac{4}{3}R^3\pi \end{aligned}$$

Napokon za volumen pripadnoga rotacijskog tijela što nastaje vrtnjom oko y-osi dobivamo

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi(t)^2 \psi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Primjer Izračunajmo volumen rotacijskog tijela što nastaje rotacijom ravninskog lika omeđenog sa $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$ oko y-osi.



$$V_y = \pi \int_0^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \,\mathrm{d}y = \pi \left(\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\right)\Bigg|_0^8 = \frac{3}{5}\pi 8^{\frac{5}{3}} = \frac{96\pi}{5}.$$

<u>Napomena:</u> Ovdje je parametrizacija

$$x = \sqrt[3]{y}, y = y\left(t\right),\ y \in [0, 8].$$

d) Oplošje rotacijskog tijela (komplanacija)

Za oplošje rotacijskog tijela (bez baza):

- ako je krivulja Γ zadana parametarskim jednadžbama

$$x = \varphi(t), y = \psi(t),\ t \in [a, b],$$

gdje su su φ i ψ neprekidno derivabilne, dobivamo:

– oplošje tijela nastalog vrtnjom oko x-osi

$$O_x = 2\pi \int_a^b |\psi(t)| \cdot \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

– oplošje tijela nastalog vrtnjom oko y-osi

$$O_y = 2\pi \int_c^d |\varphi(t)| \cdot \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

- Posebno, ako je krivulja Γ dana u pravokutnim koordinatama:

– jednadžbom $y = f\left(x\right)$, $x \in \left[a, b\right]$, onda je oplošje tijela nastalog vrtnjom oko x-osi

$$O_x = 2\pi \int_a^b |f\left(x\right)| \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

– jednadžbom $x = g(y)$, $y \in [c, d]$, onda je oplošje tijela nastalog vrtnjom oko y-osi

$$O_y = 2\pi \int_c^d |g(y)| \cdot \sqrt{1 + g'(y)^2}\, \mathrm{d}y.$$

Primjer Izračunajmo oplošje rotacijskog tijela dobivenog rotacijom oko $x-$osi prvog svoda cikloide:

$$x(t) = R(t - \sin t),\ y(t) = R(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]$$

Imamo:

$$\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} = \sqrt{[R(t - \sin t)']^2 + [R(1 - \cos t)']^2} = \cdots$$

$$= \sqrt{2}R\sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{2}R\sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}} = 2R \left| \underbrace{\sin \frac{t}{2}}_{\geq 0,\ t \in [0, 2\pi]} \right| = 2R \sin \frac{t}{2};$$

i $\psi(t) = R(1 - \cos t) \geq 0$. Sada je

$$\begin{aligned} O_x &= 2\pi \int_a^b |\psi(t)| \cdot \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, \mathrm{d}t = \cdots \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} R(1 - \cos t) \cdot 2R \sin \frac{t}{2}\, \mathrm{d}t = \frac{64}{3}\pi R^2 \end{aligned}$$