3.3 Funkcije više varijabli

Definicija 3.1 Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo realnom funkcijom od m realnih varijabla.

$$(x_1, x_2, ..., x_m) \in D \ \xrightarrow{f} \ u = f\,(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}$$

(Svakoj uređenoj $m-$torci $(x_1, x_2, ..., x_m) \in D$ pravilom f pridružen je jedan i samo jedan realan broj $u \in \mathbb{R}$.)

Kao i funkciju jedne varijable, funkciju više varijabla (skalarnu funkciju) možemo zadati **analitički, tablično, grafički, parametarski, implicitno**, ...

- Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo funkcijom dviju varijabli.

$$(x, y) \in D \ \xrightarrow{f} \ z = f(x, y) \in \mathbb{R}$$

  - $f\,[D] = \{\ z \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in D\} -$ slika funkcije,
  - $x,\ y -$ nezavisne varijable,
  - $z -$ zavisna vrijabla.

Funkciju obično zadajemo u eksplicitnom obliku

$$z = f(x, y).$$

Budući da, u tom slučaju, nije naznačena domena, podrazumijevamo da je domena maksimalan podskup D_f od $\mathbb{R}^2$ za koji pravilo f "ima smisla".

Skup

$$\Gamma_f = \{\ (x, y, f(x, y))\ \mid (x, y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

nazivamo graf funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Graf u prostoru predstavlja neku plohu.

Primjer Zapis $z = \ln(x + y - 2)$ definira funkciju

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ \ D_f \subseteq \mathbb{R}^2,\ \ f(x, y) = \ln(x + y - 2),$$

pri čemu je definicijsko područje D_f određeno nejednadžbom $x + y - 2 > 0$, tj.

$$D_f = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x + 2\big\}$$

- Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^3$, funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, nazivamo funkcijom triju varijabli.

$$(x,y,z) \in D \xrightarrow{f} u = f(x,y,z) \in \mathbb{R}$$

- $f\,[D] = \{\ u \mid u = f(x,y,z),\ (x,y,z) \in D\}$ – slika funkcije,
- $x,\ y,\ z$ – nezavisne varijable,
- u – zavisna vrijabla.
- $u = f(x,y,z)$ – eksplicitni oblik (domena D_f - maksimalan podskup od $\mathbb{R}^3$ za koji pravilo f ima smisla)
- graf funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ je

  $$\Gamma_f = \{\ (x,\ y,\ z,\ f(x,y,z))\ \mid (x,y,z) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

  (ne možemo nacrtati)

Primjer Pravilo $u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$ definira funkciju

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ D_f \subseteq \mathbb{R}^3,$$

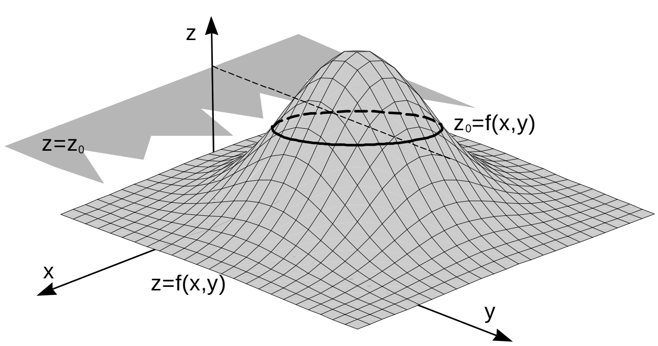
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2),$$

pri čemu je definicijsko područje D_f određeno nejednadžbama $-1 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 2 \leq 1$. Dakle,

$$D_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\right\}.$$

Graf Γ_f funkcije moguće je nacrtati (djelomično) samo za $m \leq 2$.

- U slučaju $m = 2$ crtanjem ističemo samo neke njegove važne podskupove. To su, najčešće, presjeci Γ_f odabranim ravninama u prostoru $\mathbb{R}^3$. Ako su te ravnine usporedne s ravninom $z = 0$ (koordinatnom xy-ravninom), dobivene presjeke nazivamo **razinskim krivuljama** funkcije f (ili grafa Γ_f). Po tomu, svaki broj $z_0 \in f[D]$ određuje jednu razinsku krivulju jednadžbom $f(x, y) = z_0$.



Dakle, na svakoj razinskoj krivulji su funkcijske vrijednosti nepromijenjive.

