

FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI

3.1 Koordinatni sustavi u ravnini i prostoru

Ravninski koordinatni sustavi

- Zadamo li u ravnini Π pravokutni (Kartezijev) koordinatni sustav $(O; \vec{i}, \vec{j}) \equiv (O; x, y)$:

$$T \in \Pi \iff T \equiv (x, y) \quad x, y \in \mathbb{R};$$

- Polarni koordinatni sustav:

▲ Neka je $p \in \Pi$ pravac i neka je na njemu zadan koordinatni sustav $(O; \vec{i}) \equiv (O; x)$;

▲ Neka je $T \in \Pi$ točka, $T \neq O$,

$$\varphi = \angle \left(\vec{i}, \overrightarrow{OT} \right),$$

(φ mjerimo u pozitivnom smjeru);

▲ Neka je $\rho = d(O, T)$ udaljenost od O do T ;

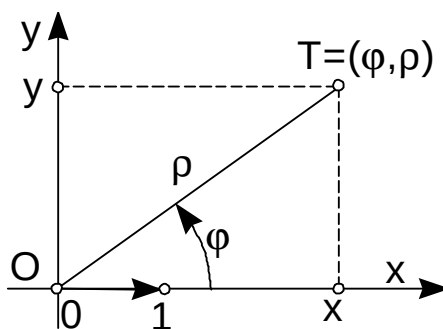
$$\text{▲ } T = O \implies \varphi \stackrel{def.}{=} \angle \left(\vec{i}, \overrightarrow{OO} \right) = 0;$$



$$T \in \Pi \longleftrightarrow T \equiv (\varphi, \rho), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \rho \in [0, \infty);$$

▲ Točku $O = (0, 0)$ nazivamo ishodištem (ili polom),
a zraku određenu s O i $\vec{i}$ - polarnom osi po-
larnoga koordinatnog sustava pod oznakom
 $(O; \varphi, \rho)$

- **Veza**: Zadamo li u ravnini Π i pravokutni koordinatni sustav $(O; \vec{i}, \vec{j}) \equiv (O; x, y)$ tako da se pozitivna x - os podudara s polarnom osi



onda je veza između Kartezijevih (x, y) i polarnih koordinata (φ, ρ) bilo koje točke $T \in \Pi$:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}.$$

Pri određivanju φ iz $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ treba voditi računa o predznaku x, y .

Prostorni koordinatni sustavi

- Zadamo li u prostoru E pravokutni (Kartezijev) koordinatni sustav $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \equiv (O; x, y, z)$:

$$T \in E \longleftrightarrow T \equiv (x, y, z) \quad x, y, z \in \mathbb{R};$$

- Cilindrični koordinatni sustav:

▲ Neka je $\Pi \in E$ ravnina i neka je na njoj zadan polarni sustav $(O; \varphi, \rho)$;

▲ Neka je q pravac koji prolazi točkom O okomit na ravninu Π i neka je na q dan koordinatni sustav $(O; \vec{k}) \equiv (O; z)$ (q pravac - z -os);

▲ Time je u prostoru definiran cilindrični koordinatni sustav $(O; \varphi, \rho, z)$;

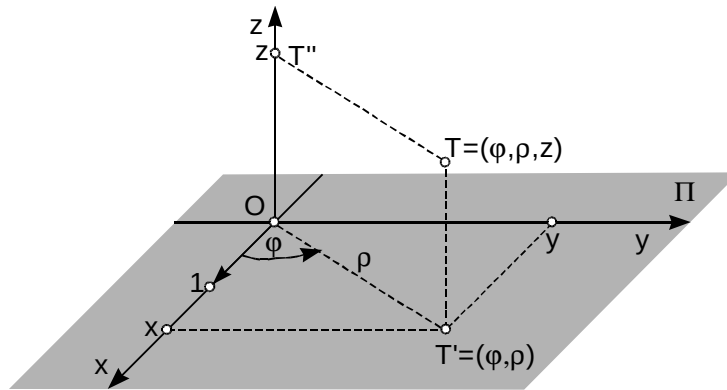
▲

$$T \in E \longleftrightarrow T \equiv (\varphi, \rho, z),$$

$$\varphi \in [0, 2\pi), \rho \in [0, \infty), z \in \mathbb{R},$$

gdje su φ i ρ polarne koordinate, u sustavu

$(O; \varphi, \rho)$, okomite projekcije T' točke T na ravninu Π , a z je koordinata, u sustavu $(O; z)$, okomite projekcije T'' točke T na pravac q .



