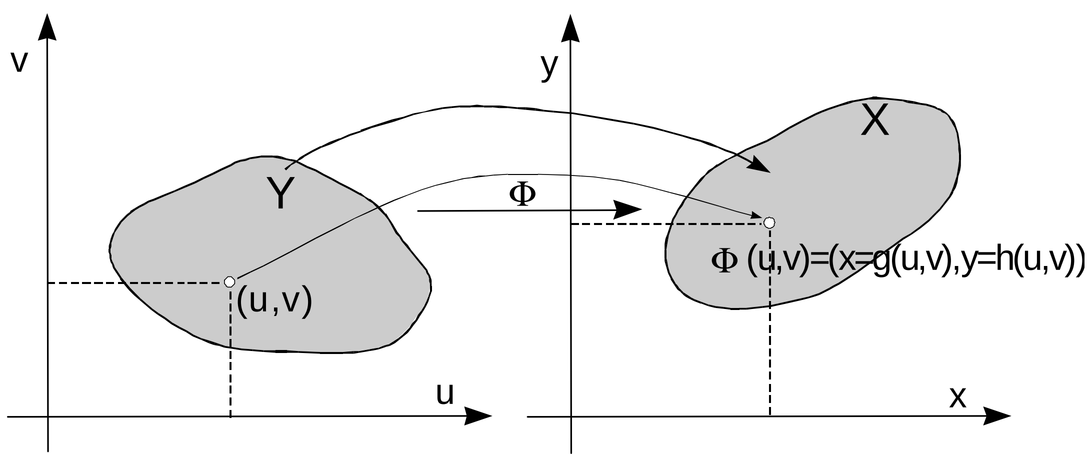
4.3 Zamjena varijabla u višestrukom integralu

Neka su $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ ravninska područja i neka je bijektivno preslikavanje $\Phi : Y \to X$ određeno sa

$$(u, v) \mapsto \Phi(u, v) = (x = g(u, v), y = h(u, v)),$$

gdje su $g, h : Y \to \mathbb{R}$ funkcije koje imaju neprekidne prve parcijalne derivacije (Slika 4.12.).



Slika 4.12.

Za preslikavanje Φ s ovim svojstvima kažemo da je C^1 **transformacija** koja Y preslikava u X.

Determinantu

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

nazivamo Jacobijeva determinanta ili Jacobijan transformacije Φ.

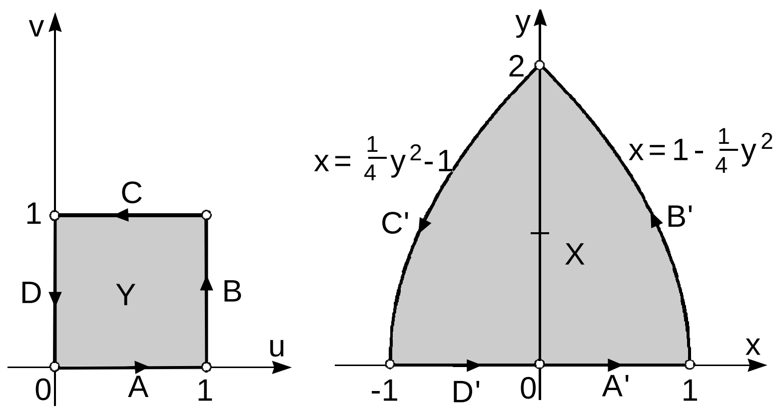
Primjer 1 Na primjer područje

$$Y = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$$

preslikava se transformacijom Φ određenom sa funkcijama $g, h : Y \to \mathbb{R}^2$,

$$x = g(u,v) = u^2 - v^2,\ y = h(u,v) = 2uv$$

u područje X u xy-ravnini omeđeno parabolama $x = 1 - \frac{1}{4}y^2$, $x = \frac{1}{4}y^2 - 1$ i segmentom $[-1, 1]$ na x-osi.