Primjer Funkcijski graf G_f za funkciju

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

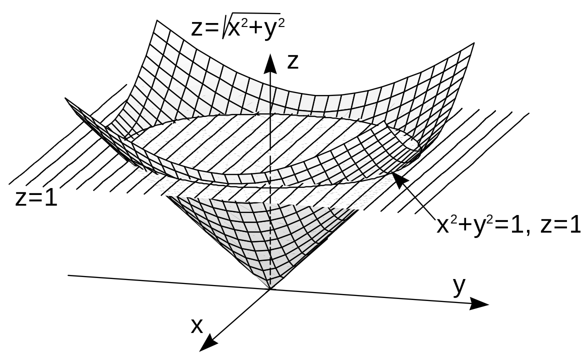
crtamo ističući njegove presjeke s koordinatnim ravninama ili ravninama usporednim s njima:

- – ravninom $x = 0$ (to su zrake: $z = y$, $z \geq 0$, $x = 0$; $z = -y$, $z \geq 0$, $x = 0$);

  – ravninom $y = 0$ (to su zrake: $z = x$, $z \geq 0$, $y = 0$; $z = -x$, $z \geq 0$, $y = 0$);

  – ravninom $z = 1$ (to je razinska krivulja (kružnica) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$).

  Primijetimo da je G_f stožasta ploha



- Slično se u slučaju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, dakle $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^4$, govori o **razinskim plohama** (ili **nivo-plohama**) funkcije f. Pritom svaka jednadžba

$$f(x, y, z) = u_0, \quad u_0 \in f\left[D\right],$$

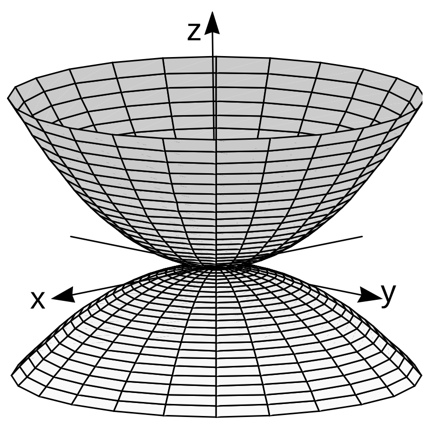
određuje točno jednu pripadnu razinsku plohu na kojoj su sve funkcijske vrijednosti jednake u_0.

Primjer Razinske plohe za funkciju

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid z = 0\},$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z},$$

su paraboloidi (bez "tjemena") $z = u_0\left(x^2 + y^2\right)$, $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



3.4. Granična vrijednost i neprekidnost

Najprije treba definirati što u $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) znači "**biti blizu**", tj. što će biti "**mala okolina**" po volji odabrane točke.

Poslužit ćemo se standardnom udaljenošću $d(T, T_0)$ među točkama, tj.

- za $T = (x, y, z)$, $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ udaljenost $d(T, T_0)$ definiramo sa

$$d\left(T, T_0\right) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

- za $T = (x, y)$, $T_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sa

$$d\left(T, T_0\right) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

- koja se za $T = (x), T_0 = (x_0)$ (slučaj $m = 1$) svodi na standardnu udaljenost u $\mathbb{R}$

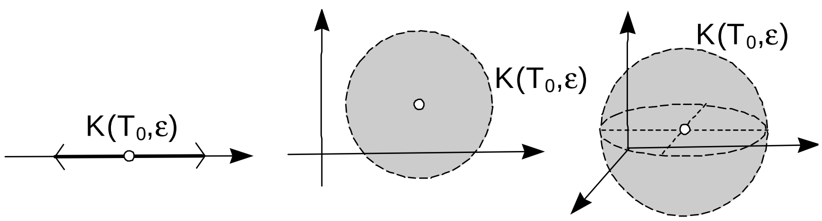
$$d(T, T_0) = \sqrt{(x - x_0)^2} = |x - x_0|.$$

Sve pojmove i tvrdnje dajemo u dimenziji $m = 2$ uz napomenu da iskazano vrijedi i za slučaj $m = 3$ (dakako i za $m = 1$).