• Veza pravokutnih i cilindričnih koordinata :

$$T \equiv (\varphi, \rho, z) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right\} \longrightarrow T \equiv (x, y, z)$$

$$T \equiv (x, y, z) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \\ z = z \end{array} \right\} \longrightarrow T \equiv (\varphi, \rho, z)$$

- Koordinatne ravnine

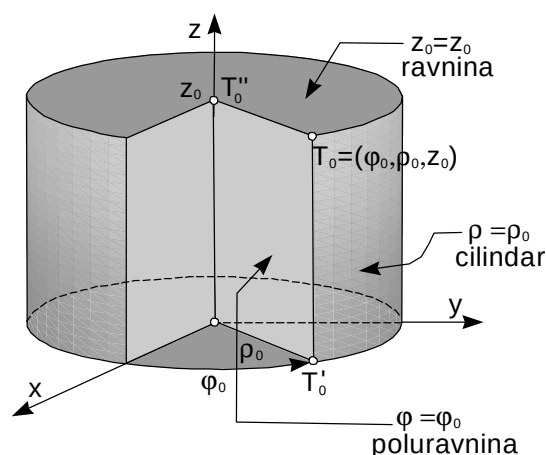
▲ U Kartezijevom koordinatnom sustavu $(O; x, y, z)$ se točka $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dobiva kao presjek koordinatnih ravnina $x = x_0$, $y = y_0$ i $z = z_0$.

▲ U cilindričnom koordinatnom sustavu (O, φ, ρ, z) točka $T_0 = (\varphi_0, \rho_0, z_0)$ dobiva se kao presjek "koordinatnih ravnina":

* $\varphi = \varphi_0$ (poluravnina određena sa z -osi i točkom T_0),

* $\rho = \rho_0$ (to je cilindar, tj. sve točke u prostoru za koje je udaljenost od z -osi jednaka ρ_0),

* $z = z_0$ (ravnina)



- **Sferni koordinatni sustav:**

- ▲ Neka je $\Pi \in E$ ravnina i neka je na njoj zadan polarni sustav $(O; \varphi, \rho)$;

- ▲ Neka je q pravac koji prolazi točkom O okomit na ravninu Π i neka je na q dan koordinatni sustav $(O; \vec{k}) \equiv (O; z)$;

- ▲ Neka je T' okomita projekciju na ravninu Π točke $T \in E, T \neq O$;

- ▲ Neka je:

- * $r = d(O, T) > 0$;

- * $\theta \in [0, \pi]$ - kut između radijus-vektora $\vec{OT}$ i $\vec{k}$;

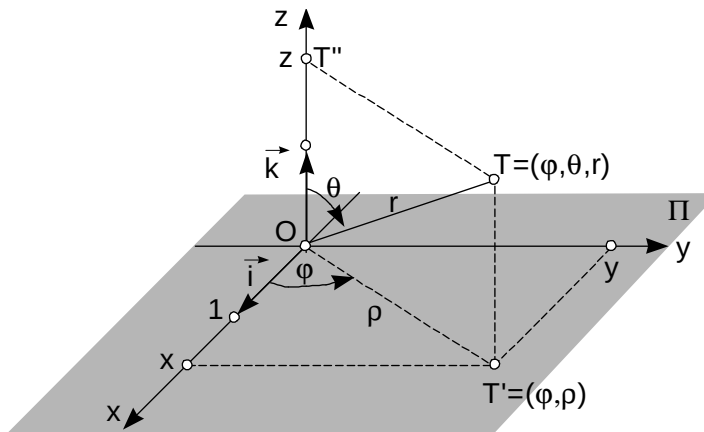
- * $\varphi \in [0, 2\pi)$ - kut između $\vec{i}$ i radijus-vektora $\vec{OT}$.