Slika 4.13

Zaista, za dužinu

$$A = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq 1, v = 0\}$$

imamo $x = u^2$, $y = 0$, pa se ona transformacijom T preslikava u dužinu

$$A' = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0\}.$$

Za dužinu

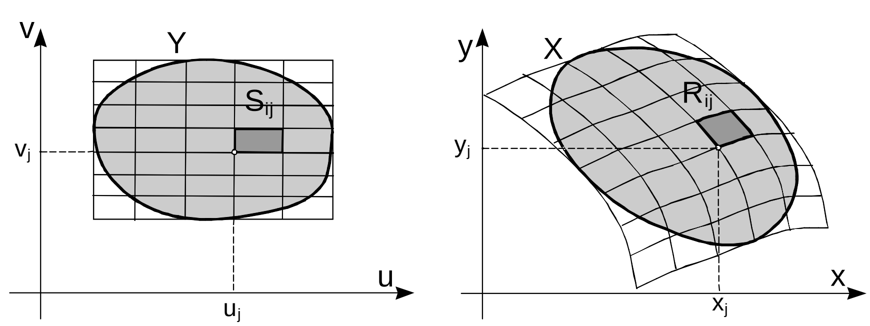
$$B = \{(u, v) \mid u = 1, 0 \leq v \leq 1\}$$

imamo $x = 1 - v^2$, $y = 2v$ ($0 \leq v \leq 1$), i eliminacijom v, dobivamo

$$B' = \{(x, y) \mid x = 1 - \tfrac{1}{4}y^2,\ 0 \leq y \leq 2\}.$$

Dakle, slika B' je dio grafa parabole od točke 1 na x-osi do točke 2 na y-osi. Analogno određujemo slike C' i D' dužina C i D (Slika 4.13.).

Neka je sada zadano područje $Y \subset \mathbb{R}^2$ u uv-ravnini i transformacija $\Phi(u, v) = (x = g(u, v), y = h(u, v))$, koja područje Y u uv-ravnini preslikava na područje $X \subset \mathbb{R}^2$ u xy-ravnini, te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Podijelimo područje Y na pravokutnike S_{ij} i njihove slike u xy-ravnini označimo s R_{ij} (Slika 4.15.).



Slika 4.15.

Površinu područja R možemo aproksimirati sa

$$P(R) \approx |J| \triangle u \triangle v.$$

gdje Jacobijan J treba uzeti u točki (u_0, v_0). Dvostruki integral funkcije f nad X možemo aproksimirati sa

$$\iint_X f(x,y)dP \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)P(R_{ij}) \approx$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \triangle u \triangle v$$

gdje je Jacobijan uzet u točki (u_i, v_j). Posljednja suma je integralna suma za integral

$$\iint_Y f\left(g(u,v), h(u,v)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

što nas upućuje na supstituciju u dvostrukom integralu.

Teorem 4.8 Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na području $X \subset \mathbb{R}^2$, a $\Phi = (g,h) : Y \to X \subset \mathbb{R}^2$ neka je bijektivna C^1 transformacija čiji Jacobijan nije jednak nuli. Tada je

$$\iint_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_Y f\left(g(u,v), h(u,v)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Primjer 2 Izračunati integral

$$I = \iint_X y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

gdje je područje X određeno parabolama $y^2 = 4-4x$, $y^2 = 4+4x$ i x-osi (Slika 4.13.).
Račun ćemo provesti tako da uvedemo supstituciju

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = 2uv. \end{cases}$$

Pokazali smo u Primjeru 1 da je područje integracije $X = \Phi(Y)$ slika područja

$$Y = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\},$$

gdje je $\Phi : X \to Y$ transformacija određena supstitucijom, tj.