Definicija 3.2 Za bilo koju točku $T_0 \in \mathbb{R}^2$ i bilo koji broj $\varepsilon > 0$, skup

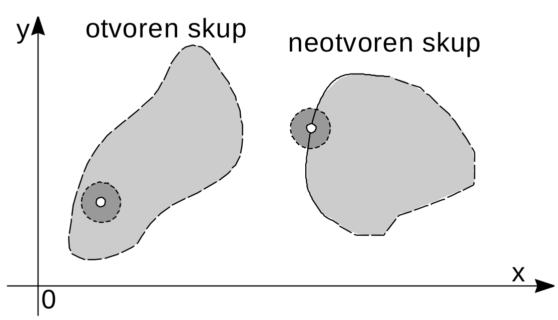
$$K(T_0;\varepsilon) \equiv \{T \in \mathbb{R}^2 \mid d\,(T_0, T) < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

nazivamo *(*otvorenom*)* **kuglom** polumjera ε oko točke T_0.



Kugle

Reći ćemo da je skup $U \subseteq \mathbb{R}^2$ **okolina** točke $T_0 \in U$ ako postoji neki $\varepsilon > 0$ takav da je kugla $K(T_0;\varepsilon) \subseteq U$. Za skup $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ćemo reći da je **otvoren** ako je on okolina svake svoje točke (napomena: on tada ne sadrži niti jednu točku "ruba"). Neotvoreni skup sadrži točake kojima nije okolina (napomena: on tada sadrži barem jednu točku "ruba").



Reći ćemo da je točka T_0 **gomilište** skupa D ako svaka okolina od T_0 siječe skup $D \setminus \{T_0\}$. Za skup D kažemo da je **zatvoren** ako sadrži sva svoja gomilišta (napomena: on tada sadrži i sve točke "ruba").

Ako za točku $T \in D$ postoji neka okolina koja ne siječe skup $D \setminus \{T\}$ onda kažemo da je T **izolirana točka** skupa D

Napokon, reći ćemo da je skup D **omeđen** ako postoji neka kugla koja ga sadrži.

I graničnu vrijednost skalarne funkcije definiramo slično onoj za realne funkcije realne varijable.
Intuitivna definicija:

Kažemo da je $L_0 \in \mathbb{R}$ limes funkcje f u neizoliranoj točki $T_0 = (x_0, y_0)$ (područja definicije od f), i pišemo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_0,$$

ako vrijednosti $f(x,y)$ teže prema L_0 kad (x,y) teži prema (x_0, y_0) .

Definicija 3.3 Neka su dani funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, i točka T_0 koja nije izolirana točka od D. Reći ćemo da je broj $L_0 \in \mathbb{R}$ **granična vrijednost** funkcije f **u točki** T_0 ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall T \in D \setminus \{T_0\})$$

$$d(T, T_0) < \delta \Rightarrow |f(T) - L_0| < \varepsilon.$$

*(*Primijetimo da se uvjet provjerava u točkama $T \in K(T_0; \delta)$, $T \neq T_0$ *!)*

U tom slučaju pišemo

$$\lim_{T \to T_0} f(T) = L_0 \quad \text{ili} \quad \lim_{T_0} f(T) = L_0.$$

Napomena 3.4 Kod funkcija jedne varijable smo imali

$$\lim_{x \to x_0^{+0}} f(x) = \lim_{x \to x_0^{-0}} f(x) = L \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

te

$$\lim_{x \to x_0^{+0}} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^{-0}} f(x) \implies \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ ne postoji.}$$

Ovdje je situacija složenija. Puteva kako ”ići” u (x_0, y_0) ima beskonačno. No, jasno je da limes ne smije ovisiti o putanji.

Napomena 3.5 Ukoliko je

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ c_1}} f(x,y) = L_1 \quad \text{i} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ c_2}} f(x,y) = L_2$$

te $L_1 \neq L_2$ tada $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ne postoji. Ovo je postupak kako utvrditi da limes ne postoji (to je puno lakše nego utvrditi da postoji).

Primjer Odredite limes funkcije

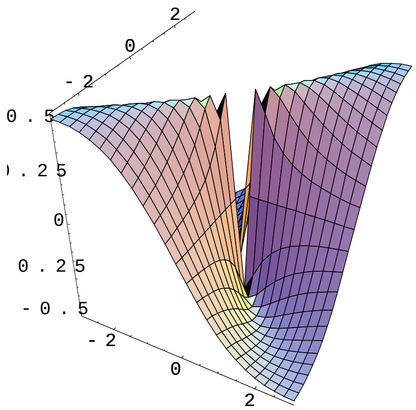
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

u točki $(0,0)$.

