## 3.9. Ekstremi funkcija više varijabli

**Definicija 3.18** Za funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, kažemo da ima lokalni maksimum (minimum) u točki $T_0 \in D$, ako postoji $\varepsilon$-okolina $K(T_0, \varepsilon) \subseteq D$ točke $T_0$ sa svojstvom da je

$$f(T) < f(T_0), \quad \text{za svaku točku } T \in K(T_0, \varepsilon) \setminus \{T_0\}$$

$$\left( f(T) > f(T_0), \quad \text{za svaku točku } T \in K(T_0, \varepsilon) \setminus \{T_0\} \right)$$

Ukoliko je

$$f(T) \leq f(T_0), \quad \text{za svaki } T \in D$$

$$\left( f(T) \geq f(T_0), \quad \text{za svaki } T \in D \right)$$

onda kažemo da $f$ ima globalni maksimum (minimum) u točki $T_0 \in D$.

Kao i do sada promatrat ćemo funkcije dviju varijabli.

**Primjer** Funkcije

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 \text{ i } f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

imaju minimum (lokalni i globalni) u točki $(0,0)$.

Primijetimo da je za prvu funkciju točka $(0,0,0)$ tjeme paraboloida (grafa) i da ona u toj točki ima parcijalne derivacije, a da je za drugu funkciju ta točka vrh stošca (grafa) i da ne postoje parcijalne derivacije u toj točci.

**Teorem 3.19 (Nužan uvjet za lokalni ekstrem)** Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ima u točki $T_0 = (x_0, y_0) \in D$ lokalni ekstrem i ako je u toj točki derivabilna, onda je

$$f_x(x_0,y_0) = 0, \quad f_y(x_0,y_0) = 0.$$

Točka u kojima se prve parcijalne derivacije poništavaju naziva se <u>stacionarna točka.</u>

Stacionarna točka je kandidat za ekstrem.

**Teorem 3.20 (Dovoljan uvjet za lokalni ekstrem)**
Neka je $T_0 = (x_0, y_0) \in D$ stacionarna točka funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, i neka su druge parcijalne derivacije funkcije $f$ neprekidne na nekoj $\varepsilon$-kugli $K(T_0; \varepsilon) \subseteq D$. Neka je

$$D(T_0) = f_{xx}(T_0) \cdot f_{yy}(T_0) - [f_{xy}(T_0)]^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} f_{xx}(T_0) & f_{xy}(T_0) \\ f_{xy}(T_0) & f_{yy}(T_0) \end{vmatrix}.$$

Tada vrijedi:

- Ako je $D(T_0) > 0$ i $f_{xx}(T_0) > 0$, tada je $f$ u točki $T_0$ ima lokalni minimum $f(T_0)$;
- Ako je $D(T_0) > 0$ i $f_{xx}(T_0) < 0$, tada je $f$ u točki $T_0$ ima lokalni maksimum $f(T_0)$;
- Ako je $D(T_0) < 0$, tada $f$ u točki $T_0$ nema ekstrem.

**Napomena** Ako je $D(T_0) = 0$ ne možemo zaključiti ništa o ekstremu. U ovom slučaju možemo imati ekstrem, ali i sedlastu točku. Tu je potrebno daljnje ispitivanje.

**Primjer** Odrediti ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Vrijedi:

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4y = 4\left(x^3 - y\right) = 0 \Rightarrow x^3 = y,$$

$$f_y(x,y) = 4y^3 - 4x = 4\left(y^3 - x\right) = 0 \Rightarrow y^3 = x.$$

Slijedi

$$x^9 - x = x\,(x-1)\,(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right) = 0,$$

i $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ su nultočke. Stacionarne točke su

$$T_1 = (0,0),\ T_2 = (1,1),\ T_3 = (-1,-1).$$

Budući da je

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2,\ f_{xy}(x,y) = -4,\ f_{yy}(x,y) = 12y^2,$$

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16$$

imamo:

- $$D(0,0) = \big(144x^2y^2 - 16\big)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = -16$$

  i funkcija $f$ u $T_1$ nema ekstrem;

- $$D(1,1) = \big(144x^2y^2-16\big)\Big|_{(x,y)=(1,1)} = 128,\ f_{xx}(1,1) = 12$$

  i funkcija $f$ u $T_2$ ima lokalni minimum $z_{\min} = -1$;

- $$D(-1,-1) = \big(144x^2y^2-16\big)\Big|_{(x,y)=(-1,-1)} = 128,$$

  $$f_{xx}(-1,-1) = 12$$

  i funkcija $f$ u $T_3$ ima lokalni minimum $z_{\min} = -1$.