$$\Phi(u, v) = (x = u^2 - v^2, y = 2uv).$$

Budući je

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0,$$

po Teoremu 4.8 imamo

$$I = \iint_X y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_Y 2uv \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 2uv \cdot 4 \left(u^2 + v^2\right) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

$$= 8 \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(u^3 v + v^3 u\right) \, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v$$

$$= 8 \int_0^1 \left[\left(\frac{u^4}{4} v + v^3 \frac{u^2}{2} \right) \Big|_{u=0}^{u=1} \right] \mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1 \left(2v + 4v^3\right) \, \mathrm{d}v = \left(v^2 + v^4\right) \Big|_{v=0}^{v=1} = 2.$$

U praksi se, često javlja potreba da se pravokutne Kartezijeve koordinate (varijable) x, y zamijene polarnim koordinatama $u \equiv \rho, v \equiv \varphi$. Supstitucijom

$$\begin{cases} x = g(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi \\ y = h(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

za Jacobijan dobivamo

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

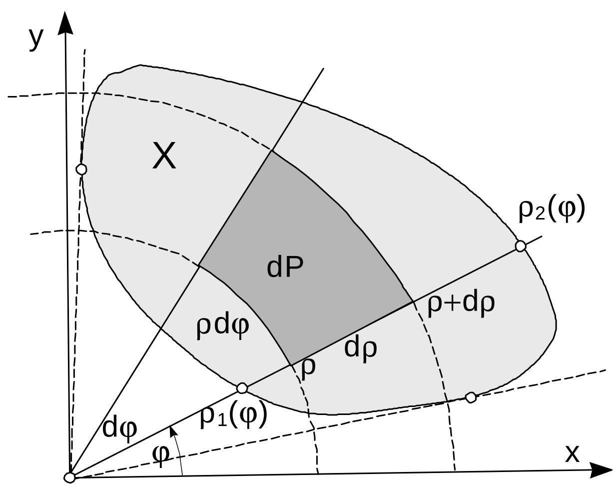
Prema tomu,

$$\iint\limits_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_Y f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Ovu supstituciju možemo interpretirati na način: neka je područje integracije u integralu

$$\iint_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_X f(x,y)\,\mathrm{d}P$$

kao na Slici 4.17.,



Slika 4.17.

tj. može se opisati na način

$$X = \{(\varphi,\rho) \mid \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,\ \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)\}.$$

Naznačeni element površine $\mathrm{d}P$ je kružni isječak, pa je

$$\mathrm{d}P = \left(\frac{1}{2}(\rho + \mathrm{d}\rho)^2 \,\mathrm{d}\varphi\right) - \left(\frac{1}{2}\rho^2 \,\mathrm{d}\varphi\right) = \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2}(\mathrm{d}\rho)^2 \,\mathrm{d}\varphi.$$

Drugi član možemo zanemariti i uzeti za $dP = \rho d\varphi d\rho$.
Sada je

$$\iint\limits_X f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint\limits_X f(x, y) \,\mathrm{d}P =$$

$$= \iint\limits_X f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho,$$

a to daje i naš teorem o supstituciji.

Napomenimo još da se u polarnim koordinatama integrira u poretku ρ φ tj.

$$\iint\limits_X f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathrm{d}\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho \,\mathrm{d}\rho.$$

Primjer 3 Izračunajmo integral

$$I = \iint_X \sqrt{1 - x^2 - y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

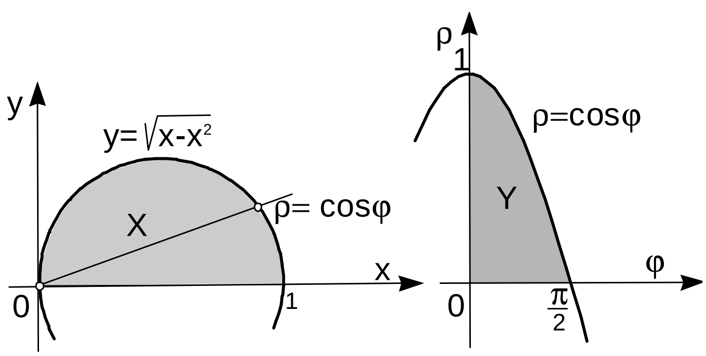
gdje je X polukrug u I. kvadrantu određen kružnicom $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$.