Ukoliko $(x,y) \to (0,0)$ ide po putevima koje određuju pravci $y = kx$ imamo

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot kx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

i traženi limes ne postoji jer za različite k dobijamo različite vrijednosti.



$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Primjer Funkcija

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{\sin\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2},$$

ima u točki $(0,0)$ limes $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

Ukoliko $(x,y) \to (0,0)$ ide po putevima koje određuju pravci $y = kx$ imamo

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^2+k^2x^2\right)}{x^2+k^2x^2}$$

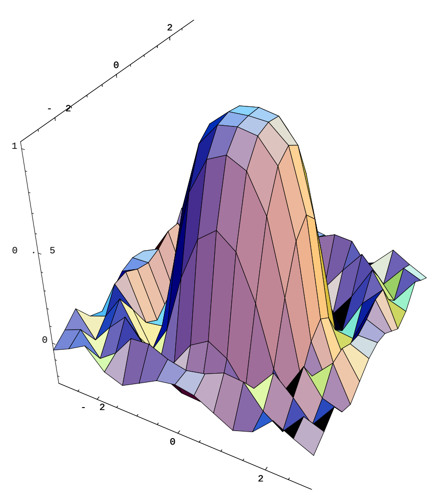
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left[x^2\left(1+k^2\right)\right]}{x^2\left(1+k^2\right)} = 1,$$

što još ne znači da limes postoji i da je jednak 1.

Zadatak se može riješiti i prijelazom na polarne koordinate. Budući je $x = \rho\cos\varphi$ i $y = \rho\sin\varphi$, tada $(x, y) \to (0, 0)$ ako i samo ako $\rho \to 0$. Imamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin\rho^2}{\rho^2} = 1.$$

Budući da dobiveni rezultat ne ovisi o φ, tj. o kutu pod kojim "dolazimo" u točku $(0, 0)$, dakle ne ovisi o krivulji po kojoj dolazimo u točku $(0, 0)$, zaključujemo da limes postoji i da je jednak 1.



$$z = \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$$

Teorem (o uzastopnim limesima za funkciju dvije varijable): Neka je

$$L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Ako postoje uzastopni limesi

$$L_1 = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \quad \text{i} \quad L_2 = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right),$$

onda je $L_1 = L_2 = L$.

Obrat tvrdnje iz ovog teorema općenito ne vrijedi, jer postojanje i jednakost uzastopnih limesa znači samo postojanje i jednakost limesa po dva od beskonačno mnogo putova približavanja točki (x_0, y_0). No, ako je postoje uzastopni limesi L_1i L_2 i međusobno su različiti, ili ako jedan od njih ne postoji, onda ne postoji ni limes L.

Primjer Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, nema limes u točki $(0,0)$, jer je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1,\\
\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) &= \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1.
\end{aligned}$$

Definicija 3.6 Neka je dana funkcija $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$. Ako je

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

kažemo da je funkcija f neprekidna u točki $(x_0,y_0) \in D_f$. Ako je f neprekidna u svakoj točki $(x,y) \in D_f$ kažemo da je f neprekidna funkcija.

Primjer Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

je neprekidna. Jer je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = 1 = f(0,0).$$

Napomena Limes i neprekidnost funkcija triju varijabli se slično definira.

Napomena Zbroj $f+g$, razlika $f-g$, umnožak $f \cdot g$ i količnik $\frac{f}{g}$ *(*kad god su definirani*)* neprekidnih skalarnih funkcija jesu neprekidne skalarne funkcije.

3.5. Parcijalne derivacije

Promatrajmo funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i po volji odabranu točku $T_0 = (x_0, y_0) \in D$.

Neka je Π_{y_0} ravnina $y = y_0$ i označimo s $D_{y_0} = \Pi_{y_0} \cap D \subseteq D$. Očito je $D_{y_0} \neq \emptyset$ jer sadrži barem točku T_0. Suženje