Slično imamo za funkcije tri varijable.

**Teorem 3.19a) (Nužan uvjet za lokalni ekstrem)**
Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, ima u točki $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ lokalni ekstrem i ako je u toj točki derivabilna, onda je

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0, z_0) = 0,\ f_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

**Teorem 3.20a) (Dovoljan uvjet za lokalni ekstrem)** Neka je $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ stacionarna točka funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, i neka su druge parcijalne derivacije funkcije $f$ neprekidne na nekoj $\varepsilon$-kugli $K(T_0; \varepsilon) \subseteq D$. Neka je

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{xx}(T_0) & f_{xy}(T_0) & f_{xz}(T_0) \\ f_{xy}(T_0) & f_{yy}(T_0) & f_{yz}(T_0) \\ f_{xz}(T_0) & f_{yz}(T_0) & f_{zz}(T_0) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(T_0) & f_{xy}(T_0) \\ f_{xy}(T_0) & f_{yy}(T_0) \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \Delta_1 = f_{xx}(T_0)$$

- Ako je $\Delta_3 > 0$, $\Delta_2 > 0$ i $\Delta_1 > 0$, tada je $f$ u točki $T_0$ ima lokalni minimum $f(T_0)$;
- Ako je $\Delta_3 < 0$, $\Delta_2 > 0$ i $\Delta_1 < 0$, tada je $f$ u točki $T_0$ ima lokalni maksimum $f(T_0)$;
- U svim ostalim slučajevima kada je $\Delta_2 \neq 0$, $f$ u točki $T_0$ nema lokalni ekstrem;
- Ako je $\Delta_2 = 0$ nema odluke.

Prisjetimo se: Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu (zatvorenom intervalu) $[a, b]$, onda ona na tom intervalu poprima (globalnu) minimalnu i maksimalnu vrijednost.

**Teorem 3.21** Ako je $z = f(x, y)$ neprekidna na zatvorenom omeđenom skupu $D \subseteq \mathbb{R}^2$, tada postoje točke $(x_1, y_1)$ i $(x_2, y_2)$ u kojima $f$ ima globalni maksimum $f(x_1, y_1)$ i globalni minimum $f(x_2, y_2)$, redom.

Traženje globalnih ekstrema:

a) Nađu se stacionarne točke (lokalni ekstremi) funkcije $f$ i vrijednosti od $f$ u njima;

b) Nađu točke ekstrema od $f$ na rub od $D$ i vrijednosti od $f$ u njima;

c) Točka kojoj pripada najveća vrijednost od $f$ iz $a)$ i $b)$ je točka globalnog maksimuma, a točka kojoj pripada najmanja vrijednost od $f$ je točka globalnog minimuma.

**Primjer** (auditorne vježbe).

**Primjer** U skupu svih kvadratastih kutija (kvadri bez gornje stranice) jednakog oplošja $O$ $(12m^2)$ odredite onaj s najvećom volumenom.

Zadano je (uz oznake $x$-širina.; $y$-dužina.; $z$-visina.)

$$xy + 2xz + 2yz = 12$$

i treba naći maksimum funkcije

$$V(x, y, z) = xyz.$$

Iz polaznog uvjeta je $z = \frac{12-xy}{2(x+y)}$, pa problem možemo riješiti tražeći maksimum funkcije

$$V(x, y) = xy\frac{12 - xy}{2(x + y)}.$$

Vrijedi

$$V_x(x, y) = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2},$$

$$V_y(x, y) = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2},$$

i za naći stacionarne točke, zbog prirode zadatka ($x$, $y > 0$), dovoljno je riješiti sustav

$$12 - 2xy - x^2 = 0,$$

$$12 - 2xy - y^2 = 0.$$

Mora biti $x^2 = y^2$, a to daje $x = y$ (ostale mogućnosti otpadaju zbog $x, y > 0$).