Zamjenom Kartezijevih koordinata polarnima, integracijsko područje

$$X=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{x-x^2}\right\}$$

postaje integracijskim područjem

$$Y=\left\{(\varphi,\rho)\mid 0\le\varphi\le\tfrac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le\cos\varphi\right\}.$$



Slika 4.18.

a podintegralna funkcija $\sqrt{1-x^2-y^2}$ postaje $\sqrt{1-\rho^2}$. Slijedi,

$$\iint_X\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{1}{3}\left(\rho^2-1\right)\sqrt{1-\rho^2}\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\cos\varphi}\right]\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{1}{3} \left(\cos^2\varphi - 1\right) \sqrt{1-\cos^2\varphi} \right) - \left(-\frac{1}{3} \right) \right] \mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}.$$

Katkada je račun pogodnije provesti u :

- **pomaknutom polarnom koordinatnom sustavu** kojemu je pol u točki $O = (p, q)$:

$$\begin{cases} x - p = \rho\cos\varphi, \\ y - q = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Za Jacobijan dobivamo $J = \rho$, i ukoliko je slika područja integracije X oblika

$$Y = \{(\varphi, \rho) \mid \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)\}$$

vrijedi

$$\iint_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_Y f(p+\rho\cos\varphi, q+\rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathrm{d}\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_1(\varphi)} f(p+\rho\cos\varphi, q+\rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

Kružnice koje u Kartezijevom koordinatnom sustavu imaju prikaz $(x-p)^2+(y-q)^2=R^2$, ovdje imaju jednostavni prikaz $\rho=R$. Točka $T=(x,y)$ u ovomu koordinatnom sustavu ima koordinate (φ,ρ) gdje je

$$\rho=\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2},\ \ \operatorname{tg}\varphi=\frac{y-q}{x-p},$$

i pri određivanju kuta φ iz $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y-q}{x-p}$ treba voditi računa o predznacima od $x-p$ i $y-q$.

- **poopćenim polarnim koordinatama** φ,ρ:

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi \\ y=b\rho\sin\varphi \end{cases}$$

Za Jacobijan dobivamo

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix}=ab\rho.$$

Prema tomu,

$$\iint\limits_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_Y f(a\rho\cos\varphi,b\rho\sin\varphi)\cdot ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Napomenimo da se u ovome koordinarnom sustavu elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ opisuje jednadžbom $\rho=1$, pa stoga poopćene polarne koordinate φ,ρ nazivamo i **eliptičkim koordinatama**.

- **pomaknutom eliptičnom koordinatnom sustavu** kojemu je pol u točki $O = (p, q)$:

$$\begin{cases} x - p = \rho a \cos\varphi, \\ y - q = \rho b \sin\varphi. \end{cases}$$

Opet je Jacobijan $J = ab\rho$, i ukoliko je slika integracijskog područja X oblika

$$Y = \{(\varphi, \rho) \mid \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,\ \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)\}$$

vrijedi

$$\iint_X f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_Y f(p{+}a\rho\cos\varphi, q{+}\rho b\sin\varphi)ab\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho.$$

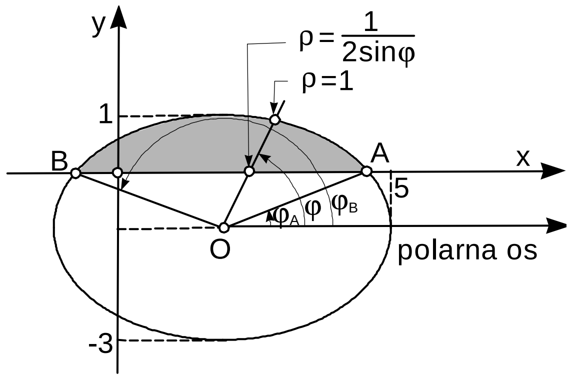
Napomenimo da elipsa koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima jednadžbu $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$, ovdje ima jednostavni prikaz $\rho = 1$.