- ▲ Time je u prostoru definiran sferni koordinatni sustav $(O; \varphi, \theta, r)$;

- ▲

$$T \in E \longleftrightarrow T \equiv (\varphi, \theta, r),$$

$$\varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi], r \in [0, \infty).$$

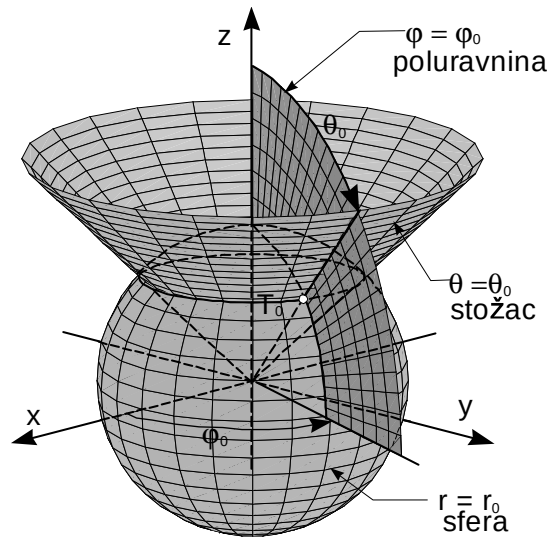


Ako je T na pozitivnoj zruci z -osi onda su joj sferne koordinate $(0, 0, r)$, a na negativnoj - $(0, \pi, r)$. Ishodištu O se pridijeljuju sferne koordinate $(0, 0, 0)$.

- Koordinatne ravnine

▲ U sfernom koordinatnom sustavu (O, φ, θ, r) točka $T_0(\varphi_0, \theta_0, r_0)$ dobiva se kao presjek "koordinatnih ravnina":

- * $\varphi = \varphi_0$ (poluravnina određena sa z -osi i točkom T_0),
- * $\theta = \theta_0$ - stožac s vrhom u ishodištu O ,
- * $r = r_0$ - sfera sa središtem u ishodištu O i radijusa r_0 .



• Veza pravokutnih i sfernih koordinata :

Zadamo li u prostoru pravokutni koordinatni sustav $(O; x, y, z)$ i sferni sustav $(O; \varphi, \theta, r)$ tako da se pozitivna x -os podudara s polarnom osi, te da im se podudaraju z -osi, možemo odrediti veze između pravokutnih (x, y, z) i sfernih (φ, θ, r) koordinata bilo koje točke T :

$$T \equiv (\varphi, \theta, r) \longrightarrow \begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \longrightarrow T \equiv (x, y, z);$$

$$T \equiv (x, y, z) \longrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

$$\longrightarrow T \equiv (\varphi, \theta, r).$$

Pri određivanju kuta φ iz $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ treba voditi računa o predznaku tih koordinata.

Primjer Točka $T_1 = (0, 2\sqrt{3}, -2)$ zadana u pravokutnom koordinatnom sustavu ima u sfernom koordinatnom sustavu prikaz

$$T_1 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, 4 \right)$$

jer je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_1}{x_1} = \frac{2\sqrt{3}}{0} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\theta_1 = \arccos \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3},$$

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{0^2 + (2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4.$$

3.2 Neke plohe

Ravnina u prostoru

Ponoviti - sami:

- vektorska jednažbe ravnine Π

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0;$$

- jednažba ravnine Π kroz tri točke

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

- jednažba ravnine Π jednom točkom $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0;$$

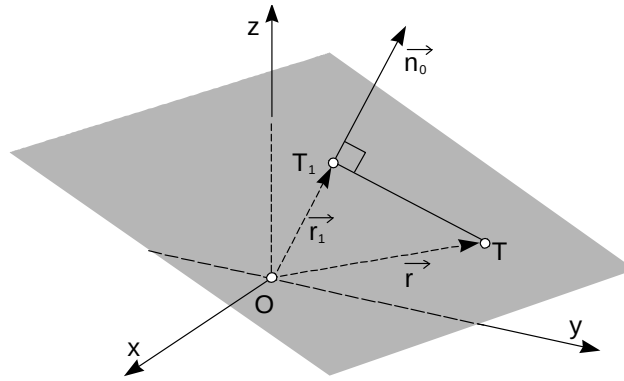
- opći oblik jednažbe ravnine Π :