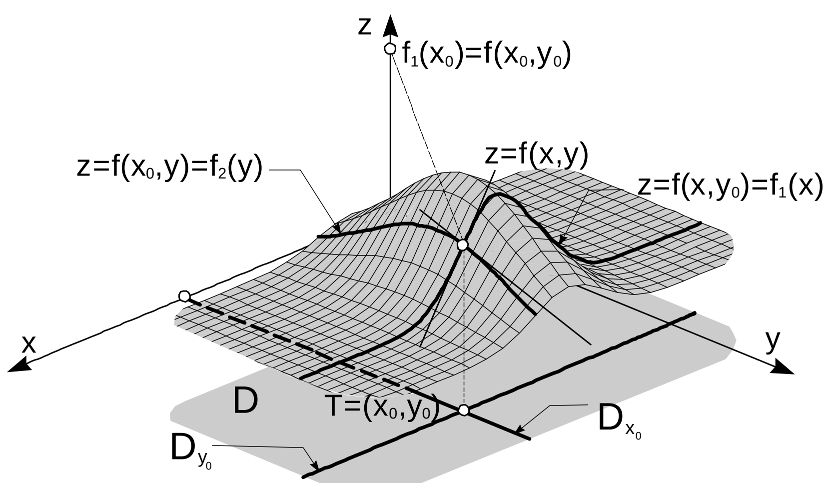
$$f|_{D_{y_0}} \equiv f_1 : D_{y_0} \to \mathbb{R}$$

smijemo smatrati funkcijom jedne varijable jer se mijenja samo koordinata x.

Analogno imamo funkciju

$$f|_{D_{x_0}} \equiv f_2 : D_{x_0} \to \mathbb{R}$$

koju možemo smatrati funkcijom varijable y



Definicija 3.7 Neka je $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkcija dviju varijabli i $(x_0, y_0) \in D$. Ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_x(x_0, y_0)$$

onda $f_x(x_0, y_0)$ nazivamo <u>prva parcijalna derivacija po x funkcije f u točki (x_0, y_0)</u>. Ako postoji limes

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0)$$

onda $f_y(x_0, y_0)$ nazivamo <u>prva parcijalna derivacija po y funkcije f u točki (x_0, y_0)</u>.

Ako ovi limesi postoje za sve $(x, y) \in D$ dobivamo dvije funkcije dviju varijabli: $f_x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ prva parcijalna derivacija od f po y i $f_y : D \longrightarrow \mathbb{R}$ prva parcijalna derivacija od f po y.

$$(x, y) \in D \xrightarrow{f_x} f_x(x, y) \in \mathbb{R}$$

$$(x, y) \in D \xrightarrow{f_y} f_y(x, y) \in \mathbb{R}$$

Koristimo još i oznake:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = D_x f \\ f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = D_y f \end{aligned}$$

Napomena Ako želimo naći f_x, tada u $f(x, y)$ varijablu y treba tretirati kao konstantu i derivirati po x. Analogno, ako tražimo f_y.

Napomena Graf $z=f(x, y)$ funkcije je ploha. Presječemo li tu plohu ravninom $x = x_0$ ili $y = y_0$ dobit ćemo ravninske krivulje Γ_2 odnosno Γ_1, redom. Geometrijska interpretacija parcijalnih derivacija $f_x(x_0, y_0)$ i $f_y(x_0, y_0)$: to su koeficijenti smjera tangente na Γ_1, odnosno Γ_2 u točki $T_0\,(x_0,\ y_0,\ z_0{=}f(x_0, y_0))$.

Napomena Analogno se definiraju i parcijalne derivacije funkcija tri i više varijabli. Npr. za $u = f(x, y, z)$ imamo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = f_x(x_0, y_0, z_0)$$

Slično, $f_y(x_0, y_0, z_0)$, $f_z(x_0, y_0, z_0)$.

Tehnika deriviranja ostaje ista: deriviramo po varijabli x, tretirajući y i z kao konstante, pa dobivamo $f_x(x,y,z)$.

Ako funkcija f ima u točki T_0 parcijalnu derivaciju po svakoj varijabli onda kažemo da je funkcija f **derivabilna u točki** T_0. Ako je f derivabilna u svakoj točki $T \in D$, nazivamo ju **derivabilnom funkcijom**.

Sjetimo se da za realne funkcije jedne varijable *derivabilnost povlači neprekidnost*. Sada ćemo pokazati da za funkcije više varijabla to, općenito, *ne vrijedi*.

Primjer Pokazali smo da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana propisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

prekidna u točki $(0,0)$ ($\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji).

Ona je, međutim, derivabilna u točki $(0,0)$. Naime

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(\Delta x)\cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0,$$

a slično se pokaže da je i $f_y(0,0) = 0$.