Slijedi da je $(2, 2)$ je stacionarna točka. Dovoljne uvjete nije potrebno ispitivati zbog prirode zadatka. Dobivamo

$$z = \frac{12 - 2 \cdot 2}{2(2 + 2)} = 1,$$

te za kutiju dimenzija $(x, y, z) = (2, 2, 1)$, $V_{\max} = 4$.

Prethodni primjer možemo interpretirati na način:

- Odrediti ekstrem funkcije $V(x, y, z) = xyz$ uz uvjet da je $\varphi(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0$.

**Definicija 3.22** Ekstrem funkcije $z = f(x, y)$ uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$ naziva se **vezani** (uvjetni) **ekstrem.**

**Napomena:**

- Vezani ekstrem možemo interpretirati na način: graf funkcije $z = f(x, y)$ (ploha) presjecimo cilindričnom plohom $\varphi(x, y) = 0$. Presječinica je prostorna krivulja i njezin ekstrem je traženi vezani ekstrem.

- U definiciju se ne moramo ograničiti na dimenziju $2$ i samo jedan uvjet. Npr., problem vezanog ekstrema je i: naći ekstrem funkcije $u = f(x, y, z)$ uz uvjete $\varphi_1(x, y, z) = 0$, $\varphi_2(x, y, z) = 0$ (nažalost, ovdje nemamo geometrijskog prikaza problema).

Nalaženje vezanog ekstrema najlakše je provesti **Lagrangeovim postupkom**:

- Formira se pripadna **Lagrangeova funkcija**

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y);$$

- Nađu se stacionarne točke funkcije $F$; neka su to točke $(x_i, y_i, \lambda_i)$;

- Izračunaju se vrijednosti $f(x_i, y_i)$: najveća vrijednost od njih je vezani maksimum od $f(x, y)$, a najmanja je traženi vezani minimum.

**Primjer** Odrediti ekstrem funkcije $f(x,y)=x+2y$ uz uvjet $x^2+y^2=5$.

Pripadna Lagrangeova funkcija je

$$F(x,y,\lambda)=x+2y+\lambda\left(x^2+y^2-5\right),$$

pa imamo sustav

$$F_x(x,y,\lambda)=1+2\lambda x=0,$$

$$F_y(x,y,\lambda)=2+2\lambda y=0,$$

$$F_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-5=0,$$

čija su rješenja

$$\left[x=-1,y=-2,\lambda=\frac{1}{2}\right],\quad \left[x=1,y=2,\lambda=-\frac{1}{2}\right],$$

Imamo $f(-1,-2)=-5$, - minimum, $f(1,2)=5$ - maximum.

<u>Geometrijska interpretacija:</u>

Točke $T_1(-1,-2,-5)$ i $T_2(1,2,5)$ su točke na prostornoj krivulji (elipsi)

$$\mathcal{K}\ldots\begin{cases} x+2y-z=0,\\ x^2+y^2=5\end{cases}$$

(dobivenoj kao presjek ravnine i valjka) minimalno, odnosno maksimalno udaljene od $xy-$ravnine.

Vratimo se primjeru: odrediti ekstrem funkcije

$$V(x, y, z) = xyz$$

(volumen) uz uvjet da je

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0.$$

Formirajmo pripadnu Lagrangeovu funkciju:

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda\,(xy + 2xz + 2yz - 12)$$

i odredimo njezine stacionarne točke. Riješimo sustav

$$F_x(x, y, z, \lambda) = yz + y\lambda + 2z\lambda = 0,$$

$$F_y(x, y, z, \lambda) = xz + x\lambda + 2z\lambda = 0,$$

$$F_z(x, y, z, \lambda) = xy + 2x\lambda + 2y\lambda = 0,$$

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0.$$

Rješenja su

$$\left[x = 2, y = 2, z = 1, \lambda = -\frac{1}{2}\right]$$

$$\left[x = -2, y = -2, z = -1, \lambda = \frac{1}{2}\right].$$

Zaključujemo da je traženi vezani maksimum $V_{\max} = 4$ i on se postiže za $x = 2, y = 2$, $z = 1$.