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

ili (vektorski):

$$\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0.$$

gdje je $\vec{n} = \{A, B, C\}$ normala te ravnine, a $T_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \Pi$ i $T = (x, y, z) \in \Pi$, tj. $\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ i $\vec{r} = \{x, y, z\}$



- segmentni oblik jednadžbe ravnine Π

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Plohe drugog reda

Neka je u prostoru zadan pravokutni koordinatni sustav $(O; x, y, z)$. Pod **plohom drugoga reda** (ili **kvadrikom**) podrazumijevamo skup svih točaka $T = (x, y, z)$ u prostoru čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu drugoga stupnja

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + \\ + Gx + Hy + Jz + K = 0,$$

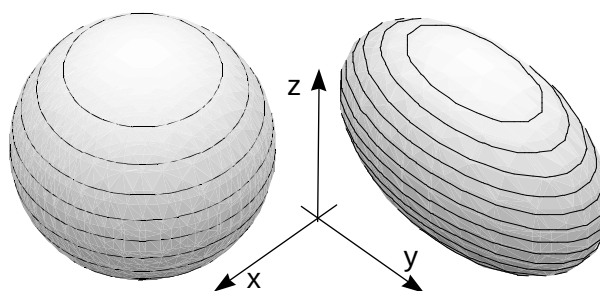
s realnim koeficijentima $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ i K , pod uvjetom da je barem jedan od A, B, C, D, E ili F različit od nule. Posebno će nas zanimati samo neke kvadrike.

- **Jednadžba**

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

predstavlja **kuglinu plohu** (ili **sferu**) sa **središtem** $S = (x_0, y_0, z_0)$ i **polumjerom** (ili **radijusom**) $R > 0$.

- Neprazni presjek ove plohe ravninom paralelnom s koordinatnom ravninom jest ili kružnica ili točka, što povlači da se kružnica u prostoru može zadati i kao presjek sfere i ravnine.



Sl. 1.

- Za dane realne ne nul-konstante a , b i c , jednadžba

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

određuje plohu koju nazivamo **elipsoidom**. Njegove su osi usporedne s koordinatnim osima, a duljine su im redom $2|a|$, $2|b|$ i $2|c|$.

- Neprazni elipsoidovi presjeci ravninama usporednim s koordinatnim osima jesu ili kružnice ili elipse ili točke. Primijetimo da u slučaju $a = b = c$ elipsoid postaje sferom.

- Nadalje, jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

opisuje **jednokrilni eliptični hiperboloid** (Sl 2. (a)).

- Njegovi neprazni presjeci ravninama usporednima sa z -osi jesu ili hiperbole ili točke, dok su mu presjeci ravninama usporednim s xy -ravninom elipse.
- Cikličkim zamjenama

$$x \rightsquigarrow y, y \rightsquigarrow z, z \rightsquigarrow x \text{ i } a \rightsquigarrow b, b \rightsquigarrow c, c \rightsquigarrow a$$

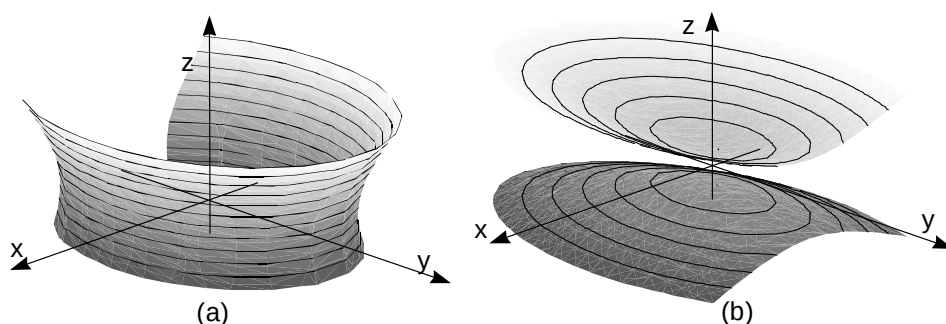
dobivamo jednadžbu "iste" plohe u drugom položaju (y -os je "povlaštena"):

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a još jednom takvom zamjenom dobivamo jed-

nadžbu ("povlaštena" je x -os):

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$



Sl. 2.