Definicija 3.8 Parcijalnim deriviranjem prvih parcijalnih derivacija $f_x(x,y)$ i $f_y(x,y)$ (to su opet funkcije dviju varijabli!), dobivamo parcijalne derivacije drugog reda:

$$(f_x)_x \overset{def}{=} f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_{xx} f \qquad \text{- druga parcijalna derivacija po } x$$

$$\left.\begin{aligned} (f_x)_y &\overset{def}{=} f_{xy} = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_{xy} f \\ (f_y)_x &\overset{def}{=} f_{yx} = \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{yx} f \end{aligned}\right\} \text{ - druge mješovite parcijalne derivacije}$$

$$(f_y)_y \overset{def}{=} f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = D_{yy} f \qquad \text{- druga parcijalna derivacija po } y$$

Ovo su opet funkcije dviju varijabli.

Parcijalnim derivairanjem ovih funkcija dolazimo do parcijalnih derivacija trećeg reda itd.
Analogno se definiraju parcijalne derivacije višeg reda funkcija od tri ili više varijabli.

Teorem 3.9 (Schwartzov) Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, derivabilna na nekoj ε-kugli $K((x_0, y_0); \varepsilon) \subseteq D$ i neka f ima na toj kugli i parcijalnu derivaciju drugoga reda po x i y redom, f_{xy}. Ako je funkcija

$$f_{xy}|_{K((x_0,y_0);\varepsilon)} : K((x_0, y_0); \varepsilon) \to \mathbb{R}$$

neprekidna u točki (x_0, y_0), onda postoji parcijalna derivacija drugoga reda funkcije f po y i x redom u točki (x_0, y_0) i pritom je

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Napomena Schwartzov teorem možemo poopćiti i na više derivacije (ako su neprekidne), tj. opet nije bitan poredak deriviranja.

Primjer Odredimo sve parcijalne derivacije drugoga reda i treće parcijalne derivacije po x, y i x redom, te po x, x, i y redom (ondje gdje postoje) za funkciju

$$f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^2 y + x \ln y.$$

Definicijsko područje D je otvorena poluravnina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ i funkcija f je derivabilna. Pritom je, u bilo kojoj točki $(x, y) \in D$,

$$f_x(x, y) = 2xy + \ln y,$$

$$f_y(x, y) = x^2 + \frac{x}{y}.$$

Primijetimo da su i obje parcijalne derivacije derivabilne funkcije, tj. da je funkcija f dvaput derivabilna, i da je

$$f_{xx}(x, y) = 2y,\ f_{yx}(x, y) = 2x + \frac{1}{y},$$

$$f_{xy}(x, y) = 2x + \frac{1}{y},\ f_{yy}(x, y) = -\frac{x}{y^2}.$$

Napokon, očito je da je f i triput (zapravo, po volji mnogo puta) derivabilna i da je $f_{xyx}(x, y) = 2 = f_{yxx}(x, y)$.

Primjer Promatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanu propisom

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Funkcija f je derivabilna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ i pritom je

$$f_x(x,y) = y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right),$$

$$f_y(x,y) = x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

Nadalje, obje ove parcijalne derivacije su derivabilne funkcije (na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) i vrijedi

$$f_{yx}(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left(1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) = f_{xy}(x,y).$$

Pogledajmo sada što je s derivabilnošću u točki $(0,0)$!

Budući je $f(x,0) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $f(0,y) = 0$ za svaki $y \in \mathbb{R}$, f je derivabilna i u $(0,0)$ i $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$.

Primijetimo da je

$$f_x(x,0)=0,\ f_y(x,0)=x,\ f_x(0,y)=-y,\ f_y(0,y)=0,$$

pa za druge mješovite parcijalne derivacije funkcije f u točki $(0,0)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} f_{yx}(0,0) &= \lim_{\triangle y\to 0}\frac{f_x(0,0+\triangle y)-f_x(0,0)}{\triangle y}= \\ &= \lim_{\triangle y\to 0}\frac{-\triangle y-0}{\triangle y}=-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f_y(0+\triangle x,0)-f_y(0,0)}{\triangle x}= \\ &= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle x-0}{\triangle x}=1, \end{aligned}$$

Dakle, funkcija f je dvaput derivabilna. Međutim, "mješovite" druge parcijalne derivacije $f_{yx}(0,0)$ i $f_{xy}(0,0)$ su međusobno različite! Uzrok, dakako, leži u tome što funkcija f_{xy} ima prekid u točki $(0,0)$ (nisu ispunjeni uvjeti Schwartzovog teorema).