Primjer 4 Izračunati

$$I = \iint_X \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdje je

$$X = \left\{(x, y) \mid 4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 \leq 36,\ y \geq 0\right\}.$$



Slika 4.20.

Istaknuti dio X unutrašnjosti elipse $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1$ (Slika 4.20.) koji možemo opisati sa

$$X = \begin{cases} x_B = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \le x \le 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} = x_A \\ 0 \le y \le -1 + \frac{1}{3}\sqrt{36 - 4(x-2)^2} \end{cases}$$

Zamjenom Kartezijevih koordinata pomaknutim poopćenim (eliptičkim) polarnim koordinatama

$$\begin{cases} x - 2 = 3\rho\cos\varphi \\ y + 1 = 2\rho\sin\varphi \end{cases}$$

elipsa poprima jednostavan zapis $\rho = 1$, dok je jednadžba pravca $y = 0$ u ovom sustavu

$$\rho = \frac{1}{2\sin\varphi}.$$

Odredimo φ-koordinatu točke $A = (0, 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2})$:

$$\operatorname{tg}\varphi_A = \frac{a\,(y_A - q)}{b\,(x_A - p)} = \frac{3(0+1)}{2\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{2}-2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi_A = \frac{\pi}{6}.$$

Dakako, zbog simetrije je $\varphi_B = \frac{5\pi}{6}$. Navedenom supstitucijom integracijsko područje X postaje integracijsko područje

$$Y = \left\{(\varphi, \rho) \mid \tfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \tfrac{5\pi}{6},\ \tfrac{1}{2\sin\varphi} \le \rho \le 1\right\}.$$

Imamo

$$I = \iint_X \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_Y 6\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = 6\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{1}{2\sin\varphi}}^{1} \rho\,\mathrm{d}\rho =$$

$$6\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[\left(\frac{1}{2}\rho^2\right)\Bigg|_{\rho=\frac{1}{2\sin\varphi}}^{\rho=1}\right] \mathrm{d}\varphi = 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(1 - \frac{1}{4\sin^2\varphi}\right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \ldots = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{2}$$

Neka je $Y \subset \mathbb{R}^3$ područje (u uvw-koordinatnom sustavu) koje se bijektivnom C^1 transformacijom Φ određenom sa

$$x = g(u, v, w),\ y = h(u, v, w),\ z = k(u, v, w)$$

preslikava u područje $X \subset \mathbb{R}^3$ (u xyz-koordinatnom sustavu). Jacobijan transformacije Φ je determinanta

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Teorem 4.8 Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na području $X \subset \mathbb{R}^3$, a $\Phi = (g, h, k) : Y \to X \subset \mathbb{R}^3$ neka je bijektivna C^1 transformacija čiji Jacobijan nije jednak nuli. Tada je

$$\iiint_X f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$\iiint_Y f\left(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)\right) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

U slučaju trostrukog integrala se često javlja potreba da se pravokutne Kartezijeve koordinate zamijene cilindričnima ili sfernima. Budući da je veza Kartezijevih i cilindričnih koordinata

$$\begin{cases} x = g(\rho, \varphi, w) = \rho \cos \varphi, \\ y = h(\rho, \varphi, w) = \rho \sin \varphi, \\ z = k(\rho, \varphi, w) = w \end{cases}$$

to je pripadni Jacobijan

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(\rho \cos \varphi)}{\partial \rho} & \frac{\partial(\rho \cos \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial(\rho \cos \varphi)}{\partial w} \\ \frac{\partial(\rho \sin \varphi)}{\partial \rho} & \frac{\partial(\rho \sin \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial(\rho \sin \varphi)}{\partial w} \\ \frac{\partial w}{\partial \rho} & \frac{\partial w}{\partial \varphi} & \frac{\partial w}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Tako dobivamo formulu

$$\iiint_X f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$
$$= \iiint_Y f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, w) \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}w$$