- **Jednadžba**

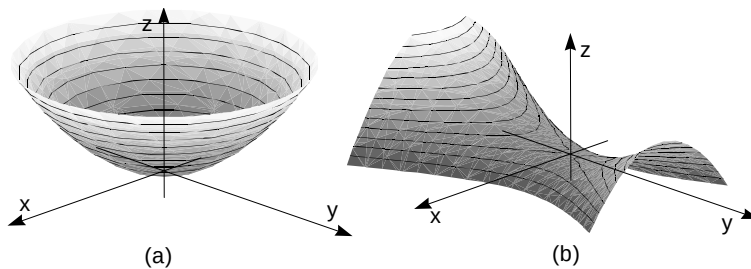
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

opisuje **dvokrilni eliptični hiperboloid** (Sl 2. (b)).

- Njegov neprazni presjek ravninom usporednom sa z -osi jest hiperbola, dok mu je neprazni presjek ravninom usporednom s xy -ravninom ili elipsa ili točka.

- Ciklički izmjenjujući koordinate (varijable) x, y, z , kao i pripadne konstante a, b, c , dobivamo jednadžbe "iste" plohe u različitim položajima:

$$-\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$



Sl. 3.

● Jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

opisuje plohu koju nazivamo **eliptičnim paraboloidom** (Sl 3. (a)). Faktor 2 u monomu $2z$ nije bitan, ali je tehnički (algebarski) pogodan.

- Karakteristični presjeci ove plohe prikladnim ravninama koje su paralelne koordinatnim ravninama jesu elipse ili parabole.
- Odgovarajućim cikličkim izmjenama dobivamo još

dvije jednađbe "iste" plohe u različitim položajima.

- Jednađba

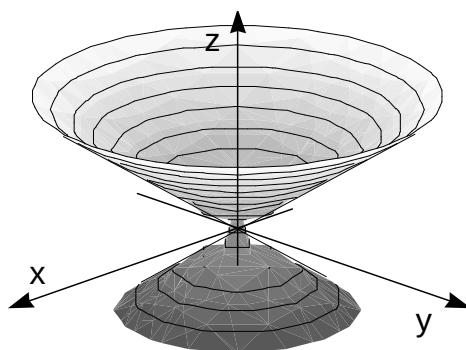
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 2z$$

određuje **hiperbolični paraboloid** (Sl 3.(b)).
Analogni komentari (o cikličkim zamjenama) vrijede i za ove plohe.

- Jednađba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

opisuje **stožastu** (ili **konusnu**) **plohu** (Sl 4.). Opet su moguće još dvije (cikličke) varijante.



Sl. 4.

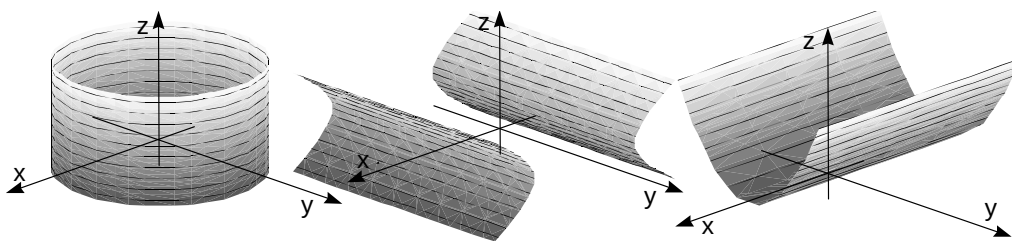
Nadalje, jednađbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$z = 2ay^2$$

opisuju redom **eliptične**, **hiperbolične** i **parabolične valjčaste** (ili **cilindrične**) **plohe** (Sl 5.). Dakako da su i u ovim jednadžbama moguće prije spominjane cikličke izmjene. Ove valjčaste plohe su samo vrlo posebni primjeri (opće) valjčaste plohe



Sl. 5.

Definicija Neka je u ravnini Π dana krivulja $\mathcal{K}$, te neka je p pravac koji probada Π . Promatrajmo skup svih pravaca u prostoru koji sijeku krivulju $\mathcal{K}$ i usporedni su s pravcem p . Tretirajući svaki pravac točkovnim skupom, pripadnu (točkovnu) uniju nazivamo **valjčastom** (ili **cilindričnom**) **plohom**. Pritom govorimo da je pravac p **izvodnica** (ili **generatrisa**), a krivlja $\mathcal{K}$ **ravnalica** (ili **direktrisa**) te valjčaste plohe.

Primjerice, eliptičnoj valjčastoj plohi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

jedna izvodnica jest z -os, a ravnalica joj je elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0.$$

Primijetimo da je svaka ravnina (trivijalna) valjčasta ploha (za krivulju $\mathcal{K}$ treba uzeti odgovarajući pravac k).

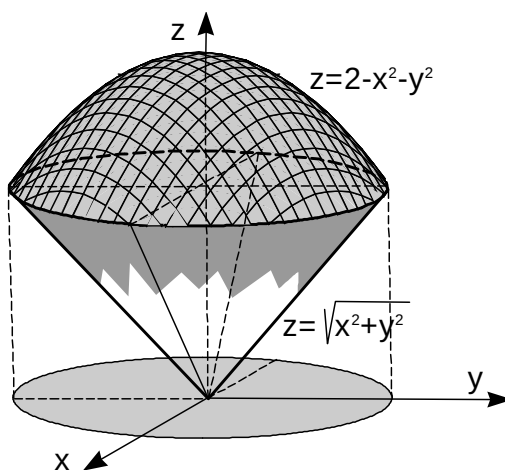
Napomenimo i to da se prostorna krivulja često zadaju presjekom dviju ploha.

Primjer Skicirati tijelo V omeđeno plohami

$$z - 2 = -x^2 - y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

i opisati ga u pravokutnom i cilindričnom koordinatnom sustavu.

Tijelo V određeno je plohami $z - 2 = -x^2 - y^2$ (paraboloid) i $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (stožasta ploha).



Odredimo projekciju V_{xy} tijela V na xy -ravninu:

- Odredimo projekciju krivulje koja se nalazi u presjeku promatranih ploha. Eliminacijom izraza $x^2 + y^2$ iz $z - 2 = -x^2 - y^2$ i $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dobivamo

$$z^2 + z - 2 = 0 \implies z_1 = 1, z_2 = -2.$$

- Dakle, mora biti $z = 1$, pa je $x^2 + y^2 = 1$. Drugim riječima, presječna krivulja je kružnica

$$x^2 + y^2 = 1, z = 1,$$

i projekcija presječne krivulje na xy -ravninu je kružnica $x^2 + y^2 = 1$.

- Tražena projekcija V_{xy} je krug

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- Ukoliko točka $T = (x, y, z)$ pripada tijelu V , tada njena projekcija $T' = (x, y, 0)$ na xy -ravninu mora pripadati krugu D , a to znači da za njezine koordinate vrijedi $-1 \leq x \leq 1$ i $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$.
- Konačno, za z -koordinatu točke $T = (x, y, z) \in V$ vrijedi $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z$ (točka T leži iznad stožaste plohe) i $z \leq 2 - x^2 - y^2$ (točka T leži ispod plohe paraboloida). Dakle,

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \right. \\ \left. \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2 \right\}.$$

- U cilindričnom koordinatnom sustavu koordinate projekcije $T' = (\varphi, \rho, 0)$ točke $T = (\varphi, \rho, z) \in V$ mora ležati u krugu D , dakle za njezine koordinate vrijedi $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$. Uvjet za z -koordinatu $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$ prelazi u $\rho \leq z \leq 2 - \rho^2$. Dakle,

$$V = \left\{ (\varphi, \rho, z) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho \leq z \leq 2 - \rho^2 \right\}.$$