Primjer Vratimo se ranijem primjeru. Izračunati

$$\iiint_X 2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

gdje je $X \subset \mathbb{R}^3$ omeđen grafovima preslikavanja $g_1(x, y) = x^2 + y^2$ i $g_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Račun koji treba provesti u integralu

$$\iiint\limits_X 2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} 2z \, \mathrm{d}z$$

je poprilično kompliciran. Prijeđe li se, međutim, na cilindrične koordinate, integracijsko područje X postaje integracijskim područjem Y

$$Y = \left\{ (\varphi, \rho, w) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq w \leq \rho \right\}.$$

Tako dobivamo

$$\iiint_X 2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint_Y 2w\rho d\rho d\varphi \, \mathrm{d}w$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho \, \mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^{\rho} 2w \, \mathrm{d}w = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \left[\left(w^2 \right) \Big|_{w=\rho^2}^{w=\rho} \right] \rho \, \mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \left(\rho^2 - \rho^4 \right) \rho \, \mathrm{d}\rho = ... = \frac{\pi}{6}.$$

U slučaju sfernog koordinatnog sustava zamjenske varijable uvodimo na način

$$\begin{cases} x = g(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = h(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = k(r,\theta,\varphi) = r\cos\theta, \end{cases}$$

i pripadni Jacobijan je

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(r\sin\theta\cos\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\theta} & \frac{\partial(r\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial(r\sin\theta\sin\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin\theta\sin\varphi)}{\partial\theta} & \frac{\partial(r\sin\theta\sin\varphi)}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta} & \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\varphi} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Time smo dobili formulu

$$\iiint_X f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$\iiint_Y f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Primjer Izračunati

$$\iiint_X z\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

gdje je $X = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.
Podintegralna funkcija $z\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$ u sfernome koordinatnom sustavu ima zapis $r\cos\theta\sqrt{1+r^2}$.
Područje integracije X je jedinična središnja kugla i ona prelazi u područje integracije Y

$$Y = \{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 1\},$$

pa je

$$\begin{aligned}
& \iiint_X z\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
= & \iiint_Y r\cos\theta\sqrt{1+r^2}\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
= & \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r \\
= & \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 r^3\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r\right) \\
= & \frac{2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}.
\end{aligned}$$

4.4 Nekoliko primjena višestrukog integrala

Pokazali smo da ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, neprekidna i nenegativna, onda pripadni dvostruki integral mjeri volumen geometrijskoga tijela Ω određenoga osnovicom D i plohom G_f, tj.

$$V(\Omega) = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Primijetimo da u slučaju konstantne funkcije $f(x, y) = 1$ promatrani integral mjeri površinu ravninskoga skupa D, tj.

$$P(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

U slučaju trostrukog integrala, ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, predstavlja gustoću tvarnoga tijela Ω što zaprema geometrijsko tijelo D, $\Omega \equiv D$, pripadni integral mjeri masu, tj.

$$m(\Omega) = \iiint_D f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Uočimo da za konstantnu funkciju $f(x, y, z) = 1$ (homogenost) pripadni integral mjeri volumen tvarnoga tijela Ω što zaprema geometrijsko tijelo D, $\Omega \equiv D$

$$V(\Omega) = \iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

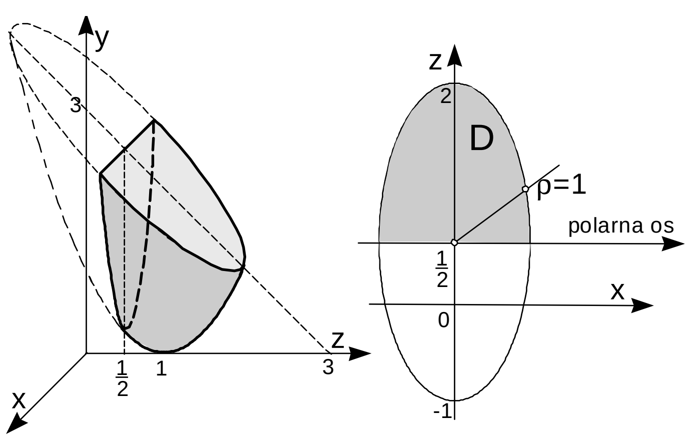
Primjer Izračunati volumen tijela

$$X = \left\{(x,y,z) \mid 4x^2 + (z-1)^2 \leq y,\ y+z \leq 3,\ z \geq \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Rješenje: $V = \dfrac{81}{128}\pi.$

Uputa:

$$V(X) = \iiint_X \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$



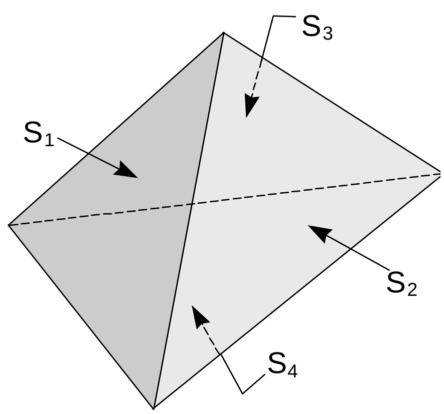
Slika 4.27.

Glatka ploha i njezina površina

Graf funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, je ploha u prostoru $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Ukoliko je funkcija f diferencijabilna, tada plohu nazivamo **glatkom** (drugim riječima, ploha S je glatka čim u svakoj svojoj točki $T \in S$ dopušta tangencijalnu ravninu!).
U nekim razmatranjima i primjenama javljat će se plohe poput ovih na Slici 4.23.



Slika 4.23.

Uočavamo da se radi o plohi S sastavljenoj od konačno glatkih ploha S_1,..., S_n tako da u točkama "spojnih krivulja" ne postoje tangencijalne ravnine (ni normale). Za takve plohe kažemo da su **po dijelovima glatke**.

Pokazuje se da je skup svih točaka takve plohe u kojima nema normale "površinski zanemariv" pa ćemo ga u našim razmatranjima smjeti zanemarivati.

Dakle, ako je $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, eksplicitna jednadžba glatke plohe S, tada je

$$P(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

njezina površina.

Primijetimo da u slučaju konstantne funkcije $f(x, y) = c \in \mathbb{R}$ na D dobivamo

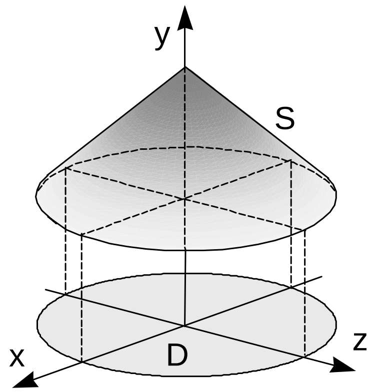
$$P(S) = P(D) = \iint_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

što se slaže s prije poznatom formulom.

Ako ploha S nije glatka, ali ju se može rastaviti po dijelovima glatkim krivuljama na konačno mnogo "disjunktnih" glatkih ploha $S_1, \cdots, S_n$, onda je njezina površina zbroj

$$P(S) = P(S_1) + \cdots + P(S_n).$$

Primjer Izračunati površinu dijela stožaste plohe $y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}$ koji je određen uvjetom $1 \leq y \leq 2$.



Slika 4.26.

Ploha S ("privilegirana" y-os) i njena projekcija D (krug $x^2+z^2\leq 1$) na xz-ravninu prikazani su na Slici 4.26.

Treba izračunati

$$P(S)=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial(2-\sqrt{x^2+z^2})}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(2-\sqrt{x^2+z^2})}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

$$P(S)=\iint_D\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2+\left(-\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=$$

$$\iint_{x^2+z^2\leq 1}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=\sqrt{2}\iint_{x^2+z^2\leq 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=\sqrt{2}P(D)=\sqrt{2}\pi.$$